USTC基础数学修课指南

山顶洞投资研究中心 出品

第三版第一稿

2020年9月26日

第三版的改动

为（迫真）迎接2020级新生，由山顶洞投资研究中心出品的USTC基础数学修课指南迎来了新一次的更新。本次更新的内容非常多，本指南的编写团队日益壮大，其具体内容如下：

- 新增了马杰老师的组合学课程介绍、解析数论、几何测度论基础、椭圆偏微分方程基础、辛几何的Floer同调理论、李代数与表示论的基础深入知识介绍。这里，尤其感谢14级的王瞭同学写了一份30多页的李代数与表示论的基础与深入知识简介。

- 代数几何、代数数论部分进行了较多补充，这里非常感谢徐铮、杜佳宾和单逸写的详细介绍。多复变函数、复几何、黎曼几何、交换代数也增加了一定量的补充内容。

- 网络资源使用部分增加了MathStackExchange, MathOverflow使用指南，特此感谢14级少院的马耀武同学。另外14级少院的朱家纬、17级数院的王若愚同学也对此部分提出了改进建议，在此一并感谢。

至此，**除动力系统这个大方向以外**，本指南的主体内容已经大致完成。当然，**除动力系统以外**，一些其他的分支目前仍然处于空缺状态，例如：半经典分析、波方程与相对论方程、抛物方程、抽象调和分析、算子代数、范畴论等。本指南下一次的改版将注重于填补空缺方向，并及时删去现有内容中的过时内容。

此外，**我们在本指南的某部分增加了一个彩蛋**：给大家展示一个现实中（当然也可能是AI）“数学八卦家”的真实面目，供大家图一乐。

在此我们重申，本指南旨在为想学基础数学的同学提供本科阶段的引导，包括但不限于：

1. 本科阶段基础课程的学习建议；

2. 进阶课程与向前沿对接的学习建议；

3. 数学资源的合理运用。

以上三点的第一点，旨在让同学们尽快从中学的思维过渡到真正学数学的思维，少走弯路，并谢绝成为“名词党”。第二点，进阶课程阶段才是加速学习的开始，此时同学们可能会对各种各样的知识都有兴趣，容易迷失方向，陷入东一榔头西一棒子的困境。结合第三点，我们希望本指南最后能做到拓宽同学们的学术眼界，培养学生的学术交流与鉴赏能力。

我们欢迎各方的批评指正。若您对本指南有改进的意见和建议，您可以QQ/微信告诉本指南的作者，或者发邮件到 yx3x@mail.ustc.edu.cn. 若您有想要补充的内容，请您以word文档或TeX文件等常用格式发到该邮箱。最后，祝各位读者同学们学业有成，事事顺心。谢谢茄子。

山顶洞投资研究中心（迫真）

2020年9月26日

第二版的改动

值此新春佳节之际，山顶洞投资研究中心出品的USTC基础数学修课指南也迎来了新版大放送！本指南的第一版已经于2019年12月3日正式发布，发布后广受好评，在此我们感谢各位老师和同学们的支持。当然这份指南也有很多需要改进的地方。我们在这次更新中作出如下改动：

- 前言部分的措辞修改：上一版的前言有些语序混乱，这一版将进行修正。我们建议同学们认真阅读前言。

- 增加了网络资源与数学软件的简介。合理、高效地利用丰富的网络资源是一个当代大学生必备的素质。这里十分感谢14级数院的马耀武和18级博士生邱意雅同学的建议。当然我们必须强调：**科学上网的同时谢绝一切冲塔行为!!!**

  课程修读与拓展学习方面的改动主要集中在分析与微分方程和概率论部分。

- 偏微分方程部分作出较大改动，具体如下：
  - 完善了偏微分方程的基本方法部分；
  - 微分方程2的课程修读建议作出了小幅改动，拓展知识进行了扩充；
  - 偏微分方程深入介绍部分增加了“色散方程简介”。

- 概率论部分增加了部分参考书与学习建议，拓展知识中的随机矩阵部分进行了补充。

- 数学分析更改了参考书的选取，增加了关于教材的评注，小幅修改了数学分析A2的学习建议。

- 调和分析、拓扑学、高等泛函分析的参考书进行了补充。

本指南下一次的改版的内容扩充可能会集中于几何与拓扑方向。例如微分流形中的拓展知识(Chern-Weil理论、李群与纤维丛等)，少量与几何分析有关的话题等等。另外代数几何、代数数论可能也会作出相应的补充，但这一切都取决于我们是否能邀请到合适的同学以及被邀请人是否有时间。

此外，本指南的如下部分需要完善，欢迎各位前来补充：

- 分析与微分方程：微分动力系统（暂缺）、半经典分析（暂缺）、椭圆方程（待完善）、抛物方程（暂缺）、波方程与相对论方程（待完善）；

- 几何与拓扑：微分流形（待完善）、几何分析简介（实际上几何分析这个话题太广了，里面不同的分支也是有很大的差别，所以很难作一个较为全面的介绍）；

- 代数与数论：代数几何（待完善）、代数数论（待完善）、表示论（暂缺）、李代数（暂缺）；
- 概率论：更多的拓展知识（待完善）。
- 其它各种未列入的领域。

部分读者提出应该增加一些前沿课题的介绍来拓宽同学们的眼界。在此**我们重申这份指南只写到“本研贯通”的水平，也就是科大的MA04-05课程**（研究生基础课）。数学研究发展实在太快，热门领域经常变化。现在的核心问题/猜想很可能就在不久的将来被破解，而核心问题被破解之后剩下的边角料工作大多不值得一个刚走上研究道路的学生去入手。

我们欢迎各方的批评指正。若您对本指南有改进的意见和建议，或者对本指南的内容有任何补充，您可以QQ/微信告诉本指南的作者，或者发邮件到 yx3x@mail.ustc.edu.cn.

最后，我们祝各位读者们2020新春快乐，身体健康，万事如意！目前正处新型冠状病毒肺炎疫情上升期，形势日益严峻，我们也提醒大家出门在外要做好必要的自我防护，健康的身体是一切的前提条件！

谢谢茄子。

山顶洞投资研究中心（迫真）
2020年元月25日

前言

众所周知，中国科学技术大学数学科学学院官网上的基础数学方向培养计划最后更新止于2011 年，而课程学习上的具体困难、重点内容、选课建议也没有明确列在培养计划中。这本应是对学生未来学习与方向选择的重要的官方导引，却在九年内从不公开更新。相比之下，在对学生的引导方面，清华大学数学系就做得比较好。在一些同学的倡议与组织下，某山顶洞投资研究中心认为有必要编写一套适用于中科大同学的基础数学课程学习指南。

这份学习指南[1] 旨在为中国科学技术大学想学习基础数学的同学们提供一些课程学习上的建议，包括但不仅限于：课程修读顺序、课程主要内容、教材与参考书的选取、课程的拓展方向以及前沿知识简介。我们没有邀请任何老师参与编写这份指南，完成这份指南的作者们是中科大数学专业2012-2018级的学生，目前都在博士生阶段或者高年级本科生阶段。另外，香港科技大学的郭炯吉同学对概率论拓展知识作了非常详细的介绍，在此一并感谢。

（一）本指南的内容提要与精神纲领：

1. 难度设置合理，谢绝拔苗助长

本学习指南只讲到“本研贯通”的水平为止(对应科大的MA04, MA05级别的课程)，再往后同学们各有自己的研究兴趣方向，因此没有必要再进行指导。同时我们有必要声明，这份指南面向的是任何一个**对基础数学感兴趣，并且在学习上愿意稳扎稳打而不好高骛远的科大同学，并不是仅仅面向那些成绩非常好的大佬们**。指南中参考书的选取、课程内容的介绍均是按合理的课程难度给出建议或叙述。

2. 理清学习顺序，合理运用资源

指南的第一部分给出了**基于科大培养计划和课程设置的**修课流程图。当然，这个流程图只是大致列了一下科大常年开设课程的修读顺序，所以也没必要完全按照流程来走，更没必要也没时间每个方向都学一遍。第二部分则是介绍了网络上数学资源的合理运用方法，包括数学社区MSE/MO的使用指南、学术资源的搜索、以及强调常用工具（例如LaTeX）的重要性。

3. 打牢基础知识，切勿一味图快

指南的第三部分介绍的是**数学分析、线性代数这两大最基本、也是最重要的基础课**。负责这两部分的作者在撰写学习建议时非常谨慎，因为这是数院任何一个学生（包括非基础数学方向）都必须迈过去的坎。我们不主张一开始就学得太难，也不建议过于重复性地大量刷题，更不建议一开始就强调过多的奇技淫巧。相反，我们认为积累实例、记忆并理解数分、线代的基本语言、具体计算和证明方法是更加重要的。我们也不赞成在数学分析、线性代数的学习中就加入过多的实分析、泛函分析、拓扑学、微分流形的初步知识：它们可以作为阅读材料与拓展知识出现，但并不适合给大多数同学在初学阶段学习。与其蜻蜓点水地介绍这些所谓的“升级知识”，不如先让同学们打好数分线代基本功之后直接去系统地学习深入知识。

[1]本指南**不包括“解析几何”、“代数学基础”两门课**。

4. 建立知识架构，形成自我理解

指南的第四部分介绍的是本科二、三年级的（必修）课程。相比数分线代而言，同学们会在这个阶段感到**非常明显的难度提升**。指南的这一部分主要是理清知识脉络，这样同学们在进行理解、计算、证明的时候就有了动机。同学们在学习这些课的时候，更重要的还是形成自己的理解，消化证明的技术并**积累实例、建立知识架构**，为后继学习做好准备。我们不建议在此阶段大量做题(当然完成作业题是基本)，参考书集中精力看1-2本，切勿囫囵吞枣。

5. 摸索兴趣方向，迎来厚积薄发

指南的第五部分介绍的是本硕贯通课程，适合正常进度下大三、大四或是研究生低年级修读。**我们着重强调，这一阶段才是真正适合加速学习的阶段：因为此时大家已经对那些基础知识产生了较好的理解，即将在知识层面迎来厚积薄发**。此时，同学们应当根据自己的兴趣，结合培养计划要求进行学习。我们认为本硕贯通课**理应**快速承接本科课程，并且为同学们将来阅读文献专著、做问题提供**必需的公共基础知识**。本科生请抛下对GPA的执念，并开始考虑自己对什么方向感兴趣、具体感兴趣的点在哪里、以后可能进入什么领域。与此同时，也可以试着思考这些学科的"核心问题"是什么——数学家从来不会平白无故研究一个学科，每个学科发展的背后必有它的 leading problem.

6. 拓展学术眼界，对接学术前沿

第五部分每个章节的最后，一些博士在读的作者们加入了前沿知识简介。这才是本指南真正的灵魂所在，也是以后内容更新的重中之重。这个阶段同学们可能会发现已经没什么课程可以学，这一方面意味着是时候走向前沿的数学学习与研究，另一方面则反映出我们科大在高端/前沿学术资源的匮乏。实事求是地说，第一、科大数学系能达到国际一流的方向并不多；第二、这反映出我们与真正的顶尖学府产生本质差距的地方——导师资源与学术话语权。

部分博士在读的作者们在国外念书的时候深切感受到：相当一部分外国学生的普遍水平，包括但不限于聪明程度、解题能力、技巧水平和竞争力并不如我们科大走出去的学生，而唯独占用着最丰富的、最优质的学术资源：他们在大二大三就能接触到很多新鲜事物，并且可以听到世界各地的学者作学术报告，拿到著名数学家的推荐信，进入世界顶尖学府学习。相比之下，我们科大学生勤奋刻苦，好学上进，却又立足于一片并不肥沃的学术土壤，科大老师们已经倾其所能提供尽可能优质的教育。因此我们愿尽自己的绵薄之力，为科大同学们提供一块小小的垫脚石，以眺望远处的地平线，以激励后来者的进取之心，以回报过去科大对我们的教育培养；愿科大的后浪们茁壮成长、生生不息，成为真正的顶尖人才！

- "愿中国青年都摆脱冷气，只是向上走，不必听从自暴自弃者流的话。能做事的做事，能发声的发声。有一分热、发一分光，就令萤火一般，也可以在黑暗里发一点光，不必等候炬火。此后如竟没有炬火：我便是唯一的光。倘若有了炬火，出了太阳，我们自然心悦诚服的消失。不但毫无不平，而且还要随喜赞美这炬火或太阳；因为他照了人类，连我都在内。" ——鲁迅

当然，我们除了要保留作为科大学生具有扎实基础的优良传统，也要学习外国学生的一些长处，这可以参考本指南5.3.9节的一段前言，此处不再摘录。

（二）数学学习上需要注意的地方：

1. 落实核心思想：不要跟风学习，学会独立思考

任何人、任何建议（包括这个指南）都有局限性。同学们在低年级尚未形成自己的兴趣的时候，请切记：不要看见别人（尤其某些巨佬）学了什么就觉得自己也该学这个东西。大部分同学心中可能的确有一个“榜样”存在其或多或少会影响到自己的选择，但不要把“榜样”奉为圭臬。接触新的数学的过程中一定要有自己的思考，并通过不断的学习形成自己的理解，从而判断出自己的兴趣点到底在哪里。当然无论如何：谢绝任何网络假人、神必壬和数学八卦壬！少被网络上一些所谓的“大V”忽悠得团团转！

2. 初步学习之一：不要轻易放弃，学会自寻帮助

同学们**不要因为学习遇到困难而气馁，更不要因为自己感觉问题过于trivial而害怕发问**。近代数学家们一两百年的心血凝聚为同学们一两年的学习，说不难那是不可能的。不理解证明方法、做不出具体计算是数学学习过程中再正常不过的现象。遇到困难，你可以请教同学，也可以查阅书籍（例如一些有答案的书籍、其它参考书等）或者网络（例如谷歌, math stackexchange, math overflow 等等），切勿一味闷着头想！

3. 初步学习之二：注重核心知识，谢绝奇技淫巧

同学们在学习数分线代时会在某些几十年前出版的习题集（包括全国大学生数学竞赛题）中遇到一些非常技巧化的题目。这些内容有相当一部分早已和数学发展脱节，纯粹就是把人故意考倒，同学们对此可以置之不理。同学们在学习基础课的时候不要让这些奇淫技巧掩盖真正核心的思想与方法。有时间琢磨这些无用之物，不如多去读一些拓展书籍。切记，**沉迷于数分线代的奇技淫巧会对你未来眼界格局的塑造产生负面的影响！**

4. 初步学习之三：注重日常积累，不要做“名词党”

同学们在学习基础知识的过程中往往学到的都是光鲜亮丽的优美结论，并时不时能见到一些极为巧妙的证明；但在欣赏“数学之美”的同时切勿陷入其中，切勿认为数学工作不应该有那些无比复杂的证明或是繁琐冗长的计算。事实上，前人们从零开始到最终证明这些漂亮的结论或是构建一个理论体系，背后“堆积”的默默无闻的 dirty work 的数量和复杂程度往往是难以想象的。以后打算从事研究的同学切记：干净利落的结论往往只是一个结果，而证明它背后需要的 dirty work 才是常态，同学们开始阅读一些比较新的文献之后就会对此有所体会。

同样，你会从这份指南上学到很多看上去“高大上”的名词。这并不是坏事，**但更重要的是在本科前中期打下坚实的基本功，不要沦为一个只会说名词却对基本技术都一无所知的“名词党”**。有了扎实的基本功、足够的积累，到高年级或是博士生阶段，你才能够去真正体会与理解那些前沿的内容。**基础不牢，地动山摇！**

5. 进阶学习之一：课本无穷无尽，学习科研并进

有些同学会认为非得把所有基础课都学完了再开始接触前沿甚至研究，这是不现实的，因为**你永远也学不完所谓的基础知识**。即便是到了研究的阶段，我们也是边做问题边读文章/专著学新技术（当然你要是只会那些本科必修课那还是很难步入研究的）。**基础数学方向的同学到高年级或读研之后，上课已不是首要任务**。本科高年级同学可以联系校内外的老师去学自己兴趣方向的深入内容，阅读前沿的文献专著就能体会到上课和做研究差别非常大。尽管本科阶段接触到的这些深入知识很可能不是你以后研究的方向，但是这也是在培养你阅读文献和独立思考的能力。

6. 进阶学习之二：切勿囿于课本，探索核心问题

表面上看数学是根据所使用的方法分类的：分析、代数、几何、概率等等。但是在实际的数学研究中，你面对的是一个个未知的问题。一般来说，大部分的问题都来自于物理（化学、生物等）、几何、概率、信息、数论等领域，只不过解决他们的手段多种多样，衍生出了形形色色的数学理论。然而**再抽象的数学，再复杂的定义，都必有引入这个对象的动机或者核心问题。因此学习过程中一定要去试图去了解"源头所在"**。下面罗列的这些就是很好的例子。

- 泛函分析：初学无一例外地都会觉得抽象和不知所云，然而很多技术实际上来自于对偏微分方程的研究。相似的结论总结出来便成了泛函分析的理论体系。

- 调和分析：奇异积分C-Z理论实际上来自于椭圆方程的$W^{2,p}$估计，非卷积奇异积分则来自于Lipschitz domain上的椭圆方程以及拟微分算子的研究，震荡积分理论则直接是(自由)色散方程的解，自然地又与傅立叶限制性估计问题产生联系。

- 纤维丛的联络：实质上来自于平行移动的概念，最早可以追溯到Cartan的活动标架法（别忘了Cartan可是李群大师）。

- 群上同调：实质上是来自于Hopf发现某一类特殊的空间，其同调由其基本群所完全决定（比如黎曼面（$\mathbb{P}^1$除外））。

举这些例子，实际上就想提醒大家：所有能留下名字的数学都起源于对具体且重要问题的研究；不知道任何动机和例子的抽象学习，极度的容易遗忘。另一方面，若能挖掘出一个理论背后的动机或者核心问题，学习起来也会相对的愉悦轻松。学数学不是单纯地死记硬背与抄书，更需要你的直觉与判断力。

7. 进阶学习之三：切勿局限"方向"，本科只有"倾向"

实际上几乎所有的老师也都持有这个观点。现实地讲，同学们以后做的方向很大程度上取决于你最后去深造的学校与想跟的导师，并非百分之百如你所愿。而从数学本身出发来看，不同的领域之间都是密切交织着的，很有可能将来就会碰到其它领域的知识点。例如：一个做几何拓扑的人很可能要去学习很深的代数几何知识来解决拓扑问题，(环面上)薛定谔方程的研究会用到解析数论的结果，流体力学中某些问题的研究工具来自于广义相对论的数学理论，调和分析中的震荡积分/傅立叶限制性估计与几何测度论、解析数论甚至组合数学这种看上去毫不相关的领域有

着非常紧密的联系。**因此，本科期间切勿认为我就是学XX方向的，然后从不关心其他方向乃至下意识反感。这对未来的发展都会埋下隐患。**

8. 走向研究之一：前沿飞速发展，时刻跟进学习

信息时代的潮流下，学术界发展越来越快。如今具有发展前景的方向，其核心问题也许就在几年后被解决。所以同学们**走向研究之后要时刻保持跟进学术界的发展并不断学习新知识，莫妄想学一套技术吃一辈子。**

9. 走向研究之二：正确选取课题，谨慎寻找导师

好的研究课题种类很多，但一定不是你自己瞎编条件造出来的问题，也一定不是照葫芦画瓢就能做出来的边角杂碎。而导师的重要性更不必多说：初期能在背后为你撑腰的人只有你的导师（可能还有你的同门前辈）。导师是否负责（这个不能强求，每个人最适合的导师类型也不一样），是否能给合适的课题与必要的引导，是否愿意为学生在找教职时帮一把，本身是否具有足够的能量，都是需要考量的因素。PhD+一站博士后至少是八年，因此同学们的眼光一定要放长远一些：在学习研究的过程中一定要不断地思考、探索，以便敏锐地察觉到哪些方向可能即将迎来蓬勃的发展。一旦意识到这是个可以开拓但尚未开拓的方向，就要果断地投入时间和精力，而不要原地踏步浪费青春。

10. 走向研究之三：导师不是保姆，学会独立研究

导师是给你学术建议、导引的人，而不是你的监护人。**从来不是"导师说什么我就非得去做什么"，从来不是"导师给的题目就是我要考虑的全部"**。实际上导师的任务并不是给你布置作业，更不是天天指手画脚，而是随时准备解答你的具体问题，而最终的**研究课题是要由你自己去完成的**。你对某个课题有想法，可以咨询**并参考（不是非要采纳）**导师的意见，也可以自己先试试看，实在不行了再说。读一个PhD下来，要慢慢从导师眼中的"学生"上升为"合作者"平起平坐地交流，而不是导师对你已知单方面输出。这个过程对**培养你自己的独立思考能力、研究课题选取能力乃至独立研究能力至关重要。**

（三）数学学习之外需要注意的地方：

结合科情科况，我们提醒大家，一些数学之外的因素同样非常重要。

1. 英语学好，勿忘中文，走遍天下

无论你在哪国读数学，英语都是你在数学世界里面用于交流的共同语言（当然和中国人交流肯定说中文了）：写论文、听报告、讲报告、开会学术交流等等场合，你的遣词造句能力、表达与人际交流能力都是非常重要的。

2. 谢绝绩点洗澡，选课量力而行

低年级有很多非数学课（最傻逼的大物实验和普物/政治/体育/公选/英语）也占用时间，同学们选课需要安排好，专业课的超前学习需要兼顾基础课的正常学习，不要出现基础课/非专业课考一堆六七十分甚至不及格的尴尬，否则对你未来只有坏处没有好处。在这些非专业课上花一点时

间不会太耽误你学数学，例如“科学选课”、“点名不要缺课”，实验报告、课堂展示还是要花点心思完成。我们并不提倡GPA洗澡学，但GPA的确是你走向深造必需的硬性指标!

3. 锻炼信息搜索，注意眼界塑造

信息时代早已来临，当下一味的闭门造车大概率是没有前途的。同学们（尤其是中高年级的同学们）的**眼光不要只局限于“现在学了什么以后就得做与之相关的东西”**。本科生的阅历比较单薄，获取信息的渠道也十分匮乏，因此想在各方面独立地做出有远见的判断是很难的。同学们若对某方面有感兴趣，可以去查阅那些经典的文献，或是咨询从事这方面研究的老师与前辈们以获取更多更广泛的信息。这些不经意间培养的信息搜索能力与眼界格局的塑造，往往会在关键时候助你“逢凶化吉”。

4. 切勿盲目跟风，要有自我规划

人云亦云很容易演化成“东施效颦”，因此同学们在本科期间**找到适合自己的出路是非常重要的事情**，这需要通过你不断地学习新知识，攫取新信息，并加以自己理性的判断。同学们请切记各个领域方向本无高低贵贱之分，不要陷入某些固化思维，不要被网络上一些“所谓的大（假）V（人）”忽悠得人云亦云，**更不要有“万般皆下品，唯有XX高”的错误思维!**

可以看见，走学术道路有很多因素都需要你去斟酌，也需要不少运气成分。要做到这些很难，但机会往往只给那些有准备的人。这些建议大多都来自于我们或者其它同学们曾经走过的弯路，我们希望后辈们不要再浪费时间在这上面。如果哪天你踩了我们踩过的坑之后能想起来我们在指南中提到过这一点，那这份指南也算是尽其所能。我们欢迎各方的批评指正，本指南也会不定期地继续更新，希望各位老师和同学们都能多多支持。引用麻老师的一句话，祝同学们在科大期间都能“发现兴趣，生活愉快”。

山顶洞投资研究中心（迫真）
2020年9月26日

致谢

十分感谢作者们抽出自己宝贵的时间为本指南的编撰做出不可或缺的贡献。

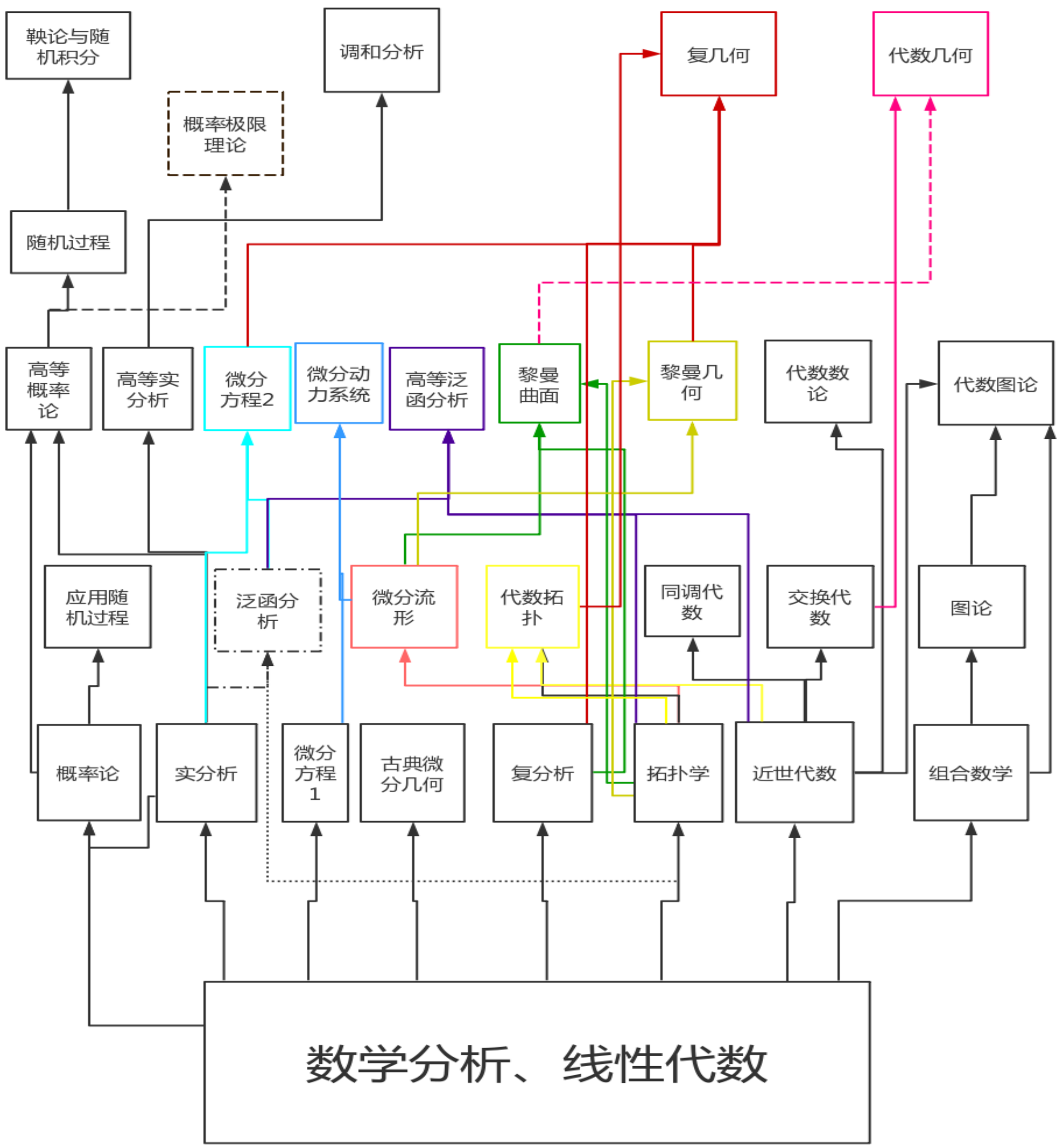
- 荆一凡：2012级数院，现就读于美国伊利诺伊大学香槟分校，方向为组合学。
- 胡家昊：2013级数院，现就读于美国纽约州立大学石溪分校，方向为几何拓扑。
- 牟卓群：2013级数院，现就读于日本京都大学数理解析研究所，方向为代数数论。
- 吴澍坤：2013级数院，现就读于美国伊利诺伊大学香槟分校，方向为调和分析。
- 姚东：2013级数院，现就读于美国杜克大学，方向为概率论。
- 袁晓璠：2013级数院，现就读于美国佐治亚理工学院，方向为极值组合与图论。
- 章俊彦：2013级数院，现就读于美国约翰·霍普金斯大学，方向为流体偏微分方程。
- 刘弘毅：2014级数院，现就读于美国加州大学伯克利分校，方向为几何分析。
- 罗宇杰：2014级少院，现就读于美国约翰·霍普金斯大学，方向为代数几何。
- 马骁：2014级少院，现就读于美国普林斯顿大学，方向为色散偏微分方程。
- 马岳：2014级少院，现就读于中国科学技术大学，方向为图论，导师为侯新民。
- 毛天乐：2014级数院，现就读于日本东京大学，兴趣方向为代数几何。
- 王瞭：2014级数院，现就读于德国波恩大学，兴趣方向为表示论。
- 龚禹霖：2015级少院，现就读于法国雷恩一大，兴趣方向为几何与动力系统。
- 刘俊邦：2015级数院，现就读于美国纽约州立大学石溪分校，方向为几何分析。
- 姚钧夫：2015级数院，现就读于美国约翰·霍普金斯大学，方向为几何分析。.
- 杜佳宾：2016级数院硕士生，现就读于厦门大学，方向为代数几何。
- 徐铮：2016级数院硕士生、2017级博士生，现就读于中国科学技术大学，方向为数论。
- 黄一轩：2016级数院，将就读于美国范德堡大学，兴趣方向为组合与图论。
- 李明阳：2016级数院，将就读于美国加州大学伯克利分校，兴趣方向为辛几何。
- 李卫雨：2016级少院，将就读于美国哈佛大学应用数学系。

- 单逸：2016级数院，现就读于法国巴黎高等师范学院(ENS)，兴趣方向为数论。
- 王翌宇：2016级少院，将就读于美国威斯康辛大学麦迪逊分校，兴趣方向为代数几何。
- 肖宇：2017级数院，将就读于北京大学，兴趣方向为数论。
- 田珺昊：2018级数院，兴趣方向为几何分析。
- 王麒翔：2018级数院，兴趣方向为数论。
- 叶子逍：2018级少院，兴趣方向为数论。
- 邹广翼：2018级数院，兴趣方向为解析数论。
- 郭炯吉：香港科技大学2016级，兴趣方向为概率论中的随机矩阵、KPZ普适性。

目录

1 基础课程学习顺序

如下流程图是结合科大的课程名称与培养计划制作的，仅供参考。



2 网络资源与必要的软件

这一部分我们将简要介绍一些网络资源的使用和数学软件的必要性。在此我们感谢14级数院的马耀武同学和16级硕士/18级博士生邱意雅同学的建议。

2.1 网络资源

当下信息的传播非常便捷迅速，网络资源非常的丰富。因此合理、高效地利用网络资源也成为了一个学生必须要具备的能力。在此我们再三提醒同学们：**谢绝网络假人、神必壬以及数学八卦（无慈悲），更要谢绝冲塔（震声）!!!**

科大图书馆

利用图书馆的电子资源，可以下载大量的**中文数学书**。首先连接校园网，进入科大图书馆网站并登录，之后查找你想找的书的页面。一般的中文书(出版一年以上的)数字副本旁边有个在线试读，点右上方的借阅就可以。用校园统一身份认证登录，填写自己的邮箱就可以。一天最多五本，一个月他说的15本，实际数字比这个多。如果急着需要用则可以借周围同学的登录然后填自己的邮箱。

校园网(USTCnet, eduroam)环境下可用的外网资源

1. Springer Link: 科大是购买了Springer出版社的数据库的（因此包含了所有GTM系列和其它一些书和著名杂志，例如Invent. Math, CMP等）。在校园网环境下搜索Springer系列的书都是可以**免费下载到最新版本的pdf文件的**，尤其是GTM系列。而其他的例如剑桥/牛津出版社、美国数学会(AMS)等出版社就没有这些福利。

2. MathSciNet: 下载**已发表的文献**

在美国数学会(AMS)的官网上方有一个mathscinet的链接，**在校园网环境下**点进去就可搜索并下载已发表的数学文献（是最终发表的版本，而不是arXiv上的预印本）。

其它网络资源

1. Libgen, Bookzz等俄国网站：毛子专治各种不服。除了最新出版的书籍以外，你想要的英文数学书这里都能搜到。**在中国大陆以外的地区请勿在校园网环境下使用!!!**

2. SciHub: 毛子专治各种不服。同学们若不在校园网环境下却又想下载文献，则可以先搜索到（一般是通过谷歌）发表该文献的网站（也就是那个杂志发表这篇文章的网站），里面可以看到Doi号，然后（一般是通过科学上网）找到scihub的一个镜像，然后复制粘贴这个doi号便能找到

该文献正式发表版本。此网站主要用于非校园网环境下载paper. **在中国大陆以外的地区请勿在校园网环境下使用!!!**

3. 谷歌：学术搜索谢绝野蛮百度,,, 无需多说，请学会科学上网。谷歌可以用来：搜文献、搜不会做的题目（键入英文）。**当然我们再三强调：谢绝一切冲塔行为!!!**

4. Math StackExchange/Overflow等数学社区：本科中高年级课程的课后习题往往能在这搜到。一般来说是先谷歌搜索题目，然后转到对应的站内搜索。

5. arXiv: 工作日每天更新那些最新挂出来的论文预印本。平时用于搜索文献或关注最新进展。

6. 万千合集站、城通网盘、新浪微盘等中文平台：可以搜到不少中文数学书的pdf文件。一般来说都是百度搜这本书的名字+作者+pdf, 进入相关网站页面即可。

7. 科大评课社区与个人主页：评课社区`https://icourse.club` 里面可能会有同学们上传的课程讲义链接或者教材/参考书目。另外，在搜索引擎中加入 “site: staff.ustc.edu.cn” 或者 “site: home.ustc.edu.cn” 可以将搜索范围局限在科大的老师/学生个人主页内，可以更容易搜到一些往年资料。

2.2 MathStackExchange快速入门指南

本文中的MSE、MO指的是如下网站

- MSE (Math Stack Exchange)：https://math.stackexchange.com
- MO (Math Overflow)：https://mathoverflow.net

本指南只针对MSE网站上与提问相关的问题进行说明，MO与MSE情况类似。更多内容详见网站上的帮助文档。

1. 什么是MSE (Math Stack Exchange) 和 MO (Math Overflow)？

简单地理解，MSE是一个Stack Exchange旗下的数学问答网站，内容难度从初中至硕士研究生程度；MO是职业数学家讨论问题的场所，内容难度为硕士研究生程度以上。

2. 如何登录MSE？

使用电子邮箱注册并登录，或使用Google账号。

常见小问题：

（1）因网络原因，有时上方会显示红底白字的一句话：Math stack Exchange requires external JavaScript from another domain, which is blocked or failed to load. 导致网站中很多按钮失效。原因是Stack Exchange旗下网站均使用了Google CDN.

简便解决方法：浏览器扩展(chrome, firefox) 中搜索名为Replace Google CDN的扩展并启用。原理详见该扩展详细信息。

（2）头像、图片无法加载。Stack Exchange旗下网站均使用了imgur网站的图床，导致图片可以正常上传，但不能下载或查看。MSE上图片并不多，图片以几何拓扑类问答的图例为主。解决方法为科学上网。

3. 关于提问的注意事项

详见参考网站上给出的帮助文档: https://math.stackexchange.com/help/asking

这里说几个特别注意的事项：

（1）提问前一定要先搜索。你能想到和遇到的大部分硕士及以下程度的问题，之前的人也会遇到并提问。经典教材(如Stein、Rudin的分析，Hatcher的代数拓扑，Rotman的代数)的大多数课后习题，搜索作者+书名+题号可以直接找到答案。

（2）问题正文一定要使用LaTeX。网页使用的MathJax除一些环境外基本兼容LaTeX，提问页面右侧给出的指导也非常详尽。遇到一些特殊格式，如链接的插入、交换图表的绘制，可以直接参考现有的问题或答案，点击edit进入编辑页面复制相关代码。随着大量新用户的涌入，没有按数学格式书写的问题容忍度急剧降低，导致downvote、reputation减少和问题被关闭、不能接受新的回答，所以提问一定要使用数学格式。

（3）MSE是一个问答类网站，但不是一个只提问题就会有网友完整解答你的网站。只有问题本身而无相关解释的post会被以“This question needs details or clarity”为由关闭（close）。MSE网站要求提问者写出自己的努力（effort）或尝试（What have you tried）以及困惑点（Where do you get stuck），这也有助于其他用户解决你的具体问题。如果实在毫无思路，至少也应写明相关背景，写清楚在哪了领域遇到了这个问题。

（4）问题下方必须添加标签（tag），点击标签即可查看标签的使用方法，一般格式为For questions about ⋯。错误地使用标签会导致其他用户的反感，降低你的问题被回答的可能性。

（5）问题被关闭后就不能增加新的回答。如果问题被其他用户投票关闭，针对给出的指导意见进行修改，如果缺少细节就通过edit补充细节并点击unclose。之后点击右上角的按钮，在点击chat，找到CRUDE聊天室（专门讨论关闭、重新开放、删除、编辑等的聊天室），附上链接并语气诚恳地表示你已经对问题做了修改，希望能reopen。5个有足够reputation的用户投票同意后问题就会被重新开放。

4. 网站本身的问题或存在的bug

可以在聊天室Math Meta Chat、CRUDE、Tagging或在Meta. MSE 提出。网站上的任何内容，包括问题、回答、评论和聊天室里的发言都可以被flag并由不同reputation的用户直至moderator做出review。如果遭遇其他用户的言语攻击、垃圾回复等，点击旁边的小旗或点击flag，选择相应情况或need of moderator intervention 输入遇到的问题。

5. MO (Math Overflow)

MO 是职业数学家讨论问题的场所，本科程度的问题应在MSE提问，在MO提问会导致问题被关闭和删除。如果问题过于专业、难度很大或在MSE上浏览量很低，可以在MO提问。

2.3 书籍与文献管理意识

同学们要有书籍和文献管理的意识，不然时间一长会变成一团乱麻。建议同学们从本科低年级开始就做好文件归档的工作。例如可以分方向单独设立文件夹：分析与微分方程、代数与数论、几何与拓扑、组合数学、概率论与随机分析、统计学等等。每个目录里面再细分小的目录，待到高年级就能形成一个较为完整的参考书体系。走向研究之后，你感兴趣/要细读/只需大概了解的paper也应该按方向或者按其它的合理标准进行分类，这样查阅的时候就非常方便。

2.4 LaTeX 与 Mathematica

LaTeX必须要学会

LaTeX是数学文档排版的工具，写一些笔记与试卷、习题解答，以后写论文、投稿等过程中都要用LaTeX这个排版软件来完成。同学们可以看刘海洋的《LaTeX入门》来学习基本操作（当然也有很多其他的书）。LaTeX的下载可以搜索texlive进入其官网下载（Windows系统和苹果Mac系统的应该都有下载），如果网络不好则选择离线安装，有好几个G. 打中文的时候记得加入

\usepackage{ctex}.

早年有CTEX这个软件支持中文的直接输入，但CTEX自2012年以后就不再更新，因此很多新的工具包和字体都用不了。

编译器方面，最简单的是TeXlive自带的TeXworks编译器，比较先进的还有TeXstudio. 在线编辑可以用overleaf这个网站，但可能需要科学上网（否则网速非常慢）。笔者在此建议，如果是较为重要或者想长期保留的文档还是尽量离线编译，overleaf网站偶尔会崩掉。

数学专业的同学们（无论是基础数学还是其它方向）请务必尽早学会LaTeX的使用，并尽早做到熟练，这是数学系学生的必备技能!!!

Mathematica: 计算数值专治各种不服

无需多说。建议同学们还是学一下Mathematica的基本操作，现在科大也购买了正版软件供同学们使用。

这一部分还有待同学们的补充！

3 一切的根基：数学分析、线性代数

参与这部分编写的作者有：

数学分析：章俊彦

线性代数：毛天乐

在此之前，我们假设学生没有认真接触过任何大学数学。

3.1 数学分析

建议教材：常庚哲、史济怀：数学分析教程（第三版），中国科学技术大学出版社。

注：此教材正文的讲解非常详细，可读性也较好，另一套讲得很好的中文教材张筑生的《数学分析新讲》可作为参考书。这本教材有不少竞赛味道较浓的习题，这些是完全可以跳过的（尤其是第一章），出现这些习题也许是和常庚哲教授曾任IMO中国国家队教练有关。此外，我们的教材初稿实际上是1985年何琛与史济怀教授写的数学分析讲义，后于2003、2008年经历了两次大的修订，因此习题可能比较老旧。同学们可以在学习一段时间之后阅读一些拓展知识，见识并计算一些有趣、有用的例子，比较好的选材主要来自于傅立叶分析、微分方程和微分几何等，包括但不限于[3]的第4、7-8章，[2]的第2-4章，[9]的前四章。

主要参考书：

[1] 谢惠民、钱定边、易法槐、恽自求：数学分析习题课讲义（上册）(的部分例题)；

[2] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, 2nd edition, AMS, 附录部分和第2章;

[3] Elias M. Stein: Fourier Analysis, an Introduction, Chapter 2-6.

次要与进阶参考书：

[4] B. A. Zorich: 数学分析（第二册）；

[5] 汪林：数学分析中的问题与反例；

[6] Walter Rudin: 数学分析原理；

[7] Spivak: 流形上的微积分，齐民友、路见可（译）。

[8] 齐民友：重温微积分。(学完之后可以回顾一下，加深对知识的认识)。

[9] do Carmo: 曲线与曲面的微分几何。

查找一些较难、较技巧化的习题答案，可以参考周民强的《数学分析习题课演练》或者裴礼文的大板砖，但仅限于查答案。

学习建议：

数学分析是近现代数学的根基之一，也是大学期间最重要的基础课。其内容是严格地介绍如下三部分内容：单变量微积分（数分A1）、多变量微积分（数分A2）、无穷级数（数分A3）。此外，入门级的Fourier（傅立叶）分析也应放在数学分析的学习中。任广斌老师曾经说过一句

话：分析是极限的艺术。实际上，整个数学分析课程都在围绕“什么是极限”这个话题，用严格的$\epsilon-\delta$语言展开：

- 单变量微积分（数学分析A1）

  这一部分的主要参考书是[1]，查阅各种反例可以参考[5]. 单变量微积分部分早已是标准内容，没什么好补充的。练习的时候，以史济怀的课本习题为主，[1]可以做一些例题，参考题太难了，没有必要去做。

  1. 极限 $\rightarrow$ 连续 $\rightarrow$ 可微（光滑性）

  从数列极限（离散）出发，我们可以得到函数的极限，从而定义函数的连续性；对函数的差商取极限，我们可以得到函数的可微性。当然，其严谨性由ϵ-δ语言保证。**新生需要学会的第一件事就是“用严格的数学语言去刻画证明中的任何结论”**，例如$\lim_{n\to\infty} x_n = x$，你不能潦草地说“$n$很大时，$x_n$充分靠近$x$”，因为你并没有严格地解释什么叫“靠近”，因此你应该使用ϵ-N语言去严格刻画这件事情：任给（误差容忍度）$\epsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}$，使得对任意$n > N$（在抛掉前有限项之后），都有$|x_n - x| < \epsilon$（$\{x_n\}$剩下的项在误差容忍度ϵ下差不多是常值序列）。由数列极限得到的一系列实数系完备性定理，也是需要认真学习的部分。**熟悉$\epsilon-\delta$语言比去做那些奇技淫巧的计算重要得多。**这在后面学习无穷级数（函数项级数的一致收敛性）、实分析与概率论（各种收敛性证明和测度论证明用到114514次）会得到充分的体现。

  2. 微分 $\xleftrightarrow{\text{逆运算}}$ 积分

  给定可微函数f, 若f'可积，则必有$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.因此我们可以说求导和积分是一对（相差一个常数的意义下）互逆的运算。这一部分有很多工具是以后都会用到的。例如：Taylor展开（相当于用多项式逼近一个可微函数）、L'Hospital（洛必达）法则、各类积分的计算，以及勒贝格可积性定理等等。计算上，1^∞型极限在取ln之后大概率可以用洛必达法则做出来，而积分的基本计算技巧也需要掌握。但切勿沉迷于计算花里胡哨的怪异积分，因为这可能会带偏你对数学的认知。此外，Lebesgue可积性定理的证明思路值得学习（连续部分的振幅小+震荡部分的测度小$\rightarrow$收敛）。

- 多变量微积分（数学分析A2）

  这一部分的主要参考书是[1], [2]和[7], 查阅反例仍然可以参考[5]. 多变量微分学部分的证明请务必把所有步骤写清楚，不要“意会地”证明。[1]主要用于学习例题里面的基本方法以及基本计算，[7]用于查阅严格化的证明。[4]可以作为拓展书籍，讲了一般的线性赋范空间的情况。

  1. $\mathbb{R}^d$上的欧氏拓扑：集合的**基本拓扑性质，需要非常熟练地掌握，请在学习这部分的时候务必不要跳过任何步骤把证明写在纸上！**之后，我们可以定义$\mathbb{R}^d$中的序列收敛，以及多变

量函数的连续性。如果你想在此时自学一些点集拓扑，可以去看 Armstrong的基础拓扑学，或者尤承业的《基础拓扑学讲义》前三章，切记完成所有习题并写出过程，这对初学者理清概念是非常重要的。

2. 多变量函数的微分：隐函数定理、反函数定理。多变量函数微分部分最重要的定理就是隐函数定理和反函数定理，它们分别给出了隐式方程局部解的存在性和C^1映射局部逆的存在性。这在后继的学习中极其重要！例如，微分流形中的常秩定理就是隐函数定理的直接翻版。而在微分方程中，隐函数定理更成为了Nash-Moser迭代的基础，而后者是证明偏微分方程解的局部存在性时一个非常强力的方法！总之，隐函数定理蕴含的东西远比课本上展现出的多，其证明的方法也是值得记住的。计算上，条件极值、拉格朗日乘子法都是必须要学会的，并不能忽略。

3. 多变量函数的积分：争议很大，但无论如何**不要拘泥于课本**。这应该是科大这套数分教材比较有争议的部分：没有严格证明积分变量替换公式、只讲了二维、三维的计算、没有引入Lebesgue（勒贝格）测度等等。我个人的观点是：

- 基本的曲线、曲面积分计算肯定要学会，但**不要沉迷于计算各类奇葩区域上的奇葩积分**。
- 课本第13章（场论初步）换成[2]的附录（但球坐标、极坐标等经典例子需要保留），直接默认那些分部积分公式（指Stokes公式、Gauss-Green公式）成立，来推导常用的恒等式。另外，可以把“推导[2]的第2章中某些定理”作为练习。这部分主要是为后面微分方程的学习打下基础。因为，更加常用的是$\mathbb{R}^d$中一般开区域上的积分估计。因此我们需要熟悉$\mathbb{R}^d$中分部积分、以及散度旋度的计算，以免到学偏微分方程的时候才后悔莫及。此外，有兴趣的同学可以去学一学微分几何，比较好的参考书有[9].
- **不宜太早引入Lebesgue测度和积分理论**（尤其是大班教学）：和数学分析里面的黎曼积分相比，勒贝格测度与积分理论完全是一个新的体系。尽管建立起勒贝格测度与积分理论之后很多黎曼积分里面复杂的问题可以轻松化解，但在学生尚未掌握好数学分析的时候又塞给学生一套完全不一样的东西并不明智。
- **不宜学习Jordan测度**并用它来证明黎曼积分的变量替换公式：Stein的实分析第一章还专门有个习题告诉你Jordan测度有多垃圾。不要仅仅为了一个积分变量替换公式而接触一个无用的东西。

- 无穷级数（数学分析A3）

这部分把课本14-16章学好就行，尤其是第15章函数项级数的一致收敛以及幂级数；反常积分则基本是平行内容。参考书[1]中的部分例题可以拿来补充第15章，但很多乱七八糟的判别法可以不用记住（除非以后用到）。课本第18章可以当做阅读材料认识一下Γ函数和Beta函

数。另外，笔者认为这部分定理的证明是有必要掌握的，做题更多是积累一些例子并熟悉证明一致收敛的方法。因为无穷级数（函数项级数）**最重要的就是弄清楚“收敛”和“一致收敛”的区别**。笔者就是在学习这部分的时候对“一致”这个概念真正产生了比较深的理解。二者区别就是“一致收敛”需要在“收敛”的基础上对“一致”的那个量再取sup。无穷级数部分虽然简单，但**切勿因为简单就轻视而仅靠考前突击，没有足够功底的话往往会死的很惨！每年的数分A3都有很多人莫名其妙地阴沟翻船**。

- 傅立叶分析入门（数学分析A3）

  笔者认为**傅立叶分析的教学长久以来都是缺失的**。这部分的**主要学习资料是[3]的第2、3、5、6章**，涉及傅立叶级数与傅立叶变换的基本性质。傅立叶级数部分我们课本的第17章其实也不错，[1]的这部分其实写得一般，不建议去做。另外笔者认为这部分推导定理的证明非常重要，做题更多是积累例子或者衍生结论。

  [3]这本书的习题有很多重要的例子，建议大家有选择性地完成。另外，[3]引进了好核(good kernel), 逼近恒等(approximation to identity)的概念。“逼近恒等”是现代分析中被用到无数次的东西，其基本性质请务必认真学习。傅立叶级数部分的主干知识和史济怀先生的书上相差不多。后面傅立叶变换部分，[3]引进了一类非常重要的函数: Schwartz函数类，这类函数能保证傅立叶变换这个运算的“封闭性”（$\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$是自同胚）。此外，这部分有两个观点务必记住！

  – **Fourier变换保L^2范数不变**（类似于Parseval恒等式，实际上傅立叶级数就是$\mathbb{T}^d$上的傅立叶变换，而$\mathbb{T}^d$的频率空间上离散的，所以积分就换成了对整数点的求和），这个观点在后面泛函分析学 Hilbert 空间时会再次出现。

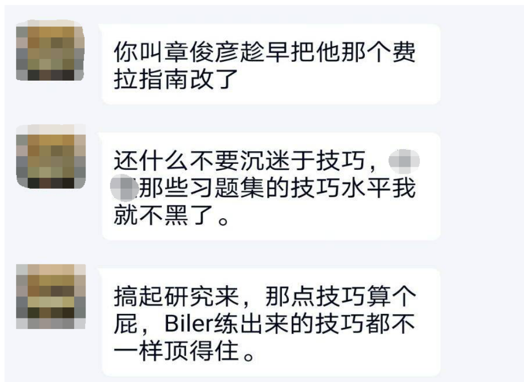
  – **重新审视导数的定义**，之前我们一直视导数作为差商的极限，但傅立叶变换的一条重要性质是导数会变成多项式乘子:$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)=(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$，因此我们可以倒过来定义$f$的“$s$阶导数”为

  $$\partial^s f:=((i\xi)^s\widehat{f}(\xi))^\vee$$

  ($\vee$是傅立叶逆变换)，这个观点在调和分析与PDE中是非常重要的。

注1：数学分析是最重要的基础课之一，后面几乎所有的知识都要以此为基础。在学习时，**切勿一味追求高观点而眼高手低不去做题、不去思考，切勿陷进奇技淫巧的题海中，切勿拘泥于课本！** 对少部分能力强，想在大一提前修读实分析、复分析的同学，笔者建议一定要在扎实学好数学分析A1的基础之上再具备以下基础知识：多变量函数连续性（史济怀第8、9章）、无穷级数（史济怀第14、15章）。若是对（硬）分析感兴趣，或者以后想学分析、微分方程、概率论等，请优先学习实分析。若是以后想学的方向需要复分析则优先学复分析。但是，**提前修课不要一味图快！同年级必修课不要落下！务必量力而行!!!**

注2：同学们也许在网上看到过很多人推荐书单，里面数学分析就有十本、甚至九本参考书，这样的人一般自己都没读过这些书。同学们也许听说过很多所谓“升级”的习题册，里面充斥着各种技巧或是后续课程内容。但正如本指南前言所述：“这是数院任何一个学生（包括非基础数学方向）都必须迈过去的坎。我们不主张一开始就学得太难，也不建议过于重复性地大量刷题，更不建议一开始就强调过多的奇技淫巧。我们也不赞成在数学分析、线性代数的学习中就加入过多的实分析、泛函分析、拓扑学、微分流形的初步知识。”当然，现代社会网络发达，只要有一个手机或是一台电脑就可以在网上随便发表评论。例如某活跃于知乎和QQ、国籍不明、精法俄越印的Z姓著名数学八卦家曾对本指南作出如下评论：



可能是因为本人水平的确很差，费拉不堪，我有如下几个问题百思不得其解。

1. 既然练Biler都练不出来，那为什么还要投入N倍时间去练习Biler呢？干脆躺平算了。

2. 连练Biler这种书都练不出来的技巧到底是在何等神秘的研究中出现的独门秘籍？本人从事流体偏微分方程研究，经典文章动辄100页以上，涉及各种花式非线性估计。在这涉及到如此硬核分析的领域里，不论是在研读过往巨作还是在自己写文章时，我都无法寻得那些神乎其神的技巧之踪影。这些著作的作者们不乏邬似珏、Coutand-Shkoller、Lindblad、Ionescu、Tataru、Bedrossian-Germain-Masmoudi-Shatah、 Klainerman-Rodnianski、陶哲轩等等国际顶尖学者，难道他们也费拉不堪吗？

阅读本指南的同学们，这两个问题还是留给若干年以后的你们来回答吧！

3.2 线性代数

建议教材与参考书：

[1] 李尚志：线性代数（数学专业用），高等教育出版社；

[2] 柯斯特利金：代数学引论（第二卷）·线性代数；

[3] 李炯生、查建国、王新茂：线性代数，中国科学技术大学出版社；

[4] 张贤科：高等代数学、高等代数解题方法，清华大学出版社。

次要与进阶参考书：

[5] 高等代数葵花宝典.pdf;

[6] 陈恭亮、叶明训：线性空间引论，清华大学出版社；

[7] M. Artin: 代数；

[8] 王新茂线性代数讲义；

[9] 詹兴致：矩阵论，高等教育出版社。

学习建议：

1. 总体建议：这门课是数学系课程中最为基础的一门课之一。整体难度并不是很大，但是由于：

（1）线性代数与大学之前的数学课和数学分析有一定区别，从这里开始，我们将慢慢进入抽象的数学；

（2）Jordan标准型理论和有一定的难度，可能需要花一番功夫。

因此不论同学们接下来要学什么方向，希望在学习这门课程时不要太松懈。

接下来是这门课的一些学习心得和建议。首先，建议补一点集合论的知识，比如要熟悉单射，满射，双射，一一对应，可逆映射，映射的原像集这些说法，这将对今后的学习大有裨益。推荐的话，尤承业的《基础拓扑学讲义》引言部分后半段3页的内容足矣，这部分希望能够牢牢掌握，都是最基础的集合知识与运算。（或者部分年的代数学基础课程会讲，但不保证）

2. 学习动机：

（1）解线性方程组：线性方程组是数学中最简单的一类方程组，并且我们有完整的算法可以求出它的解，即线性代数课程最开始要学的“高斯消元法”。但是线性方程组的问题还没有彻底解决：如何不解方程组直接依靠系数判断方程解的存在性？对于某些特殊的线性方程组，有没有公式表达它的解？最简阶梯形中的非零行个数是否唯一？……还有许多类似这样的问题，为此会引入线性空间，矩阵，行列式的概念与方法。使用这些工具，在解决关于线性方程组的一些理论问题时，会轻松不少。而反过来，发展线性空间，矩阵的理论时又离不开解线性方程组。可以说，线性方程组的理论与空间，矩阵的理论相辅相成，共同构造出了线性代数的主干。

（2）解析几何的高维推广：在大一的解析几何课上学过学过三维欧式空间的解析几何，用的方法是点变换/坐标变换等，那么自然会提出一些问题：有没有高维的空间？在高维的空间研究几何能不能用类似的方法？实际上，高维的空间在数学上可以形式地构造出来，并且研究其中的

“几何”也确实能够用解析几何中坐标变换的想法（并且是核心想法），而且能够用统一的语言去描述这种“操作”，这就为研究高维的几何带来了极大的便利。

（3）数学对象的抽象化：在高中和大一上的时候已经学过了不少数学对象（集合与元素）以及一些运算操作（映射）。在学习的过程中，可能会发现它们冥冥之中的一些共性，举几个例子：

- 设有极限的全体实数列构成集合S，定义运算lim，其实它是S到$\mathbb{R}$的一个映射，这样的运算有性质
$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n, \lim(c\cdot a_n)=c\cdot\lim a_n, c\in\mathbb{R};$$
- 设$R[a,b]$是区间$[a,b]$上的全体黎曼可积函数，则$\int_a^b \cdot dx$也是一个$R[a,b]\to\mathbb{R}$的映射，并满足
$$\int_a^b f+g dx=\int_a^b f dx+\int_a^b g dx, \int_a^b cf dx=c\int_a^b f dx, c\in\mathbb{R};$$
- 设$\mathbb{R}_n[x]$为全体次数不超过n的实系数多项式构成的集合。对于多项式$f(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$，我们可以定义$\frac{d}{dx}:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$的映射:$f\mapsto\frac{df}{dx}(x)=\sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1}$. 这样的映射同样满足:
$$d(f+g)/dx=df/dx+dg/dx, d(cf)/dx=cdf/dx, c\in\mathbb{R}.$$

从以上的例子中可以看出上述映射都有一些共性，叫作“线性”。映射的定义域集合上有两种运算：“加法”与“数乘”。经过不少数学家的努力，会发现数学中不少重要的集合，虽然它们具体的元素不同，但是在这里集合上却都能定义“加法”和“数乘”的运算，并且都满足一些运算规律。这些映射也满足一些规律。如果抽象出来这种性质单独研究，得到的结论将会更具有普适性。这也是现代数学的基本研究方法：抽象。

3. 学习内容：

- 工具性内容：线性方程组理论、矩阵与行列式理论；
- 核心内容：线性空间理论、线性变换理论、双线性型理论；
- 工具与核心内容的联系：学习线性代数**切勿孤立地去学某一项理论**，下面列出几点重要联系：

  (1)用矩阵表示线性方程组，系数矩阵与增广矩阵的定义；

  (2)初等方阵与矩阵的乘法、初等变换的关系；

  (3)给定一组基下，可逆方阵与线性空间所有基的关系；

  (4)给定两组基，矩阵与线性空间之间的线性映射的关系；

(5)矩阵的相抵与线性映射在不同基下的方阵；

(6)给定一组基，方阵与线性空间的线性变换的关系；

(7)方阵的相似与线性变换在不同基下的方阵；

(8)给定一组基，方阵与线性空间的双线性型的关系；

(9)方阵的相合与双线性型在不同基下的方阵。

4. 学习方法

(1)线性方程组要熟练，少出错，它是线性代数大部分计算的核心；

(2)注重定义和概念的理解，尤其是不同理论中均会涉及的概念，比如矩阵的秩，培养多角度看问题的习惯；

(3)可以尝试自己梳理线代的脉络与思路，包括证明，除去个别繁琐的证明（分块乘法合理性，Binet-Cauchy公式，Jordan标准型理论中关于幂零方阵的Jordan标准型等），大部分证明都能够自己证出，理解后并不是很难。如若一时不太清楚定义，命题的表述和证明，可以先记住，然后多与老师同学探讨，并在之后的学习中联系其他的理论思考。

5. 延伸与拓展阅读：

在学习完教材的基础内容后，可以参考如下内容。当然部分内容可以与线性代数同步学习。

(1)参考书[5]是应试的非常好的材料，记录了一些线性代数的中难题，据传曾是某年北大线性代数习题课助教写的总结。

(2)多重线性代数：这是线性代数中的重要一环，即张量。张量在线性代数中可以用多重线性代数的观点来较为简单的定义，而在模论中则主要会用到泛性质。科大的线代大纲里是不包含张量的，但是到了学微分几何、微分流形、黎曼几何等课程的时候却会大量运用，老师也只会草草讲过。这里推荐[2]的第六章，张量部分。虽然这本书翻译不好，但是第六章的内容还是值得肯定（不过也有内容太多的弊端）。中文的参考书应该可以参考[6]。听说是中法班的参考书，也算是中文书里少有的会特别写对偶空间以及多重线性性的书了。

(3)教材[7]可以用于了解群、环、域的定义：群、环都是现代数学中最为基本的代数定义，它们跟线性空间一样，是对已有事物的抽象化；域则是一种特殊的环。学习群、环不仅是为近世代数做准备，还能深化已经学过的线性代数的理解。如果学过了群环域的基本定义，可以思考如下几个问题：

- 线性代数中的数域跟一般域的区别与联系，线性代数的所有结论能否推广到一般域上。（注意这里有两个概念，一个是域的特征，一个是代数闭域）

- 线性空间的定义中，数域可以换为域，如果换为环呢？特别地，如果换成整数环，我们得到什么？换作域上的一元多项式环，我们又会得到什么？后者与我们学的线性变换有何联系？

- 线性代数中存在大量群的例子，是哪些？

(3)另外如果又有对矩阵技巧感兴趣的同学，可以参考[8]或者[9](进阶书籍)。

(4)后续课程有李代数、群的线性表示理论、同调代数、微分流形、泛函分析等，计算方向则有数值代数。

4 基础知识（对应本科课程）

本节我们假设学生已经学过数学分析、线性代数，故在预修课程中不予列出。

参与这部分编写的作者有：

拓扑学、微分流形、微分几何、复分析：王翌宇、龚禹霖、李明阳

近世代数、代数学：单逸、肖宇

概率论与随机过程：姚东

实分析、泛函分析、微分方程：章俊彦

组合数学：马岳、黄一轩

4.1 拓扑学

教材与参考书：

[1] 尤承业：基础拓扑学讲义，北京大学出版社；

[2] Munkres: Topology（熊金城教授翻译的中文版《拓扑学》行文很流畅，值得一看）；

[3] 王作勤教授的拓扑学讲义:http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/19S-Topology/index.html;

[4] Armstrong: Basic Topology;

[5] Allen Hatcher: Algebraic Topology.

[6]* 干丹岩：代数拓扑与微分拓扑简史，湖南教育出版社。

学习建议：

首先我们在这里所提及的是科大本科的拓扑学，这门课主要分为点集拓扑和基本的代数拓扑两部分。这里着重介绍点集拓扑相关内容，代数拓扑后续有着更为详尽的介绍。参考书中的[6]是拓扑学发展历史的综述书籍，有兴趣的同学可以读一读，了解一下近代拓扑学的发展历程和数学思想。

笔者认为点集拓扑是现代数学最基础的语言之一，后续的学习中将反复使用点集拓扑的概念，因此一定程度的练习是必要的，主要是为了理解并且学会如何使用这些概念去表述一些数学概念，在这里我特别强调典型的例子在学习点集拓扑中的必要性，点集拓扑中出现的很多概念很多是抽象自我们早已熟悉的空间，特别是欧氏空间或者更为一般的度量空间，例如开闭集、可数性、分离性、紧性等概念都是从欧氏空间的性质出发，去讨论他们在更一般的拓扑空间上的定义。当然掌握一些典型的反例也是必要的，这可以帮助我们理解为什么需要去研究某些看起来性质较差的对象。**但是特别注意请勿沉迷于一些反例的构造，我们应该关注那些比较“自然”的反例。**

以下我从几个角度来介绍一下点集拓扑我们都会学些什么：

1. 典范的例子：度量空间，拓扑流形，拓扑群等等（事实上拓扑流形是可度量化的），他们是定义某些拓扑性质的出发点，也是研究中的重要模板。例如仿紧性这个概念虽然很广泛，但主要还是用在流形上的，他可以导出重要的单位分解定理。

2. 拓扑的构造：在很多问题中我们需要为一个空间引入恰当的拓扑，如何构造新的拓扑空间也是我们需要掌握的重点，例如子空间，用拓扑基生成拓扑（包括乘积拓扑），满足一族映射连续的最强或者最弱的拓扑（此类中包括商映射，以及泛函分析中的弱拓扑等概念），特别地用粘合关系来构造紧曲面是这门课讨论的重要内容之一。

3. 拓扑性质：拓扑性质也就是在同胚下保持不变的性质主要是分离性，可数性，紧性，连通性等，我们可以通过一些例子和定理来理解这些性质，比如说本课中高度非平凡的三个定理: Urysohn引理，Tietze延拓定理和Urysohn度量化定理，其实都主要是对T_4(某种较强的分离性)空间的刻画。**(这三个定理的证明对初学者难以掌握，我的建议是先去理解其含义和掌握其应用)**

此外我们应该格外关注紧致性，在度量空间中，我们有紧与列紧等价的性质，最重要的是紧集上的连续函数是可以取到极值的，这使得紧性在分析中非常重要。另一个重要而且非常有用的性质是连通性，特别是要掌握连通性论证(连通空间中一个非空的即开又闭的子空间必然是全空间，这个在几何和分析中都十分常见，比如说在复分析中的最大模原理等等)。

点集拓扑中概念和各种小的性质都非常多，初学并不能完全掌握也是正常的，对此我的建议是在有了初步的掌握以后放开手脚去继续学习更为深入的内容，他们会反过来加深我们对于拓扑概念的理解，而不必一开始就面面俱到。

最后我们谈论一下学过点集拓扑之后可以进一步学些什么：

1. 泛函分析：拓扑学为分析提供了更广阔的背景和更恰当的语言。比如说利用映射族定义的拓扑，可以定义Frechet空间(比Banach空间更广泛的一类拓扑向量空间)，以及其对偶空间上的弱拓扑。包括很多数学分析中的重要定理都可以推广到更一般的情况，例如Weierstrass逼近定理和Arzéla-Ascoli引理等，这都需要借助拓扑的语言。

2. 代数拓扑：这是科大拓扑学这门课的后半部分，而且代数拓扑给出了很多可计算的拓扑不变量，通过学习代拓可以看到我们之前铺垫的那么多语言是如何用来真正解决一些具体的几何问题，例如：闭曲面分类定理等。

3. 微分流形：拓扑流形加上光滑结构就是微分流形，在流形中仿紧性是最为常用的拓扑性质之一，他可以导出从局部到整体的关键定理：单位分解定理。一个有趣的事情是我们可以找到可微的映射与连续映射同伦，这使得我们其实可以用微分的工具去解决拓扑问题。

4. 代数几何：对于代数簇或者环谱赋予Zariski拓扑，这个性质十分糟糕的拓扑某种程度上可以让我们意识到有些性质很奇怪甚至难以想象的拓扑竟然也可能如此重要。我并不太懂代数几何就不多说了（x

5. 拓扑动力系统：这个我就仅仅有所耳闻，王老师讲义中有一个用拓扑动力系统解决算术问题的例子很有趣(在Lec08)，这个方向可以请教科大做相关方向的老师。

4.2 微分流形

主要教材与参考书：

[1] 王作勤教授2018年的微分流形讲义，见 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/18F-Manifolds/index.html;

[2] Loring W. Tu: An Introduction to Manifolds (流形导论);

[3] John Lee: Introduction to Smooth Manifold (光滑流形导论), GTM 218, Springer;

[4] Frank W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Group （微分流形与李群基础）;

[5] 陈省身：微分几何讲义，北京大学出版社；

[6] 陈维桓：微分流形初步，高等教育出版社。

进阶参考书将在下面逐一介绍。

学习建议：

这门课与主讲老师关系很大，因此内容也会有所不同，我这里主要介绍的是王作勤教授开设的微分流形的内容，当然我也认为这些内容都是以后我们学习现代几何的基础。

关于这门课的内容有如下几部分：流形的基本概念、微分拓扑初步、向量场与分布、李群初步(包括纤维丛的初步介绍，18年已删去)、微分形式与流形上的积分、de Rham上同调、辛几何初步（18年已删去）、向量丛上的联络、曲率和Chern Weil 理论简介。这些内容实际上作为一学期的内容来看可以说是非常多的，我们将1, 3, 5作为流形的基本内容介绍，而2, 4, 6, 7分别以四个专题继续详细展开。

- 流形的基本内容：

  关于流形的拓扑结构最重要的是其由仿紧性得到单位分解定理（在光滑情形下将连续函数改为光滑函数），用这个定理我们可以将局部构造过渡到整体，例如构造整体的黎曼度量，联络，定义流形上的积分的时候。

  – 微分结构与切空间：微分结构表示转移映射是光滑的，但一个流形上可能有多种微分结构（在微分拓扑部分结尾有所介绍）。对于切空间和切映射的概念，我们建议大家有尽可能多的理解方式，特别是最好掌握用曲线去计算映射的微分：$df_p(v_p) = d(f \circ r)/dt|_{t=0}$，用这个方法计算涉及矩阵或是一般李群上的时候显得格外方便。

  – 映射的局部性质：这部分最重要的结果就是典范浸入(切映射是单射)/淹没(切映射单射)定理，这两个定理说明在一点处满秩的映射局部可以看作欧氏空间的自然嵌入/投影。不过这里要分清浸入和嵌入的区别(在目标流形上的拓扑的差异)，对于淹没映射(submersion)还有一个重要结果就是正则值的原像是子流形以及要能刻画这个子流形的切空间，这一结果在微分拓扑部分还会继续深入讨论。

- 向量场与积分曲线：这里特别强调一下流方法，向量场可以生成一个单参数变换群ϕ_t（流）是流形之间的微分同胚，这给制造微分同胚提供了方法，例如我们可以证明移动引理：光滑流形上任意两点p, q存在微分同胚f使得$f(p) = q$。
- 分布与可积性：本节主要目的是研究存在一个浸入子流形使得其切空间是某个分布的条件，证明的关键思路是通过分布的对合条件构造出可交换的标架，再用流方法得到积分流形（并且是显式计算出的）。这部分我建议大家参考[3]的第9章和第19章，结论很丰富而且证明清晰。关于可积性的理论大家可以在Ana的辛几何和Arnold的经典力学的数学方法中进一步学习，这个领域笔者并不擅长故点到为止。

  Ana Canas da Silver: Lectures on Symplectic Geometry. 辛几何方面非常好的入门教材，但是需要指出的是这里的内容距离现在的辛几何相差已经很远了，想进一步了解辛几何推荐了解一下

  Mcduff, Salamon: Introduction to Symplectic Topology.

  V. I. Arnold: Mathematical Method of Classical Mechanics (经典力学中的数学方法).
- 微分形式与流形上的积分：微分形式由于外微分运算更加灵活，从这一部分开始要涉及到很多流形上的张量的计算，这里特别提及一个技巧，验证有关微分形式的恒等式的时候可以按照如下三步:对函数成立⇒对外微分成立⇒对 wedge product成立。在各种恒等式中 Cartan magic公式有很多用处（尤其是在辛几何中）。
- de Rham上同调理论：这部分有很多代数的内容，例如同调代数中的五引理，Zig-Zag lemma等，但是最关键的还是要理解其几何内涵，例如Mayer-Vietoris序列中的边缘同态，Kunneth公式中的同构以及庞加莱对偶，他们具体的构造都要很清楚而不仅仅是当作一个抽象的代数上的同态。这里补充一点：一个k阶（紧）子流形对应一个$n-k$阶（上同调）紧支上同调类，这件事在后面的示性类和相交理论中都很重要。本节仅仅是一个开端，后续大量精彩的内容可以进一步学习GTM 82。

  Bott, Tu: Differential Forms in Algebraic Geometry, GTM 82, Springer.

• 微分拓扑

  首先列出两本非常经典的参考书：

  Guillemin, Pollback: Differential Topology;

  Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint (从微分观点看拓扑，有中文译本).

  微分拓扑也是一个非常庞大的话题。受限于笔者所学，只能粗略的介绍一点和微分流形课相关的内容，并且简单提及一些后续的内容。

  关于可微映射一个非常重要的结果就是Sard定理，大致可以描述为一个可微映射的像集中“不太好”的点很少（零测集），这给可微映射造成了很强的限制，例如从低维流形到高维

流形的可微映射必然是非满射的，这和连续映射有着很大差别，Sard定理本身证明远没有其应用重要，他是微分拓扑中最基础的定理，也是用来证明存在性最重要的手段之一。例如Whitney嵌入定理（n维流形可嵌入$(2n+1)$维流形，浸入$2n$维流形），流形上Morse函数的存在性等等微分拓扑中非常重要的结果。

另一个重要的结果就是管状邻域定理，这是说一个子流形的法丛与这个子流形的某个邻域是微分同胚的，这件事可以用来做Whitney逼近，而其直接推论就是在光滑流形中连续同伦与光滑同伦等价，这件事可以说明我们在研究某些同伦问题的时候可以用光滑映射代替连续映射，这意味着我们可以使用Sard定理等微分的工具，例如n维球面的不超过n阶的同伦群可以用这个方法算出来，以及Milnor所给出的Brouwer不动点和no-hair定理的微分拓扑证明。管状邻域的重要性不止于此，它与示性类有着紧密地关系：紧子流形在其管状邻域的Thom类是这个子流形的Poincare对偶。管状邻域的重要性在 GTM82 中还会有更多体现。

微分拓扑中还有一个值得关注的对象：横截条件（Transversal）和相交理论，作为正则值原像是子流形的推广，微分拓扑中引入了横截条件来刻画$f^{-1}(S)$是X的子流形的条件，特别地S是Y的子流形，如果考虑嵌入$f : X \to Y$，那么横截条件就是描述X和S在Y中是否“规则地相交”（例如相交线）。从这个角度出发可以引出相交数这个同伦不变量，进而用微分拓扑的观点给出了映射度、Euler示性数、Lefschetz数的定义。在 Guillemin-Pollback的书中有着非常详细的论述，并且证明了 Poincare-Hopf定理（向量场的指标和是示性数）、Lefschetz 不动点定理（Lefschetz数不等于0等价于映射有不动点）、Hopf映射度定理（球面间映射f, g如果$deg\ f = deg\ g$ 则 f, g同伦），最后一章证明了Gauss-Bonnet公式。这些漂亮的结果其实在GTM 82中也都有（除了Hopf映射度定理），但是这里提供了一个微分拓扑的观点。

流方法在微分拓扑中的用处：微分拓扑中有很多构造性的方法（例如上文提到的Hopf映射度定理），用流生成微分同胚是最简单的一个，除了可以造微分同胚，还可以给出流形的同伦型（Morse理论：紧流形的同伦型的CW结构由Morse函数的指数给出）。

微分拓扑的后续：

手术理论: C. T. C Wall: Surgery on Compact Manifold. 手术理论可以证明强Whitney嵌入，在h-配边中也有重要应用。

研究微分同胚和同胚的差异：Exotic微分结构，这里有很多非常令人震惊的结果，Milnor证明了七维球面上存在28种微分结构，Donaldson利用Yang-Mills方程证明了$\mathbb{R}^4$中存在不可数种微分结构（其余的$\mathbb{R}^n$都是唯一的）等等，Milnor的原始论文仅有六页还是值得一读的。

其余我有所了解的方向大多与代数拓扑重合，大家可以移步代数拓扑部分。

- 李群与纤维丛：

王作勤教授13年的李群讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Lie.html;

Shoshichi Kobayashi(小林昭七), Katsumi Nomizu(野水克己): Foundations of Differential Geometry (微分几何基础).

- 辛几何：
- Chern Weil理论：

4.3 近世代数

建议教材：官方教材是欧阳毅的《代数学II:近世代数》

[1] Joseph Rotman: Advanced Modern Algebra（高等近世代数），群论、环论第一部分；

[2] Patrick Morandi: Fields and Galois Theory, GTM 167. 域扩张和有限Galois理论部分。

主要参考书：

[3] 冯克勤、李尚志、章璞：季近世代数引论、近世代数三百题，中国科学技术大学出版社；

[4] Thomas Hungerford: Algebra, GTM 73.

次要与进阶参考书：

[5] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra.

学习建议： 这门课主要是学习一些简单的群环域的理论以及Galois理论，但由于科大的教学速度以及代数学基础教学的缺失，普通班基本上只讲到域扩张为止。

注：代数学基础这门课不同老师的教学风格差异很大，笔者认为在学习近世代数前至少要掌握如下两点：

（1）简单的初等数论知识，如整除、同余、素数等概念；

（2）多项式环的简单性质：了解多项式和多项式函数的区别，不可约性（至少要了解 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 上多项式的一些性质）。

近世代数是本科阶段接触的第一门较为抽象的课程，初学会非常不适应，尤其是它与之前的线性代数的风格有较大区别。相比数学课，近世代数在初学时可能更像一门“语文课”，经常会出现大概知道怎么证但是写不清楚的情况。因此除了理解清楚课本的概念与定理外，还应该学习如何把自己的想法表达清楚，这对于后续任何课程学习的帮助都是很大的。学习近世代数大家常遇到的另一问题是：尽管搞清楚了书上的定理，却仍然不会做题。课本习题难度确实很大（注:尽管笔者并不认为做一些怪题除了应付考试外有很大意义），但其中仍然有一些套路，可以对照类似[3]这种有答案的书来学习套路。

代数课程的学习，要将抽象与具体结合，需要动机和实例。这门课的学习动机主要是围绕着五次以上方程不存在根式解的证明。在平时学习中，要多将抽象的概念与定理和熟悉的具体例子结合起来，如：置换群、循环群、线性群、变换群、整数环、多项式环、数域、有限域等，这些例子一定要熟悉。

- 群论：群论部分首先先用了大量篇幅让大家熟悉一些基本概念、同态的三个基本定理，其中需要花一些工夫理解陪集、正规子群、商群（为什么需要定义正规子群？为什么不能像线性空间一样对于一般的子对象做商？）。群论部分最重要的研究方法是群作用，因为单独研究一个群本身是困难的，我们常通过研究一个群在别的对象上的作用来反过来了解群的性质（实际上，很多群我们是先知道它的表现，再知道它的自身结构）。我们可以让群作用在集合上，作用在群、陪集、共轭类上，作用在线性空间上(群的表示)。我们常用的群作

用有左乘、右乘的正则作用，共轭作用等。接下来我们利用群作用来得到Sylow定理、有限生成Abel群结构定理这两个研究、分类群作用的重要定理，我们可以用这两个定理来实现分类有限生成Abel群、分类低阶群、判断给定阶数的群是否为单群等。群论部分的难题很多，大家可以看看三百题上是怎么处理这些的（注：笔者认为，对于做题，不考虑考试的话，rotman的习题难度就足够了）。另外，有关自由群和群的表现，感兴趣的同学可以去了解一下Nielson-Schreier定理和组合群论。

- 环论：环是一个具有两种运算结构的对象，学习了群论之后，要熟悉类似的基本概念并不难。关于环的基本性质我们要会判别一些简单的环是否为整环、ED、PID、UFD，理想是否为素理想、是否为极大理想。本章的重点是关于多项式环的性质。多项式环在代数中非常重要，从线性代数到Galois理论、代数几何，多项式几乎存在于代数的每个角落。在近世代数课程中，我们主要需要掌握高斯引理、爱森斯坦判别法等来判断多项式是否可约。

- 域扩张与Galois理论：这一章主要是讲述了Galois基本定理以及根式可解等价于 Galois群可解这一定理。首先我们需要知道什么样的域扩张是正规的、是可分的、是Galois的，最好要熟记几个不是上述扩张的例子，也要对诸如两个 Galois扩张的复合是否为 Galois扩张之类的问题的答案烂熟于心。关于 Galois群的计算，其实这相当复杂，掌握低阶的扩张的计算以及一些高阶的特例即可。有限域的性质也非常重要，像有限域上的不可约多项式啊、有限域上的线性代数啊，可以平时多加思考。

总而言之，对于非基础数学方向尤其是统计方向的同学来说，这门课可能并没有什么用而且非常难学，建议早点转到管院统计来回避这门课，选这门课的同学，除了认真理解概念完成习题外，可以自己去看看国外的经典教材，例如上方列出的参考书（主要蓝皮书实在是太烂了!），尽管可能对提高成绩没有帮助，但可以陶冶情操，让你认识到这门课并不是那么枯燥无聊。**对于基础数学方向代数、几何方向的同学，这门课所教授的代数内容是远远不够用的，**比方说代数几何里用到的环论知识远远超出了这门课的范围，代数数论里也会用到无穷的Galois扩张，因此需要学习大量的后续代数课程，而近世代数则是让你熟悉这样的抽象语言的第一门课，建议越早学越好!

4.4 代数学（模论、交换代数与表示论初步）

教材：欧阳毅：代数学III——代数学进阶。

参考书：

[1] Joseph Rotman: Advanced Modern Algebra (高等近世代数);

[2] Joseph Rotman: An Introduction to Homological Algebra;

[3] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra;

[4] 宋光天：交换代数导引；
[5] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups (有限群的线性表示), GTM 42, Springer;
[6] William Fulton: Representation Theory: A First Course (表示论基本教程), GTM 129, Springer;
[7] J. L. Alperin, Bell: Groups and Representations (群与表示), GTM 162, Springer.

学习建议：

这门课是科大数院给基础数学方向开出的一门作为近世代数的后续的课程，目的是介绍简单的模论、交换代数、群表示论。首先要搞清定位：这门课本质上还是一门科普性的课程。分三个部分介绍一下这门课的内容。教材使用的欧阳毅老师的代数学3。这本书其实还是不错的，这几年其中的typo也逐渐被消灭完了，读起来基本不会有什么障碍。

- 模论。推荐教材: [1]-[2].可能是因为英雄所见略同，教材第一章和Rotman上的模论部分基本上是大同小异。这一章主要是介绍了作为线性空间在环上的推广：模。学习的时候仍然要掌握那些基本的例子：线性空间、阿贝尔群、自由模、$k[T]$-模等等。介绍了基本的代数结构之后，就要学习如何从已有的对象生成新的对象（这是非常重要的），对于模，我们主要有商模、直和、直积、张量积、Hom等。

  和以前在近世代数里的学习不一样，我们在这些构造里引入了Universal Property:泛性质，从而以模范畴作为基本例子，介绍了所谓的"abstract nonsense"——范畴论，初次学习范畴论会比较难受，会觉得这只是一堆没什么用的废话，在这门课里应该多自己想想在具体的某个范畴里，始对象终对象、直和直积、推出拉回、正向极限/逆向极限、伴随函子分别是什么（建议可以去学习一下可表函子和Yoneda引理）。范畴论的威力会随着学习的不断深入而显现出来。

  回到模范畴里，这门课讲述了内射模、投射模、平坦模三种特殊的模以及其的各种判别法，关于它们的重要性，可以在同调代数里学习导出函子等内容。这章的最后介绍了对PID上的模的刻画，以及类似有限生成阿贝尔群结构定理的PID上有限生成模结构定理，注意这个定理其实可以导出我们熟悉的线性代数中的Jordan标准型。

- 交换代数。推荐教材：[3]-[4]。可能是因为英雄所见略同，教材的第二章和[1]上的交换代数部分也有很大的相似之处。在这门课的这一章的学习中，主要就是了解交换环的性质、局部化、局部性质、Nakayama引理、诺特性等一系列基本的内容。在这一章的后半部分，给出了关于仿射代数几何的一点内容，在这部分我们需要搞清代数集与坐标环的理想之间的对应关系，掌握Zariski拓扑以及可以说是代数几何的大门的定理:Hilbert零点定理(weak与一般情况)。这个定理，给出了根式理想与不可约代数集之间的一一对应(weak:点与极大理想一一对应)，从而把代数对象和几何对象对应了起来，进而交换代数就可以用几何的语言来叙述，这就打开了代数几何的大门。当然，交换代数上这门课只是图个乐，真要仔细学还得去隔壁的交换代数课程。

- 有限群的表示论。推荐教材[5]-[7]。可能是因为英雄所见略同，教材的第三章和[7]的表示论部分也神奇的相似。这一章前几节是关于非交换环的一些性质，没有耐心的可以直接跳过，知道 Wedderburn-Artin定理和Schur引理即可。本章的重点是有限群的不可约$\mathbb{C}$-表示的特征标表，可以看看是怎么推导出诸如行列正交关系、诱导表示里那个互反律（记不得名字了）等性质的。

  至于怎么求特征标表，其实我们也只能算几个低阶的，无非是找线性表示、标准表示(正则表示去掉平凡表示之后的部分)、由子群的表示诱导、由商群的表示诱导，然后剩下的部分就像做数独一样用正交关系搞出来。个人认为至少得掌握: Abel群、S_4、S_5、A_4、A_5、二面体群的特征标表。学有余力可以去了解一下S_n、A_n、$GL_2(\mathbb{F}_q)$的表示怎么求。

总之，这门课对于代数方向的同学，只能算一门科普课，师傅领进门，剩下的学习就要看自己了。至于这门课有什么用，可以去学下列课程（科大开的课）

后续课程: 交换代数，同调代数，群表示论，代数几何，代数数论。

4.5 常微分方程、古典偏微分方程

常微分方程

建议教材：

[1] 丁同仁、李承治：常微分方程教程，第1-6、8-9章；

主要参考书：

[2] W. Walter: Ordinary Differential Equations, GTM 182;

[3] 朱思铭：常微分方程学习辅导与习题解答；

次要与进阶参考书：

[4] 张锦炎、冯贝叶：常微分方程几何理论与分支问题。

[5] B. И. Arnold: 常微分方程.

[6] Shui-Nee Chow (周修义), Jack K. Hale: Method of Bifurcation Theory.

学习建议：微分方程1这门课中常微分方程的课时只有三个月不到，以计算、求解为主。教材建议用[1]，但[1]有部分地方不够严谨，可以参考[2]。计算实例可以参考[3]，但不要沉迷于奇葩方程的计算中，认真完成课后习题即可。但同学们**切忌掉以轻心**，基本的计算必须加以练习才能熟练掌握，不要等到考前突击。常微分方程部分的主要**课程内容**如下：

- 常见常微分方程求解
- 奇解与包络: 主要是寻找那些求解过程中丢失的解
- 常微分方程解的存在唯一性定理(Peano存在性定理)：皮卡(Picard)迭代法

  这部分是这门课最重要的一个部分，里面用压缩映射原理证明存在性的方法会在未来微分方程的学习中反复出现。有一些具体的计算可以参考[3]。Picard迭代的思想在现代微分方程的研究中非常重要!

- 高阶微分方程、线性微分方程组的求解

  没什么好说的，套公式就是了。

- 平面动力系统简介

  笔者认为这部分才是常微分方程最精彩的内容，但限于大二学生知识水平有限，无法展开讲述微分动力系统的知识。平面动力系统的相图、Lyapunov稳定性的判断等还是需要掌握。感兴趣的同学可以阅读[4]-[6]，或在科大开设“微分方程与动力系统”这门课的时候去修读。

- 边值问题求解：Sturm-Liouville问题

  也是非常重要的一类问题，学就是了。

笔者不是做微分动力系统的，所以不太了解ODE的深入知识，就此打住。**但实际上，我们课程里所学的常微分方程仅是最基础的求解方法，定性理论几乎只是皮毛（因为大二学生的基础知识确实不够）。单就由此延伸下去是一套非常深刻的理论（不仅限于微分动力系统这一个方向）。**

古典偏微分方程

建议教材：

[1] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations (2nd edition), AMS;

主要参考书：

[2] Gerald B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations（偏微分方程引论）;

[3] 沈大卫微分方程1讲义;

[4] W. Strauss: Partial Differential Equations, an Introduction（对付用这本书教课的老师的考试）.

注意事项：

（1）学习偏微分方程的时候切勿把它看成一个统一的学科。椭圆方程(拉普拉斯)、抛物方程(热)、双曲方程(波)的研究方法和研究问题都是完全不一样的，这是因为它们的几何或物理背景不一样。椭圆与抛物方程联系较多，而双曲方程则完全不一样。**但微分方程1这门课里面涉及的都是这些微分方程最基本的性质，所以没有所谓“方向”之分。**

（2）此外，**切勿将本科阶段的微分方程视作以“解方程”为主的课程：**众所周知，能解的方程基本都逃不脱分离变量法这个随便算几个例子就会的无聊方法，这和真正的偏微分方程研究几乎不相关。如果有人告诉你偏微分方程研究里的重点是对方程的显式求解，那他一定不懂偏微分方程。

学习建议：这门课每年教材不一样，但笔者认为**[1]的第2、4、3章绝对是最适合的教材且没有之一！**在分块介绍之前，笔者需要再三提醒：**这是本科阶段第一门具有较高强度计算量的课程，请同学们务必用手拿着笔在纸上计算每一步。否则失之毫厘，谬以千里。分部积分不会请对照附录、写成分量计算！**

本科阶段的古典PDE内容大致如下（打星号的是时间不允许的内容，但实际上还是值得一学的）：

- 传输方程：最简单但性质最差的PDE

  没太多好说的，求解很简单。性质差到没有任何特殊结论。

- 拉普拉斯方程：调和函数的平均值原理和极大值原理、格林函数

  这部分主要介绍的是求解$\Delta u = f,\ \Delta := \partial_1^2 u + \cdots + \partial_d^2 u$的边值问题。如果$f = 0$，则我们称这样的$u$为调和函数。调和函数满足平均值性质、极大值原理、梯度估计等诸多有用的性质，其内容和证明建议全部掌握。另外就是边值问题的求解，首先Evans上证明了一般的

边值问题解是存在唯一的，其次在一些特殊区域上，格林函数法计算解的表达式（也就是物理上的“电像法”）需要掌握。

- 热方程：傅立叶变换法、热球（平均值）性质、极大值原理

  这部分[1]没有讲傅立叶变换求热方程基本解（貌似第四章有），但这个方法非常重要，需要掌握。其它没有太多可说的，要注意热核本身具有很强的衰减性，这一点要记住。

- 波动方程：求解公式、有限传播速度

  本科阶段的波方程没有太多东西可讲，1、2、3维的求解公式推导过程需要记住。波方程的基本解是个分布（广义函数），因此这门课你是看不到基本解的。另外，波方程的能量守恒（有限传播速度）非常重要，需要记住。

- 方程的求解方法：分离变量、尺度(scaling)变换、*粘性法（奇异摄动）、*固相法

  前面的章节可以看成是对几个基本方程的基本性质的积累，但这一章节则是拔高你在PDE上的思想层次。[1]的第4章，以及后面的第8、9、11章都侧重于PDE的思想方面。分离变量不需多说。Scaling的方法则是可以让你直接看出很多不等式或是坐标变换是否正确：因为我们大部分情况下都需要方程具有scaling不变性！这在后继的学习，甚至PDE的研究中都是非常重要的思想。

  粘性法是讲一阶方程强行加入一个抛物项（相当于耗散/扩散项），再令这项趋于0. 传输方程的性质太差了，相比之下抛物方程（尤其是）热方程在正则性方面显然有更多更好的结论。直接做不出来的能量估计可以用粘性法绕开。这在微分方程2会学到（[1]的7.3节）。粘性法也是现代PDE研究中非常重要的一个方法。

  固相法是为了处理一些写成震荡积分形式的解的长时间行为。Evans上基本已经把震荡积分的初步形式给介绍了（包括Morse引理），更多的知识会在调和分析里面学到。

- *一阶方程：Hamilton-Jacobi方程、粘性法、激波问题

  此部分在[1]的第3、4、10、11章里面都有涉及，其中第3、10章以介绍Hamilton-Jacobi方程为主，这是一类极为重要的一阶方程。除此之外，还有困难重重的激波问题简介（或者叫Riemann问题）。科大没有任何一门课程认真讲过一阶方程，但对PDE感兴趣的同学可以找个时间学一学。除了[1]之外, Sergiu Alinhac的 Hyperbolic PDE 一书也是很好的参考资料，前四章为一阶方程的内容，第5-7章则是波方程的简介（拟线性波方程存在性的经典证明）。

4.6 （古典）微分几何

建议教材：刘世平教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teaching.html;

主要参考书：

[1] 陈卿、彭家贵：微分几何；

[2] 沈一兵：整体微分几何，高等教育出版社。

[1]是科大出版的教材。[2]上华罗庚班微分几何的主要参考书之一，整体微分几何内容详尽，也是丘赛这部分题目的主要来源。

进阶参考书：

[3] Shoshichi Kobayashi(小林昭七), Katsumi Nomizu(野水克己): Foundations of Differential Geometry (微分几何基础);

[4] Shing-shen Chern (陈省身): A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 45, No. 4 (1944), pp. 747-752;

[5] Tobias Colding, W. Minicozzi II: A Course in Minimal Surface;

学习建议：这门课实际上应该称之为古典微分几何，其语言已经不适用于现代的微分几何学，但是这门课对于大部分方向来说仍然有其重要意义，**特别是不能被微分流形和黎曼几何覆盖**。

这门课的内容大致分为：曲线和曲面的局部理论、活动标架法、曲面的内蕴几何和整体微分几何。如果是华罗庚班，那么整体微分几何部分内容会讲的更多。(这里，我们主要按照刘老师讲义的内容进行讨论）

在曲线和曲面的局部理论这部分计算会非常复杂（首先要理解局部这个概念）。熟练计算是一方面，但是也要恰当的使用一些结论和技巧。比如说球面上曲线的曲率和挠率以及其曲线的Frenet 标架（在整体微分几何里也经常用，请参考[2]的27页），旋转曲面、函数图像、管状曲面的Gauss曲率和平均曲率等等（熟悉这些结论不但可以方便计算，也可以用来“猜曲面”）。特别是这部分会提供大量的例子，这些对于以后的学习都是有用的，比如说螺线（唯一的曲率和挠率恒为常数的曲线）、二次曲面、直纹面（单叶双曲面和双曲抛物面都有两种直纹面的看法），典型的极小曲面（比如说旋转面极小曲面：悬链面，直纹面极小曲面：正螺面）等等。

学习这些例子不仅要熟悉他们如何表示、Gauss曲率和平均曲率，最好还要大概知道他们的几何图像是什么样的，并且了解到底曲率是如何影响这个曲面的几何特征的。我个人认为这是学习这门课最关键的地方。我们最多只能想象二维的曲面，因此只有充足的例子我们才能形成更好的几何直观。这里我再次推荐刘老师的讲义，这里面有大量的插图和具体计算可以帮助我们掌握这部分内容。值得一提的一件事，曲面我们通常有三种表达：参数表示$r(u,v)$(r_u, r_v不共线)，作为函数的零点$f^{-1}(0)$(这里还需要∇f在局部上处处非0)和作为函数图像$(x, y, f(x, y))$，在**局部上**这三者等价（隐函数定理）。这件事对于解决某些局部问题很有帮助，例如陈卿，[1]的P27第34题，可以用函数图像表示比较容易解决。

自然标架和正交标架这部分其实某种程度上算是微分几何这门课最有特色的一部分内容，活动标架法的思想我们在后续的学习中还会遇到。本节的主要结果是证明第一基本形式和第二基本形式在合同变换下唯一一个曲面（对比于曲线论中的曲率和挠率唯一决定一条空间曲线）。先来谈一下自然标架，这里首先建议熟悉如何用Einstein求和约定做运算，Christoffel符号的公式最好会背下来，特别是正交参数下的Christoffel符号公式，对于结构方程Gauss方程和Codazzi方程最好掌握其推导，最好能记住正交参数下的形式。在刘老师讲义中第20节，会对这两个结构方程有清晰的几何解释，推荐阅读。

正交标架的理论又称活动标架法，是大数学家E. Cartan所引入的革命性的工具，后续进一步发展就是著名的纤维丛。我们在这里只能初窥其貌，如果想要深入的学习纤维丛我极力推荐[3]这本书。活动标架法的高明之处在于引入了微分形式和外微分运算，用它们给出了一组非常简明的结构方程。这里关于微分形式的运算需要大家熟练掌握。在这里我认为主要有三个内容需要掌握:

- 幺正标架的结构方程，以及如何表示Gauss曲率和平均曲率。
- 如何用第一第二基本形式计算幺正标架中的微分形式(ω_i^j尤其是ω_1^2的表示)，这里我们通常考虑的是正交的参数。
- 测地曲率的概念和几何含义：曲面上测地曲率为0的曲线是测地线。用微分形式表示测地曲率$k_g = (d\theta + \omega_1^2)/ds$(其中$\theta$是曲线切向量与幺正标架中$e_1$的夹角)，这一结果可以导出计算测地曲率的Liouville公式（丘赛曾经出过这个公式的推导）。更重要的是它可以导出局部曲面片的Gauss-Bonnet公式，我们在后面还会再提到这个结果。

关于曲面的内蕴几何这部分其实可以被黎曼几何所覆盖，但是对于学过黎曼几何的同学我也推荐看一下，因为黎曼几何中的很多结论是对于维数大于2的流形才成立的。曲面自身有很多特殊之处，另一个反映曲面特殊之处的结果是陈省身先生所证明的等温坐标系存在性 (即存在局部坐标(x_1, x_2)满足$ds^2 = e^{\phi}(dx_1^2 + dx_2^2)$)也就是说曲面局部是共性等价的，这一结果可以看作复几何中非常深刻的Newlander-Nirenberg定理的推论。

对于初学者而言，内蕴几何可以理解成只考虑一个抽象曲面的第一基本形式，而与反应如何嵌入到$\mathbb{R}^3$的第二基本形式无关。直白的说法就是我们如何通过不离开地球表面去研究地球的几何信息。内蕴几何我认为很重要的一点是需要理解曲面上的导数，也就是现代所谓的联络这个概念，以及对应的几何含义——平行移动。另一方面测地线的性质会深刻地影响曲面局部和整体的性质，这一点会在黎曼几何中有着更为深刻的体现。

整体微分几何这一部分，最重要的结果就是Gauss-Bonnet的公式，这一结果有着非常深刻的含义，曲面的积分是一个分析量，而曲面的示性数是一个拓扑量（实际上是同伦不变量），现代将曲面的积分解释为算子的指标，算子的指标与一个同伦不变量相等，这就是著名的指标定理所揭示的内涵。除了我们在讲义和课本中会学到的经典证明，我推荐大家在有一定黎曼几何的基础

后可以阅读陈省身先生的成名作之一[4]——活动标架法的辉煌成就之一。在后面整体微分几何的学习中也能看到Gauss-Bonnet公式的巨大威力。

整体微分几何还有很多有趣的内容，大家可以进一步参考[2]，这些其实都可以看做活动标架法的应用。比如说可以证明Minkowski公式（刻画了Gauss曲率和平均曲率的关系），这是一个在整体微分几何中一个有力的工具，而且在这本书第五章可以看到超曲面的理论，在超曲面上如何运用活动标架法去解决几何问题。特别是对于准备丘赛的同学而言，在准备整体微分几何这部分的时候，这本书是非常重要的参考。

最后我想提及一些极小曲面的内容，极小曲面是平均曲率为0的曲面，而且它的另一个几何含义是固定边界的曲面变分的面积泛函的极小值，这一理论继续延伸就是极小子流形。极小曲面是现代数学的热门领域之一，是几何和分析的交汇处，影响了诸如辛几何（J-全纯曲线定义的动机）、椭圆方程、几何流等等领域，而且在应用和计算数学中也有重要地位。这是一个值得深入了解的领域，这里推荐一本入门极小曲面的经典教材[5]（当然你需要有分析的基础才能阅读这本书）。

4.7 复分析

建议教材与参考书：

[1] 史济怀、刘太顺：复变函数，中国科学技术大学出版社；

[2] Elias M. Stein: Complex Analysis, Chapter 4;

[3] 方企勤：复变函数教程，北京大学出版社；

[4] R. Greene, S. Krantz: Function Theory of One Complex Variable （单复变函数论）, Chapter 6, 8-10;

[5] Walter Rudin: 实分析与复分析。

学习建议：从应付考试角度出发，我推荐把[1]的前五章大部分习题都做一遍。如果是初学者，[3]是相当不错的，特别是全纯开拓。这部分建议不要看[1]的第六章，而是看[2]的介绍。

从学科本身出发，单复变有太多可讲的东西了。因为是基础课，最大的建议就是认真学、好好学。本科的复分析是三块内容：Cauchy的积分理论，Weierstrass的级数理论以及Riemann的几何理论。这三块内容是互相交错的，不过科大普通班Riemman映照定理有可能不讲。学习的时候应该注意，虽然这门课叫作复“分析”，但是其中有不少内容其实是几何的，要从几何的视角去理解。

下面谈一些拓展内容。复分析和实分析其实关系挺密切的，[5]就是在阐述这样的观点。有些复变的深刻定理——比如说Runge逼近定理，是可以用实分析或者说泛函分析的方法去证明的。再比如对某个函数傅里叶变换之后是一个全纯函数，这时候一些复变的定理可以导出比较有意思的实变结果，例如非零的$L^1(\mathbb{R})$函数及其傅立叶变换永远不可能同时具有紧支集。而[2]的第4、5章则有一些复分析与傅立叶分析中的内容，这与调和分析中的算子插值理论关系密切。1975年解决Tomas-Stein傅立叶限制性估计的Stein复插值定理就是一个纯粹的复分析方法证明的定理。

要注意，学习复变的时候，会遇到很多求和和积分互换顺序，这时候实变的控制收敛定理其实是能用的。若仅局限在数学分析的，复变很多深入知识是没有办法学习的。因此，学习的时候可以去尝试挖掘这两个学科之间的关系。

还有一点要提的是，在学复变的时候不可避免的会碰到一些难以理解的几何上的东西，譬如说多值函数，再比如Picard小定理。对这些对象的研究其实是另外一门学科——黎曼曲面的任务。举个简单的例子：对复变函数开根号，得到的是一个标准的多值函数。如果我们把复平面的负半轴切掉，并且绕成类似于螺旋面的样子，这其实是一个黎曼面。

事实上，黎曼面一个定理指出，黎曼面M上的多值函数其实被M的基本群的特征（character）所确定（类似于Abel-Jacobi定理）。特别地，单连通区域上的所有多值函数都能被单值化。所谓单连通区域，复变的定义当然是用Jordan曲线定理，但是我也要指出真正的定义是基本群平凡。所以我们可以看到复变的一些内容和拓扑（特别是覆叠空间和基本群）有很大关系。再举个例子：双周期函数，其实是环面$\mathbb{C}/\Lambda$上的亚纯函数。Picard小定理本身也是黎曼面里单值化定理的一个推论。所以很多时候，不用特别去关注复变里这个定理的表述或者是定义为什么那么奇怪，感兴

趣的可以继续去读黎曼曲面的书。

关于进一步的学习：笔者仅仅列举自己知道的：

1. 多复变函数论：十分优美的学科，特别是层论出现之后。多复变有很多和单复变迥然不同的性质，譬如说Hartogs phenomena。多复变在很多领域有非常大的应用，比如说C^*代数，再比如复几何（关系相当于微积分和微分流形的关系）。

2. 黎曼曲面：具体内容见本指南第四章的对应小节。不过在这我们要额外提一句，Schwarz定理的诸多推广曾经是热门之一，促使了双曲几何（hyperbolic geometry）的发展，不过具体的我也没有了解过。

3. 值分布理论：我只是听说过，但是应该是非常优美的学科。

4.8 实分析

建议教材：

[1] Elias M. Stein: Real Analysis, Princeton Lectures in Analysis, Chapter 1, 2, 6;

[2] Gerald B. Folland: Real Analysis and its applications, Chapter 1, 2, 3, 6节选.

主要参考书：

[3] 王作勤教授的实分析讲义；

[4] 周民强：实变函数、实变函数解题指南，北京大学出版社。

次要与进阶参考书：

[2] 的第6、7、8、9章；

[5] 汪林：实分析中的反例；

[6] Lawrence C. Evans, F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions.

[7] 胡适耕：实变函数与泛函分析——定理·方法·问题

学习建议：科大本科的实分析课程主要讲授勒贝格测度与积分理论，以及函数的微分，最后会介绍一下抽象测度。教材使用Stein [1] + 周民强 [4]足够。在学习可测函数收敛性、积分收敛定理、以及后面太阳升引理那一块建议参考周民强的书。L^p空间可以看Folland [2] 第六章或者周民强 [4] 第六章。另外，胡适耕的实变函数与泛函分析有一本答案书 [7]，里面有一些技巧的总结，这本书大家可能很少了解到。

Stein的教材 [1] 写得非常好，但远远没有到达“实分析圣经”的地步——它在我上面提到的部分写得很残缺，甚至没有这方面的内容。周民强更适合作为练习题、找例子、找定理的来源，复习的时候可以仔细读一读周民强的书而不是Stein的书。另外，建议备一本汪林 [5] 来查询一些奇怪的命题是不是成立。

我个人认为，讲完勒贝格测度与积分理论之后，可以尝试直接上抽象测度，然后用符号测度的语言来讲函数的微分，这样更加本质。后一种教学方法在2018年春季王作勤教授的实分析课上出现过，因此并不是不可实施。当然，这些评价也可以参考笔者的知乎回答 https://www.zhihu.com/question/21712683/answer/191186945.

但要注意，无论以何种方式学习实分析，一定量的练习与总结是必要的，**初学时写任何证明切勿忽略任何细节**。这门课碰到的函数都是性质很差的（仅仅是可测或者勒贝格可积函数），但它教会你最重要的一点就是“**如何用好函数去逼近坏函数**”。下面列举一些实分析这门课里面重要的点，当然这些也可以在评课社区找到 https://icourse.club/course/2058/#review-153

- 引入勒贝格测度的动机

  任广斌老师曾经说过“分析是极限的艺术”，其核心要义，就是用一列“好函数”，在“某种意义下”逼近某个“坏函数”，并尽可能多地让坏函数“继承”好函数的性质。数学分析里面，我们最终引入了“一致收敛”，来完成这件事情。但请回忆：一致收敛严格强于逐点

收敛。做一致收敛的过程，对函数的逐点行为要求太高！对那些很粗糙的函数，例如L^p可积函数，根本无法探讨逐点行为——早在数学分析A1里面的勒贝格可积性定理就告诉我们，修改可积函数在零测集上的行为不影响其积分值。因此，数学分析的工具难以研究可积函数类（及其衍生物Sobolev函数类），必须寻求新的工具。

勒贝格测度与积分理论就解决了这个问题。既然我们无法做到“点点”逼近，那我们就想办法让那些无法逼近的“坏点”充分少——把它们并起来，这个集合的“大小”任意小，甚至是0，以寻求妥协。那如果刻画“大小”呢？答案就是勒贝格测度。

- $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度

这部分没有太多可说的，Stein的书[1]引入得更加契合这门课的精神：用好的东西去逼近坏的/未知的东西。周民强的书[4]则是效仿抽象测度直接给了Carathéodory 可测的定义。主要重点是：

1. 勒贝格测度的Borel正则性：任意集合“Borel等测包”的存在性、用开集/闭集去逼近可测集。这些结论的证明可以参考[4]。更多的习题可以参考Stein第一章的28-30题等。这条性质相当于允许我们（某种程度上）用Borel集（这种好的集合）去“代替”一般的可测集。例如我们证明一些结论时，可以先对开集证明，然后推广到Borel集，最后再到一般的可测集，这种方法在学习抽象测度会多次用到！

2. 两个特例：康托(Cantor)集$\mathcal{C}$和不可测集$\mathcal{N}$。没有太多好说的，两类集合的构造和基本性质必须掌握，它们经常作为经典反例出现。请认真完成Stein第一章的1-4、31-36题，都是很重要的性质。

3. 可测函数收敛性、各类点集的刻画：这部分最重要的内容是如何刻画可测函数列的各种收敛、不同种类的收敛性之间蕴含关系的证明。学习这部分时建议参考[4]的3.2节：如何用某些可测集的可列交/并来刻画收敛性。具体地，令$E_n(\epsilon)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}$. 那么

$$f_n \xrightarrow{\text{依测度}} f,\ if\ \ m(E_n(\epsilon))\to 0\ \ \forall\epsilon,$$

$$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f,\ if\ \ m(\underbrace{\limsup_n E_n(\epsilon)}_{\text{可以理解为它发生无穷次}})\to 0\ \ \forall\epsilon,\ \ i.e.,\ m\left(\bigcap_N\bigcup_{n>N}E_n(\frac{1}{k})\right)=0\ \ \forall k.$$

通常，很多学生会忽略掉a.e.收敛里面的$\limsup_n$。而证明一列集合的上极限是零测集，我们的唯一工具就是 Borel-Cantelli引理（Stein第一章习题16）。可以看见，如何刻画满足某些性质的点集（指写成可测集的可列交、并）非常重要，而[4]的第一章有一些这样的练习，可以有选择性地加以练习。这部分还有两个重要的结论：Egorov定理与Lusin定理，大家不妨试一下自己证明Egorov定理，当作上面那段话的练习。

- $\mathbb{R}^d$上的勒贝格积分

  积分的构造没什么好说的，但要记住：简单函数、阶梯函数可以点态逼近任一可测函数。

  1. 积分收敛定理的推导与应用: 用得较多的是Fatou引理和控制收敛定理。其中Fatou引理证明控制收敛定理的方法要会，这可以用来证明广义控制收敛定理（控制函数可以与n有关）。如果Fatou方法仍然解决不了（缺少控制函数），则可以考虑使用Egorov定理。至于与其它收敛性的蕴含关系，只需记住L^p收敛蕴含依测度收敛（Chebyshev不等式），从点态收敛出发证明积分的收敛必须有积分收敛定理。

  2. 富比尼(Fubini)定理：记结论比证明重要一万倍。

- L^p空间

  1. 牢记几个基本不等式：涉及指标变换就考虑Hölder不等式，会证$L^p \cap L^r \subseteq L^q \subseteq L^p + L^r$，知道何时不同$L^p$空间有直接的蕴含关系（总测度有限；或者测度存在最小正值，例如计数测度）。具体可以参考[2]的第六章。

  2. L^p范数的等价表达形式：联想$p=1$时为什么说勒贝格积分是一层层水平集堆起来求和?
  $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \int fg\, d\mu = \left(\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x : |f(x)| \ge \alpha\} d\alpha\right)^{1/p}$.

- 函数的微分

  这一部分的核心问题很简单：数学分析里面的牛顿莱布尼茨公式，即微积分基本定理，何时成立？是否具有充分必要条件？

  在给出这个问题的答案之前，我们需要明确：

  1. 不定积分的微分有什么性质？勒贝格微分定理给出了答案，Hardy-Littlewood极大函数给出了证明。学这部分的时候，请问自己一个问题：H-L极大函数起到了什么过渡作用?（给出点态上界，自身又L^p/弱-L^1有界，这是极大函数才能做到的事情）

  2. 由于积分和微分的线性，我们只需研究非负函数。那么非负函数的不定积分是一个单调函数，从而有了讨论单调函数（以及其线性组合 BV函数）的动机。

  3. 至此，我们已经知道，不定积分的微分a.e.=被积函数本身，那两边积分回去，牛顿莱布尼茨龚诗是否成立呢？这就是绝对连续函数被引进的原因——因为我们可以证明，阻碍牛顿莱布尼茨公式成立的唯一奇异性，就是那种“导数a.e.为0，但并不为常数的函数（康托-勒贝格函数）”——而绝对连续函数恰恰是BV函数抹去这种奇异性之后剩下的函数全体，这个定理在周民强的书上可以找到，从而核心问题就得到了解决。至此，勒贝格测度与积分理论的框架基本搭建完成。

- 抽象测度

这部分建议[1]的第六章和[2]的前两章混着看。[2]的第一章无关紧要的东西太多，因此可以考虑以[1]的第六章为主。

1. 抽象测度的构造: 这部分主要记住抽象测度的构造过程。先在X的一个代数$\mathcal{A}$上构造一个准测度(pre-measure)μ_0, 再用 Carathéodory延拓定理延拓到σ-代数$\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$上成为外测度$\mu^*$，最后再限制在可测集上成为测度$\mu$。

2. 两个特例：实直线上的Borel测度、乘积测度与富比尼定理

两个特例对应的代数（有理区间、“可测矩形的有限并”）、σ-代数分别是什么（Borel σ-代数、乘积σ代数）一定要搞清楚。要注意，乘积σ代数并没有包含所有“乘积可测集”，因为出现了诸如$\mathcal{N} \times \{0\}$这种本该是二维零测集却不在乘积σ-代数中的反例。换句话说，这里出现了“零测集的子集不一定是可测集”这种不应该出现的情况。因此，我们需要进行“修正”，也就是测度的完备化，这个可以参考[2]的第一章。

富比尼定理的证明在抽象测度里面显得更加本质。其推论：极坐标积分换元公式需要记住，在处理径向问题时非常有用。

- 符号测度: 这部分比较重要的有Radon-Nikodym定理（条件数学期望的本质）、Lebesgue微分定理（点态收敛的极大函数法，在调和分析里面会经常用到）、有界变差(BV)与绝对连续(AC)（牛顿莱布尼茨公式）。我们课内只介绍了$[a, b] \to \mathbb{R}$的有界变差函数，而真正$\mathbb{R}^d$上的有界变差函数并不是直接推广我们所学的定义。具体可以学习[6]这本书入门，BV函数是几何测度论中非常重要的一类函数。

注1：实分析仅是介绍了一套基本语言（测度与积分理论），本身不涉及过硬的计算等等，但是其“由好逼近坏”的思想非常重要；

注2：不要沉迷于周民强上的一些怪题。这本书拿来复习比较好。学习的时候注重知识框架的搭建与细节的填充；

注3：若以研究生基础的实分析来要求，则可以继续学习L^p插值理论、傅立叶变换、广义函数与Sobolev空间（[2]的第6-9章）；若需要学习几何测度论有关的知识，则可以用[6]来入门。后继课程：高等实分析/调和分析/微分方程2、（高等）概率论/随机过程/随机分析。

4.9 泛函分析

预修课程：拓扑学的点集拓扑部分（科大的泛函课程不需要），最好修过实分析（熟悉L^p空间及一些测度论的结论）。

建议教材：

[1] Michael Reed, Barry Simon: 现代数学物理方法（第一卷）·泛函分析，前6章。

主要参考书：

[2] Theo Bühler, Dietmar A. Salamon: Functional Analysis, AMS, Chapter 1-4;

[3] 许全华（等）：泛函分析讲义，高等教育出版社；

[4] Haïm Brezis: Functional Analysis;

[5] Walter Rudin: 泛函分析

次要与进阶参考书：

[6] 汪林：泛函分析中的反例；

[7] Paul Halmos, A Hilbert Space Problem Book, GTM 19;

[8] Barry Simon: Operator Theory. A Comprehensive Course in Analysis, Part 4, Chapter 1-3.

参考书的选择上，学校大多数年份用的教材《泛函分析讲义（上册）》（张恭庆）写得很差，可读性不强，并且没有认真讲弱拓扑的部分，除了备考以外没什么用。Rudin的[5]一上来就是拓扑线性空间等非常一般的情况，对初学者并不友好；而Salamon的[2]习题难度太大。综合来看，[1]或[3]作为教材比较合适，因为内容基本都有，行文也并不艰深晦涩。Rudin的[5]不是很适合以后做PDE等硬分析的同学学习。[4]后面有一些与偏微分方程相关的内容，当然你学完泛函直接去学Evans的书也是一样的。汪林的[6]仍然作为查找反例的第一来源；[7]则是有很多Hilbert空间的神奇结论，当然这些问题的难度很多都远超本科泛函分析课程的难度（这本书有中文版《希尔伯特空间问题集》）；而[8]或者 Michael Reed, Barry Simon所著的现代数学物理方法里面的算子分析那本书则是这方面的深入知识，有兴趣的同学可以看看。

学习建议：本科的泛函分析课程内容主要以下几部分：Hilbert空间，Banach空间理论（ Hahn-Banach定理、开映射定理、闭图像定理、共鸣定理等），拓扑线性空间，弱拓扑，紧算子的谱理论。

- Hilbert空间：没太多可说的，很像欧氏空间的直接推广。比较重要的内容是平行四边形法则、Parseval恒等式。

- Banach空间：也就是(无穷维)赋范线性空间。首先一个重要的是Riesz引理(区分一个Banach空间是否无穷维，只需看它的单位球或者单位球面是否是紧的，这个是充要条件)。其次，Banach空间的三大定理（Hahn-Banach 定理、开映射定理、闭图像定理）+共鸣定理是重中之重。尤其是Hahn-Banach 定理，讲述了一个有界线性泛函是如何从子空间延拓到全空间的，它可以用于刻画凸集的分离，进而用于定义凸泛函的次微分。

- 弱(弱*)拓扑：之前提到无穷维Banach空间的单位球(面)不是紧集(进而有界序列未必有收敛子列)，那么我们是否能给Banach空间换一套更弱的拓扑，使得之前的结论再次成立？那么X上的弱拓扑(以及X^*上的弱*拓扑)就给出了答案 (Banach-Alaoglu定理等)。弱拓扑的理解需要先学会拓扑线性空间的基本知识，科大用的张恭庆的书上并没有讲，只讲了序列的弱收敛。因此大家可以看[1]-[5]中任何一本上的介绍（建议[1]. [2], [3], [5]选一本）。这部分非常非常重要，在PDE、随机过程（布朗运动构造、Donsker不变原理等）等学科中会反复用到。

- 紧算子的谱：紧算子某种程度上可以看作方阵的推广(可以用有穷秩算子逼近)，而“谱”则可以视作特征值的推广。这部分的结论有点类似线性代数，学习的时候应该时刻回顾线性代数的结论(尤其是 Hilbert空间上对称紧算子的谱)。此外，Fredholm算子也是非常重要的一类算子，大家可以在[2]的第四章学到。其在椭圆PDE弱解理论中的应用 (Fredholm二择一)则可以直接看Evans的PDE教材第六章。

4.10 概率论

预修课程：最好知道基础的测度论知识，实分析的书上都有，或者参考[3]的第一章。

建议教材：

[1] Grimmett, Stirzaker: Probability and Random Process, Chapter 1-5, 7.答案书是《概率论题解1000例》

主要参考书：

[2] 李贤平：基础概率论；

次要与进阶参考书：

[3] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition.（此书有答案，并且第五版已经面世，都可以在Rick Durrett的主页上免费下载）;

[4] 钟开莱：概率论教程。

学习建议：这门课的内容涉及如下几个方面：

（1）概率空间、随机变量（连续，离散）、期望、方差、独立性、初等条件概率的基本定义；

（2）典型的随机变量：随机游走、正态分布、多元正态分布、Poisson分布；

（3）生成函数与特征函数；

（4）各种收敛的关系（几乎处处收敛，依概率收敛，依分布收敛（弱收敛），L^p收敛等等）。

以上都是必须要掌握的重点内容。当然，自己能知道如何证明中心极限定理和强/弱大数定律会比较好。此外，刘党政老师会另外补充一些关于熵和随机矩阵的知识。

和其他数学分支一样，多做习题，计算例子是很重要的。教材后面的习题可以选些做下（有答案）。如果有时间的话，可以看看[3]的前4章（这本书也是有答案的）或者[4]的对应部分。钟开莱的书[4]相对[3]而言，例子少些，实分析味道更重些（比如，他会介绍概率分布函数可以分解为3部分：纯跳跃部分+绝对连续部分+奇异连续部分，这个其实是抽象测度的勒贝格分解）。

4.11 (应用)随机过程

预修课程：实分析、概率论

建议教材与参考书：

[1] Grimmett, Stirzaker: Probability and Random Processes, Chapter 6, 7;（马氏链和鞅论）

[2] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition, Chapter 5, 6, 8.

[3] 徐佩：鞅论与随机积分讲义.

学习建议：这门课的主要内容是：离散状态的马尔可夫链、鞅论、布朗运动与随机积分初步。

- 离散状态马氏链：这包括了离散、连续时间的马氏链，一般是从离散时间马氏链起步。初学这部分时概念比较多，例如persistent state, transient state, period of a state, reversible chain（可反转马氏链）, stationary distribution（平稳分布）, recurrence time（重现时间）的定义及其相互之间的关系、转移函数的关系。另一个重要的内容是对不可约、具有重现性的非周期马氏链（Irreducible recurrent aperiodic Markov chain）的马氏链收敛定理。这个定理证明用到的coupling（耦合）方法是概率论的重要思想之一。

- 鞅论：Durrett的第五章其实也是很好的（离散）鞅的教材。这部分的内容是标准的：上/下穿不等式、极大值的不等式、（倒向）鞅收敛定理、可选时（或者叫宽停时，英文是optional stopping time）定理。要注意，"停时"这个概念是概率里面独有的，这很难在实分析中见到。此外，基本例子也要知道，例如随机游走的相关计算、几乎处处收敛但不L^1收敛的鞅。鞅是一个有用的技术工具，有时候即使问题没有明显的出现鞅也可以自己构造。

- 布朗运动与随机积分：布朗运动的基本性质（例如强Markov性、反射原理等）当然是必须知道的。还要知道轨道连续的高斯过程的分布是由期望过程和协方差过程唯一决定（布朗运动是特殊的高斯过程）。对于布朗运动存在性的证明可以不做要求，感兴趣的可以看[2]中第八章第一节。对于随机积分需要明白定义的整个过程，其实和实分析构造积分是类似的。对于随机积分的具体计算，基本上记住二次变差过程乘法表$dB_t dB_t = dt, dt dt = 0, dt dB_t = 0$就可以解决大部分你遇到的计算（当然你得先理解这个乘法表）。

4.12 组合数学

张先得老师的组合学课程

教材与参考书：

[1] Stasys Jukna: Extremal Combinatorics-with Applications in Computer Science;

[2] Reinhard Diestel: Graph Theory, GTM 173, Springer.

学习建议：

组合学的目的是数数，工具也几乎都是数数，主要研究有限的对象。Combinatorics is an area primarily concerned with counting, both as a means and an end in obtaining results, and certain properties of finite structures.

这门课是Introduction to Combinatorics，主要介绍了组合学中经典的几种基础方法，如二项式定理、排列组合、算两次、鸽巢原理（抽屉原理）、容斥原理、生成函数（母函数）等，以及线性代数方法，概率方法、多项式方法等。教学内容大概前半学期着重讲教材的第一章the classsics，也是最基本的内容，后半学期大概介绍性地讲线性代数方法、概率方法、多项式，和一些组合设计相关的topic（zxd老师主要研究方向是组合设计）。

总的来说，**这门课很难的一点在于概念奇多且相互独立，非常繁杂，但是在学习的过程中定义又是次要的，如何根据定理去理解背后的本质更重要，因为本质始终是数数**。这门课的作业比较难，独立完成作业是一件非常耗费时间精力的事情，不太建议死磕过难的作业题，不划算，考试的话会简单许多，基本的套路熟悉就好，学习的过程当中奇技淫巧不是那么的重要。

一些主要内容：

算两次：这个方法是组合学中最重要的方法之一。本质是从对客观对象的两个不同角度的观察建立等式。

二项式定理与组合数恒等式：证明组合数恒等式的常见方法是算两次，对一个多项式进行恒等操作，得到的两个结果中某一项的系数相等，从而建立恒等式。

母函数：母函数方法是一个已知递推关系求数列通项的方法。Catalan数的计算是一个极好的例子。学好数分很重要。

Ramsey问题：这个能理解这个问题的本质难度在哪，再会几个非常简易粗糙的不等式估计就好了。

Combinatorics Nullstellensatz：马后炮是结合希尔伯特零点定理 (Hilbert Nullstellensatz Theorem) 去理解。

概率方法：主要熟悉如何建立合适的概率模型。

马杰老师的组合学课程

教材与参考书：

本课程无教材，要认真几比几或者到马杰老师主页上下载。但课程的内容与结构与如下参考书相似：

[1] Stasys Jukna: Extremal Combinatorics with Application in Computer Science, 2nd edition.

学习建议：

一般来说，组合数学是研究满足一定规则排列的离散结构的存在、构造、计数、分析、优化问题的学科。传统组合学课程聚焦于“组合计数”部分，而马杰版的更近于“极值组合”，不应参考普通组合学书籍（如某校精品教材《组合数学引论》）。本课程不是挂羊头卖狗肉，反倒应该说更接近组合学研究的全貌，读者认真学习后将对组合数学研究的入门大有裨益。本课程纯粹组合计数的内容只占最开始一小部分，后面很快就谈到抽屉原理、单形上不动点、支撑树数目、链与反链、相交族、Turán类问题、Ramsey问题、概率方法、线性代数方法、有限射影平面。以下分项介绍并未完全按照授课顺序。

1. 组合计数

本部分包含经典的组合恒等式、组合数估计（斯特林公式）、容斥原理、常见计数方法、卡塔兰数、母函数方法。

虽说组合学的学习不崇尚记忆公式与定理，但计数是组合的基本功，读者对常见计数公式、恒等式、斯特林公式、容斥原理公式都应牢记。组合恒等式部分，读者应学会运用“算两次”方法对恒等式进行组合意义的证明。“算两次”即对同一集合利用两种不同的计数规则计算元素个数而得到等式。此思想在组合数学中随处可见，读者不仅应熟练掌握，还应懂得使用规范的集合论写法，规范的写法可以使这种需要“灵光一闪”的“技巧”变成可以熟练使用的“技术”。Catalan数十分有趣，可对应到很多不平凡的计数，亦有许多相关恒等式，但并非重点。

本部分重点是母函数（生成函数）方法。一个计数问题，给参数n从0到无穷取值，我们可以得到一个计数结果的无穷序列，以此序列为系数（或其若干倍）可构建幂级数，其收敛得到的函数称为计数问题的母函数。因此，一个计数问题可等价转化为求母函数的幂级数展开的系数，因而转化为求母函数式。通过母函数乘积运算的组合计数意义、计数公式的递推性质等，母函数式常常不难求。另外，有些问题也可以转化为求母函数的特殊取值。

2. 一般组合学

本部分包含抽屉原理、单形上不动点问题、图的支撑树数目、有限射影平面。

在组合学中，抽屉原理是与算两次同等地位的基本思想。大部分读者小学时就应对其有所了解，但它可运用的场合却千变万化，读者可通过熟知例题对其体悟。一般地，处理证明存在性的问题时即应考虑抽屉原理的使用。组合学最核心的问题是考虑什么对象、什么模式，在“算两次”中表现为如何用两种模式计数，在“抽屉原理”中则表现为把什么取为抽屉——即，结论之所以没有不成立，我们考虑的对象究竟挤在哪里出不去，其瓶颈在哪。这种比“抽屉原理”本身更深刻、更本质的思想，正体现着组合数学四两拨千斤的优雅与美妙。

组合数学的学习不需要记忆太多定理与概念，其更近于一种纯粹的灵感与逻辑——考虑/构造合适的对象，然后反证、分类讨论、使用归纳法。在单形上不动点问题中，读者就能体会到这一点。我们通过染色的方法，设定合适的规则，运用在图结构中以纯粹逻辑证出的结论，证明了三

角形到自身的连续映射有不动点。

组合数学研究离散对象，而最常见的离散对象即“图”。虽然课上有简单介绍，读者最好还是预先对图论有基本的感性认识。上面的单形上不动点问题中，我们就用到了图。某特定图上子图的计数问题常常很难，不过计数是支撑树——使用图上所有点的树（极小连通图、极大无圈图），我们已经有很好的结果。对于完全图，课上使用了三种方法：一种涉及归纳法，另一种用了对应方法——把计数对象A转化为计数对象B，最后一种使用了矩阵的行列式。

有限射影平面是组合设计的基础内容，读者要懂得从集合论、线性空间两种角度理解它。

一般极值组合

本部分包含链与反链、相交族、Turán类问题、Ramsey问题。

链与反链（偏序集中两两可比集与两两不可比集）、相交族（全集的一个子集族，其集合两两相交）是两类很简洁的极值组合研究对象，本课程中研究了它们在简单限制下的界。

Turán类问题是极值图论的最基础问题——当一个n点图不含某特定子图时，它边数的上界是多少，以及取到上界的图是什么样的。Turán定理是至关重要，马杰曾表示：“上完这课你什么都可以不记得，唯独得记住这个。”因此，读者需掌握此定理，并熟悉它运用归纳法、赋权调整法的证明。其他Turán类问题的证明亦有其巧妙处，读者应体会其考虑问题的思路，而非机械地记忆。

Ramsey问题也是极值图论的经典问题，它的最基础形式是：用红蓝两种颜色给n点完全图的边染色，n达到多大时可以保证，无论怎样染色，图中要么出现一个全为红边的a点完全子图，要么出现一个全为蓝边的b点完全子图。这个问题并不平凡，事实上，$a = b = 5$就已经是未解决问题了。它有很多推广形式，如使用更多种颜色、不考虑完全子图，亦或者考虑对图以外的离散结构染色。

极值组合的概率方法 当一件事情发生的概率小于1，那么就存在一种情况使它不发生；当一个变量的数学期望达到某值，那么就存在一种情况使这个变量不小于这个值——这就是概率方法的基本思想。概率方法是马杰挚爱，读者应投其所好（不）。当我们想证明一个结构存在，但发现它并不是那种高度对称、易于构造的结构时，就可以考虑构造一个随机的结构，并通过上面的思路说明在这个随机的结构中可以取出一个特定的满足要求。有时候，我们也可以用概率方法初步筛选出一个结构；尽管它不满足条件，但只要我们略做“精加工”，如删除某些边，即可得到我们希望的结构。这种特殊的概率方法叫作删除方法。

除此之外，随机图本身的性质也是一个有趣的话题。

极值组合的线性代数方法

本课程中的线性代数方法主要是把待考虑对象对应到线性空间中的元素，通过说明这些元素彼此线性无关，来说明它们的总数不会超过线性空间的维数。由于组合数学一般都是把子集族作为考虑的对象，那么一个最基础的线性代数方法就是：把子集对应成0-1向量，通过内积等方法说明它们线性无关。不过，真正漂亮的线性代数方法是多项式方法，即考虑多项式族对应的线性

空间，说明多项式们线性无关。读者应认真体会如何利用线性无关判定法则构造合适的多项式。多项式方法目前在极值组合中颇有运用，比起概率方法有过之无不及，正所谓“万物起源多项式”（认真）。除了以上，也可以直接把研究对象对应到矩阵上来，通过矩阵运算得到结论。

另外，本部分还提到了Bollobás定理，这是一个应用非常广泛的定理，读者当注意。

后注 本课程超过一半的内容可以在参考书目[1]中找到，尤其是极值组合部分；组合计数部分内容在国内一般组合数学教材中都可以找到。本课程的作业一定要认真写，理解组合数学的最好办法就是加入它。如果对组合数学感兴趣，可以认真阅读[1]。这本书内容较全，能让你接触组合数学的常见技术，也能帮你建立组合数学的大视野。

5 进阶基础知识（本硕贯通）

这部分我们假设同学们已经学完了前两年半的对应基础课。以下有一部分内容在科大没有开课或者不是每年都能开课，但这些知识仍然对于一部分同学是非常重要的。

参与这部分编写的作者有：

实分析、泛函分析、调和分析、微分方程2：章俊彦、吴澍坤

几何测度论基础：姚钧夫

二阶椭圆方程：刘俊邦

多复变函数：罗宇杰、田珺昊

偏微分方程专题：马骁、章俊彦

5.1 分析与微分方程

在介绍本硕贯通阶段的分析课程之前，笔者建议大家不要再像学数分、线代等本科基础课那样较大量地做题了。当然，针对性的练习仍然必不可少，但习题量相比本科基础课而言应该大幅下降。此时，更重要的是学会这些理论本身（及一部分证明），并知道什么时候该用在合适的地方。

5.1.1 实分析

这部分特指科大的“高等实分析”（课程号MA04102）课程

预备知识：实分析

建议教材与参考书：

[1] Elias M. Stein: Real Analysis, Chapter 6;

[2] Gerald B. Folland: Real Analysis and its applications, Chapter 1, 3, 7, 6, 8, 9节选；

[3] Elias M. Stein: Functional Analysis, Chapter 1-3.

学习建议：笔者对这块的定位是博士生资格考试的级别，其内容也是标准的实分析基础，也是大多数与分析有关的方向都需要掌握的内容。学会这些内容之后，不同方向所需要的分析知识可能就不一样了。因此，这是最后一门分析方面的公共基础课，其内容大致分如下几部分：

- 抽象测度：请参阅本科实分析的抽象测度部分（略）。教材可选取[1]的第六章前三节和[2]的第一章第五节，或者直接看[2]的第一章和第二章最后一节。

- 符号测度与Riesz表示定理：重点是Radon-Nikodym定理和Riesz表示定理。教材可选取[1]的6.4节和[3]的1.7节，或直接看[2]的第3、7章相应部分。

- L^p空间与插值定理：这部分的最好用[2]的第六章进行学习，[3]的前两章（第一章只看第1、2、4、7节）可以学到更多的动机（例如关于Hilbert变换的背景）。相比本科阶段的L^p空间内容，这部分新增了两个非常重要的定理：Riesz-Thorin插值定理和Marcinkiewicz插值定理，及其对应的三个极为重要的例子：傅立叶变换（R-插值）、Hardy-Littlewood极大函数（M-插值）、Hilbert变换（奇异积分的最基本例子，M-插值或R-插值都可以）。R-插值没有太多好说的，其标准例子傅立叶变换会在下一部分提及。M-插值在对角线情况的证明要求掌握，因为这是之前本科实分析中提到的

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}d\alpha$$

的直接应用。**如果要学习调和分析，那么务必牢记这两个插值定理!!!**

- Fourier变换：这部分比较好的学习资料是[2]的第八章。[1]的第4、5章也有介绍，但是比较零散，不如[2]系统。傅立叶变换都是标准的内容，没有太多可说的。

- 广义函数（分布）与索伯列夫(Sobolev)空间：分布理论是这门课另一个非常重要的话题，**高等实分析也是科大唯一一门稍微认真讲了一点分布理论（广义函数）的课程**。这部分最好用[2]的第九章进行学习，[3]的第三章相对而言比较零散，当然后面有些具体的例子还是需要看的，例如拉普拉斯/热方程基本解的推导、齐次分布、仿基本解(parametrix)等等。Sobolev空间可以看[2]的第九章。[2]的第九章也是标准的本硕贯通内容，学就是了。

注1：和本节开头一样，学到此时已经没有大量做题的必要了，最重要、也最有用的反而是这套理论本身。笔者在这里挑选出了一些比较有代表性的习题，当然不必每题都做：

[1]第六章命题1.6、习题1-3、8-11、13、15；

[3]第一章1、8、9、11-22、25为基本要求；23、24、26、问题5选做(Orlicz空间)，27、问题6选做(L^p一致凸性)；第二章3、4、6-14；第三章2-4、7-13、15、16、18、19、29，问题1、7、8选做。

[2]第一章18、19、20、22；第二章64；第三章1-3、8、11、12、17；第六章本科实分析级别3-5、7、9、10、15、31、32、34、38、39，研究生课级别13、18、20-22、40、43-45；第八章14-16、18；第九章1、9-11、13-15、16、20、26、30、32、33、36.

以上提到的习题在不同书上会有重复，且[1]+[3]和[2]之间可以互相参考。**以上勾出的习题已经非常非常多了，而且L^p空间与广义函数有相当一部分对于初学者而言难度较高，上手的时候会觉得很难。因此，不要强求自己做多少题，理解你所学的东西是第一步!**

注2：以上内容有一部分是在为调和分析打基础，可以视作调和分析的前置课程。若对几何测度论或概率论感兴趣，请移步本指南后继章节查找。

注3：上课的时候可以不做笔记（如果你分析功底好），但是关键的idea和技术必须要掌握，作业一定要自己写!

5.1.2 几何测度论基础

参考书：

[1] Lawrence C. Evans, F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions; (2016/17高等实分析课程的教材)

[2] E. Giusti, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.

[3] L. Simon: Introduction to geometric measure theory.

[4] H. Federer: Geometric Measure Theory. (字典型书籍)

预备知识：[1] 实分析， [2] 需要[1]。[1]的内容主要是介绍Radon测度、Hausdorff测度等几何测度，面积/余面积公式，Sobolev空间，$\mathbb{R}^d$中的有界变差函数，以及与等周不等式相关的内容，相当于是基础知识。[3]则是几何测度论的经典读物，最好读过[1]之后再读。

学习建议：几何测度论是一门技术性很强的课程，需要下很多功夫。建议有高等实分析的基础，读过Evans [1]之后，再看Simon的课程讲义[3]也许会不那么吃力(吗？)。这个讲义只有二百来页，但几何测度论的重要概念都有涉及。这既不会花费太多的精力，也能学到很多知识，非常适合本科生在没有明确方向前仅作为兴趣阅读。这本书正是前言所提到的“必需的公共基础知识”，里面介绍的概念是很多几何变分问题的基本语言，涉及的技术也有许多推广应用。**再次强调，一定要自己多动手推导，把证明中的技术细节搞懂。**

Simon [3] 前两章介绍一些会用到的基础知识，包括抽象测度论、Hausdorff测度、Lipschitz函数、面积余面积公式等，其中略过的证明可参考Evans [1]. 正文从第三章开始，全书大概只讲了两件事：如何把几何对象推广；如何在特定条件下提升这些对象的正则性。例如，rectifiability(可求长)和varifold(泛簇？这个似乎没有统一翻译)是对流形的推广，面积公式让我们可以在这些更一般的“流形”上做变分；current（流动型？）则推广了定向流形，它可以很好地讨论“流形”的边界、slicing等操作。这些推广后的几何对象在不太严苛的条件下具有某种紧性，这对于找泛函临界点至关重要。关于正则性，第五章介绍了Allard正则性定理，第七章介绍了一系列关于极小化子的奇点维数估计。其中，Tilt-excess、Lipschitz逼近、Federer的 Dimension reducing argument 都是很重要的技术手段，是读完本书应熟练掌握的内容。

多说无益，这些定理的精妙之处需要读者自己逐一推导后方能体会。

5.1.3 多复变函数论

预修课程：实分析、复分析、泛函分析为基本要求。更进一步需要偏微分方程、交换代数、同调代数（层论部分），会一些代数几何更好。

教材：Lars Hörmander: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.

学习建议：

这是一门很硬的分析课程，如果想要学到东西，务必把书上每一个细节推演或补充明白。你不需要记住任何一个书上的名词，但是你要能把作者展示出的技术给记下来。不要纠结于任何一个人对这个学科的主观评价，想学就翻开课本亲自去体会。该书前四章是硬核分析，核心目标是II.2.6（Pseudo-convexity and Plurisubharmonicity, 即拟凸域、多次调和函数）。后三章有代数几何背景（Transcendental Method in Analytic Geometry），学过一点代数几何的人会在后三章看到很多熟悉的定理，比如 Serre在 Stein 空间的工作和代数几何里面他对于仿射概形刻画的工作对应，以及Kollar对于仿射性质更深层的刻画: Point separation and Maximality of domain. 仿射性质花样百出的刻画也是多复变函数论和代数几何里面极其历史悠久的话题—这其中就包含许多伟大的名字。剩下的比如解析空间上的层论、凝聚层、Oka定理和Cousin问题，如果学过一点点代数几何，都可以找到相关对应。当然这些美妙的对应关系应该是至少自己学过一遍之后带来的一点小小的惊喜，而不应成为让一些读者自大而忽视它们各自精妙的细节的理由。

主要内容介绍：

1. 起源：多元全纯函数的Hartogs现象、Levi 问题

这是多复分析区别于复分析的起点，使得多复分析不再是复分析的简单推广，而成为单独的数学分支。由Hartogs现象引出的第一个核心问题就是$\mathbb{C}^n$中的Levi问题：给出全纯域的几种等价刻画，证明全纯域，等价于全纯凸域，等价于多次调和凸域，等价于拟凸域。第一部分是Cartan-Thollen 定理：全纯域等价于全纯凸域。证明的关键是Runge 逼近。证明全纯域是拟凸域，需要用到多次调和函数的构造技术，这一部分初学时一定要认真对待，不能只记结论。多次调和函数可以把一些复的问题转化为实的问题，并且在复几何中也经常用它来构造度量和曲率。Levi 问题是指拟凸域是全纯域。证明的核心是利用Hörmander L^2 理论。

2. 入门：解析凝聚层、Oka 三定理

近代多复分析是复流形上的多复分析，将全纯凸的概念推广到Stein流形。Oka 在研究第一和第二 Cousin 问题时引入了解析凝聚层的概念，这是复分析发展的一个里程碑。可以这么说，理解了解析凝聚层和Oka 三定理，复分析才算入了门。利用凝聚层的上同调理论可以证明Oka-Cardan A, B定理，这是多复分析最重要的定理之一。不仅如此，Oka-Cardan 定理还在代数几何，偏微分方程，Sato’s hyperfunction 理论，D-模理论，表示论中有重要应用。

多复分析目前仍在发展中，很多理论尚不完善，也有很多开放性问题。笔者的多复分析目前尚处于入门阶段，在此只能非常粗浅的介绍一下笔者所了解的东西。

3. L^2理论 L^2 理论是研究多复分析的非常有效的技巧，它起源于偏微分方程，目前关于L^2 理

论的研究有很多流派。比如：什么流形是Stein流形？（Levi 问题）什么流形是代数流形？（Kodaira 嵌入定理）这些问题的解决背后都有 L^2 理论在发挥作用。利用Hörmander L^2 理论可以讨论一般复流形上的$\bar{\partial}$方程的可解性问题，Skoda L^2 理论可以解决Bézout方程，利用Ohsawa-Takegoshi L^2 理论可以讨论子流形上全纯函数的延拓问题，给出Kawamata-Viehweg 形消失定理和Kodaira嵌入定理的分析证明。最近一段时间，Demailly，萧荫堂等人关于L^2理论都作出了非常好的结果。

4. Plurigenera

Invariance of plurigenera可以说是近二十年多复变中最好的结果。核心是利用Ohsawa-Takegoshi扩张技术。Ohsawa-Takegoshi扩张本身也是处理多复分析问题非常常用的技术手段，关于这一部分，我建议直接读原始论文：萧荫堂1998年的论文"和Paun 2007年的论文

- Yum-Tong Siu: Invariance of plurigenera, Inventiones Mathematicae, 134, 661-673, 1998.
- Mihai Pǎun: Siu's Invariance of plurigenera: A one-tower proof. Journal of Differential Geometry 76(3), 2007.

在代数几何，极小模型理论，双有理几何等领域，都可以见到Plurigenera 的应用。

5.1.4 泛函分析

预备知识：泛函分析、近世代数（除去西罗定理、域扩张和Galois理论）

建议教材：

[1] Theo Bühler, Dietmar A. Salamon: Functional Analysis, AMS, Chapter 5-7;

参考书：

[2] Michael Reed, Barry Simon: 现代数学物理方法（第一卷）·泛函分析，第7、8章；

[3] Barry Simon: Operator Theory. A Comprehensive Course in Analysis, Part 4, Chapter 5-7;

[4] 郭懋正、张恭庆：泛函分析讲义（下册），北京大学出版社；

[5]* Michael Reed, Barry Simon: 现代数学物理方法，第2-4卷（傅立叶分析与自伴算子理论、散射理论、算子分析）；

[6]* Brian C. Hall: Quantum Theory for Mathematicians, GTM 267, Springer.

学习建议：自从吴劲松老师离开科大后，高等泛函分析这门课已经不能保证常年开设。这门课可以视作泛函分析的后继，其内容主要涉及Banach代数（主要是C^*-代数以及Hilbert空间上正常算子的谱）、无界自伴算子的谱、自伴算子的扰动、算子半群等内容。吴劲松老师还会补充一些有关“自由（非交换）概率论”的内容。

- Banach代数：这部分实际上是为了给出Hilbert空间上有界正常算子的谱族刻画、谱分解定理，其关键步骤是建立所谓的“泛函演算”(Functional Calculus). 这实际上是将一个有界正常算子A的谱集上的连续函数$C(\sigma(A))$，与Hilbert空间上的全体有界正常算子作出“一一对应”，而这个关系正是一个C^*-代数的同构，被称作谱映射定理(Spectral Mapping Theorem). 这其中重要的知识有：Gelfand表示、Stone-Weierstrass定理，以及最后证明的谱映射定理、正常算子的谱定理：Hilbert空间上的有界正常算子可以“酉相似于”（不严格地说）一个（复值的）乘法算子，并可等价表述为，A可以写成谱集上的坐标函数关于投影值测度的积分。特别，紧算子的情形下，就退化为紧算子的谱定理。

- 无界自伴/正常算子：分析中尤其是微分算子，是无界算子（联想 Poincaré不等式不可能倒过来成立）。此时自伴算子也有一个谱定理。例如，任何常系数微分算子酉相似于乘法算子。事实上，实现这一等价的酉算子就是傅立叶变换，该乘法算子是傅立叶乘子。要注意，无界算子的定义域可能不是整个Banach空间，要格外小心。此时“闭算子”就显得很重要：因为我们无法定义无界算子的算子范数，所以这迫使我们考虑算子的图像，引入“闭算子”。关于自伴算子的延拓与扰动，可以看[4]的第六章。

- 算子半群这部分有一个著名的Hille-Yosida定理。当然，更重要的是这部分牵涉到很多实际的例子：例如抛物方程的半群方法、随机过程中的马氏半群、单参数酉群(强连续酉群的表示定理，与Bochner积分、薛定谔方程的解、Birkhoff遍历定理等都有关)、波算子的散射理论等等。

泛函分析的后继内容实际上有很多，例如研究函数空间的几何理论、Banach空间的概率论、算子代数（这也是一个很大的分支）、算子的扰动理论、散射理论课等等。但由于笔者对此没有什么了解，加上科大现在也几乎没有专门做泛函分析的老师，所以与后继学习相关的部分暂缺。

5.1.5 调和分析

这里的调和分析指的均是欧氏空间（或者环面）上的实调和分析。抽象调和分析（紧群表示理论等）则与表示论、数论有关，在此没有介绍。

预备知识：科大的调和分析课程只需要会实分析和一丁点泛函分析的基本概念就够了。下述内容是笔者认为调和分析这门课程应该涵盖的内容，以及一些拓展方向。以下提到的课程内容前置知识主要是高等实分析（Folland实分析的第6、8、9章的内容）。笔者认为傅立叶变换、极大函数、广义函数与Sobolev空间都不应该添加在这门调和分析课里面成为向前推进的阻碍。

建议教材：（基础知识部分）

[1] Elias M. Stein: 奇异积分和函数的可微性, 1971;（主要看前三章。第一章为上述预备知识，向量值奇异积分和球谐调和函数可以跳过不看。此书虽然古老，但奇异积分的C-Z理论讲解至今无人能出其右。）

[2] Javier Duoandikoetxea: Fourier Analysis, GSM 19, AMS; （第1、2章属于前置知识，主要看第6、9章）

[3] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.1; （第4、7-11章选讲，Littlewood-Paley几乎正交原理部分，即第8章前三节和第9章前3节，必看此书）

[4] Elias M. Stein: Harmonic Analysis, 1993.（整体难度大，震荡积分部分，即第8-10章必看）

参考书：（基础知识与深入知识均有涉及）

- 基础知识的参考书：

  [5] Elias M. Stein: Functional Analysis, Chapter 8.（适合有兴趣的同学浅尝辄止地了解震荡积分）

  [6] 苗长兴：调和分析及其在偏微分方程中的应用，科学出版社。（90年代末至今都值得参考的中文书，内容很全但缺乏动机的讲解，当工具书使用）

  [7] Thomas Wolff: Lecture Notes on Harmonic Analysis, 2003;（短小精悍的讲义，有助于你快速了解实调和分析在干什么，但是行文略微跳跃）

  [8] Loukas Grafakos: Classical/Modern Fourier Analysis, GTM 249/250. （字典类书籍，行文极其啰嗦，初学很容易陷进不必要的细节中而迷茫）

- 进阶参考书与讲义：在拓展知识介绍部分，我们会详细说明以下书籍或讲义的哪部分是值得读的

  [9] Ciprian Demeter: Fourier Restriction, Decoupling and Applications, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 184;

  [10] Pavel Zorin-Kranich: Decoupling 讲义 https://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/SoSe2019/decoupling/.

[11] Christopher D. Sogge: Fourier Intergals in Classical Analysis, 2nd edition, Cambridge tracts in mathematics 210.

[12] Camil Muscalu, Wilhelm Schlag: Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol.2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 138;

[13] Terence Tao: 调和分析讲义（见陶哲轩的课程主页1、课程主页2.）

[14] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, Raphaël Danchin: Fourier analysis and Nonlinear PDEs, Springer.（基于Littlewood-Paley理论的函数空间的基础知识，主要是Sobolev、Besov空间的各种性质都可以在这里查到）.

[15] Lars Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol 1 (线性偏微分算子分析·第一卷). (这位是震荡积分和拟微分算子理论的构建者之一，当然Hörmander的书非常非常非常难读。)

学习建议：调和分析这门课有很多种教法，但一个学期的课想兼顾各个方向的确很难做到。这门课可以往两个方向走，一是纯调和分析，二是调和分析在其它领域（例如PDE、解析数论）的应用。但这门课的内容一定是要为直击前沿服务，无论如何都不应该过于纠结在过于细枝末节的基础知识上。此外，**在学习调和分析的过程中，务必要搞清楚它背后的动机——调和分析每一部分理论的背景都是十分鲜明突出的！而且不同理论之间都是有密切联系的！只有挖掘出背后动机之后你才能看清楚这些密切的联系到底体现在什么地方。**这方面可以参考笔者的这一段评课 https://icourse.club/course/12635/

- 奇异积分理论

（1）卷积型奇异积分的Calderón-Zygmund分解：这是奇异积分最重要的技术，另外还有一些关于逐点收敛的结果（齐次核+cδ）。典例是Hilbert变换和Riesz变换。这部分建议使用Stein [1] 的前三章进行教学（主要为第二章前四节、第三章前两节，以及[6]的第二章第一节。Schlag [3]的第七章也可以作为教材使用。）

（2）端点情况$\mathbf{H}^1$与BMO空间：这部分可以参考Duoandikoetxea [2]的第6、7章。BMO空间在后面还会多次用到，而Hardy空间有专门的理论，可以看[4]的对应章节。在学T(1)定理之前都可以跳过此部分。

（3）Littlewood-Paley与几乎正交原理：这部分的 Mikhlin-Hörmander 乘子定理可以看作是乘子版本的C-Z奇异积分定理，这些往往比C-Z定理更加实用(Bernstein不等式)。Littlewood-Paley理论的核心想法就是“频率局部化”和“几乎正交”。“几乎”一词的含义，可参考Stein实分析第四章的习题23，或者直接看 Cotlar引理的内容。参考书：Schlag [3]的第8.1-8.3, 9.1-9.3节，有兴趣的同学可以看Tao的非线性色散方程附录A，或者Tao [13]的第六章。**乘子理论请务必要熟悉结论，并在后继学习中反复体会！**

（4）非卷积型奇异积分的T(1)定理：T(1)定理（及其衍生的$T(b)$定理）在PDE中也会用到。它源于 Lipschitz domain 上解拉普拉斯方程这个问题有，其核心是估计Calderòn交换子 (Lipschitz曲线上的柯西积分)。但更重要的是，其证明过程中衍生出的工具便是所谓的仿积 (paraproduct)、多线性乘子定理（Coifman-Meyer定理等）的雏形。可以说这是一个走向多线性调和分析的定理，承上启下。参考： Duoandikoetxea [2]第9章、Grafakos [8]的第二册。

- 震荡积分：这是目前调和分析一个很重要也是很困难的方向，**至今仍在发展当中**。它来源于色散方程的解，也来源于傅立叶限制性问题，也在色散方程的色散估计与衰减估计、限制性估计、数论的格点估计等问题中起到了无足轻重的作用。至今仍未解决的调和分析四大猜想也都与震荡积分有不可分割的关系。

  本硕贯通阶段的调和分析课程中的震荡积分部分还是以介绍基本理论为主，讲过多的限制性估计或是 decoupling 问题、Kakeya问题之类的话题过于深入，时间也不允许（除非调和分析能开两个学期）。**震荡积分基础理论的最好教材就是 Stein [4]的第8-10章且没有之一！Miao [6] 的对应部分是由它翻译而来）**。掌握Tomas-Stein限制性估计的TT^*证明比较重要，这是非常关键的技术。同学们若感兴趣则可以读 Stein [4]的第九章后半部分，讲了Bochner-Riesz可和性、傅立叶积分算子L^p有界（也可以参考Sogge [11]的第二章）。

  （1）第一型震荡积分：固相法、支撑曲面上的傅立叶变换

  自由色散方程的解本身就是一个震荡积分。例如我们考虑$\mathbb{R}^d$上的薛定谔方程$iu_t+\Delta u=0$，定义曲面$\mathcal{P}:=\{(-|\xi|^2,\xi)|\xi\in\mathbb{R}^d\}\subseteq\mathbb{R}^{1+d}$, 并定义$\mathcal{P}$上的测度$\mu(d\tau,d\xi):=\hat{u_0}(\xi)d\xi$. 此时方程的解可以写成$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^{1+d}}e^{i(x\cdot\xi+t\cdot\tau)}\mu(d\tau,d\xi)$, 也就是曲面$\mathcal{P}$上测度$\mu$的傅立叶（逆）变换。支撑曲面上的傅立叶变换也随之成为了震荡积分最初的研究对象，其研究方法就是“固相法”(Stationary Phase Method)，这必须要掌握。

  （2）第二型震荡积分：傅立叶限制性估计

  这部分发源于高斯曲率非零的超曲面上是否能在L^p的意义下给出傅立叶变换在该超曲面上的限制，因为这与色散方程的解直接相关。利用固相法和Knapp反例（见 Schlag [3] 的第11章）, Stein猜想：限制性估计成立的充要条件是$p'>\frac{2d}{d-1}$，$p'\geq\frac{d+1}{d-1}q$.至今，这还没有被完全解决（$d\geq 3$）。1975年，Tomas-Stein限制性估计给出了$p'\geq\frac{2(d+1)}{d-1}$的条件下限制性猜想成立。他们最初用的方法是复插值法，之后TT^*方法大大简化了证明（见 Schlag [3] 的第11章）。但Tomas-Stein限制性估计的证明中没有用到对频率空间的分解，联想Knapp反例本身便是波包分解的雏形，因此这个地方的粗略正是给后人留下了可改进之处。到 90年代中期 Bourgain的结果横空出世。每一次的指标推进都是新技术的成果，例如前几年兴起的L^2-decoupling (Bourgain-Demeter-Guth).

学到这个地步，已经没有任何必要去做很多习题。调和分析更多的是作为工具出现，因此掌

握定理本身并会使用是更重要的。即便是想学调和分析这个方向，也应该尽快掌握这些基础知识，剑指你的研究方向，早日开始阅读专著和文献才是更重要的。

学习过程中，以下几点需要格外注意：

1. 积累一些反例：例如很多L^p有界性在端点情况不对，反例是什么？这些反例有何具体的意义？不少情况下反例就是一些诸如bump函数、幂函数等很常见的函数，或是构造一些特殊尺度的cap来解决问题，这都是值得思考的。当然，这些例子的验证都需要亲自去完成。

2. 记住几个常见的应用，尤其是与PDE、格点估计有关的问题。

3. 尝试自己去理解并解释“为什么”有些地方需要按那样构造，这些技术的目的是什么。例如，可以问自己Calderón-Zygmund分解的大致目的是什么？Littlewood-Paley理论里面 Bernstein不等式及其一系列推论里面，如何去理解“s阶导数”？极大函数在很多的证明里面都会出现，其目的是什么？不用极大函数过渡，证明会在什么地方崩溃？反复推敲这种问题，有助于理解调和分析的内容。

4. 不要过分纠结于奇异积分理论中过于细枝末节的知识。最有用的永远是定理本身而不是那些赘余内容！奇异积分部分的教学在两个月内是可以完成的。

拓展知识

- 多线性调和分析：上面已经提到它的起源。实际上 Lipschitz 曲线上的柯西积分与双线性 Hilbert 变换（在T(1)定理证明中就能看出雏形了）、以及傅立叶级数的点态收敛都有着不可分割的密切关系。而其证明过程中用到的方法则可以得出Coifman-Meyer定理、仿微分运算等PDE工具。（参考 Grafakos [7]的第二册，或者 Muscalu [12]. 后者阐述思想和证明方法更加现代，更加本质。）.

- PDE向：仿微分运算(Para-differential Calculus)。这部分可以参考 Tao [13] 的第六章或者[14]的前两章，可以视作Littlewood-Paley理论的应用。 Bernstein不等式（频率局部化估计）、仿积分解是一切的基础。它们可以用来证明s阶的莱布尼茨求导法则、链式法则，其主要结果为Kato-Ponce交换子估计，以及Kenig-Ponce-Vega, 李栋等人后来的加细版本。当然还有后来的“时空共振”理论，这些在PDE的研究中是一个非常强力的**工具**。

- 调和分析向：调和分析领域里有四个基本问题，都尚未完全解决。这四个问题不论是彼此之间还是与数学中的其它领域都有着重要的联系：PDE、傅立叶级数求和、组合数学、解析数论等都与之相关。笔者将对第一条稍作介绍。若同学们想对此有更具体的了解，可以去读一读2020年新出的书 Demeter [9] 或者讲义 [10]. Demeter [9] 介绍得更加系统、详细，而且作者本人也是证明L^2-decoupling的人之一。

  1. 波动方程的先验估计：寻求适当的函数空间，建立波方程的线性时空估计⇒ Sogge局部光滑性猜想。

容易得知，波方程的先验估计可以归结为半波算子$Hf(x) := e^{it\sqrt{-\Delta}}f(x)$的估计。早年，人们利用波方程的基本解与插值得出了具有导数损失的点态的估计:

$$\|Hf\|_p \lesssim t^{(d-1)(1/2-1/p)}\|(1+\sqrt{-\Delta})^{(d+1)(1/2-1/p)+\epsilon}f\|_{p'};$$

并且如果我们考虑聚集在单位球面附近的bump函数的例子，容易得出该估计已经是Sharp的，也就是说无法改进。但它在应用上具有局限性——难以研究波方程的低正则性问题。

直观来看，导数损失是原因是波的“聚集”：即便初值的L^1范数足够小，其L^∞范数也会演化到无穷大。但是，波在某一处的“聚集”时间应该是很短暂的。为了减少正则性的损失，人们引入时间平均，考虑时空估计，即$\|Hf\|_{L_t^qL_x^r([1,2]\times\mathbb{R}^d)}$，这样的估计被称作“局部光滑性估计”(local smmothing estimates). 至1998年，Keel-Tao最终实现了端点Strichartz估计的证明:$\|Hf\|_{L_t^qL_x^r(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}_x^s}$，这里$d(1/2-1/r) = s+1/q$, 且$2/q \le (d-1)(1/2-1/r)$. 前者由scaling给出，后者则是由Knapp“行波”反例决定：如果初始时刻聚集在一个“扁平的圆柱”上，那么演化长时间之后，半波算子决定的波会发生弥散。

但Strichartz时空估计仍然不是我们最理想的估计：因为左右两端可积性不同、正则性损失仍然存在。为在低正则性研究中避免这两个问题，Sogge观察到理想估计应该是

$$\|Hf\|_{L_{t,x}^{2d/(d-1)}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L_x^{2d/(d-1)}}$$

，因为它与插值、能量估计结合可以获得其它已知估计。但这个是错误的，后来Sogge猜想如下不等式成立：

$$\|Hf\|_{L_{t,x}^{2d/(d-1)}([1,2]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|(1+\sqrt{-\Delta})^\epsilon f\|_{L_x^{2d/(d-1)}}.$$

至今Sogge局部光滑猜想也没被完整证明。而1999年，Wolff构造了反例，指出Sogge猜想里面的导数损失是必然存在的。关于半波算子的更多知识，可以阅读 Sogge [11]的第四章。

2. 傅立叶求和/变换的L^p敛散性⇒ 算子$Tf := ((1-|\xi|^2)_+^\delta\hat{f}(\xi))^\vee$是否是$L^p(\mathbb{R}^d)$有界的⇒ Bochner-Riesz猜想；

3. 震荡积分⇒如上所述的傅立叶限制性估计猜想；

4. Kakeya问题：Besicovitch集合的构造⇒ Kakeya 极大函数的L^p有界性问题⇒组合几何方法、算术组合方法。

5.1.6 半经典分析/微局部分析（暂缺）

微局部分析涉及到很多方面：数学物理、辛几何、偏微分方程理论等等。科大的王作勤教授是这方面的专家，可以参考王老师主页的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/14F-Semiclassical/SMA.html.

学习建议：单从理论而言，微局部分析涉及到的数学工具是有震荡积分、拟微分算子（可以视作变系数傅立叶变换）、傅立叶积分算子。某种程度上它们都来自或推广于实调和分析。

拟微分算子理论在偏微分方程理论中起到了重要作用，作为入门可以阅读陈恕行《拟微分算子》。它可以用来解决椭圆/亚椭圆算子，以及双曲方程的初边值问题，进一步可以去研究双曲方程的奇异性与激波理论。傅立叶积分算子理论也可以视作它的推广。

这一部分暂缺。

5.1.7 微分方程2（现代偏微分方程基础）

预修课程：实分析（主要为L^p不等式、积分收敛定理）、泛函分析（主要为压缩映射定理、Riesz表示定理、弱收敛、紧算子及其谱理论）、不需要微分方程1. 建议了解一点高等实分析的内容（虽然并不是必要的）。

建议教材：Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, 2nd edition, AMS, Chapter 5, 6, 7.1, 7.2.4, 7.3.（第5、6章和7.1节是科大课程的必讲内容）

课内参考书：无。

学习建议：基本内容没有什么好说的，Evans的第5、6章和第七章第一节为主，涉及基本语言(Sobolev空间)、二阶椭圆/抛物/双曲方程的弱解理论，以及极大值原理等内容。**初学时，请务必先做到"能够写出所有的计算细节"，再去考虑进阶的问题!!!** 微分方程2**这门课本身并不涉及过难、过于专业的例子，其内容并无法直接应用到研究中。**它的**目的是让学生了解 PDE 的基本语言和基本方法，为以后读懂 PDE 相关的专著、论文打下必要的基础。**学完这门课和调和分析、泛函分析之后，PDE的"公共基础知识"就算掌握了。更深入的知识，需要视PDE的不同方向来进行针对性的学习。

关于习题：能够完成课本后的习题已经非常好，初学时很多题不会做是很正常的。习题的答案均已上传至笔者的个人主页 (请勿拿出去获利！)。

- 基础知识学习顺序建议：

  第五章（Sobolev 空间）：5.1-5.7、5.8.1（Poincaré 不等式）、5.8.3（$W^{1,\infty}$ = Lipschitz, 课本该定理证明出现大跳步，详见2017年微分方程2期中考试第三题）、5.9.1（H^{-1} 空间）；这部分可以参考Evans的Measure Theory and Fine Properties of Functions的第四章。

  第六章（二阶线性椭圆方程）：6.1、6.2（存在性定理）、5.8.2（差商极限逼近导数）、6.3（正则性）、6.4（极大值原理）、6.5.1（对称椭圆算子的谱）；

  第七章（线性发展方程）：5.10节（时空Sobolev空间）、7.1（抛物方程弱解的 Galerkin 方法）、波方程的存在性证明（见Jonathan Luk的波方程讲义第4节）、7.2.4（双曲方程有限传播速度）。

- 第5-7章可以跳过的部分：5.3.3 整体光滑逼近的证明（知道思路即可，先有限覆盖边界，然后用个大球盖里面）； 5.4节的延拓定理证明； 5.5节的零迹定理的证明（但结论在第六章习题用到）；5.6.3（高阶 Sobolev 不等式）的所有证明；6.3、7.1 节的所有高阶正则性证明（数学归纳法即可）和边界正则性证明（边界附近进行局部拉直，化成上半平面的情况）；6.4、7.1节的所有 Harnack 不等式证明；7.2 节除了双曲方程的有限传播速度其它全部跳过。（全部照搬 7.1，但须注意双曲方程正则性结果和抛物方程不一样）

微分方程2课程的拓展知识

真正的研究中涉及的PDE大多是非线性的，而非线性方程的估计总是需要先有线性估计，所以这门课涉及的线性方程理论（第5-7章）是不可或缺的。但是，如果整个学期都聚焦于线性方程理论的话，即使学完了，也不知道怎么用。所以，我们理应接触更多的例子，来看在具体的问题中是如何运用这些基础知识的。**要记住，PDE问题的核心绝对不是冗长的计算，而是那些统领性的idea、如何发现本质困难项、如何巧妙地化解本质困难项（例如选取合适的坐标系、进行适当的变量替换、交换一些导数、构造合适的逼近解等等）。初学者在学会计算之后，切勿陷入并沉迷于那些无关紧要的细节，因为一味地死算永远绕不开本质困难项；相反，若是有了正确的观察与构造，一些毫不起眼的实分析习题结论，也能起到四两拨千斤的效果！**

Evans书上的其它内容

- 消失粘性法：7.3 节的 Vanishing viscosity method

  对于双曲方程，有时无法直接求解或者获得我们期望的正则性。此时，我们光滑化原方程并塞入抛物项$\epsilon\Delta u$构造逼近解。之后利用标准的先验估计+压缩映射法，得到弱解，在正则性阶数稍低的函数空间里证明强收敛即可得到强解。粘性法在很多双曲方程（例如欧拉方程）、传输方程、几何分析中极其有用，因为它们本身没有正则性的结论，性质很差，加入一个抛物项利于我们构造方程的解，同时抛物项避免了导数损失。

- 变分法（第八章）：

  变分的想法是把某个能量泛函的临界点（极小化子）等价于方程（也是该泛函的 Euler-Lagrange 方程）的解。前三节注意正则性估计不能推广到高阶，否则非线性的结构会被破坏。第四节讨论的是限制条件下的极小化子，其中有一些重要的例子：到球面的调和映照、流体 Stokes 问题。8.5、8.6、9.4节讨论的是半线性椭圆方程实则与Yamabe问题以及Sobolev嵌入不等式的最佳常数有关。此外，这一节里面提到的 Palais-Smale 条件在 PDE 中很重要。例如 3D 质量临界的散焦 Schrödinger 方程的散射结论证明的关键步骤就用到了它。

  8.6节诺特定理给出了构造方程守恒律、单调量的方法，这些是我们将方程问题化繁为简的重要工具。一个物理系统总是会有一些守恒律，这也符合认知。我们在一些PDE的证明中，经常会看见乘一个很神奇的项，进行分部积分等操作之后构造出守恒量、单调量。波方程的 Morawetz 恒等式就是一个很好的例子。

- 其它非变分方法（第九章）：单调量与不动点法、上下解方法、移动平面法（椭圆方程）、梯度流方法。

- 一阶方程：Hamilton-Jacobi方程、粘性法、激波问题（第3、4、10、11章）

第3、10章以介绍Hamilton-Jacobi方程为主，这是一类极为重要的一阶方程。除此之外，还有困难重重的激波问题简介（或者叫Riemann问题）。科大没有任何一门课程认真讲过一阶方程，但对PDE感兴趣的同学可以找个时间学一学，或者看Alinhac双曲方程一书的前四章。

5.1.8 偏微分方程基础专题

Evans的教材（包括他本人的研究）内容主要以椭圆、抛物方程为主，对波方程、色散方程、流体/相对论方程等的介绍几乎没有，同学们**切勿认为PDE只有 Evans 书上讲的那些**。换句话说，**学PDE不要过于依赖Evans这本书，它不是“圣经”。**下面我们就介绍一些 Evans 书上没有涉及到，但仍然适合作为微分方程2课外拓展的内容。

- **二阶椭圆方程**

  预修课程：微分方程1、实分析（主要为L^p不等式、积分收敛定理）、泛函分析（主要为压缩映射定理、Riesz表示定理、弱收敛、紧算子及其谱理论）、微分方程2或高等实分析中Sobolev空间的内容。

  教材与参考书：

  [1] D. Gilbarg, N. Trudinger:Elliptic partial differential equations of second order. （可读性不高，但习题建议全做。）

  [2] 韩青、林芳华: Elliptic partial differential equations. （这本书的特点在于简明精炼，短短140面包含了异常丰富的内容。这本书也是Tobias Colding 推荐给所有对分析和几何感兴趣的同学的必读书。）

  参考书：

  [3] 陈亚浙、吴兰成：二阶椭圆型方程与椭圆型方程组；

  [4] Jerry L. Kazdan. Application of partial differential equations to problems in geometry. （这本书对想学几何分析的同学非常有用。在不细究证明细节情况下他能给你一个很好的几何和分析联系在一起的感觉。）

  学习建议：主要内容包括：调和函数的基本性质，极大值原理，Schauder估计，L^2 以及L^p方法。展开来说，

  1. 调和函数的基本性质

  这部分包括极大值原理，平均值性质，Liouville定理，Harnack不等式，以及 Perron 方法解 Dirichlet 问题。极大值原理是椭圆和抛物方程中最基本的技巧。这里困难的地方是构造恰当的比较函数，这方面只有通过平时多计算，对一些基本的函数及其导数的形式(多项式，指数，对数，以及他们的复合在二阶微分算子下作用后的形式)比较熟悉。从弄明白每一步计算到理解为什么这么构造，需要大量的经验。初学不必为此过于沮丧。值得一提的是调和函数的单调性公式，它说的是：

$$\frac{1}{s^{n-2}}\int_{B(x,t)}|\nabla u|^2-\frac{1}{t^{n-2}}\int_{B(x,t)}|\nabla u|^2=2\int_{B(x,s)-B(x,t)}\frac{|\partial_r u|^2}{r^{n-2}}.$$

类似的单调性公式在Yang-mills联络、极小曲面、调和映照、平均曲率流等论题中都有非常重要的应用。最后Perron方法利用次调和函数去寻找调和函数，其中的关键是找到合适的闸函数以保证解的到边连续性。这里可以比较复分析中单值化定理的证明，本质上两者是一样的。

2. Schauder估计：

关于Schauder估计已经有非常多的证明，比如GT书中的Newton potential theory，scaling argument（或称blow-up argument）（Leon Simon），Campanato space（用局部积分增长的估计刻画Holder连续性, 可以参考林芳华书第三章），Caffarelli开发的对完全非线性方程粘性解一套方法。

3. L^2 弱解：

这是微分方程2课程的主要内容(Evans 第六章)。其中最重要的是，对于存在性部分，理解Fredholm 二择一；对于正则性部分则是典型的对差分估计。

4. De Giorgi-Nash-Moser迭代及其应用（Harnack不等式，Holder连续性等）

这里比较微妙的地方在于结论对于椭圆算子系数可积性的要求。Moser迭代的证明和结论同样重要!

5. L^p方法：

ABP估计（或称Alexandroff极大值原理），$W^{2,p}$ 估计。ABP估计应该是PDE中为数不多的带浓重几何味道证明的定理了，它是Caffarelli讨论完全非线性方程粘性解的最基本工具。对于$W^{2,p}$ 估计最直接的利用可能是用在靴带法中（bootstrap），对于充分大的p, $W^{2,p}$有界蕴含$C^{1,\alpha}$.

延伸内容：

1. 对数梯度估计

（麻老师曾说Evans知道什么是好的（指对数梯度估计））对数梯度估计中基本的两步是 Bochner 公式：

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = |\text{Hess } u|^2 + \nabla u \cdot \nabla \Delta u,$$

和改进的Kato不等式：对于$\Delta u = 0$

$$|\nabla\nabla u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 \geq \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2.$$

把这两步写出，对调和函数的对数梯度估计就不难得到。

2. 对于更多解的存在性证明方法，可以参考韩青林芳华书（第二版）第六章。

这门课的目的是学习椭圆方程的基本技巧，这可以分为几步：首先感受定理的正确性，在学习过程中不要陷入对一般性条件的追求，而是首先尝试对最简单的情形（比如调和函数）尝试自己证明，感受它为什么是对的。然后检查证明的细节，最后再想为什么，困难之处在哪。另外这门课中证明先验估计主要只有两种办法，一个是极大值原理。一个是积分的方法。而理解先验估计的第一步是看它在scaling下的变化，一方面它能帮助我们验证估计是否正确，另一方面在固定一个scale下也能一定程度简化证明。另外一个非常重要的办法是紧性方法（Compactness method），它源自于De Giorgi研究Plateau问题。最简单的例子比如Evans书上对Poincare不等式的证明。其天然的优势在于不依赖于方程的线性结构。

这门课中的一些证明技巧是应该熟练掌握的，因为经常碰到的问题满足的并不是书本上定理要求的条件。比如ϵ-正则性类型的定理（参考Uhlenbeck文章Removable singularities in Yang-Mills fields）：对于$-\Delta u \le u^2, u > 0$, 如果$||u||_{L^{n/2}(B_1)}$充分小，则 $\sup_{B_{1/2}} |u| \le C||u||_{L^2(B_1)}$.这其实相当于把GT书上Morse迭代定理里关于零阶项系数的可积性要求换为临界情况后，再加上$L^{n/2}$范数充分小条件，结论仍然对。这一类正则性定理在Yang-Mills 联络，调和映照，伪全纯曲线等的紧性性质的基础。

- **双曲方程1：一阶双曲组**

Evans的书上除了7.3节消失粘性法以外就很少有一阶双曲组的知识了。第3、10章的Hamilton-Jacobi方程更多是用在控制理论上。第11章的黎曼问题也仅是浅尝辄止。

相比下面提到的拟线性波方程而言，一阶双曲组的实际研究少之又少，这是因为一阶双曲组包含了很多极难研究的方程组，其中以可压缩无耗散的流体方程与方程组（可压欧拉方程、MHD、弹性力学等等）、广义相对论流体方程为首。它们的一个共同特点就是具有多个特征，若用能量法则无法形成共同的控制以封闭能量估计。一阶双曲组的初边值问题、自由边界问题（或者叫“特征边界问题”）、高维激波稳定性问题等等在过去几十年的发展主要依靠：

1. 拟微分算子的应用:这方面的参考书和文献主要有陈恕行的《拟微分算子》.

2. 双曲对称化方法与Nash-Moser迭代的结合:

上面提到，一阶双曲组因为多特征的原因几乎不可能在常规的Sobolev空间中寻求能量估计而求解，因此我们必须退而求其次，避开能量法对方程进行求解与分析。其步骤主要分为：系数矩阵的对称化(Lax/Phillips 1960 CPAM的文章，J. Rauch 1985年TAMS上的文章)、非线性方程线性化、之后利用Nash-Moser迭代的方法直接迭代出一个局部解。Nash-Moser迭代，可以看S. Alinhac的《拟微分算子与Nash-Moser定理》的附录，也可以看Paolo Secchi的Nash-Moser迭代简化版讲义。高维激波的研究可以看Métivier的讲义(Stability of Multidimensional shocks.)。现代一些的文献，主要参考陈贵强、Paolo Secchi、Yuri Trakhinin等人关于可压欧拉方程、MHD、弹性力学的自由边界问题、涡片与断层问题、高维激波稳定性的研究。

- **双曲方程2：拟线性波方程及其几何理论**

  这部分主要是弥补 Evans 书上缺失的波方程部分：Evans书上的双曲方程（指7.2节和第12章）涉及到的方法均不是主流的。双曲方程的主要代表是波动方程（当然还有一阶双曲组的研究，但很多时候它们的困难也可以转化到波方程上）。想要了解双曲方程的同学，可以先看下面的参考资料来学习波方程的基本知识：

  参考书：

  [0] Jonathan Luk 或 Qian Wang (王倩) 的非线性波动方程讲义；

  [1] Sergei Alinhac: Hyperbolic Partial Differential Equations;

  [2] Sergei Alinhac: Geometric Analysis of Hyperbolic PDE;

  预备知识：

  [0] Sobolev空间；

  [1] 微分方程1、实分析；

  [2] 需要[1]、微分方程2有关波方程的部分、黎曼几何（主要涉及向量场、联络和曲率的大量计算）。

  学习建议：想学习相对论PDE或者几何波方程的同学可以看一下，建议先看[1]。[2]的行文略微跳跃，并且默认你熟悉[1]中不少波方程的结论。笔者也正在学习这些书。其主要内容如下：

  - 线性波方程：Hahn-Banach方法证明存在性，有限传播速度、惠更斯原理。
  - 可交换向量场方法：这部分是学习波方程最重要的一部分。从此，我们不再考虑常规的导数 $\partial_t, \partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_d$，而是利用光锥来定义新的向量场：这些向量场将代替常规的导数，它们大多可以彼此交换，或者交换子仍然具有很好的形式。特别地，利用光锥我们可以定义 Null frame, 这些 Null frame 里面的导数代替常规导数之后，可以为Sobolev嵌入带来时间上的衰减（从而利于我们证明高维情况的长时间存在性），这叫做Klainerman-Sobolev不等式.
  - 具有Null form的拟线性波方程存在性：$d \geq 4$为整体解，$d = 3$则为几乎整体解。这是上述方法非常经典的一个应用，具体可以阅读[1]的第6、7章。
  - Null geometry 初步: 这部分的基本知识可以阅读[2]. 此时我们考虑的波方程，其背景度量不再是欧氏度量，即$\Box_g u = (\partial u)(\partial u) + \cdots$. 要想把如上理论推广，则需要：重塑交换向量场、（以 Klainermen-Sobolev 为首的）能量不等式、额外估计联络与曲率带来的影响。这套理论主要适用满足 null condition 的拟线性双曲方程组，例如 Minkowski 时空的整体稳定性、拟线性波方程的存在性与低正则性解、爱因斯坦方程的L^2曲率猜

想（已在2012年被解决）、黑洞的形成与（狭义）相对论流体等。同学们若想加以练习，可以尝试读一读Lindblad-Rodnianski在波方程坐标下证明 Minkowski 时空整体稳定性的文章（难）。但这套理论对多($\geq$ 2)个特征速度的双曲方程组暂时不适用，主要例子有($\geq$ 1维的)可压弹性力学方程、可压磁流体(MHD)方程、液晶方程、爱因斯坦-欧拉方程等等，这些方程的研究目前非常非常少。

- **调和分析方法：半线性临界色散方程的整体解与散射理论（以临界薛定谔方程为主）**

  Evans这本书从头到尾都在避开使用傅立叶分析，其7.3节的例子过于沙雕。对调和分析方法（Strichartz时空估计+profile分解等）感兴趣的同学，可以阅读下面这本新出的书(libgen上可以下载）. 尽管这套理论已经日渐完善，但仍不失成为本科生同学了解调和分析方法的实例来源。

  参考书：

  [1] Benjamin Dodson: Defocusing Nonlinear Schrödinger equations, Cambridge Tracts in Mathematics 217.

  预备知识：实分析、泛函分析、调和分析（傅立叶变换、Littlewood-Paley乘子理论为主）

  学习建议：这本书介绍的是较为完善的半线性（能量临界/质量临界）的散焦薛定谔方程的整体解与散射理论的证明。这本书的作者 Benjamin Dodson 曾经独立地破解了多个能量临界、质量临界的散焦薛定谔方程的整体适定性与散射的问题，是这个领域最厉害的专家之一，在色散方程整体解与散射理论的构建中做出了非常大的贡献。

  书中与调和分析有关的主要工具称作为Strichartz时空估计：用来预判解所在的函数空间。这类估计起源于傅立叶限制性估计，后可用 TT^*+Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式证明，端点情况则是 Keel-Tao 1998年发表在AJM上的经典证明。算是调和分析方法的一个经典应用。同学们在阅读的时候无需过多纠结于定义合理性的杂碎问题，而应该把注意力集中于思考以下几个方面：Strichartz估计的容许对的L^p指标之间的关系是怎么预判出来的?（注意结合衰减估计的结论）薛定谔方程的守恒律在整体解与散射的证明中起到了什么作用？Profile分解的目的是什么？Morawetz估计带来的好处是什么？

与微分方程2这门课有关的拓展知识和补充内容就暂且介绍到这。若读者有好的意见和建议请发邮件给 yx3x@mail.ustc.edu.cn.

更多关于偏微分方程学习需要注意的地方

微分方程来自于哪？给定一个微分方程，它的什么性质是值得去研究的？研究这些方程的主要方法与数学工具有什么？

1. 微分方程从哪里来？

对于常系数线性方程，大致说来主要有四种常见类型，椭圆方程，抛物方程，色散（波）方程，传输方程。他们分别是：

- 椭圆方程
$$\Delta u = 0.$$
这种方程往往用于刻画某种稳定状态，比如无电荷的静电场。这些状态往往是长时间演化后达到的稳态。

- 抛物方程
$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$
这种方程往往用于刻画某种耗散演化，比如热传导。长时间演化后这种演化往往趋于稳态，这是因为耗散掉了所有的动能。

- 色散（波）方程
$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \text{ or } i\partial_t u - \Delta u = 0.$$
这种方程往往用于刻画某种振动演化，比如弦振动，水波。长时间演化后这种演化往往不趋于稳态，而是以稳态为中心振动。即使趋于稳态，也是有一些大能量的部分向无穷远处运动。

- 传输方程
$$\partial_t u + \partial_x u = 0.$$
这种方程往往用于刻画某种传输演化，比如一维液体流动。整个系统沿一定速度一直在运动，永不停止。

注意这里这些方程右边都是0，我们叫它齐次（线性）方程。如果不是0，则为非齐次方程。比如非齐次椭圆方程（泊松方程）
$$\Delta u = F.$$
这里 F 的出现往往代表了外力，或者源头的出现。这些方程往往出现于连续介质的物理、化学与工程中。如果介质是匀质的，我们便可以得到上述常系数的（线性）微分方程。如果不是匀质的，那么我们就会遇到变系数的（线性）微分方程。有时候，这些系数或者非齐次项（外力）还与解本身有关，我们就得到非线性方程。

2.怎么解微分方程（存在性理论）？

对于线性方程，证明一个方程存在解的存在性理论已经相当完善。其主要工具是泛函分析与积分变换。对于常系数方程或者给定特殊系数的方程，利用微分方程1课程中的理论，我们常常

可以直接利用傅里叶变换将解显式解出。对于变系数的方程，傅里叶变换的方法不再完全有效，此时一些泛函分析的工具就必不可少了。对于变系数线性方程来说，我们主要有以下几种办法来寻找一个解，这些办法绝大部分的情况下只能找到某种意义下的弱解。至于要找到光滑解，我们还需要考虑正则性理论，就是我们下一个要考虑的问题。

- 利用Hahn-Banach定理
- 利用变分法，凸性与紧性
- 利用扰动方法或者迭代方法（压缩映像原理、Nash-Moser迭代）
- 利用算子半群，泛函演算。
- 利用傅里叶变换的变种Galerkin逼近
- 利用紧性（能量法、Boostrap）：核心是能量估计

为什么考虑抽象存在性理论

3. 唯一性与正则性

4. 局部性质与整体性质

5. 渐近(Asymptotic)行为

5.1.9 微分动力系统（暂缺）

暂缺。

科大有时会开设“生物数学导论”或者“微分方程与动力系统”(MA05108)等类似课程。

5.1.10 更多关于偏微分方程的内容

偏微分方程涵盖的范围实在太大太大，以至于从事不同类型方程研究的人们彼此可以完全不知道对方在做什么/用什么技术。PDE这个方向经常因为大量无意义灌水人的存在而风评被害，但这并不妨碍PDE这个大熔炉的经久不衰。很多来自物理（例如流体运动、动理学方程、量子力学、广义相对论的数学理论等等）或是几何（例如极小曲面）的模型都需要利用偏微分方程刻画，那么偏微分方程的分析成为研究的重点也是理所当然。

中国在偏微分方程的发展相对其他方向更早一步，PDE界也的确有很多做得好的中国学者：例如第一个破解流体自由边界问题适定性的就是华人数学家邬似珏教授（解决了自由边界不可压无旋水波的适定性问题），几何分析就更多了。青年的PDE研究人员中也有做得好的中国学者，当然他们大多处于博士后阶段或是刚取得教职，以后定会大放异彩。

科大的PDE建设以几何分析、椭圆方程为主，方向并不全，其余的还有做最优传输、色散方程、抛物方程、微分动力系统的老师。流体方程、相对论方程等其它重点方向科大暂时没有，但国内也有一些做得比较好的老师。**科大每学期都会不定期开设PDE专题选讲的课程，学过微分方程2的同学完全可以去听一听，以拓展视野。要知道我们的微分方程2这门课只是讲了一些基本语言，其内容都属于PDE研究中的“基本常识”，因此，更重要的是去体会并理解我们所学的知识是如何被运用的。**例如，笔者在科大就读期间曾经修读过流体方程选讲与色散(Schrödinger)方程选讲，现在也从事偏微分方程的学习与研究，从中也了解到一些近年人们关注的问题。下面笔者列举一些自己了解的方程及其入门基础知识的参考资料：

流体方程：

了解流体PDE的基本Setting，可以看 Andrew Majda, Andrea Bertozzi: Vorticity and Incompressible Flow，或者 Vlad Vicol, Jacob Bedrossian在2015年UC Berkeley暑校的讲义。

1. 流体方程是什么？

Euler方程（无粘性流体）、Naiver-Stokes方程（有粘性流体）刻画了流体本身的运动：

$$\rho(\partial_t + u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = F, \nu \geq 0.$$

其中u是流体的速度场，ν是粘性系数，ρ是流体的密度，p是流体的压力，F是外力，$D_t = \partial_t + u\cdot\nabla$称作“物质导数”。同时，流体满足质量守恒：

$$D_t\rho + \rho\operatorname{div}(u) = 0.$$

当ρ是常数时，第二个方程变成$\operatorname{div} u = 0$，此时称液体为“不可压流体”，否则称作可压流体。

欧拉和Navier-Stokes方程是$F = 0$的情况，也是刻画各类流体的核心。当F不同时，所表述的流体类型也不同，也就是相当于耦合了不同的物理方程。例如，$F = ge_3$时则是代表水波方程（这一项相当于重力）, $F = \nabla\phi$(ϕ为Δ-基本解)则是带自重力位势的流体，可以描述大质量星体内

部的流体运动。此外，还有刻画等离子体(磁流体)、液晶、弹性力学、相对论流体的情况，它们是欧拉/NS方程分别与(pre-)Maxwell方程组、波映射、弹性方程、爱因斯坦方程耦合所得

边界条件与状态方程的不同对应着不同的流体（是指有无表面张力、液体/气体/其它）。若边界上$\rho = 0$，则刻画的是气体的运动。边界上流体的压力满足$p = \sigma\mathcal{H}$, 称作表面张力方程。这里$\sigma \geq 0$是表面张力系数，$\mathcal{H}$是流体边界的平均曲率。

2. 流体PDE关注一些什么问题：

科大没有专门做流体PDE的老师，但国内外还是有很多学者从事这方面的工作，其关注问题的类型也很多。例如自由边界问题适定性、小初值整体解的存在性与正则性、无粘阻尼与其它的稳定性问题、奇异性与激波的形成机制、湍流问题、边界层方程、Beale-Kato-majda爆破准则、定态解等等。下面笔者对这些方面就自己的了解稍作介绍：

（1） Navier-Stokes方程整体正则性问题

这是2016年秋季科大开设的流体方程选讲课的话题之一。欧拉方程的(Hölder)正则性问题则是所谓 Onsager 猜想，这方面我不了解就不多说了。

N-S方程是抛物方程，可以期待它的整体正则性, Terence Tao也在这方面有工作。具体难处，可以阅读他的 博客。$\mathbb{R}^3$上的N-S方程在$\dot{H}^{1/2}$上的小初值整体(温和)解很容易得到，但$\dot{H}^{1/2}$并不是惟一的临界空间：

$$\dot{H}^{1/2} \subset L^3 \subset L^{3,\infty} \subset BMO^{-1} \subset B^{-1}_{\infty,\infty}.$$

换成后面更大的函数空间，3D N-S方程的存在性问题就复杂得多。强/弱L^3整体正则性的有关结果分别在2003、2015年才被人证明出来。可见，这仍是一个很困难的问题。

（2）Beale-Kato-Majda爆破准则

BKM爆破准则是研究欧拉方程长时间行为非常著名也是非常重要的一个结果，大概意思是说，不可压欧拉方程的解的某些高阶Sobolev范数（$\geq \frac{n}{2} + 1$阶）发生有限时间爆破，那么这当且仅当是流体速度场的旋度发生爆破！这和人们的直观印象也较为符和——平缓的洋面上演化出巨大的漩涡。

这个结论被人推广到一些其它的不可压流体（例如等离子体），也有类似结果。但目前自由边界的BKM 爆破准则尚是开放问题，人们猜测的结论是旋度和边界的曲率发生爆破，目前正在被研究中。

（3）Landau阻尼问题

这个问题在过去的几年有较多的进展，但多限于二维的区域$\mathbb{T} \times \mathbb{R}$或者$\mathbb{T} \times [0, 1]$，这也是16秋季流体选讲课的话题之一。具体问题是：在这个“管道”内，给定欧拉方程的一个特解（一般是以单调剪切流为主 monotone shear flow），给予一个扰动，问扰动后是否具有长时间的稳定性？其临界正则性是多少？

如下文章算是这个问题具有代表性的起始作品，后面各种各样的结果，其方法或多或少都源

自它们。

[1] J. Bedrossian, N. Masmoudi: Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations, IHES, 2015.

[2] Lin Zhiwu, Zeng Chongchun: Inviscid Dynamical Structures Near Couette Flow, ARMA, 2011.

[3] Christian Zillinger: Linear inviscid damping for monotone shear flows in a finite periodic channel, boundary effects, blow-up and critical Sobolev regularity, ARMA, 2015.

其想法都是构造toy model用ODE去逼近PDE, 再进行一些能量估计。

物理上提出的这类Landau阻尼的问题里面，$\mathbb{R}\times[0,1]$ 这种无限长管道的稳定性问题迄今为止毫无进展。究其原因，是$\mathbb{T}$的频率空间在除掉0频率（坐标变换要求）之后至少是1，但$\mathbb{R}$上显然做不到。这是近年的一个火热领域。详情可以看Bedrossian-Masmoudi团队，以及韦东奕-章志飞团队的工作。

（4）湍流问题

目前人们倾向于用$\mathbb{T}^d$上的 Naiver-Stokes方程来刻画湍流。如果学过概率论、随机过程(研)和微分方程2话，可以看这本书： S. Kuksin, A. Shirikyan: Mathematics of 2D Turbulence.

此书主要讨论2D随机NS的基本动力学（吸引子）和概率上的性质（大数定律等），2012年以前的研究进展基本被这本书介绍完毕。书的最后一章提到了3D湍流问题的困难：3D湍流不同的“层”（你可以把它看作一个一个二维的饼叠起来，像千层饼那样）之间相互干扰且难以控制，当时的结果很多都是$\mathbb{T}^2\times[0,\epsilon]$这种扁平区域上用平面湍流逼近而得。至今3D的情况仍然没有取得突破进展。

（5）自由边界问题：这是笔者自己的研究方向，因此可以讲得稍微详细一些。

众所周知，现实中流体的运动会导致边界也随时间变化，我们也需要解出这个区域。那么，最直接的问题就是：自由边界问题的适定性如何？在此之前，我们需要引入一个非常重要的 Taylor sign条件（无表面张力情况下），即初始时刻在自由边界面上，总压力的法向导数为负，也就是$\partial P/\partial N\le -c_0<0$。这个条件相当于防止液体“脱出整个流体区域”。已有反例表明这个条件的缺失会导致问题谬定(illposed)。

流体的自由边界问题（主要指欧拉方程）大约从1997年开始有重大突破。主要的经典结果有：

- Wu Sijue（邬似珏）于1997、1999、2007、2009年对不可压无旋水波的适定性问题给出了解答。
- Hans Lindblad 于1998（与Christodoulou）、2004、2005年依次证明了不可压欧拉方程自由边界问题的先验估计（Q-能量法）、局部存在性（Nash-Moser迭代）、可压方程局部存在性。2016、2018年与其学生共同证明了可压方程的一些先验估计、不可压极限和局部存在性。
- Daniel Coutand, Steve Shkoller于2005年利用切向光滑化的方法避开Nash-Moser迭代证明了

（有/无表面张力）不可压欧拉方程的局部适定性问题。而后还有一些可压气态方程的局部存在性的结果。

自由边界问题的困难主要在于：撇开固定区域上的困难，人们还需要控制流体边界的正则性。后面给出的参考文献[1]中表明，边界的第二基本形式的正则性成为了能量估计中的最高阶项！实际上这也是可以预料到的，因为我们现实中也能看见一些形如“浪尖”、“水花”这样的“奇异性”出现在水面上。一般而言，自由边界问题要求边界的正则性至少在C^2以上，低于该正则性会出现其它行为。

下面说一说可压与不可压流体的一些区别。

- 不可压流体：“不可压”这个条件看似平凡，但实际上消除了很多困难。例如以下两点都是技术上比较关键的区别：
  - 由于密度不再变化，则可以对欧拉方程求散度导出流体压力的椭圆方程，从而提高正则性。对可压流体而言，压力p满足的是一个波动方程，无法像椭圆方程一样提高正则性；
  - 不可压欧拉方程满足初值无旋度则永远无旋度，这一点可压方程无法做到。
- 可压流体：
  - 如上所述的波方程正则性较椭圆方程更差，因此只能寄希望于波方程右边全是低阶项才有希望得到控制。
  - 多特征速度问题：一些其它的理想可压流体（无耗散）的方程组目前几乎是一片空白。究其原因，是因为这些物理方程里面引入的新物理量与流体的速度与压力波耦合严重，导致上面提到的波方程面有另一物理量的更高阶项而无法控制。此外二者的旋度也无法同时产生控制。从波方程的角度来说，这是产生了“（独立的）双（多）特征速度”。传统的Sobolev空间能量法难以解决这类问题，目前的结果均是在各向异性Sobolev空间中使用双曲对称化的方法，线性化+Nash-Moser迭代来做相关问题的存在性，与高维激波等问题。

若是对自由边界问题感兴趣，可以阅读下面两篇文章，从比较几何的角度体会一下什么叫“边界的估计成为了最高阶项”。

[1] D. Christodoulou, H. Lindblad: On the Motion of the Free Surface of a Liquid, CPAM, 2000;

[2] H. Lindblad, C. Luo: A priori estimates for the compressible Euler equations for a liquid with free surface boundary and the incompressible limit, CPAM, 2018.

而上面提到的切向光滑化方法，则可以参照下面这篇文章

[3] D. Coutand, S. Shkoller: A Simple Proof of Well-posedness of the Free-Surface Incompressible Euler Equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S, 2010.

双曲对称化方法，则可以看陈贵强、Paolo Secchi, Yuri Trakhinin等人的工作了解一下基本方法，例如：

[1] Paolo Secchi: Well-posedness of Characteristic Symmetric Hyperbolic Systems. Arch. Rational Mech. Anal. 134 (1996) 155-197.

[2] Yuri Trakhinin: The Existence of Current-Vortex Sheets in Ideal Compressible Magnetohydrodynamics. Arch. Rational Mech. Anal. 191 (2009) 245–310.

[3] Métivier,G.: Stability of multidimensional shocks. In: Advances in the Theory of Shock Waves. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 47, 25–103, Birkhäuser, Boston, 2001.

（6）奇异性与激波问题：

上面已经提到自由边界问题往往需要边界正则性达到C^2，而今年(2019)已有人证明，$C^{1,\alpha}$正则性的解会在有限时间内演化出“奇异性”。这方面具体工作需要参考Cordoba, Elgindi等人的文献。

可压流体的奇异性也在2019年出现了多个突破。在（5）中我们已经提到了可压流体由于密度/压力的变化会产生一个额外的波。实际上可压欧拉方程已经被人证明长时间行为会产生“激波”，这方面的问题往往会归结于波动方程的激波问题。具体可以参考Jared Speck等人关于可压欧拉方程的工作。在2019年 Buckmaster-Shkoller-Vicol给出了点态激波形成的证明。而在2019年底Merle-Raphael-Rodnianski-Szftel 等人公布了一个重大结果：可压欧拉方程存在激波解之外的新型奇异性，而且这个奇异性与能量超临界的散焦薛定谔方程的爆破新机制直接相关（既不是孤立子，也不是以前构造的自相似解）。可以说，奇异性问题迎来了新的重大突破。

当然，还有很多其它类型的激波问题，可以参考陈贵强等人的工作。笔者不是很了解就不展开说了。

（7）相对论流体：

当考虑大质量星云的运动，或是流体的超高速运动时，相对论效应就需要被考虑，即背景度量不再是欧氏度量。此时则需要一些广义相对论数学理论的工具来研究相对论流体的方程。这方面可以看Jared Speck, Marcelo Disconzi, 以及Mihaela Ifrim和Daniel Tataru关于相对论欧拉方程结构讨论的文章，这实际上还是与拟线性波方程的研究有关。而关于Einstein-Euler方程，目前的结果均为 Brauer-Karp用对称双曲组的方法完成。

（8）其它很多问题：例如边界层问题、定态解附近的稳定性、涡片的存在性等等。

色散方程：

1. 色散方程是什么？

我们称具有如下形式的方程为色散方程

$$i\partial_t u + \Delta u = Q(x, u, \partial u), \tag{5.1}$$

当然上面的拉普拉斯算子可以替换为$\sqrt{-\Delta}$, $\sqrt{-\Delta + m^2}$(对应于波方程、Klein-Gordon方程)或更一般的椭圆算子。若(5.1)中

- $Q(x, u, \partial u) = Q(x)u$，则称(5.1)为线性色散方程；
- $Q(x, u, \partial u) = Q(x, u)$，则称(5.1)作为半线性色散方程(semilinear)；
- 一般情况称作拟线性(quasilinear)色散方程。

实际上，(5.1)一般会在某些尺度变换(scaling transformation)下保持不变: 若u是方程的解，则有某个形式的$u_\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda^c} u(x/\lambda^a, t/\lambda^b)$. 同时该方程还有守恒量$E(u(t)) = E(u(0))$并满足$E(u_\lambda) = \lambda^p E(u)$。据此，我们**可以将色散方程分为次临界(subcritical)、临界(critical)、超临界(supercritical)三类**: 设$E(u)$是能量(质量, resp.)泛函, 则上述$p < 0$, $p = 0$, $p > 0$分别就对应了能量(质量, resp.)次临界、临界、超临界的情况。

2. 色散方程的实例

(1) 量子力学中，我们考虑的是带/不带位势的非线性薛定谔方程(以下简称NLS)

$$i\partial_t u + (\Delta - V(x))u = \pm |u|^{p-1} u$$

(2) 流体力学中，不可压水波方程也可以化成色散方程组来处理（相当于把方程写到水波的自由边界上）。这在邬似珏或 Germain-Masmoudi-Shatah 的文章里面都可找到。此外还有描述浅水波的KdV方程

$$\partial_t u - \partial_x^3 u = u\partial_x u,$$

和描述深水波的 Benjamin-Ono 方程

$$\partial_t u - H\partial_x^2 u = u\partial_x u,$$

这里H代表Hilbert变换。

(3) 光学中，我们考虑半线性的波动方程和Klein-Gordon方程:

$$\Box u := \partial_t^2 u - \Delta u = \pm |u|^{p-1} u;$$

$$\Box u + m^2 u = \pm |u|^{p-1} u.$$

3. 色散方程领域的核心问题

色散方程的研究主要考虑的是如下问题:

(1) 线性估计：从物理直觉来看，我们知道方程的解会在$t \to \infty$时$u(t) \to 0$. 那么是否能在数学上证明这些衰减估计，便乘了一个首要的问题，这也是后面证明方程解的存在性的必要基础。

(2) 适定性(Wellposedness)理论：是否能选取合适的函数空间，来严格证明色散方程(组)（以$\dot{H}^1$初值的Cauchy问题为主）是局部/整体适定的？

(3) 散射(Scattering)理论：当没有孤立子产生的时候，我们是否能证明方程的解在 $t \to \infty$ 时会在某个意义下强收敛与线性方程的解？

(4) 孤立子(Soliton)：当孤立子出现的时候，是否能给出方程解的具体渐近行为？大多数情况下是以径向解或者可积系统的形式出现。

(5) 反例：若方程不再有适定性，我们是否能构造出具体的反例使得方程谬定？发生爆破？

(6) 周期性区域：在周期性边界条件下，色散方程的解行为会如何？这些都需要重新考虑。

4. 参考书籍与评注

在介绍色散方程的基本理论之前，我们先给出以下的参考书。

[1] Terence Tao: Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis, CBMS 106, AMS.

Tao的这本书总结了许多色散方程的基本理论。尽管这本书是从最基本的话题开始讲（例如线性色散估计、时空Strichartz估计、适定性理论、守恒律等），但这本书包含了当年（2006年出版）色散方程的几乎所有前沿课题，包括但不限于：Normal form方法、Bourgain的傅立叶限制性估计法、Tao的I-方法、能量归纳法、环面上的色散方程，以及薛定谔/KdV/波动方程/波映射的整体解理论。

但Tao书中的证明均是以梗概的形式叙述（尤其是局部适定性证明），并未涉及太多计算的细节，想要了解更多细节的同学可以看 Benjamin Dodson 新出的书[2]，这里面有详尽的介绍。Dodson本人也是经典色散方程领域的顶尖学者之一。

[2] Benjamin Dodson: Defocusing Nonlinear Schrödinger equations, Cambridge Tracts in Mathematics 217.

Tao [1] 中考虑的主要是半线性的色散方程，因此并未介绍能量法（这是证明拟线性方程适定性的有力工具）。作为补充，下面的参考书介绍了能量法：

[3] Natasa Pavlovic, Nikolaos Tzirakis: Lecture Notes I, On Local and Global Theory for NLS.

[4] Nikolaos Tzirakis: Lecture Notes, Wellposedness Theory of Dispersive PDEs.

此外, Tao的书没有过多提及“局部光滑(local smoothing)效应”和点态收敛的估计，这些实际上是90年代Kenig-Ponce-Vega等人的结果，同样可以参考如下书籍

[5] Burak Ergodan, Nikolaos Tzirakis: Dispersive PDEs Wellposedness and Applications.

孤立子猜想相关的理论则可以参考如下书籍：

[6] Carlos E. Kenig: Lectures on the Energy-Critical Nonlinear Wave equation.

[7] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov: Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method.

[6]中主要考虑的是径向解的孤立子理论，而[7]考虑了可积系统中出现的孤立子。

最后，关于带位势$V(x)$的非线项色散方程，可以参考Reed-Simon的现代数学物理方法四卷本。

5. 研究的基本方法

与椭圆方程不同的是，色散方程的线性估计（衰减估计与Strichartz估计）也是一个困难的地方。有些线性色散方程的理论至今还在研究中。

(1) 线性估计：

(1.1) 衰减估计（色散估计）与时空Strichartz估计

以薛定谔方程$i\partial_t u + \Delta u = 0$为例，它的一个显著性质是：解的$L^2$范数守恒，但点态收敛于0($t \to \infty$)，后者则是来自于衰减估计(端点情况+插值定理)

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim t^{-\frac{d}{2}(1/p-1/q)}\|u_0\|_{L^p},\ \ 1/p+1/q=1,\ \ 1 \le p \le 2.$$

此外，还有Strichartz时空估计，这有助于我们确定方程解的存在空间，考虑如下薛定谔方程

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u & = f \quad in \ \ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d \\ u(0) & = g. \end{cases}$$

的解(由Du'Hamel原理可得)

$$u(t,x) = e^{it\Delta g} - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds.$$

结合衰减估计、Christ-Kiselev引理、TT^*方法和HLS不等式可得，若(q,r,d)满足$2/q+d/r = d/2$，$(q,r,d) \neq (2,\infty,2)$，则称$(q,r)$为容许对(admissible pair)。对任意容许对$(q,r),(\tilde{q},\tilde{r})$，我们有如下Strichartz型的时空估计

$$\|e^{it\Delta}g\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|g\|_{L^2} \tag{5.2}$$

$$\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds\|_{L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \tag{5.3}$$

$$\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds\|_{L_t^q L_x^r} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}. \tag{5.4}$$

此外对波动方程，还有Klainerman的交换向量场方法得到衰减估计(Klainerman-Sobolev不等式)，这在上面微分方程2的拓展知识里面已经提到，不再赘述。更多的内容可以看Tao [1]的第二章。

(1.2) 位势散射与谱理论

考虑带位势的线性色散方程

$$i\partial_t u + \Delta u = V(x)u. \tag{5.5}$$

在合适的假定条件下，该方程的解是周期解或者渐近地收敛于(5.1)的解，后者称作散射现象，其定义为: 若存在u_+使得

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)-e^{it\Delta}u_+\|_{L^2}=0,$$

则称(5.5)的解在L^2中发生散射。下面我们一律记$H=\Delta-V(x)$.

对散射的一个阻碍是H存在特征值：H显见是自伴算子，那么如果有特征值的话必定是实数，那么$e^{it\Delta}u_0$显然是(5.5)的解，这个解是不发生散射的。实际上我们可以吧H视作L^2上的无穷维矩阵。若H是有穷维，则可以对角化作$H=\sum_{k=1}^d\lambda_k v_k v_k^T$的形式。但在无穷维的时候，算子的谱集不一定是有限数列，它有可能是无穷序列甚至一条连续曲线，此时的对角化则变成

$$H=\int_U\lambda(s)\langle v(s),\cdot\rangle+\sum_1^d\lambda_k\langle v_k,\cdot\rangle v_k.$$

我们借此可以得到:

$$e^{-iHt}=\int_U e^{i\lambda(s)t}v(s)ds+\sum_1^d e^{i\lambda_k t}\langle v_k,\cdot\rangle v_k.$$

上式右边的积分项是散射部分，求和项则是周期解部分。

散射理论的另一有用的工具称作“波算子”。定义$\Omega_+(u)=\lim_{t\to\infty}e^{itH}e^{it\Delta u}$（若该极限存在）。由Reed-Simon第三册的定理11.16可得，如上极限必定是存在的，波算子是良定的。而且以u_0为初值的方程(5.5)的解发生散射当且仅当u_0在Ω_+的定义域中。

把波算子作用在带位势的NLS上可得$-\partial_t u+\Delta u=\Omega_+(|\Omega_+^{-1}u|^2\Omega_+^{-1}u)$. 一些情况下我们可以证明波算子在某些$L^p$空间中有界，进而可以借用它证明一些非线性项的有界性。

更多有关散射的理论则可以参看 Reed-Simon 《现代数学物理方法》的第三册和第四册。

(2) 局部适定性：函数空间的构造与能量估计

现在我们来讨论方程(5.1)解的适定性。在讨论适定性的时候，我们必须先明确是在哪个函数空间X里面讨论。任意给定初值u_0(一般来说是属于$\dot{H}^1\cap X$中)，我们称方程的解是局部适定的，是指存在$T>0$使得$[0,T]$上方程(5.1)存在解u, 且$\|u\|_{X[0,T]}<\infty$. 若是整体适定的，则将$[0,T]$换成$[0,\infty)$. 小初值整体适定性是指对任意小的初值成立如上定义的整体适定性。

证明适定性的方法主要有两种：压缩映射原理法（不动点方法）、能量法。不动点法除了能证明存在性以外，还能证明解对初值的连续依赖性（这也是适定性的要求之一），但这只对半线性方程成立。若方程的非线性项包含了导数，则会导致在迭代的时候出现不收敛的情况。能量法则是在拟线性方程的非线性项具有某些对称性的时候有用。一般而言需要构造逼近解，设计一个能量泛函并给出一致的先验估计，再证明逼近方程有界和解的收敛。

(2.1) 压缩映射原理方法

考虑3D NLS

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u &= u^2 \quad in\ \ (0,\infty)\times\mathbb{R}^d\\ u(0) &= u_0.\end{cases}$$

那么方程的解可以写成

$$u(t,x)=P(u):=e^{it\Delta}u_0(y)+\int_0^t e^{i(t-s)u^2(x,s)}ds.$$

取$X=C^0([o,T];H^s)$, 若能证明$\|Pu-Pv\|_X\le\frac{1}{2}\|u-v\|_X$，则压缩映射原理直接可以给出解的存在性。我们不难得出

$$\begin{aligned}||P(u)-P(v)||_X&=||\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u^2(x,s)-v^2(x,s))ds||_{H^s}\\&\le\int_0^T(||u||_{L^\infty}+||v||_{L^\infty})||u-v||_{H^s}+(||u||_{H^s}+||v||_{H^s})||u-v||_{L^\infty}\end{aligned}$$

为了得出想要的1/2这个系数，我们在做局部、整体适定性的时候方法是不一样的。

1. (Local Wellposedness) 若 $T\ll 1$, 则

$$\begin{aligned}||P(u)-P(v)||_X&\le\int_0^T(||u||_{H^s}+||v||_{H^s})||u-v||_{H^s}\\&\le TC_{u,v}||u-v||_X\le\frac{1}{2}||u-v||_X\end{aligned}$$

2. (小初值 GWP) 若$u,v\ll 1$ 并且有衰减估计

$$||u-v||_{L^\infty}\le(1+t)^{-2}||u-v||_{H^s}$$

和

$$||u||_{L^\infty}+||v||_{L^\infty}\le(1+t)^{-2}(||u||_{H^s}+||v||_{H^s}).$$

则有

$$\begin{aligned}||P(u)-P(v)||_X&\le\int_0^T(1+t)^{-2}(||u||_{H^s}+||v||_{H^s})||u-v||_{H^s}\\&\le\int_0^T(1+t)^{-2}dt(||u||_X+||v||_X)||u-v||_X\\&\le\frac{1}{2}||u-v||_X.\end{aligned}\tag{5.6}$$

这个方法只对半线性方程有效：对拟线性方程，在做迭代的时候有

$$u^{(n-1)}\in H^s\Rightarrow Q(u^{(n-1)},\bar{u}^{(n-1)},\nabla u^{(n-1)})\in H^{s-1}\Rightarrow u^{(n)}\in H^{s-1}.$$

因此$u^{(0)}\in H^s\Rightarrow u^{(1)}\in H^{s-1}\Rightarrow\cdots\Rightarrow u^{(k)}\in H^{s-k}$. 这个迭代无法无限进行下去，因为产生了导数的丢失。

在小初值适定性的证明过程中，我们会给出衰减性条件，这些往往要用时空共振的方法来证明。

(2.2) 能量法

能量法的核心是设计合适的能量泛函。考虑如下柯西问题

$$\begin{cases} i\partial_t u &= u_{xx} + |u|^4 u_x, \quad \text{in } \mathbb{R} \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

令$E(u) := \|u\|_{\dot{H}^m}^2$, m为正整数，则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(u) &= -2iRe\left(\int \partial_x^m (u_{xx} + |u|^4 u_x)\partial_x^m \bar{u}\right) \\ &= -2iRe\left(\int |u|^4 \partial_x^m u_x \partial_x^m \bar{u}\right) - 2iRe\left(\int \sum_{\substack{i+i'+j+j'=m+1 \\ i,i',j,j'\le m}} \partial_x^i u \partial_x^{i'} u \partial_x^j \partial_x^{j'} \bar{u} \partial_x^m \bar{u}\right) \\ &= -2iRe\left(\int \sum_{\substack{i+i'+j+j'=m+1 \\ i,i',j,j'\le m}} \partial_x^i u \partial_x^{i'} u \partial_x^j \partial_x^{j'} \bar{u} \partial_x^m \bar{u}\right) \end{aligned}$$

利用Hölder不等式和插值则可以得出

$$||u||_{W^{s,\frac{2m}{s}}} \le ||u||_{L^\infty}^{1-\frac{s}{m}} ||u||_{\dot{H}^m}^{\frac{s}{m}}$$

借此，右边有如下上界

$$\frac{d}{dt}E(u) \le ||u||_{L^\infty}^4 E(u)$$

1. (Local Wellposedness) 由sobolev嵌入可得$\frac{d}{dt}E(u) \le ||u||_{L^\infty}^4 E(u) \le E(u)^3$. 再用Gronwall不等式得$E(u) \le \frac{E(u_0)}{\sqrt{1-CE(u_0)t}}$
2. (Small Data Global Wellposedness)由 $\frac{d}{dt}E(u) \le ||u||_{L^\infty}^4 E(u)$, 在给定衰减估计 $\int_0^{+\infty} ||u||_{L^\infty}^4(s)ds < \infty$的情况下，我们有
$$E(u) \le E(u_0)e^{\int_0^t ||u||_{L^\infty}^4(s)ds} \le CE(u_0) \tag{5.7}$$
这样就完成了能量估计的证明。

局部适定性理论介绍至此。后面的部分我们会逐步更新，以完成这个色散方程的简介。

(3) （临界）半线性方程的整体解理论

(4) 色散方程解的渐近行为(Asymptotic behaviour)：散射(Scattering)、孤立子(Soliton Resolution)

(5) 小初值整体解与稳定性理论：时空共振与散射理论

(6) 构造特解

(7) 周期性区域(环面)的情况：Strichartz估计与适定性理论的重塑、随机初值问题、波湍流(Wave Turbulence)理论

广义相对论的数学理论：

1. 爱因斯坦方程：其关注的问题包括但不限于：特解(Minkowski时空、Kerr解等等)（在不同坐标下）附近的整体稳定性、与黑洞有关的理论（singularity, consmic censorship猜想,etc）等等。这些与波动方程在特解（例如Kerr metric, Minkowski时空）附近扰动后的整体解存在性、稳定性、或者奇异性形成有关。笔者不是很了解就不多瞎说了。但是!!! 要学习这个方向一定要有人带着学，千万千万**不要自己死磕!!!**

2. 与Einstein方程耦合的方程组：Einstein-Klein-Gordon方程、Einstein-Vlasov方程、Einstein-Euler方程等等，都是考虑广义相对论背景下的这些方程。

其它各种方程：例如极小曲面方程、调和映射、蒙日-安培方程、抛物方程（热方程、生物数学中的方程等等）、动理学方程（这个法国人做得很多）、最优输运、双曲守恒律等等。

上面提到了偏微分方程往往来自几何或者物理。无论做什么类型的偏微分方程的问题，这几个因素都是需要慎重考虑的：你做的这个问题是否在几何或者物理上被人关心？你加的条件是否是合理的？是否是有物理/几何意义的？瞎编一堆无意义的条件，即使做出来了也只是你的自圆其说，能否得到承认可想而知。

最后，对PDE有兴趣的科大同学可以联系我们：

- 章俊彦：13级数学科学学院，现就读于约翰·霍普金斯大学，研究方向为流体力学中的偏微分方程，
  邮箱: zhang.junyan@jhu.edu

- 马骁：14级少院、华罗庚班，现就读于普林斯顿大学，研究方向为色散偏微分方程，
  邮箱: xiaom@math.princeton.edu

我们也会根据我们在PDE的学习与研究方面的推进来不断更新这方面的内容。

5.2 几何与拓扑

参与这部分编写的作者有：

黎曼几何：龚禹霖、刘弘毅

代数拓扑、黎曼曲面：王翌宇

复几何：刘弘毅、王翌宇、田珺昊

拓扑学补充内容：胡家昊

Floer理论：李明阳

5.2.1 黎曼几何

预备知识：微分流形（主要是局部坐标和张量的计算）、拓扑学。

教材与参考书：

[1] 刘世平教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teaching.html;

[2] 王作勤教授的讲义 http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/index.html;

[3] Do Carmo: Riemannian Geometry;

[4] Peter Petersen: Riemannian Geometry, 3rd edition, GTM 171, Springer;

[5] 伍鸿熙：黎曼几何初步;;

[6] Milnor: Morse Theory（莫尔斯理论）;

[7] F. W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups (微分流形与李群基础), GTM 94.

[8] John Lee: Introduction to Riemannian Manifolds, GTM 176.

关于参考书的选择：[1], [2]二位老师的讲义都非常值得推荐，要注意[1]在黎曼曲率张量上的定义与其它书有所不同。[3]与科大黎曼几何课程内容较为接近，正文和习题都非常经典。[4]内容齐全、丰富，适合作为工具书参考。[5]对于几何概念的解释非常清楚，推荐阅读。而[8]这本书细节写的非常清楚，照顾到了没学过微分流形的同学。对有一定基础的同学，Peter Peterson 的书适合进行一些拓展阅读，不过错误比较多，并且有一些难以更正。它的书后习题有很多例子。个人建议学习黎曼几何不要拘泥于学习一般理论（一般理论非常有限），对例子一定要重视，不放弃例子里繁琐的计算。因为高维流形很难想象,通过计算一些几何量和拓扑量可以对这个黎曼流形有个初步的认识，在思考黎曼几何问题时可以用例子去思考。

Petersen [4] 后面讲了黎曼流形的收敛理论，一种是作为度量空间的 Gromov-Hausdorff 收敛（很弱），一种是强的 Cheeger-Gromov ($C^{k,\alpha}, L^{k,p}$)收敛。弱的收敛由 Gromov 紧性定理一般比较容易证明，加上几何量的一些控制后，能由弱的收敛推出（子列）强的收敛（椭圆方程正则性理论）。收敛理论在研究黎曼几何里非常有用。例如，由一些几何量的估计，通过简单的 rescaling argument（反证法）和收敛理论里的一些紧性定理可以得到其它几何量的估计，但是直接通过计算证明很难。如果黎曼流形上有其它的结构，那么得到几何量的控制会更容易一些，应用收敛理论也就更容易一些。单纯地研究某一类黎曼流形的所有可能（可以允许 rescale）极限也是一个很有意思的问题（例如有助于理解模空间）。

学习建议：

黎曼几何的研究对象是黎曼流形，这是最基本的几何对象之一，因为通过单位分解我们可以得知任何流形上都存在一个黎曼度量。

这门课通常分成两部分，第一部分主要涉及到的是**曲率张量的计算和测地线的衍生工具**（指数映射，Jacobi场，共轭点、割点和割迹、变分公式与指标形式等）；第二部分主要可以说是前面**所学工具的应用**，给出了很多非常漂亮的定理：诸如曲率控制拓扑的结果，一系列比较定理和一些关于Bochner技巧的专题。

第一部分：关于曲率计算，我建议大家可以特别学习一下移动标架法，尤其是在可以进行逐点计算的时候，可以用测地标架进行计算。而关于测地线这部分，对于测地线我们在几何上理解为能量泛函变分的临界点，而由能量泛函通过第一第二变分公式可以得到我们研究黎曼几何的重要工具比如说指标形式、Jacobi场等等概念。特别地，能量泛函这个概念可以推广到去考虑两个黎曼流形之间$f : M \to N$的能量泛函$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |df|^2\, dVol$的临界点，这就是调和映照。这个概念除了包括了测地线还包括了现代研究的热门领域之一的极小曲面，有兴趣的同学可以继续学习这方面的内容。在这里我再次强烈推荐一下Milnor的“Morse Theory”，可以对上述观点有个更清晰的认识。

第二部分是本课程中非常精彩和优美的一部分，可以看到之前我们学过的工具如何用来解决几何问题。曲率与拓扑的关系一向是现代几何的核心问题。曲率是黎曼几何中是反应局部几何最重要的不变量，拓扑性质反应流形的整体性质。曲率和拓扑的关系将会贯穿整个黎曼几何和复几何的学习和研究当中，这些定理不但结论重要而且证明方法都是非常值得学习的。这里其实大家可以看到正截面曲率(Synge定理)和正Ricci曲率(Bonnet-Myer定理)都会对拓扑产生很强的限制，非正（负）截面曲率也有很多漂亮的结果比如说(Cartan-Hadamard定理和Preissman定理)，但是负Ricci曲率对拓扑是没有限制的（见 Lohkamp, Joachim (1994), “Metrics of negative Ricci curvature”, Annals of Mathematics）。某种意义上正曲率对拓扑限制更强，而负曲率下的拓扑更加“自由”，这一理念广泛存在于微分几何的研究当中。

此后介绍的一系列比较定理，其实本质都是在比较指标形式。这里使用的搬运向量场的技术思路巧妙，两位老师的讲义 [1], [2]和参考书[5]都有很清晰的论证。这里特别提及体积比较定理(Gromov-Bishop)，因为这个定理不仅仅是比较体积而是比较体积的增长速度，这一点可以引出很多应用，比如说以极为初等的方式证明Cheng (郑绍远) 的最大直径定理(Ricci曲率有严格正下界$(n-1)k$的完备黎曼流形M的最大直径为$\pi/\sqrt{k}$，那么M等距同构于半径为$1/\sqrt{k}$的欧式球面)。此外，在[2]的第24节最后，会涉及体积比较定理在几何群论中的初步应用。

若还有时间则会涉及一些专题，比如说黎曼流形上的Hodge理论，Bochner技巧及其应用(估计第一特征值)，图上的几何分析。

Hodge理论的内容是说k阶调和形式构成的群同构于k阶de rham上同调群，也就是说$\Delta\omega = 0$的解空间完全取决于紧流形的拓扑结构，事实上这一结果可以推广到一般的椭圆复形上，这一话题再深入下去就会走到著名的指标定理。关于黎曼流形上Hodge定理的完整证明可以参考伍鸿熙的《黎曼几何选讲》第一章或者是[7]第五章。

而Bochner技巧则是一种建立椭圆方程和Ricci曲率关系的理论。比如说我们可以有以下形式的Bochner formula:

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right) = \langle\nabla\Delta u, \nabla u\rangle + |\nabla^2 u|^2 + Ric(\nabla u, \nabla u),$$

这样不难得到关于Laplace算子特征值的估计。

对于Killing field（可以看作等距同构群的李代数的元素），一阶微分形式都有类似的Bochner formula。如果我们应用Bochner formula在一阶微分形式上,结合Hodge Theory我们得到Bochner消灭定理：对于紧黎曼流形$Ric \geq 0$且在一点处为正，那么$H^1(M, R) = 0$. 这可以视作著名的Kodaira消灭定理的黎曼几何版本。

而应用Bochner formula在Killing field上，对于Ric¡0的紧黎曼流形，我们可以得到其没有非平凡Killing field，进而其等距同构群是有限群。另一方面利用Bochner formula可以定义非光滑几何空间（例如图）上的曲率，这被称之为Bakry-Emery曲率，相应的可以建立图上的比较定理等。这一部分在刘老师17年黎曼几何讲义最后有详细介绍。Hodge理论和Bochner技巧在复几何中有更为重要的意义，如果有兴趣继续学习复几何那么这部分内容很值得以看。

最后我们来提及一些在这门课并不是重点但是实际上很值得了解的内容(推荐大家做一下王老师16年黎曼几何[2]的作业题，有很多非常精彩的内容是放在了习题中)：

子流形几何：我在黎曼几何前置中几乎没有提到本科的微分几何，因为本科的微分几何除了内蕴几何以外还要考虑如何嵌入到欧氏空间，而黎曼几何这门课几乎是内蕴的。对于一般的子流形几何，在[3]书中有初步的介绍。

李群和齐性空间：[2]习题中有相关介绍，特别地在这里我还是推荐[6]最后一章。

等距同构群与Killing Field:Petersen的黎曼几何有所介绍。

Gauss-Bonnet-Chern公式：我推荐大家直接去阅读陈先生的原始论文“A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds”, 会学到很多东西。

Holonomy: 黎曼几何里有个很重要的概念叫holonomy,定义如下：见Petersen [4] 第10章或如下文献

Dominic Joyce. Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. In Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries, pages 1-68. Springer, 2003.

对于黎曼流形上一条分段光滑曲线$\gamma : [0,1] \to M^n, \gamma(0) = \gamma(1) = p$，通过沿着$\gamma$平行移动$T_pM^n$里的切向量,我们得到$T_pM^n$到自身的一个等距同构。当$\gamma$ 遍历所有这样的曲线，这些等

距同构构成 $O(n)$的一个子群$Hol_p(g)$。如果M^n 连通，那么取不同的p得到的子群彼此共轭,任取一个称为(M^n,g)的holonomy群，记为$Hol(g)$。 Berger 给出了黎曼流形按照 holonomy 群的分类定理：

定理 1. 任何单连通的，不可约的，非对称的黎曼流形的 Holonomy 群同构于（1）$SO(n)$, dim=n (2) $U(n)$, dim=2n (3) $SU(n)$, dim=2n (4) $Sp(n)$, dim=4n (5) $Sp(n)\cdot Sp(1)$, dim=4n (6) G_2, dim=7 (7) $Spin(7)$, dim=8

这里不可约指局部上不能分解成两个黎曼流形的乘积。非对称定义为不是局部对称（局部上是对称空间）。对称空间的分类由Cartan给出，它们的 holonomy 群不一定是上述7种之一。容易知道，定理的三个假设都可以去掉，不过列表会更长一些。

Berger的证明用的是代数方法，他用两种测试方法来测试哪些$SO(n)$的李子群可以是满足上述条件黎曼流形的holonomy群，但他并没有说明这些李群可以成为黎曼流形的 holonom y群。前五种 holonomy 有非常多的例子，后两种称为Exceptional holonomy，例子后来由 R.Bryant, S.Salamon, D.Joyce 等构造出。

满足上述条件的“generic”的黎曼流形holonomy群恰好是 $SO(n)$， Special Holonomy($Hol(g)$包含于后六种）对应着黎曼流形上某些特殊的几何结构，即与度量相容的平行张量。例如

- Kähler 流形 $\Leftrightarrow Hol(g)\subset U(n) \Leftrightarrow \nabla J=0$ (J 是近复结构),
- Calabi-Yau 流形$\Leftrightarrow Hol(g)\subset SU(n) \Leftrightarrow \nabla J=0, \nabla\Omega=0$($\Omega$ 是一个非0的$(n,0)$形式),
- Hyperkähler 流形$\Leftrightarrow Hol(g)\subset Sp(n) \Leftrightarrow \nabla J_i=0, i=1,2,3$($J_i$是复结构，满足四元数关系)。

所以复几何主要是研究holonomy 群包含在$U(n)$或$SU(n)$的黎曼流形。Calabi猜想说明了如果紧致流形 $Hol(g)\subset SU(n)$,那么我们可以找到另一个Ricci-flat度量 g', $Hol(g')\subset SU(n)$。一般黎曼流形上的结果非常有限,但对具有Special holonomy（包括G_2,$Spin(7)$）黎曼流形的研究，仍然是目前几何研究的一个重点。

拓展与延伸阅读：

1. Milnor: Morse Theory.

强烈推荐阅读，Morse理论在现代几何拓扑中占有非常重要的地位，Milnor这本书是了解这一理论最好的入门作(应该没有之一)。这里看到黎曼几何中的方法如何应用于拓扑之中，特别是最后对于Bott周期定理的证明，令人震撼。特别地，黎曼几何课程中关于向量场的指标形式这部分强烈建议参考这本书。

2. Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov:“ A course in Metric Geometry”.

度量几何学会讨论不带有光滑结构的度量空间上的几何，这样可以讨论一族黎曼流形收敛的问题，度量几何学也是现代几何热门方向之一，与几何流等领域都有着密切的关系。

3. 伍鸿熙：《黎曼几何选讲》

这是一本专题选讲性质的书，涉及到黎曼流形上的Hodge分解，Holonomy Group等专题。

4. 伍鸿熙: "The Bochner Technique in Differential Geometry"

Bochner技巧专题的书，Bochner技巧是在几何分析中十分常见的技巧，本书后面还会涉及到调和映照。

5. Simon Brendle: "Ricci flow and the sphere theorem".

6. 丘成桐、孙理察：《微分几何讲义》。这本书建议作为讨论班材料阅读，内容上错误很多而且难度很大，最好有老师带着读。

5.2.2 代数拓扑

预备知识：点集拓扑、近世代数群论部分（除去Sylow定理）、代数学模论部分（尤其是PID上有限生成模的结构定理）

建议教材：

[1] Allen Hatcher: Algebraic Topology.

参考书：

[2] Peter May : A Concise Course in Algebraic Topology;

[3] Munkres : Elements of Algebraic Topology;

[4] 姜伯驹：同调论，北京大学出版社。

学习建议：

代数拓扑是学习几何必不可少的一环。这个学科源远流长，上世纪发展极为迅速，得到很多非常深刻结果。

最早的代数拓扑可以说是庞加莱（Henri Poincaré）一手创建的。他在1895年的论文"Analysis Situs"中定义了基本群和同调群。当然，关于同调，其实早在Riemann时期就已经定义了所谓的"多联通"，Betti在1871年就证明了所谓"同调数"的不变性。庞加莱把他们的思想推广，写成了如今代数拓扑最基本的对象。上世纪20年代左右，诺特开始用链复形来研究同调群，同调代数就此诞生。

这篇文章旨在给科大的学生介绍代数拓扑的学习方法和后续的一些领域。

关于教材，我们这里只点评Hatcher的代数拓扑。标准的经典代数拓扑（纯粹从拓扑空间的观点出发），前置只需要点集拓扑和近世代数。科大代数拓扑课程的内容一般是这书的第0-3章，但是这本书每一章的附录都值得阅读，非常有意思。第一章是基本群与覆叠空间，包含了这本书可能需要的最难的点集拓扑（笑）。第二章是奇异同调、胞腔同调，还包括标准的映射度内容，以及总结了同调论的公理。不过那个公理是建立在CW复形上的，标准公理其实不是那个，这个需要注意。第三章是上同调，主要讲上同调环和庞加莱对偶，以及Künneth公式（证明使用了标准的公理验证模式）。第三章的附录很有意思，建议阅读。第四章是整本书的高潮和核心，可惜课程时间不足，科大的代数拓扑课程一般不讲这部分，建议在学完科大的代数拓扑之后自行阅读（如果有兴趣）。

进阶一些，笔者在此提供如下参考资料：

1、同伦论：参考资料：Hatcher第四章。

主要内容是同伦群的计算和应用，以及CW逼近等一些基本的同伦手段，奇异同调群其实是$\langle X, K(G,n)\rangle$，所以同调论实际上可以是同伦论的分支。这一章将前三章做了统一，非常有意思。

2、微分观点：参考资料：GTM82 Differential Forms in Algebraic Topology. 前置：微分流形、点集拓扑。

其实这不算进阶，代数拓扑完全可以一上来就看这本书，只不过科大不这么教。同调群不止

有奇异同调群，还有微分流形的de Rham上同调群以及层的Cech 上同调群。这本书将大多数的代数拓扑抽象的构造，全部翻译成了微分流形的观点，写书水平极高，强烈建议认真读。

3、配边论：暂缺

4、拓扑K理论：参考书为Atiyah : K-Theory. 前置知识：向量丛，Fredholm算子和椭圆微分算子的基本知识（见泛函分析和Evans PDE第六章）。

关于Bott Periodicity的证明，建议阅读Atiyah的论文“Bott Periodicity and the Index of Elliptic Operators”. 读完K理论以后，如果还懂拟微分算子，就可以看Atiyah-Bott指标定理的证明了，论文我相信大多数人都找得到。

5、示性类：参考书是Milnor : Characteristic Classes.

示性类也有两种看法，一种是拓扑的，看成为Grassmanian流形上universal bundle的拉回定义的，这些看法在 Milnor这本书上阐述的很好，实际上示性类也可以看成是某种东西的障碍。还有一种是微分的观点，即所谓的Chern-Weil理论，用联络的曲率来描述，这一部分的参考书暂缺。

6、Morse理论：参考书是Milnor : Morse Theory. （有中文译本）

这个理论讲的是流形上的函数如何决定这个流形的拓扑。用Morse理论可以给出流形的CW复形、甚至同调群，也可以用来证明Bott periodicity，用处很广。这个理论继续往下也有很多分支，最基本的是Morse Homology，用同调的语言重写，这部分内容也和动力系统有很大关系。另一个是他的无穷维推广，包括Floer Homology等其他内容。

7、同伦范畴论：暂缺。Emily Riehl近年写过一本书 http://www.math.jhu.edu/~eriehl/cathtpy.pdf.

5.2.3 黎曼曲面

预备知识：单复变函数、拓扑学、微分流形（非必需但是建议）

教材与参考书：

[1] 梅加强：黎曼曲面导引；

[2] Miranda: Riemann Surfaces and Algebraic Curves（黎曼曲面与代数曲线）；

[3] S. K. Donaldson: Riemann Surfaces;

[4] Jürgen Jost: Compact Riemann Surfaces（紧黎曼曲面）；

[5] 伍鸿熙、吕以辇、陈志华：紧黎曼曲面引论；

[6] Griffith, Harris: Principal of Algebraic Geometry（代数几何原理）；

[7] Dror Varolin: Riemann Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry, GSM 125, AMS;

[8] Wilhelm Schlag: A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces, GSM 154, AMS.

[1]比较通俗易懂（除了单值化定理的证明），初学可以用这一本，也包含了层论的基础知识，以及一些复几何定理。[2]是偏向代数几何的，介绍了很多层论，在代数有关的结果上写的相当不错，可惜在几何上有些略显不足，gap略多。[3]这本书非常的几何，且技术相对比较先进，可以看完梅加强的[1]以后看。给出了Hodge分解和单值化定理非常漂亮的证明，还包含了一些Moduli space和Deformation theory的内容。[4]则是标准的紧黎曼曲面内容，包含了Teichmuller空间的介绍。[7], [8]适合刚学完单复变向着黎曼曲面过渡，也可以考虑，但[8]的作者本身是做PDE为主的，而不是几何。

学习建议：

黎曼曲面是数学的十字路口，无数概念在这个背景下交汇。笔者没有能力写出这个学科后续所有发展，只提在本科学习时的几点。

黎曼曲面的最主要的几个定理，一个是所谓Uniformization Theorem（单连通黎曼面全纯同胚于$\mathbb{C}, \mathbb{H}, P^1$之一），这个定理给出了复变函数中黎曼映照定理的推广，并且给出了Picard小定理一个非常漂亮的几何证明；当然，这个定理的证明本身比较分析。第二个定理就是所谓的Riemann-Roch定理，这个定理是代数曲线定理的开端。当然，这个定理的一个重要结论就是紧黎曼面范畴、一元代数函数域范畴和一维射影曲线范畴是等价的，这给出了黎曼面三种不同的理解方式。第三个定理是著名的Abel-Jacobi定理，说椭圆曲线可以被上同调所还原，且给出了椭圆曲线的群结构。当然这个定理不止这些用处。可以说，黎曼曲面的有关结果充满了数学的美感。

第一次学，可以跳过Hodge定理和Uniformization theorem的证明，关注于Riemann-Roch定理的应用。注意，要关注代数曲线和黎曼曲面之间的关系，感受几何是如何应用到代数上的。层论是现代数学不可忽视的重要组成部分和有力工具，建议认真学习，这样在之后学习相应结论时不会感到过分难学，例如复几何、代数几何。

这个理论后续发展太多，无法一一描述。很多时候，黎曼面是代数几何和复几何最简单的情形，把这个理论搞清楚对进一步学习还是非常必要的。

5.2.4 复几何

预备知识：复分析（单复变函数）、微分方程2（椭圆方程与抛物方程的弱解性质与极大值原理，Evans第6章和7.1节）、黎曼几何、少量代数拓扑。若关心层论部分的细节，则需要一点同调代数与交换代数（关于正则局部环、depth、同调维数、层的上同调、凝聚层等等）。

教材与参考书：

[1] 萧荫堂：多复变函数论，高等教育出版社；

[2] Griffith, Harris: Principal of Algebraic Geometry（代数几何原理）.

[3] Shoshichi Kobayashi(小林昭七): Differential Geometry of Complex Vector Bundles（复向量丛的微分几何）。

[4] Daniel Huybrechts: 复几何导论

[5] Jean-Pierre Demailly: Complex analytic and differential geometry.

[6] Jean-Pierre Demailly: Singular Hermitian Metric on Positive Line Bundles

学习建议：

一、关于科大的复几何课程：

张希老师的这门复几何是科大里你可以学到的最近代的几何课。其他几何课，诸如黎曼几何，代数拓扑，实际上已经是上世纪三四十年代的结果。这门课内容比较多。个人建议上这门课的时候应该乐观一些，它不像之前的课（例如黎曼几何），只要认真学就能学懂老师提到过的东西。建议不要太在乎有多少没学懂，而是在乎自己学懂了多少，就算学了一学期只学懂了Calabi猜想也是比较成功的。另外，自从王兵老师来科大后，他也有教这门课的可能性。如果感兴趣的话，跟他学一些复几何的东西也是一个不错的选择。

关于参考书，如果什么都不知道的话，建议从Huybrechts的复几何导论 [4] 入手,它是目前我见过对初学者最友好的书了。另外Demailly [5], Griffths-Harris [2] 都值得推荐，它们都是百科全书。它们的内容和风格正如其名，Demailly的书侧重于复解析几何和微分几何（多复变和黎曼几何的方法），而Griffths-Harris的书侧重于复代数几何（Grothendieck之前的代数几何的方法）。要入手复几何的话可以根据个人情况从两本书里做出选择。个人感觉张希老师的课又是另一种风格，他更侧重于PDE方法。

这门课的优点在于，让大家能够接触到上世纪七八十年代的优秀工作。张希老师上课经常会分享一些自己对数学以及数学界的看法，比如说："年轻人应该关注一些经典而又有活力的领域，比如子流形几何。"上这门课，如果能认认真真学下来，收获是非常大的。希望科大能有更多这种近现代的数学课、讨论班。但是这门课缺点也是十分明显的。一个学期课时是固定的，而张希老师讲这么多内容，就注定了一部分内容不可能细讲。例如说Hodge定理的证明，或者Kodaira嵌入定理的证明，张希老师都没怎么细讲，前面的讲课速度也是快的吓人，选这门课在中期必须自学一部分内容，需要预先做好心理准备。还有就是张希老师上课经常忘记下课，体验十分不好。如果开一下小差，你就会发现你完全跟不上他的讲课。本课程是使用张希老师自己的讲义，所以

你不能完全不听课，张希老师对基础部分的讲解还是很好的。

二、关于参考资料的建议：

先在任何一本书上学完复几何的基础知识（多复变函数的基础、近复结构、Kähler流形、Hodge理论），这里多复变推荐[1]、近复结构的知识大部分书上都有、Hodge理论可以看[2]。此后，立刻转向[3]的学习。[3]这本书是笔者学过最好的讲复向量丛的书，美中不足的是没有 Kodaira嵌入定理的证明。

关于上面提到的课程后两部分，笔者的建议是**直接读原始论文，不要看任何复写的证明**。原始论文包含的动机会被复写的证明所掩盖，对增强数学水平毫无益处。Calabi-Yau定理的话只需要读那篇论文的前25页即可，对于学过椭圆方程的人来说应该不难。如果学过黎曼面和代数几何，有些部分（除子）会理解起来更加清楚，比如说线丛的deg其实就是其对应除子的deg，ample line bundle实际上就是代数几何里面的ample invertible sheaf，并且在复几何里等价于第一陈类 positive definite。这类联系在Griffith-Harris的[2]里比较多。

总之，如果将来想学几何的话，请务必学一学这门课。

接下来，我们大概说一下复几何应该学习的内容，包括但不仅限于张希老师课上的内容：

0. 基础知识

这部分包括了基本的多复变函数知识、复流形与Kähler流形、全纯向量丛的联络理论、Hodge理论、一点点Chern-Weil理论，层与上同调理论，内容上可以说很丰富了。这些内容在大多数复几何教材上都可以找到。

1.层和上同调，Doubault 定理，除子和线丛的关系, Kähler 条件下的一些等式。

另外，流(Current)的概念也需要了解(分布的推广，它定义为紧支光滑微分形式的对偶)，它在复解析几何里有很多应用，它的上同调群跟De Rham(Dolbeault)上同调群同构。

2.线丛的陈类跟Hermitian度量的关系

一般的Chern-Weil 理论跟线丛情形类似,不过代数上复杂一些。把线丛情形弄清楚基本也把一般情况弄清楚了。另外，Demailly 的文章[**?**]研究了线丛上带奇点的Hermitian度量，它把满足不同强度“正性”的度量的存在性(它们只依赖于线丛的陈类)，和线丛的代数几何性质联系了起来。这篇文章不长，但包含了很多Demailly的很多工作，值得一读。于是很多代数几何上关于线丛的结果，例如Fujita猜想，Mastusaka big 定理等，都可以从hermitian 度量的角度研究。而后者可以利用Hörmander L^2估计，Ohsawa-Takegushi 延拓定理，Nadel消灭定理等复解析工具。

3. Hodge理论

Hodge 理论是关于向量丛上椭圆微分算子的理论，其最为著名的莫过于Hodge 分解定理和Hodge猜想。上同调群的Hodge 分解定理，Hard-Lefschetz定理，(1,1)-class的Hodge 猜想，Lefschetz 超平面定理。把这些弄懂，再结合示性类就可以算很多复流形的上同调群了。

复的Hodge 理论可以看 Griffths-Harris [2]，思想跟实的Hodge 理论差不多，注意它不需要Kähler条件。而上同调的Hodge 分解定理就是Hodge理论和Kähler 流形上$\Delta = 2\Delta_{\bar\partial}$的推论。Hard-Lefschetz定

理主要是线性代数主要就是线性代数（其它的special holonomy也有相应的线性代数），可以自己计算下低维的情况加深理解。

Hodge猜想是说复射影代数簇的 $H^{p,p}(X)\cap H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ 能由代数(解析)的$(p,p)-$ cycle (即p维子簇的线性组合)表示出来，它是千禧年七大问题之一，目前仍然没有被解决。$(1,1)-$class的情形可以由指数序列的长正合列推出来。

4. Non-Abelian Hodge 理论

Hodge 理论的核心是对应，正如Hodge 分解定理指出De Rham 上同调类中可以选取唯一的调和代表元。Riemann-Hilbert 对应给出Betti 模空间与De Rham 模空间的一一对应，Abelian-Hodge 理论又将De Rham 模空间对应到第一陈类消失的全纯Higgs 线丛。Non-Abelian 就是将C^* 推广到$GL(r,\mathbb{C})$。一维同伦群在 $GL(r,\mathbb{C})$的表示空间，平坦丛，与半稳定且第一第二陈类消失的Higgs丛，三者之间建立一一对应关系。关键步骤是证明平坦丛上存在调和度量。Corlette，Donaldson，Hitchin 在此过程中作出了巨大贡献，Simpson 在1990年最终完成了代数流形版本的证明。张希老师和他的学生们在2016年利用连续性方法证明了Kahler 的情形，并在2019年推广到了某些Non-Kahler 的情形。

5. Chow(周炜良)定理 即$\mathbb{CP}^n$的复子流形都是代数的（它上面的亚纯函数也是有理的）。证明不长，但很巧妙。思路很简单，先证明超曲面的情形，然后通过与线性子空间相交转化成超曲面的情形。

6. Kodaira消失定理、嵌入定理

Kodaira 消灭定理主要是通过Kähler 流形上一些计算得到Bochner-Kodaira-Nakano等式，然后用Hodge理论即可证明，阅读起来难度不大。代数几何里也有这一定理，有代数几何的证明。不过这一定理首先是被解析的方法发现并证明的。

而Kodaira嵌入定理则搭建了复解析几何和代数几何的桥梁。它说用正的线丛的充分大次方的截面可以把复流形嵌入到复射影空间里(再根据Chow(周炜良)定理，它是复代数簇)。证明思路如下: 用线丛的截面把X嵌入到复射影空间中,然后证明它是全局定义的嵌入映射。例如证明$l: X\to\mathbb{CP}^N$是全局定义的（即所有截面没有公共零点），等价于$H^0(X,L^k)\to H^0(X,L^k\otimes\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x})$是满射，根据长正合列只需要$H^1(X,L^k\otimes\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x})=0$。但是这里并不能直接用Kodaira 消灭定理，因为$L^k\otimes\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x}$只是一个层，不是向量丛。这时需要代数几何的操作blow-up,把它变成一个(正）线丛再使用Kodaira消灭定理，然后找出blow-up前后上同调群的关系。证明l是嵌入也是用类似的方法。

不过这些技术上的问题在黎曼面的情形都不是问题，因为它的复子流形就是一些离散的点。对代数几何的方法不熟悉的话可以先从黎曼面入手来看这两个定理的证明。

7. Donaldson-Uhlenbeck-Yau定理

1982年Donaldson-Uhlenbeck-Yau做的工作，即紧Kahler流形上稳定全纯丛必有 Hermitian-Einstein 度量，当然上课讲的证明选用了1988年Simpson的一个简化证明。这个定理的动机来自于1965年

Narasimhan-Seshadri 对黎曼面上向量丛稳定性的研究，但那里用了很多代数几何里关于向量丛稳定性的内容，过于冗长。后来 Donaldson 等人对黎曼面情形给出了一个简洁的几何证明 “A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri” (1983, JDG)，这个证明只有8页，非常值得阅读。为方便理解这个证明的几何精髓，甚至可以假设rank=2，只不过一般rank的时候代数更复杂一些。黎曼面的情形相对容易，因为稳定性的表述简单，而且任何 unitary connection 都给出向量丛上的全纯结构。不同数学家也尝试了二维和高维的情形，于是提出了类似一维情形的猜想。

Uhlenbeck-Yau 对高维Kähler 流形的证明是一个PDE证明，可以跟Calabi猜想进行比较。找Hermitian-Einstein 度量等价于解一个整体的二阶拟线性PDE。这个PDE不一定可解，但加一个$\epsilon logh$扰动项的PDE可以用连续性方法解出来，而稳定性用在分析扰动项趋于0时候解的行为。注意到一维的时候Donaldson也用这种PDE方法进行了证明(Donaldson 热流)。

不管用什么方法，不得不提到Uhlenbeck紧性定理，它是规范场论(Gauge theory)里非常重要的定理。大概是说如果一串unitary联络的曲率的L^p范数有个比较小的上界，那么存在子列使得在Gauge transform(即向量丛的自同构)之后这些联络以L^p_1弱收敛。在DUY定理这一类定理的证明中，对弱收敛极限的分析跟稳定性联系了起来。

8. Calabi猜想

Yau的成名作，Calabi-Yau定理，即紧Kähler流形上，任何第一Chern类的代表元，都可选取一个Kähler结构使得其Ricci form正好是那个代表元。这个工作是上世纪七十年代的结果。丘成桐也因此在1982年获得了菲尔兹奖。本质上是解一个Monge-Ampère方程。比第一陈类小于0的情形要困难，因为没有最大值原理，得到C^0估计比较困难。这篇文章用到了连续性方法，隐函数定理，Moser迭代，Boostrape等PDE里的常用技巧，如果对这些不熟悉的话，这篇文章是学习PDE的一个很好的练习。值得一提的是,虽然在第一陈类为0的紧Kähler流形上，用Yau的方法能在每个Kähler class里解出一个唯一的Ricci-flat的Kähler度量，但是Yau的证明是一个纯PDE的证明，不能给出这个度量的几何信息。对这样解方程得到的度量的几何的研究也是很有意思的。

由Calabi猜想以及它涉及的复Monge-Ampère方程延伸出两个问题：

1. 如果方程里的数据不光滑或退化，那么方程在某种弱的意义下是否可解?解是否有比较好的估计?

2. 第一陈类大于0的时候(Fano 流形)能否找到Kähler-Einstein 度量?

关于第一个问题，Bedford-Taylor等人发明了一套pluri-potential理论，明确了”弱的意义“的定义。而 Kolodziej 对这个问题给出了一个非常好的回答。为方便叙述，我们陈述如下版本的定理：

定理 2. 设(X,ω) 是紧的Kähler 流形,$0 \leq f \in L^p(X,\omega^n), p > 1$那么关于$\varphi$的方程 $(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n$ 有满足$sup_X\varphi = 0, \omega + dd^c\varphi \geq 0$ 的唯一解,并且 $\varphi \geq -C(n,p,M,\omega)||f||_{L^p}^{\frac{1}{n}}$。进一步，$\varphi$是连续并且Hölder连续的。

这个定理非常强，因为只要右边的函数L^p(不需要严格大于0),我们就有C^0估计。这大大改进

了Yau的 C^0估计，因为它依赖于$log f$二阶导数的信息。这一改进对于研究度量的degeneration非常有帮助，特别的，它用在了对第二个问题的研究上。

关于第二个问题,有很多数学家进行了尝试，发现并不是所有Fano流形上都能找到 Kähler-Einstein 度量，为此田刚提出了K-稳定性的概念并且证明了它是存在 Kähler-Einstein 度量的必要条件，后来 Donaldson 给出了对K-稳定性给出了一个代数几何的定义。于是 Yau-Tian-Donaldson 猜想K稳定性也是充分条件，直到2012-2013年 Chen-Donaldson-Sun 用锥度量的方法证明了这一猜想,后来不同数学家用不同方法也给出了证明，如 Kähler-Ricci 流，非阿基米德几何等。关于这一问题更详细的历史可以看 Donaldson 2018 ICM 的报告或CDS原始文章。

定理 3. Fano 流形上存在Kähler-Einstein度量当且仅当它是K-polystable的

这里Fano流形(簇)指$c_1(X) := c_1(TX) > 0 \Leftrightarrow c_1(K_X^{-1}) > 0 \Leftrightarrow K_X^{-1} ample$(由Kodaira嵌入定理)。 K-polystable指任意以(X, K_X^{-1})为中心的非平凡test-configuration的Futaki不变量> 0 。这里以一对(X, L)为中心的test-configuration 指的是以(X, L)为中心的某种特殊的退化，即一族 $(X_t, L_t), t \in B_1(0) \subset \mathbb{C}$。准确定义涉及一些代数几何术语，在此不再赘述。

这个定理的叙述非常像 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理，因为它们都把标准度量的存在性等同于某种代数几何稳定性。惊奇的是，向量丛的稳定性概念是先由代数几何学家提出的，而K-稳定性是先由微分几何学家提出来的，这是为数不多的微分几何发展先于代数几何发展的情形（还有一个例子是Siu(萧荫堂)用复解析方法证明plurigenera的deformation不变性，这是先于代数几何学家的）。K-稳定性目前是代数几何研究的一个热门课题，例如许晨阳，刘雨晨等在研究。目前K-稳定性已经有一些更容易验证的等价定义。

最后，请各位注意：

1. 要避免线性代数成为学习复几何的障碍。开始学习的时候多下点功夫在复坐标下的计算，例如 Hermitian 度量跟黎曼度量，(1,1)形式的关系, 复坐标下联络，曲率的计算。这些虽然很简单，但要避免眼高手低，一定要动手算。

2. **学习复几何一定要跟黎曼面联系起来。**如果学习复流形的一般理论，到最后连黎曼面上相应的结论都不会算，那么学习是不成功的。学习向量丛的理论到最后连线丛都不会算，也是不成功的。如果没学过黎曼曲面这门课，可以自己想想复几何里的学到结论在一维情形在是在说什么，证明能不能得到简化。如果能把一维的情况弄清楚，那么学习就比较成功的。能把二维弄清楚那就学的很好了。

3. **建议不要过度依赖于上课。**有兴趣的话可以自己组织专题讨论班。例如Demailly的复解析方法，复 Monge-Ampère方程，复曲面, 向量丛稳定性，Hodge结构等专题。

关于复几何的内容非常之多，以下我们介绍一部分复几何应该学习的内容。欢迎各位复几何大佬们继续补充其它内容。

5.2.5 拓扑学的补充

现代拓扑学的研究涉猎非常广泛。下面笔者列举一些自己了解的方向，加以说明。

1. X-流形是否具有Y-结构:

微分拓扑里一个核心的问题是拓扑流形是否具有光滑结构，如果有的话有多少个？关于这些Milnor有好几篇介绍性的文章回顾拓扑学怎样从18世纪逐渐发展到现在，这些文章已经被翻译成了中文，收录在《Milnor眼中的数学和数学家》里，对拓扑感兴趣的话这本书非常，非常，非常值得一读。

相比光滑结构，我自己更关心如果一个光滑流形存在某种结构，这种结构会对流形的拓扑有什么限制。比如，什么样的光滑流形具有全纯结构，即它是一个复流形? 这个问题回答起来异常困难，所以退而求其次，我们可以问什么样的光滑流形具有近复结构，即切丛是复向量丛? 这个问题没有被完全回答，但比直接研究复结构要容易一些。首先，如果M是近复流形，因为切丛是复向量丛，M必须是偶数维流形。其次，切丛的Pontryagin类可以用陈类表示，这给了Pontryagin类一些限制，同时因为流形的很多拓扑量可以用陈类和Pontryagin类计算，这导致近复流形的拓扑量也有很多限制。比如，

定理： 如果S^{2n}是近复流形，那么$n = 1$或$n = 3$.

证明概要： 假设S^{2n}有近复结构，那么因为S^{2n}的欧拉示性数$e(S^{2n}) = 2$, 所以第n个陈类$c_n(S^{2n}) = e(S^{2n}) = 2$. 但是Bott证明了$S^{2n}$上的任何一个复向量丛$E$都满足$(n-1)!|c_n(E)$，从而有$(n-1)!|2$, 所以$n = 1, 2, 3$。

$n = 1$时，S^2是复流形$\mathbb{CP}^1$，从而确实是近复流形。$n = 3$时，将$S^6 \subset \mathbb{R}^7 \subset \mathbb{O}$看成是八元数$\mathbb{O}$的imaginary part里的单位球面，有一个诱导的近复结构，所以S^6也是近复流形，但S^6是不是复流形仍然是一个公开问题。

$n = 2$时，S^4不是近复流形。这是因为S^4的符号差(signature)是0, 故由Hirzebruch符号差定理$0 = p_1/3 = (c_1^2 - 2c_2)/3 = -2c_2/3 = -4/3$导致矛盾。

事实上，人们发现近复流形的拓扑存在相当多的限制，而且至今为止只有在4维有近复流形不是复流形的例子，所以丘成桐就猜想，可能所有复维数大于等于3的近复流形都是复流形，特别地S^6也是复流形。

陈省身和Atiyah都曾经研究过S^6是不是复流形这个问题，目前我知道的是:

- S^6上标准的近复结构不是真正的复结构；
- Claude LeBrun证明了如果S^6上有复结构，那么这个复结构和球面上的标准度量不相容；
- 陈省身去世前证明了一个比LeBrun稍强一些的复结构与一个二形式不相容结果；
- Deligne证明了如果S^6是复流形，那么S^6上没有非常值亚纯函数；
- S^6上的复结构会有一些非平凡的Doubeault上同调；

- Atiyah曾宣称证否了存在性，但他的证明没有被广泛承认。

  如果我们愿意放弃考虑一般的复流形，而只考虑一类特殊的具有“好”度量的复流形–Kahler流形，那么我所知道的研究Kahler流形拓扑的手段有两个–有理同伦理论 (rational homotopy theory)和Frolicher谱序列 (当然还有Hodge package).

- Deligne, Sullivan, Morgan证明Kahler流形同伦群的自由部分(free part)可以被它的de Rham上同调完全确定；

- Kahler流形有一个重要的性质:$\partial\bar{\partial}$-引理。利用Frolicher 谱序列，Angella和Tomassini在2013年证明了$\partial\bar{\partial}$-引理是 small deformation invariant。这个结果在之前有一个硬核分析的证明，但他们用了几乎纯代数的手段证明，他们这篇文章发表在 Inventiones mathematicae 上。

听说意大利有一些人在研究Frolicher spectral sequence或类似的东西，试图将对近复结构/复结构的研究代数化，听起来这是非常酷的工作。

我还知道一个和流形几何相关的问题，没有真正去认真了解过，但是可以说一说。我们说一个流形是可定向的，是指它的切丛限制在一维骨架上是平凡的；一个流形是自旋流形(spin manifold)是指它的切丛限制在二维骨架上是平凡的。自旋流形的一个性质是：它的一个拓扑不变量，叫$\hat{A}$-亏格，必须是整数 (听说Singer曾经问Atiyah为什么它是整数，然后他们就一起证明了 Atiyah-Singer指标定理)。Atiyah, Hitchin, Lichnerowicz和 Singer证明了如果紧自旋流形具有数量曲率大于0的度量，则它的$\hat{A}$-genus为0。下面这个猜想和他们的结果有一样的形式，据说和拓扑量子场论有关。

猜想： 如果紧String流形具有Ricci curvature大于0的度量，则它的 Witten-genus为0。

String流形是一类比自旋流形更好的流形，$\hat{A}$在自旋流形上的取值是整数，但Witten-genus要复杂得多，它在 String流形上的取值是”拓扑模形式”，我会在后面讲同伦理论的时候大概解释这是什么。

事实上，人们发现近复流形的拓扑存在相当多的限制，而且至今为止只有在4维有近复流形不是复流形的例子，所以丘成桐就猜想：可能所有复维数大于等于3的近复流形都是复流形，特别地S^6也是复流形。

2. 配边理论（Cobordism Theory）

假设(M, X)是(可定向)光滑流形，$f: X \to M$是一个连续映射，那么f将X的基本类 (fundamental class) push-forward成为M的一个同调类，此时我们称这个同调类可以表示为一个流形。

问题(Steenrod) 是不是所有的同调类$H_*(M)$都可以表示为流形?

Thom因为成功回答了这个问题而获得了菲尔兹奖，他的答案是：既是又不是。如果我们考虑$\mathbb{Z}/2$-系数的同调类，即$H_*(M;\mathbb{Z}/2)$里的元素，那么他们确实都可以表示为(或许不可定向)流形；如果考虑$\mathbb{Z}$系数，那么答案是否定的–存在一个7维流形，它有不能被表示为流形的同调类；但是任何一个整系数同调类的某个奇数倍可以被表示为流形。

为了解决Steenrod问题，作为副产品Thom发展了配边理论(Cobordism theory)，后来配边理论发展成了同伦理论很重要的一部分。我们称两个定向流形M, N是定向配边 (oriented cobordant)的，是指$M \sqcup -N$是某个高一维定向流形的边界，这里$-N$是指N配上相反的定向。Thom发现所有流形，模去定向配边这个等价关系之后构成一个分次环–环中的加法是不交并，乘法是卡氏积，零元是空集，单位元是一个点，次数是流形的维数，这个分次环称作定向配边环(oriented cobordism ring)，记作Ω_*^{SO}。如果忘掉定向的话，可以类似的定义不定向配边环Ω_*^O。Thom计算了配边环(这相当于在配边等价下分类了所有流形！！)，

- $\Omega_*^O \simeq \mathbb{Z}/2[\hat{x}_1, x_2, \hat{x}_3, \ldots, x_4, x_5, x_6, \hat{x}_7, \ldots]$ 是$\mathbb{Z}/2$上的一个有无穷多个生成元的多项式环，$\deg x_i = i$，$\hat{x}_{2^n-1}$ 表示去掉次数是$2^n - 1$的生成元；

- $\Omega_*^{SO} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[\mathbb{CP}^2, \mathbb{CP}^4, \ldots]$是$\mathbb{Q}$上由所有$\mathbb{CP}^{2n}$生成的多项式环。$\Omega_*^{SO}$另外还有一些2-torsion.

如果考虑具有更多结构的流形和相应保持结构的配边的话，还可以定义复配边环(Complex cobordism ring)Ω_*^U，自旋配边环(Spin cobordism ring)Ω_*^{Spin}，辛配边环Ω_*^{Sp}等等。其中，Ω_*^U和Ω_*^{Spin}已经被计算出来了，Ω_*^{Sp}的自由部分也早已经被计算出来了，但是它的torsion部分的计算至今没有完成，困难的原因大概在于四元数是非交换的。还有一种叫标架配边环(framed cobordism)Ω_*^{fr}，它同构于球面的稳定同伦群（下面会提到)，也没有被完全计算出来。

配边环的计算显然非常重要，因为这就是在分类流形，而且在几何和拓扑里有很多应用。比如对定向配边环的理解就导致Hirzebruch发现了之前证明S^4不是近复流形用到的signature定理。许多菲尔兹奖得主（当然还有很多其他大数学家）都对各种配边环的计算和应用做出过贡献，这其中包括Serre，Thom，Novikov，Milnor，Quillen等。

3. 同伦理论(Homotopy)

拓扑空间有两种最重要的不变量，同调群和同伦群。同调群相对容易计算但是包含更少的信息，同伦群相对难计算但是包含更多的信息。计算同调群有很多工具–长正合列，剪切引理，万有系数定理，(流形的)庞加莱对偶等等，而且有限复形的同调群至多只有有限多个非零。但是计算同伦群就异常困难，即使是最简单的拓扑空间–n维球面–的同伦群都没有被完全计算出来。

事实 目前在所有$S^n(n \geq 1)$中，我们只知道S^1的全部同伦群。

一般来说要计算一个拓扑空间的全部同伦群是几乎不可能的，除非我们发展出新的工具。但是人们在研究球面同伦群的时候发现，**球面的同伦群会”稳定“下来，意思是$\pi_{n+k}S^k$ 在k充分大的时候会保持不变，所以可以定义球面的第n个“稳定同伦群”为**$\pi_n^s = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}S^k$。Serre证明了球面的稳定同伦群除了$\pi_0^s = \mathbb{Z}$以外都是torsion，比如$\pi_1^s = \mathbb{Z}/2, \pi_2^s = \mathbb{Z}/2$。但是计算球面的稳定同伦群也异常困难。

球面同伦群的计算既对代数拓扑本身非常重要，又对几何非常重要。比如，Milnor在构造了7维怪球之后，和 Kervaire一起计算了球面的微分结构的个数，难以置信的是球面微分结构的数目竟然和球面的稳定同伦群有关，这导致球面微分结构的数量也不能被完全计算出来！所以

为了计算球面的稳定同伦群，人们发展了很多种办法–各种各样的谱序列 (spectral sequence)（如果你不知道谱序列是什么，可以把它想象成长正合列的超级复杂加强版，它有无穷多个page，每个page上都有无穷多个链复形，下一页是上一页链复形的(上)同调）。我听说现在还是有很多人致力于计算球面的稳定同伦群。我知道其中一种办法是利用所谓的Adams-Novikov 谱序列，然而Ravanel不得不发展了另一个所谓的chromatic 谱序列仅仅只是去计算 Adams 谱序列的E_2-page! 可以想象这计算是多么困难。

Chromatic 谱序列和复配边环有直接的联系，它的构造基于Quillen的一项工作。Quillen在1969年指出复配边环和一个纯代数对象 Lazard ring $\mathbb{L}$-同构。Quillen的这个工作为代数拓扑和理解陈类提供了一个崭新的观点，它启发了包括 chromatic谱序列在内的不计其数的重要工作，而他1969年写的那篇文章仅仅只有六页!

4. 椭圆上同调(Elliptic Cohomology)

Quillen这项工作的另一个结果是导致了椭圆上同调的发现。Ochanine在80年代首先发现了诸如signature，$\hat{A}$-亏格之类的一些不变量和椭圆积分有关，然后Landweber, Stong利用这个观点，再结合Quillen对复配边环的描述定义了一批新的上同调理论–椭圆上同调，这一批上同调理论对应于一批椭圆曲线。再后来代数几何的观点进入了代数拓扑的研究，导致Hopkins，Miller发现了一个”universal”的椭圆上同调理论tmf（对应于椭圆曲线模空间）–这就是我之前提到的“拓扑模形式”。tmf的研究处在代数几何，代数拓扑，微分几何和数论交汇的地方，我不得不感叹能发现这种的数学的人真的太了不起了。

而更神奇的是，后来Witten假装可以在流形的环路空间上应用指标定理，得到了一些流形的不变量，它们竟然是一些模形式！ 接着(不确定是不是)Witten定义了一个新的不变量，现在被称作Witten genus，取值于tmf。这个不变量既和正Ricci曲率度量有关，又和物理有某种联系，我希望某一天可以了解它有什么物理含义。

关于椭圆上同调/拓扑模形式有一个悬而未决的大问题：**椭圆上同调有什么几何意义**？这个问题还没被很好地回答，这阻碍了人们应用它来解决几何问题。奇异/CW上同调和K理论在几何/拓扑的应用就非常成功，因为他们有清晰的几何图像。Mark Hovey在他的主页上还列举了一些代数拓扑重要问题，包括椭圆上同调的一些问题。如果对偏代数的拓扑感兴趣非常推荐看一看。

5. 其它：拓扑还有很多其他的研究方向，此处再列举一些我喜欢的拓扑相关的问题。

- 能不能将Pontryagin类用局部组合的方式写出来，即”到底什么是Pontryagin类“? 我听说这是Jeff Cheeger的 dream problem;
- S^4有没有exotic微分结构? (四维光滑庞加莱猜想是否成立?) 我对这个问题一无所知，只知道在4维的时候手术理论失效了。这个问题似乎非常难，即使四维流形有那么多的光滑不变量(Siberg-Witten, Gauge theory等)也没有成功回答这个问题;
- Borel conjecture, Novikov conjecture.

5.2.6 Floer理论

一、起始点

这套理论是有一些动机的。这些要从Arnold开始讲起。如果我们了解一些代数拓扑的话，我们知道下面这样一个著名的定理。

定理 4 (Lefshcetz fixed-point)**.** 如$f: X \to X$为拓扑空间X到自身的一个连续映射，则我们可以定义其之Lefschetz number为

$$\mathrm{Lef}(f) = \sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}(f_* : H_k(X;\mathbb{Z}) \to H_k(X;\mathbb{Z})).$$

这里Tr指模掉torsion元素之后的trace（也可理解为$f_* : H_k(X;\mathbb{Q}) \to H_k(X;\mathbb{Q})$的trace）。如我们有Lef$f \neq 0$，则$f$必有至少一个不动点。

证明可见Hatcher第二章附录。

Arnold的猜想大概是在说，如果我们的映射有更好的性质，那么我们实际上能得到更好的对于不动点个数的估计。实际上这里更好的映射是指Hamiltonian的symplectomorphism，而这里不动点个数的下界实际上是Betti number的和（某种情形下的Arnold猜想）。

我们考虑的将会是闭symplectic manifold (M,ω)。我们称一个从M到自身的映射f是一个 Hamiltonian 的映射，如果f是由M上的一个Hamiltonian函数$H_t : \mathbb{S}^1 \times M \to M$生成的。也即有$f$实际上为一个满足$dH_t = \omega(X_t,\cdot)$的time-dependent的向量场$X_t$所生成的在某一时刻的flow（这里由于辛形式$\omega$非退化，$X_t$唯一）。这里实际上对于Hamilton函数$H_t$的周期性要求是不那么重要的，因为如果$f$是$H_t$在时刻$t = t_0$对应的flow，我们总可以对$t$以及Hamilton函数$H_t$做适当的调整，使得得到的$H_t'$以$t_0$为周期，并且在$t_0$处的flow就是$f$ (c.f. Michèle Audin & Mihai Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, Remark 6.1.3)。我们不妨设:

假设. f就是H_t在时刻$t = 1$对应的flow，并且Hamilton函数H_t以1为周期。

在以上的假定下，f为H_t在时刻$t = 1$处的flow并且H_t有周期1。从而实际上，所有f的不动点都可以看作H_t所产生的flow ϕ_t的**1-轨道**。这是由于我们根据假定实际上有$\phi_1 = f$，从而如果$p \in M$为f的一个不动点，即$\phi_1(p) = p$，也即$\phi_t(p)$为一个以1为周期的轨道。也即$\phi_t(p) : \mathbb{S}^1 \to M$为一个闭曲线。从而我们可以将我们所关心的对象——不动点，转换为1-轨道。

Arnold的猜想实际上有很多种的版本，我们可以用不动点的方式叙述其中一种如下：

猜想 1 (Arnold's conjecture)**.** 对于$2n$维闭辛流形(M,ω)上的Hamiltonian symplectomorphism f，并且f“非退化”，我们有

$$\#\{\text{fixed points of } f\} \geq \sum_{i=0}^{2n} H_i(M;\mathbb{Z}/2).$$

这里f非退化是指在任何一个f的不动点p处，满足

$$\det(\mathrm{Id} - df_p) \neq 0.$$

如果我们应用以上将不动点转换为1-轨道的讨论，这一版本也可叙述为：

猜想 2 (Arnold's conjecture)**.** 对于$2n$维闭辛流形(M,ω)上的Hamilton函数$H_t : \mathbb{S}^1 \times M \to M$，并且$H_t$"非退化"，我们有

$$\#\{\text{1-periodic orbits}\} \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H_i(M;\mathbb{Z}/2).$$

注释 1. 这里我们也还需要解释一下Hamilton函数的非退化。如果我们记Hamilton函数H_t对应的流为ϕ_t，则我们称H_t非退化，如果在其任何一个1-轨道$x(t)$处满足

$$\det\left(\mathrm{Id} - d\phi_1(x(0))\right) \neq 0.$$

这一条件实际上也可通过扰动得到。

注释 2. 我们有理由是相信这些是正确的，并且我们也将看到，我们是需要非退化的假定的。如果我们取Hamilton函数$H_t = H$为一个不依赖于t的函数，那么实际上ϕ_t即为H对应的flow，1-轨道将必为此flow下的不动点。而flow下的不动点实际上就是H的critical points。非退化的假定将告诉我们H所有的critical points都是非退化的（Hessian非退化）。从而H实际上是一个Morse函数。由Morse理论我们知道，Morse函数H的critical points的个数是明显多于Betti numbers的和的（因为Betti numbers对应同调群维数，而critical points个数为Morse函数导出的cellular complex中各个群维数的和）。

这里也可以把系数$\mathbb{Z}/2$换为其他的域（例如$\mathbb{Q}$）得到不同版本的Arnold猜想。如果我们再稍微加强一下以上的猜想，我们也可以得到如下版本的Arnold猜想：

猜想 3 (Arnold's conjecture)**.** 对于$2n$维闭辛流形(M,ω)上的Hamiltonian symplectomorphism f，并且f"非退化"，我们有

$$\#\{\text{fixed points of } f\} \geq \text{minimal number of critical points of a Morse function}.$$

我们也可以考虑更一般的系数环R，在这里我们没办法再计算R系数同调群的维数，但是我们可以得到下面更广泛的一种Arnold猜想。

猜想 4 (Arnold's conjecture)**.** 对于$2n$维闭辛流形(M,ω)上的Hamilton函数$H_t : \mathbb{S}^1 \times M \to M$，并且$H_t$非退化。记以$H_t$的所有1-轨道为生成元在$R$上生成的自由$R$-模为$F_*$。我们称$H_t$满足$R$系数的Morse inequality，如果存在微分算子$\partial : F_* \to F_*$，并且$\partial^2 = 0$，使得

$$\frac{\mathrm{Ker}\partial}{\mathrm{Im}\partial} \cong \bigoplus H_i(M;R).$$

Morse inequality对于任何一个非退化的Hamilton函数H_t都成立。

当我们把R取做$\mathbb{Z}/2$即得到conjecture 2。

Arnold猜想也有Lagrangian intersections的版本。

猜想 5 (Arnold's conjecture: Lagrangian intersections version)**.** 对于$2n$维闭辛流形(M,ω)中的拉格朗日子流形L，如有Hamilton函数H_t以及相应的flow ϕ_t，假定$\phi_1(L)$与L transversely相交，则我们有

$$\#(L\cap\phi_1(L))\geq\sum_{i=0}^{2n}\dim\, H_i(L;\mathbb{Z}/2)$$

这里$\mathbb{Z}/2$仍可换成其他的域，得到其他版本的猜想。

注释 3. 对于任意一个闭辛流形(M,ω)，我们可以考虑辛流形$(M\times M,\omega\times-\omega)$。从Lagrangian子流形对角线$\triangle$开始，应用flow ϕ_t，则我们之前的1-轨道便对应着$\phi_1(\triangle)\cap\triangle$中的点。从而我们可以看到Lagrangian版本的Arnold猜想也可以推出以前版本的Arnold猜想。这里的transversely相交即是对应于之前的非退化条件。

这一系列猜想仅在一些特殊的情况下被证实。

- $H_t=H$为不依赖于t的Morse函数，此时此即为Morse homology（c.f. Michèle Audin & Mihai Damian, *Morse Theory and Floer Homology*这本书前半部分讲了$\mathbb{Z}/2$的Morse homology，也可看Matthias Schwarz, *Morse Homology*）。

- 在$2n$维环面T^n上，Arnold conjecture 3被通过动力系统的方法完全验证（c.f. C.C. Conley & E. Zehnder *The Birkhoff-Lewis Fixed Point Theorem and a Conjecture of V.I. Arnold*, Invent. math. 73, 33-49 (1983)）。

- 突破在于Floer于1988的结果。Floer通过对于action functional 应用Morse理论得到了关于 Lagrangian 版本的在$\pi_2(M,L)=0$，系数为$\mathbb{Z}/2$条件下的Arnold conjecture 5（c.f. Andreas Floer, *Morse Theory for Lagrangian Intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988) 513-547）。这也导出了Floer homology。

- Floer于1989验证了更广泛的Arnold conjecture。在monotone的条件下（即第一陈类和辛形式在$\pi_2(M)$上作用成正比例），Floer验证了Arnold conjecture 4对于任何系数环R都成立（Andreas Floer, *Symplectic Fixed Points and Holomorphic Spheres*, Commun. Math. Phys. 120, 575-611 (1989)）。此外，其实Floer同时也验证了在第一陈类以及辛形式在π_2作用上为0时，cup length估计也是成立的（强于Morse不等式）。

- Yong-Geun Oh扩展了Floer homology的定义。在monotone（monotone辛流形+monotone Lagrangian子流形）并且在一些额外的条件下（一些关于Lagrangian子流形以及M的π_1的条件），对于任意两个transversely相交的拉格朗日子流形L_0,L_1定义了$\mathbb{Z}/2$系数的Floer homology与

cohomology，并且验证了这样的Floer cohomology不依赖于对L_i的Hamiltonian deformation。但并没有验证一般情况下这一上同调和M的$\mathbb{Z}/2$系数上同调相同（验证了对于紧Hermitian Symmetric space中，当L为一个antiholomorphic involution的fixed points set时此上同调即为$\mathbb{Z}/2$系数上同调。例如 $M=\mathbb{CP}^n$，$L=\mathbb{RP}^n$，这里$n\geq 2$）。参考Yong-Geun Oh, *Floer Cohomology of Lagrangian Intersections and Pseudo-Holomorphic Disks I*, Commun. Pure Appl. Math (1993) & *Floer Cohomology of Lagrangian Intersections and Pseudo-Holomorphic Disks II*, Commun. Pure Appl. Math (1993)。

- Hofer和Salamon以及后来的Ono证明了在weak monotone的假定下的Arnold conjecture 2（c.f. H. Hofer & D.A. Salamon, *Floer homology and Novikov rings* in The Floer Memorial Volume以及Karuo Ono, *On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds*, Invent. math. 119, 519-537 (1995)）。

- $R=\mathbb{Q}$，在此情形下Arnold conjecture 2被完全验证（这是很漫长的一条路）。可参考Gang Liu & Gang Tian, *Floer Homology and Arnold Conjecture*, J. Diff. Geom, 49 (1998) 1-74以及 K. Fukaya & K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants*, Topology Vol. 38, No. 5, pp. 933-1048, 1999。

二、大致思路

这里我们仅大致解释Floer最开始的对于$\pi_2=0$以及monotone的情形下的证明思路。

在辛流形(M,ω)上我们预先取定相容的almost complex structure J，对应的黎曼度量为g，并且H_t为其上的一个非退化Hamilton函数，对应Hamilton向量场为X_{H_t}。

Floer homology也是通过对一种functional考虑Morse理论（考虑其之gradient flow）而得到的。Morse理论，Morse homology是通过对于一个Morse函数考虑其对应的gradient flow得到的。类似的，Atiyah-Bott著名的关于黎曼曲面上Yang-Mills的文章也是在对Yang-Mills functional考虑gradient flow。这里的Floer homology是对所谓的symplectic action functional考虑gradient flow。但是这里的情况远比之前的复杂。这里的 symplectic action functional 是在ΩM上局部定义的一个functional。如$z\in\Omega M$为一个loop，即$z:\mathbb{S}^1\to M$，则loop space在此处切空间由$\xi(t):\mathbb{S}^1\to T_{z(t)}M$这样的光滑映射组成。action functional在此处的微分为：

$$da(z)\xi=\int_{\mathbb{S}^1}\omega(\dot{z}-X_{H_t},\xi(t))dt.$$

这一微分形式是闭的，所以局部exact，可以找到局部良定的action functional $a(z)$。但一般这并不存在全局的$a(z)$。这并不影响我们考虑他的gradient flow。

- 比较令人开心的一点是，人们发现它的gradient flow实际上就是modified一些的pseudo-holomorphic curve。如$u:(s,t)\in I\times\mathbb{S}^1\to M$为沿着gradient flow得到的一列curve，则gradient flow方程

实际上为

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t = 0.$$

这实际上就是pseudo-holomorphic curve方程加上一项。

- 容易验证这个functional的critical points就是所有1-轨道的集合。
- 如果想得到全局定义的functional，需要lift到ΩM的universal covering。

可以证明，如$u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$为一个gradient flow，并且如果$u$的能量

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}\right|^2 < \infty$$

则必有$u(s,\cdot)$趋于1-轨道，当$s \to +\infty$或者$s \to -\infty$。从而我们可以考虑两个1-轨道x_1, x_2之间所有链接两个轨道的有限能量的gradient flow的空间

$$\mathcal{M}(x_1, x_2) = \{u : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1 \to M | \frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t = 0,\ E(u) < \infty,\ u_{-\infty} = x_1,\ u_{+\infty} = x_2\}.$$

通过Sard-Smale定理以及一些transverse的估计，我们可以证明实际上这样的空间是一些有限维的流形。

$$\dim \mathcal{M}(x_1, x_2; u) = \text{Ind } D_u.$$

这里，$\mathcal{M}(x_1, x_2; u)$是指$\mathcal{M}(x_1, x_2)$中包含u的component，D_u是指算子$\frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t$的微分，Ind指Fredholm index（可以证明D_u是一个Fredholm算子）。实际上，

$$D_u = \partial_s + J\partial_t + S : T_u M \to T_u M.$$

这里S为一个零阶的算子，并且在$s \to \infty$时趋于一个对称的算子（可参考Michèle Audin & Mihai Damian, *Morse Theory and Floer Homology*）。

通过一些拓扑上的讨论，我们实际上也可以将以上的维数Ind D_u实现为所谓的Maslov Index（也有叫 Conley-Zehnder Index ）。若应用一些分析的方法，这其实同时也等于$J\partial_t + S(s,t)$所谓的spectral flow。我们的算子$D_u = \partial_s + J\partial_t + S$在通过一些以紧算子的扰动之后，Fredholm Index不变，但是我们可以将之转换为$\partial_s + J_0\partial_t + S_0$，这里$S_0$是一个对称的算子。注意我们之前的$J$可能拉回到$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$上之后并非一个常值的almost complex structure。此后$A(s) = J_o\partial_t + S_0$将会是一列自伴的算子，并且可以证明当$s \to \infty$，存在$\lim_{s\to\pm\infty} A(s) = A_{\pm\infty}$并且可逆。对于这样的一列算子，我们便可以考虑所谓的spectral flow。大意上讲，一列这样的算子的spectral flow定义为$A(s)$的所有特征值，在s从$-\infty$到$+\infty$过程中改变符号的次数（c.f. Kenro Furutani & Nobukazu Otsuki, *Spectral Flow and Maslov Index Arising from Lagrangian Intersections*, Tokyo J. Math. Volume 14, Number 1 (1991), 135-150. 也可参考spectral flow最原始出处M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral* *asymmetry and Riemannian geometry III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 79 (1976), 71-99.）（这一部分其实我们多次提到的Audin的书也有不错的计算）。

注意$\mathcal{M}$上实际上有个自然的$\mathbb{R}$作用，即在s上加减常数。我们可以形成其之商空间$\tilde{\mathcal{M}}$。$\dim \tilde{\mathcal{M}} = \dim \mathcal{M} - 1$。

三、紧性

接下来我们还需要一些紧性的结果。也即是著名的Gromov compactness（可以看Gromov原始文章M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. math. 82, 307-347 (1985)或者Thomas H. Parker & Jon G. Wolfson, *Pseudo-holomorphic maps and bubble trees*, J. Geom. Anal. 3, 63–98 (1993)）。

如果我们了解了一些Morse homology的形成过程，我们就知道只知道链接两个1-轨道的gradient flow空间是个流形是不够的，我们需要知道这个空间的边界是什么。这就是我们需要紧性的原因。在Floer最原始对Lagrangian intersections的case的处理时，在$\pi_2(M, L) = 0$这样的一个假定下，我们实际上是可以绕过Gromov紧性的。因为在这样的假定下我们实际上有良定的action functional（在loop space的某一个 component 上良定）。类似对于一般的情况下的Arnold猜想，在有$\pi_2(M) = \pi_1(\Omega M) = 0$的假定下我们也是可以绕开的。但是在一般的情况下我们便必须利用这样的一个定理。

在接下来我们假定monotone.

应用到我们的情况下，这个定理告诉我们在链接两个给定1-轨道的gradient flow的空间中，任意一列能量有界的gradient flow（就是添加了一项∇H_t以后得到的类似于pseudo-holomorphic curve，这样的curves是仍成立Gromov compactness的，为了方便我们仍叫他pseudo-holomorphic curves），其之极限只可能是一些所谓的cusp curves上长出一些pseudo-holomorphic spheres（这也即是所谓的bubbling phenomena）。cusp curves是指一些pseudo-holomorphic curves在端点（即1-轨道处）简单的相接起来（不需要光滑）。长出一些 pseudo-holomorphic spheres 是说这些 cusp curves 里每个完整的 pseudo-holomorphic curve 上可能长出一些 pseudo-holomorphic spheres。

之所以我们要monotone之类的条件，就是为了保证不会长出pseudo-holomorphic spheres，这些是我们不想看到的。在Morse homology的形成过程中，链接critical points的也是gradient flow，并且链接两个critical points的gradient flow的空间里，这样的极限将会是cusp curves（而不会长出球来）。我们将考虑的会是那些一维的$\tilde{\mathcal{M}}$，而monotone这个条件会告诉我们，如果一列curve Index有限，那么他们的能量也一定有限（这句话的证明也需要用到Index的拓扑的理解方式，也即Maslov Index）。从而某种意义上讲摆脱了能量有限的要求。实际上，对于一列连接x, y两个1-轨道并且 Index 都为I的u_i，如果按 Gromov compactness 的意义下收敛到 cusp curves 以及 holomorphic spheres $(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathcal{MC}^k(x, y)$，这里$\mathcal{MC}^k(x, y)$指由$k$条pseudo-holomorphic curves连成的cusp curve上长出holomorphic spheres构成的极限curve。$\underline{u}$指cusp curve而$\underline{v}$指长出的holomorphic spheres $\underline{v}_k$。如

果收敛到这样的曲线$(\underline{u}, \underline{v})$，则Index以及能量之间有以下的恒等式:

$$I = \text{Index}(\underline{u_i}) + 2c_l(\underline{v_j}).$$

$$\limsup E(u_i) = \sum E(\underline{u_i}) + \frac{1}{2}\sum ||\underline{v_j}||^2.$$

1维 对于1维的$\mathcal{M}$，这一列u_i的Index都将为1，从而不可能长出任何sphere，因为$c_1(\underline{v_j})$必为正在 monotone 的情况下。长出sphere会和I为1矛盾。由由于不会存在Index为0的连接两个不同1-轨道的curve，因而cusp curve也只能是一个完整的pesudo-holomorphic curve。从而我们知道0维的$\tilde{\mathcal{M}}$，也即1维的$\mathcal{M}$，是紧的，不带边界。

2维 对于2维的$\mathcal{M}$，这时的一列u_i我们是需要担心长出一个sphere的。但是这个时候可以通过算整个辛流形上pseudo-holomorphic spheres的个数，证明其实对于generic的almost complex structures不会长出球。但是是可以分成两个1维的curves形成的cusp curve。

形成complex并构成同调

对于系数环R，我们用所有的1-轨道作为基，生成其上的自由R-模F。在其上我们可以定义微分算子$\partial : F \to F$。对于$x \in F$为一个1-轨道，我们定义

$$\partial x = \sum_{u \in \tilde{\mathcal{M}}^1(x, x_n)} \epsilon(u) x_n,$$

这里x_n为所有的1-轨道，u为从x到x_n的Index为1的gradient flow的。$\epsilon(u)$为u的“定向”，这是和我们的系数R是有关系的。可参考A. Floer & H. Hofer, *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry*, Math. Z. 212, 13 38 (1993)。之前的1维的紧性告诉了我们只有有限个u，所以这个微分算子良定。

同时，由于2维的紧性，我们有$\partial^2 = 0$。这是因为2维gradient flow的空间边界为两个1维curve形成的cusp curve（其实证明这一点还需要Floer证明的gluing lemma，也是很复杂的一条引理。从而在计算上定向之后，我们将会有$\partial^2 = 0$。

四、证明与流形同调相同

Floer证明了以上这样定义的同调实际上是不依赖于almost complex structure以及Hamilton函数H_t的，只要保证非退化。从而我们可以把H_t转换到充分小的Hamilton函数的case（C^2充分小）。在这种情况下，可以证明对应的1-轨道一定是constant loops。在这时实际上对应的同调群就恰好为流形的同调群（c.f. A. Floer, *Witten's Complex and Infinite Dimensional Morse Theory*, J. Diff. Geom. 30(1989) 207-221）。

从而至此，大概证明了monotone情形下的Arnold猜想。

Salamon关于Floer homology的note个人感觉读起来舒服一些（Lectures on Floer homology，网上搜的到）。如果想要只读一些介绍性质但不太go into details的文章，McDuff的survey article *Elliptic Methods in Symplectic Geometry*, Bull. Am. Math. Soc, Volume 23, Number 2, 1990是很合适的。Floer原始文章可能难读一些（好像还是有一些小错误的，不是我说的， Yong-Geun Oh文章里说的并给了一些补充证明）。如果要读Floer原始文章可以按下面这个顺序读

- *The Unregularized Gradient Flow of the Symplectic Action*, commun. pure appl. math, 775-813 (1988)。这篇文章大概在讲一些分析的结果。
- *Morse Theory For Lagrangian Intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988) 513-547。这篇大概在讲Lagrangian intersections在$\pi_2(M, L) = 0$的case。
- *Witten's Complex and Infinite-dimensional Morse Theory*, J. Diff. Geom. 30 (1989) 207-221。这篇在讲最后怎样证明同调与流形同调相同。
- *A Relative Morse Index for the Symplectic Action*, commun. pure appl. math, 393-407 (1988)。这篇在讲Maslov index。
- *Symplectic Fixed Points and Holomorphic Spheres*, Commun. Math. Phys. 120, 575-611 (1989)。这篇在讲monotone的case。这一篇个人觉得还是很值得读的，虽然写的不是很清楚。
- *Cuplength Estimates on Lagrangian Intersections*, Commun. Pure Appl. Math, 335-356 (1989)。这一篇大概在讲怎样实现更强的cup length estimate（在Lagrangian的case）。

5.3 代数与数论

参与这部分编写的作者有：
同调代数：毛天乐
交换代数：毛天乐、王麒翔
基础代数几何：王翌宇、徐铮、杜佳宾
代数几何：罗宇杰、徐铮、杜佳宾
代数数论：牟卓群、单逸、徐铮
解析数论：邹广翼
李代数与表示论：叶子逍、王瞭

5.3.1 同调代数

预修课程：线性代数、部分近世代数（群论除去西罗定理、环论）。

建议教材与参考书：

[1] Joseph Rotman: An Introduction to Homological Algebra （同调代数引论）;

[2] Saunders Mac Lane: Categories for the Working Mathematician, 2nd edition, GTM 5;

[3] Sergei I. Gelfand, Yuri I. Manin: Methods of Homological Algebra, 2nd edition;

[4] 章璞：三角范畴与导出范畴；

[5] Weibel: An Introduction to Homological Algebra （同调代数导论）;

[6] Cartan, Eilenberg: Homological Algebra.

学习内容：

由于授课老师的不同，选择材料的不同，这门课的讲授顺序也不同.

1. 范畴论初步：主要讲初步的范畴论，包括范畴、函子、自然变换的定义，范畴中的一些基本构造：比如积、余积、纤维积、纤维和以及极限、余极限之类的。初学的时候可能会觉得这些构造的定义比较长，一时记不住，或者理解有点困难，但是熟悉之后就会感觉好很多。这之后可能还会讲一点伴随函子，不过最重要的伴随函子的例子在模论中才会首次出现。

范畴是抽象的再抽象，它不仅是一种语言，更是一种考虑问题的模式，学了范畴之后，再学后续内容时，就会考虑所学内容在哪个范畴中考虑。

2. 模论初步：这部分内容主要是引入模的基本概念。模是线性空间的直接推广，所以在很多情况上，这部分内容感觉会很像线性代数；但模又没有线性空间那样好的性质，需要去认真辨析。

这部分相对来说，定义比较多，做好能整理记忆，并且与之前的线性代数课程对比着学。

这一部分会开始逐步接触到“正合”(exact)的概念以及Hom函子的左正合以及张量积函子的右正合，以及围绕正合这个概念产生的投射模、内射模、平坦模的概念，这些内容也为导出函子

作了铺垫。

若想迅速入门前两部分，除了最开始的参考书外，也可以参考欧阳毅《代数学3》第一章。

3. Abel范畴：这部分可以看作是前两部分的结合，它是模范畴的推广，模范畴中所涉及的正合性的概念在这里得到了体现。初学有困难的时候可以参考[2]的相关部分，解释得很清楚，这里就不再介绍这部分的内容了。另外，也可以参考 Grothendieck 的著名法语论文 “Sur quelques points d’algère homologique”，也就是在这篇论文中第一次提到 Abel范畴的概念。

4. 同调与上同调：这是本课程内容的核心，范畴论和模论仅仅是补习线性代数，近世代数中未学习的基本知识。如果只讲同调代数，完全可以前两部分很快带过，从第三部分开始细讲。

这部分主要研究的范畴是复形范畴，最重要的定理是长正合列定理（Long Exact Sequence Theorem），在许多学科中会反复用到，有老师甚至亲切地称它为同调代数基本定理.。这部分内容不多，但学习的时候建议认真对待，长正合列定理是一生只需要证明一次的定理，使用它比证明它更加重要。

5. 导出函子：学习模范畴中的Hom函子时，我们知道它有左正合性，那么右边“隐藏”的部分去了哪里？答案就在导出函子中。

导出函子的定义在初学时会感觉比较复杂，其实并不，复杂的只是验证定义为什么合理，包括为何与选取XX分解无关，为何$\mathrm{Tor}(A, B)$同构与$\mathrm{Tor}(B, A)$，诸如此类。而它本身不过是取XX分解，删除原对象，作用函子，作同调/上同调。当然理解这个定义确实更要花一番功夫，个人推荐学习导出范畴，从导出范畴的角度理解该定义会更加自然。

Tor与Ext是模范畴中两种最特殊的导出函子，关于它们的具体计算考试或者作业中很容易涉及，但是并不容易，只能课下积累经验，才能在考场上不再害怕.（包括$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-模,$\mathbb{C}[x, y]$-模上的一些计算）。关于Ext^1还有模扩张的解释，[1]中也讲了，不再赘述.

6. 谱序列：这部分内容首先推荐[3]，讲得非常清楚细致。这里就只说一点：比起证明，谱序列更是一种使用工具，会用远远大于会证明。这里面会再一次出现一生只用证明一次的定理，即谱序列的构造。从给定降滤链的链复形的谱序列的构造可以直接得到一般双链复形的两种谱序列构造，它链接了行、列、全复形这几种同调.

对于同调代数课程本身，最重要的就是Grothendieck的谱序列构造，它是研究复合函子的导出函子的关键技术工具.

延伸与拓展内容：

1. 代数拓扑、代数几何、层的上同调：

孤立地学习同调代数会觉得十分无聊，实际上我们需要了解这门课的历史与动机。同调代数最早就是从代数拓扑的研究中来，所以学习代数拓扑中，可以看到同调代数相当多的应用，包括在同调代数课程中本身不会讲的万有系数定理。现代的代数几何也是同理。学习这些课程，才能更好的明白同调代数在其他学科中是如何应用的。

2. 三角范畴与导出范畴：

Abel范畴是同调代数的中心概念，在 Abel范畴中，可以通过“正合分析”的手段去解决问题。但是数学中有许多自然出现的范畴并非 Abel范畴，比如复形的同伦范畴与导出范畴，这时传统的手段就不再有效。然而同伦范畴正是一个三角范畴（第二章的定理）。在三角范畴中，可以用好三角代替正合列，从而类似“正合分析”的方法仍发挥着巨大的作用。

而导出范畴是同伦范畴的某种局部化范畴。在该范畴中，拟同构的链映射(诱导出来的同调对象之间的态射均为同构的链映射)恰为同构。导出范畴的引入简化了原本的同调代数，比如同调代数基本定理与导出函子基本定理在导出范畴中均可以更方便地叙述；又如，在 Abel 范畴中的高阶Ext群可以简单地描述成 Hom 群。然而，导出范畴不止有简化的作用，有许多不变量只能依靠导出范畴定义，所以其在现代数学中占有越来越重要的地位。

3. 特殊环、特殊模：见[1]的第四章；

4. 同调维数；

5. 群的上同调。

其它资料：

Emily Riehl的主页, 及其论著 Category Theory in Context, Category Homotopy Theory, Elements of ∞-Category Theory.

5.3.2 交换代数

参考书：

[1] Michael Atiyah: An Introduction to Commutative Algebra (《交换代数导引》，有中文翻译版);

[2] Hideyuki Matsumura (松村英之): Commutative Ring Theory.

[3] David Eisenbud: Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry, GTM 150, Springer;

[4] Jurgen Neukirch: Algebraic Number Theory.

学习建议：交换代数作为科大本研同堂的一门基础代数课，课程内容并不复杂，仅仅是这门学问的一个导引。授课内容为：环与模范畴，局部化，诺特环上的准素分解，诺特正规化与希尔伯特零点定理，Nakayama引理和一点维数理论。

Atiyah一书[1]整本也仅一百来页，**正文内容很少，绝大部分（重要）内容掺杂在习题里，自己手推一遍**可以加深印象（当然也有人不喜欢这种写书风格）。大概是包含了直通（现代）代数几何所需的最少的交换代数知识。Matsumura一书[2]比较厚，内容丰富，通篇干货，习题难度与数目适中，**但缺乏动机陈述**。若无相应代数几何或数论背景知识的话，读起来会比较难受。（就笔者个人而言，里面的证明看几次忘几次）因此我推荐将这本书用作交换代数的“辞典”，遇到不会的性质再翻一翻。其他的参考书还有[3]，都有辞典性质，不建议整本刷完。

初学交换代数可以不管其有什么用，埋头学，记住就行。深入后，知道一点动机/背景会更有利于学习交换代数，这些背景一般来自于代数几何与代数数论。但无论如何，学代数课，一定要心里有相当多的例子，比如诺特/非诺特，整但非UFD等等。交换代数的后续课程也基本上就是代数几何与代数数论，代数几何所需的交换代数更深一些；代数数论需要与其他代数内容结合，典型的就是Galois理论。

以下内容将较为详细地介绍交换代数课程的内容，这是为了防止在读交换代数的书籍时**迷失**在技术细节的验证中：交换代数归根是技术型学科，光记结论的话，除了几个叙述过分简洁的比如正则局部环是UFD外，其他的基本等于背诵新华字典，看完就忘了。学交换代数还是要尽量自己推，尤其在很多看起来微小的细节上，会有很多奇妙的交换代数技巧出现。

上面提到交换代数入门首选推荐教材是[1]，如果你学数论的话，阅读 [4] 的时候会发现此书第一章对基础交换代数熟练度要求还是很高的。完备化和维数论（尤其是维数论）在学习的时候最好了解一些代数几何。

基础交换代数里比较重要的几个概念：整(integral)，平坦(flat)，正则(regular)和微分(differential)。首先，“整”的概念在代数数论的学习里会多次用到，建议高强度阅读[4].

平坦(flat)是一个很奇妙的概念，它的性质实在是太多，但你没有必要记住：有一些你动手推起来就自动刻在脑子里，有些你知道怎么用就自动记住；甚至平坦性还能用解线性方程组来判别，体现线性代数才是万物之源。平坦性在代数几何里应用也很广，在后面会看到忠实(faithful)的

性质可以用来构造“复叠空间”，简单的例子域扩张就是忠实平坦的。虽然这个看起来过于平凡，但它的平坦性恰保证了降落理论的原型: Galois降落(可以简单理解成在代数簇上做gal群作用).

正则性(regular)相比之下要稍微进阶一些: 其性质非常强，尤其局部上非常接近于代数无关元（当然实际他的相伴分次环就是多项式环），而 regular sequence 的概念就很好解释了怎样的n个元素生成的环能“很像幂级数环”，同时，regular sequence同时也是联系交换代数和同调代数的地方。判定 regular sequence 很好的工具就是用 Koszul复形，而这里就涉及到很多同调代数，有很多奇妙深刻的同调刻画：比如depth，投射维数和整体维数之间的奇妙深刻联系。当然Koszul复形的应用实际相当广，比如代数几何里我们研究P^n的上同调，你会发现它的$\check{C}$ech上同调恰好就是其分次环对应 Koszul 复形的极限。再进一步，我们发现有很多性质不需要 regular sequence 生成的理想这样强的对象，我们只需要它的一个性质——相伴素理想都是极小的(这也是一个相当好用的条件，此时零因子就是极小素理想的并)，而这个东西成立我们只需要余维数等于深度，于是就有了CM的概念。

另一个重要的概念就是微分模，这部分内容比较推荐结合着代数几何一起看，不然首先很多定理就会看一遍就忘。微分模的应用也相当广泛，你可以拿它来判别概形的光滑性，可以拿它来定义 étale，也可以拿它来解决几何不可约性，约化性的问题，简单理解就是把超越基转化成了线性基(当然这严格来说是错的，char p的时候微分基并不对应超越基)，这样一来很多对象就有更清晰的表达。

上述内容推荐阅读松村英之的交换环[2]论对应章节或GTM150 [3]，其中松村的书对代数几何的要求近乎没有（但他不用代数几何的知识，并不代表你不会也能读下去），而且读松村比较提高技术力，哪怕记不住定理把证明都推一遍也对培养交换代数直觉/技术有很大帮助（潜台词：定理内容容易读完就忘）。而GTM150就解释很多几何直观的东西，缺点就是话太多（但不冗余），比如 Hartshorne 联通性定理，如果你单看定理陈述，就会蒙在鼓里，只感觉是主人(交换代数)的任务罢了，但是[3]就告诉你，换个角度看，这就给出了CM环在局部上具有去掉一个余维数2的闭集它还是联通的，这就给你什么时候可以应用该定理提供了很好的直觉。

5.3.3 代数几何

（一）科大的“代数几何引论”课程

参考书：

[1] Robin Hartshorne: Algebraic Geometry, GTM 52, Springer;

[2] 刘青: Algebraic Geometry and Arithmetic Curve;

[3] Vakil: The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry;

[4] Alexander Grothendieck: Éléments de géométrie algébrique (EGA, 法文)，现有部分中文译本（周健译）

[5] 扶磊：代数几何。

学习建议：这门课的教学内容为：

- （古典）代数簇（仿射，拟仿射，射影，拟射影）、态射、有理映射、以及对应的不变量。
- （现代）拓扑空间上的层，概型的定义，概型之间的态射以及性质，模层，（拟）凝聚层，概型的纤维积、基变换；层的上同调，Cech上同调，Serre的仿射判别法，P^n的各阶上同调，Serre vanishing以及Serre Duality还有曲线的Riemann-Roch formula。

作为一个学期的课程，内容是非常多的，以致于张磊老师在教授的时候放弃了很多与主干无关的知识点。并且这门课高度抽象，只有到譬如$\mathbb{C}$上多项式环这种非常具体的例子才能有比较清晰的几何直观，但是即使在这样好的例子上想要算清楚也是非常不容易的。

关于参考书：[1]推荐看第二章的第6、7、8节以及第三章。[1]第二章前五节的内容建议看[2]的相应部分，尤其是“separated and proper”那一节，两书讲法完全不一样，我初学根本不知道[1]在干啥……）。Vakil[3]我没看过，不做评价。如果你会法语，也可以参考Grothendieck写的EGA [4]，这本书国内以有人翻译了（周健），结论内容全面，无废话，他所参考交换代数书为Bourbaki，每本书都有第零章，专写本书需要的前置知识。缺点是gap不少，且比较难填。也可以参考[5]，其内容上差不多是翻译的EGA，但是补充了不少细节。

学习这门课要注意的是：不要学的太形式，这门课是很抽象的，但是有很多浅显的例子，算一算例子体会一下，对这门课有很大的帮助。如果你同时还在学习代数数论，你可以尝试把代数数论的对象翻译成代数几何的语言，也是有帮助的。

在前半学期学习概型语言时（它就只是一种语言），能处理的手段很有限，直到引入上同调工具后，才有具体计算的方法。

代数几何是一门几何课，如果只学过代数来学这门课的话会非常难受，不知所云，虽然证明推导过程能看懂，但也仅限于“能看懂”的地步，而不清楚他的动机在哪，导致技巧也无法搬运。按W学长的说法，至少应学了黎曼面再看代数几何，这样会有更大的收获。

这门课后续可以学一点代数曲线/曲面，比如椭圆曲线，应用一下自己学过的内容。如果要再深入学习的话可能需要更多的交换代数与同调代数知识，比如谱序列。参考书[5]里面有相应的内

容。

（二）代数几何的学习建议

我们先列出大量的参考书。当然，你并不需要也不可能把这些书全买下来或者全部阅读一遍。同学们还是需要各取所需，专心攻克其中的某几本。

参考书：

1. 预备知识类

[1] Introduction to Commutative Algebra.(交换代数导引) Michael Atiyah, I. G. MacDonald

[2] Commutative ring theory, H. Matsumura （松村英之《可换环论》）

[3] Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry（GTM150）, Eisenbud.

[4] Algebraic Geometry and Commutative Algebra, S.Bosch.

[5] An Introduction to Homological Algebra(同调代数导论), J.Rotman.

[6] A Course in Homological Algebra（GTM 4，同调代数基本教程） P. J. Hilton, U. Stammbach

[7] An introduction to homological algebra（同调代数导引）, Weibel.

[8] Introduction to Smooth Manifold（GTM 218，光滑流形导论）, J. Lee.

[9] Algebraic Topology, Allen.Hatcher.

2. 代数几何书籍

[10] Algebraic Geometry: A Problem Solving Approach.

[11] Algebraic Curves, Fulton

[12] The Arithmetic of Elliptic Curves J.Silverman （GTM 106）

[13] The Geometry of Schemes （GTM197）， Eisenbud

[14] Algebraic Geometry（GTM 52）, Hartshorne

[15] Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Qing Liu(刘青).

[16] Algebraic Geometry, Lei Fu(扶磊).

[17] The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry, Vakil.

[18] Algebraic Geometry（GTM 76）, Iitaka.

[19] Algebraic Geometry, Part I: Schemes. With Examples and Exercises, Gortz.

[20] Principles of Algebraic Geometry(代数几何原理). Griffiths, Harris.

[21] Compact complex surfaces. Barth，Hulek，Peters

[22] Introduction to algebraic surfaces (Lecture notes), Arvid Perego.

[23] Complex Algebraic Surfaces， Arnaud Beauville

学习建议：首先请各位读者切记一点：你要知道你学代数几何是为了什么，不要漫无目的的去学，要不然只能学了一堆抽象的语言而没有什么用。现在的代数几何应用是很广的，代数和几何的绝大部分方向都离不开代数几何的语言，不管是数论，表示论，代数几何，李代数，还是复几何，几何分析，黎曼面等，甚至于数学物理，还有很多应用的方向，比如代数的编码和密码学，

几何的计算几何这些应用的学科都要用到很多的代数几何，所以学好这门课是很重要的。

我们针对主要阅读GTM52 [14]的，学习代数几何和算术几何的同学，所以比较偏向代数一点。

关于预备知识：代数几何是一门很抽象而且有难度的课程，学习可能需要先有很多的基础知识。包括交换代数，同调代数，流形，代数拓扑等。我们可以逐一说一下。

1. 关于交换代数，这是代数几何必备的，仿射概型的空间就是素理想组成的空间，所以对素理想的理解就很需要，这就需要有很好的交换代数功底。推荐的书是: [1]，[2]，[3]，[4]这四本书任意一本学懂都会有可以阅读代数几何的交换代数基础。分式化，维数论，Noether环的性质，分次环，结合素分解等都是需要了解的。

2. 关于同调代数，这是代数几何的上同调必备的，如何在概型上建立上同调并计算它，这就需要有很好的同调代数功底。推荐的书是:[5]，[6]，[7] 这三本书任意一本学懂都会有可以阅读代数几何的同调代数基础。主要需要了解上同调的定义还有其性质，像GTM52第三章的第六节计算高次上同调的时候可能还要用到更深的同调代数。

3. 关于流形和代数拓扑如果可以学那是很好的，如果没学可能少了很多几何直观和几何的类比，比如为什么引入层，为什么引入概型，为什么引入线丛，如果了解的流形，纤维丛等几何上的东西，可能会更加直观。而在同调里面也有很多代数拓扑的东西，比如同伦等价还有MV序列等。这里推荐两本书[8]，[9]。但是你如果没有兴趣或者时间学几何上的东西，那也可以先读GTM52，并不影响内容的阅读。

基础代数几何：

有了上面这些准备，我们可以进入基础的代数几何，关于簇的理论，hilbert 零点定理，正则函数环，局部环，坐标环的性质，仿射簇和射影簇，态射等，甚至可以了解一点Riemann-Roch定理。这方面可以不看GTM52的第一章，可以参考以下书籍： [10] AMS的小册子真的非常适合初学者，这本书从最简单的高中学的圆锥曲线开始讲，整本书写的都很好理解，而且有很多的例子，把代数簇的理论讲的很浅显易懂，也讲了一些曲线的理论。

[11] 这本也是推荐比较多的书，写的比上面稍微难一点，但是也是很好的讲了代数簇的理论，也讲了曲线的理论，值得一读。

[12] Silverman的书和Rotman一样都很好读，读起来没有很困难的地方，这本书讲了椭圆曲线（亏格是1的代数曲线）的算术理论，前两章也回顾了代数簇的理论，以及GTM第四章的曲线的结论，但是不是用代数几何的方法，而是初等的方法（[10]，[11]也是用基础的方法来给出曲线的理论）。如果你只想了解基础的代数簇和椭圆曲线的理论，那只需要读前三章就可以了，如果对modell定理等感兴趣可以继续读各种域上的椭圆曲线，总之这本书可以作为代数几何的预修书。

层与概型：

接下来就进入代数几何的正题了，层和概型是必须要理解的，如果看了很多代数几何书还是

不明白这些东西，那可以看看这本书： [13]如果理解的概型，那就可以开始学习核心的基础代数几何理论了。现在的代数几何书有很多，主要有以下几本： [14]， GTM52 是代数几何很重要的一本书，这本书内容很多，很多国外的教授都认为这本书可能需要至少一年的时间来阅读，这本书的核心是2,3章，也是比较关键的部分，所以可以只读这部分，剩下的都可以在其他书找到，但是52有两个缺点：第一、是有很多超链接，或者说讲的一点的不详细，里面省略了很多的内容，关于这一点我推荐大家关注一个网址， http://therisingsea.org/，这里面有52的2,3章的详细证明，就是把定理证明重新详细写了一遍，这样读起来会舒服一点，但是内容会很多，要耐心去读。第二、就是没有详细的讲述几何直观，可能需要阅读[20].

52的第二章除了最后一节之外都是必读的，少了哪部分都会影响阅读，所以建议第二章的前八节可以从头到尾读一遍，有时间也可以做习题，习题质量是很高的。像第四节如果觉得不好读可以去读[15]，前五节的内容也可以参考[15]，[16]。而6,7,8节的内容是很重要的，尤其对于算术几何上的东西来说这些都是基础内容：除子、线性系、线丛、微分。

52的第三章，前五节是必读的，第七节Serre对偶也需要有了解（否则都没有办法计算曲线的上同调，也不知道亏格那些），所以前七节可以尽量去读，对于8,9,10，如果有时间希望能读一下，了解一些光滑态射之类的，如果没有时间也可以等之后用到再读，对第四章的影响不大。第三章貌似没有很难读的点，所以也不需要找很多参考书。至于第四章的曲线理论，是用代数几何的语言来证明Riemann-Roch， Hurwitz，解释椭圆曲线和超椭圆曲线的理论，主要就是用一点的上同调结果，还有第二章第六，七节的内容。

读完这些就可以去读一些专业的书籍，需要用到代数几何的，比如abel簇，比如etale上同调，比如双有理几何等。第四章的一部分结果可以在[12]中找到初等的证明。第五章是讲述代数曲面的，曲面理论这一块也是很重要的，和很多方向，像几何分析，复几何，算术几何都是有关的。对于代数曲面的除子就是曲线，这里也有Riemann-Roch定理，但是需要先了解相交数和相交理论，这方面的书也有很多，比如[21]，[22]。 [22]是入门的教材，也讲述了曲面的基本理论还有曲面的分类，主要依据kodaira维数来分类。[21]比[22]更深入一些，也是很经典的教材,代数曲面比较全面的经典名著。做代数曲面相关理论的话，经常翻的一本书，需要更多的几何知识，比如kahler流形， Hodge 分解，De Rham上同调等,。这本书也用到较多分析方法，比较适合用来查阅资料，不适合新手. [23]这是非常著名的代数曲面书，短小精悍，非常适合新手学习代数曲面理论。这本书是作者年轻时的作品，虽然年代稍微久远，但至今仍然是最富盛名的经典代数曲面教材之一。

关于其它书籍：[15]刘青的书更偏向数论一点，但是内容写的很细致，证明也比52好一点，前七章的内容就对于52的前四章的内容，但是彼此都有对方没有涉及的东西，读完前七章剩下三章可以当做专题来读。[17]Vakil的书很厚，有800页，内容讲的很详细，还有几何直观，如果有充足的时间想了解代数几何不妨来读一读。[18] 这是日本人iitaka写的一本书，第一章的概型写的很详细，也讲了曲线，上同调，还有双有理几何，内容还是很丰富的。[19] 这本书写的很详细，

把52的第二章的前八节的大部分内容都讲了，而且证明也容易读。[20]这本书从几何，分析方向的角度来讲述代数几何，第二章和第四章是讲曲线和曲面的，觉得52用的语言看着不舒服可以看看这本书的几何上的语言，也讲述了许多52没有的东西，比如曲线的jacobian理论，abel簇等。更适合做几何的同学看。至于EGA，据说北大的周健老师已经翻译了七本了，到第四章第四部分，如果有时间等可以看看什么时候高教可以全部出出来，现在已经出到第二本了。

5.3.4 代数几何的后继学习

参考书籍：

[24] Birational Geometry of Algebraic Varieties， Kollàr-Mori

[25] Positivity in Algebraic Geometry，Lazarsfeld

[26] Intersection Theory (相交理论), Fulton

[27] Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry 1，2， Claire Voisin

[28] Mixed Hodge Structures， Peters,Steenbrink

[29] Moduli of curves (GTM187), Harris

[30] Geometric invariant theory, Mumford

[31] Introduction to the Mori Program, Matsuki

纯代数几何比较大的方向可以大致分为三个，双有理几何，Hodge理论和模空间。所以还是要从自己的研究方向着手专心学习一个，然后再多听报告了解其他方向。

1. 双有理几何

双有理几何据一些学长说“门槛最低”，但最容易“似懂非懂”。本科目前科大也不会开相关课程。为了以后好做研究，与其上手就看一些fancy的双有理几何的结论，不如先把代数几何的基础打牢固。双有理几何五花八门的书太多了，但入门你只需要认认真真的通读一本（哪门学科不是如此呢）。推荐教材第一本 [24] 适合对GTM52非常熟练的人学习，第二本 [31]适合对GTM52不是很熟悉，并想搞清楚细节的人学习。笔者写这篇文章，不准备包括任何具体的结论，不必要的专业名词，旨在粗略告诉大家双有理几何是做什么的。本文只涉及最最“naive”的东西，不准备深入任何概念。但如果连最简单的都没有掌握，谈何高深。

双有理几何是代数几何的一个分支，其动机源自对固定维数的代数簇进行某种分类。实际上对代数簇进行完全分类是十分困难的，所以双有理几何便考虑，在所有函数域为固定的代数簇中，能否找到一个“最简单”的代数簇？实际上函数域相同的两个代数簇，我们称它们是双有理等价的，这也是双有理这个名称的由来。

那么现在就有诸多问题，什么才是“最简单”？在每一个双有理等价类里这个“最简单”的代数簇是唯一的吗？该怎样找到这样的“最简单”的代数簇？

第一个问题有很多答案，Mori最早给出了“最简单”用典范从的结构来刻画的核心想法，并给出了一个粗略的解决如何找到这样的“最简单”的代数簇的思路。现代代数几何学家吧“最简单”的代数簇称之为Minimal Model，而Mori给出的寻找它们的思路也就是所谓的，Minimal Model Program。（如果感兴趣建议看推荐的两本教材了解详情）

第二个问题，在一维的时候，答案是肯定的，而如果高于三维，则在通常意义下，Minimal Model并不唯一。值得一提的是，二维情况下，有一些教材使用古典的“Minimal Model”的定义（参考Beaville [23]），这个时候Minimal Model只能说是大多数情况下是唯一的，但现代代数几何学家使用Mori给的更精细的定义，这个时候Minimal Model则是唯一的，而不唯一的情况，则另有

称谓（Mori Fiber Space 参考 [31] 第一章）。

第三个问题，可以说是关注的核心问题，目前按照Mori的思路，我们可以造出一系列操作（Run MMP），来不断简化代数簇，但是我们面临一些问题：

1.是不是有一个好的Category,使得它对于这些“操作”封闭？这个时候我们有一个Naive的问题就是，光滑的代数簇，进行这些操作后，是否还是光滑的？在小于三维的时候，这没有问题。而一般的情况答案是否定的。从而我们需要考虑比光滑更大的范畴的代数簇（terminal-singularity参考文献）。而更一般，在对数范畴研究极小模型和跑MMP，一般选取相应的对数范畴（klt-singularity）.

2.这个过程是否有限步后终止，最终是否能到达这个极小模型呢？目前只有三维以下完全解决。

而在现代，双有理几何有更多的发展，几乎渗透了各个领域，虽然其最初的目标仍未解决。关于高维双有理几何，可以参考[24]，[25]也是学习双有理几何中非常著名的书。[26]是学习关于Geometry of cycles的著名经典书，比如周群(Chow groups)，比较适合查阅。

2. Hodge理论

Hodge Theory或许也是因为 Grothendieck Generalized Hodge Conjecture 目前远未解决而经久不衰。和Hodge Theory相关的猜想，尤其是algebraic cycles的几何，有非常多都是未解决的。其中尤为著名的是Bloch-Beilinson Conjecture，这是一个非常大的猜想。即使对曲面的情况，著名的Bloch 猜想也仍未完全解决。事实上，广义Hodge猜想和广义Bloch 猜想也是有联系的，对于一般的完全交，Voisin证明了它们的等价性。

关于Bloch 猜想，以及Grothendieck 的一系列Standard conjectures，比较重要的是Motives理论。近几十年，关于Motives理论最大的两个进展，一个可是Kimura引入了Motives有限维的概念。另外一个是，KMP引入了Chow motive的refined CK 分解和transcendental motive的概念。同时，KMP证明曲面经典的Bloch猜想是等价于transcendental motive为零。 [26]是学习Hodge theory 比较经典的入门书。另外，更深的还有比较厚的[27]，比较适合查阅资料。

3. 模空间理论

需要用些范畴理论，要了解Hilber schemes, moduli functors，GIT，Techmüller spaces等等。关于稳定性，比较重要的比如，KSBA, GIT-stability, K-stability。现在，研究非常多的是利用K-stability。因为Kahler-Einstein metric 的存在性等价于K-polystability. K-stability起初是用分析定义的，见田刚1997年的文章，后来Donaldson等给出了代数几何中的定义。利用Test configuration 定义Donaldson-Futaki invariant, 它的符号定义相应的K-stability。类似的，GIT-stability也是由所谓的Weight的符号定义(Hilbert-Mumford 准则).[29]是模空间的参考书，也是一本GTM， [30] 也可以用来学习。

5.3.5 代数数论

预备知识：基本的一些群论知识、域和Galois理论（注意我们会用到无限的Galois扩张）、交换代数（非必需，可以用到再学）、基本的拓扑知识、一些基础的分析。代数数论这门课要用到的工具非常多，但并不一定要把自己完全武装起来再上手，可以在学习代数数论的过程中一点点补充。

参考书：

[1]和[3]为关于代数数论的两本很好的软入门教材。

[1]冯克勤：《代数数论》。

[2] Jürgen Neukirch: Algebraic Number Theory;

[3] 加藤和也：《数论1，2》；

[4] J. P. Serre: A course in arithmetic, GTM 7

[5] “Algebraic Number Theory” by Cassel and Frohlich.

[6] Jürgen Neukirch: Class field theory.

[7]J. S. Milne: Algebraic Number Theory, Class Field Theory, Elliptic Curves, Abelian Varieties, Shimura Varieties, Complex Multiplication, Modular Functions and Modular Forms, Lecture on Etale Cohomology.

[8] S.Lang Algebraic Number Theory， GTM 110

[9] J.P.Serre: Local Fields, GTM 67

[10] Dinakar Ramakrishnan, Robert J. Valenza: Fourier analysis on number fields. GTM 186.

[11] Apostol, Introduction to analytic number theory

[12] Nathanson, Additive Number Theory, GTM 164,165

[13] Davenport, Multiplicative Number Theory, GTM 74

[14] Silverman， Arithmetic of Elliptic Curves, GTM 106

[15] Silverman， Advanced Topic of Arithmetic of Elliptic Curves, GTM 151

[16] Cox， Primes of forms x^2+ny^2:Fermat ,Class Field Theory, and Complex Multiplication

[17] Lozano-Robledo, Elliptic Curves, Modular Forms and Their L-Functions

[18]A.Sutherland, Elliptic Curves

[19]Hindy，Silverman， Diophantine Geometry GTM 201

[20]Cornell， Silverman，Arithmetic Geometry

[21]Munford， Abelian Varieties

[22]Zagier, Geer, The 1-2-3 of Modular Forms

[23]Knapp, Elliptic Curves

[24]Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms GTM 228

[25]李文威，模形式初步

学习建议：代数数论的学习主要分为如下部分

从远古时期开始，数论的两个主要问题就是解丢番图方程和研究素数的分布。代数数论的主要起源就是解丢番图方程（整系数的方程求整数解或有理数解，比如著名的Fermat方程$x^n + y^n = z^n$）。在初等数论里我们靠分解因式可以解决一些简单的丢番图方程，而遇到像x^2+y^2, x^2-2y^2这种情况我们就没法在有理数上分解。这时候大家就考虑能不能考虑一个比有理数更大的数域，我们在那个域上能把丢番图方程来分解成诸如$(x + \sqrt{-1}y) \times (x - \sqrt{-1}y)$的形式。随之而来的麻烦是：一般的数域上我们不一定能做类似于算术基本定理的素因子分解。

1. 古典代数数论

这里主要是涉及理想分解和两大定理(类数有限和单位定理)，这是古典代数数论的核心。理想数的由来还是考虑能否和整数分解一样分解其他的数，一般来说是不可以的，但是对于Dedekind整环的理想来说是有唯一分解的，理想可以分解成素理想的乘积,而数域的代数整数环是Dedekind环。然后那我们可以定义理想类，那这个理想类组成一个群，自然要考虑是不是有限的，然后可以证明类群的阶数有限。对于代数整数环而言，其单位又是哪些，这就有了单位定理。这两个对象越小，说明我们离域的元素的唯一分解越“接近”。有了这些，我们可以轻松的解决一些初等数论中无法处理的丢番图方程，可以刻画Pell方程以及Kummer素数下的Fermat方程。这一部分推荐看[1]，[2]。[1]是标准的入门书，写的很简单甚至不要求你会交换代数，题目也是以计算为主，学一些近世代数就可以看了。与之相反的是[2]，这里面的很多证明是用交换代数来证明的，所以有很多时候比[1]证明看起来容易，所以推荐学点交换代数再看[2]。经典代数数论的参考书太多了，也可以参考[3]的第一卷，[5]。[5]每个章节是由一位大师级人物写的，内容很丰富。当然值得推荐的还有[7]，milne的一众讲义，包含了数论的很多方向，而且经常更新，语言也不会落后，比较适合阅读。[4]和[8]也是代数数论的教材，但又都涉及不同的方面，我们只后再说。

2. 解析方法, Tate's thesis

类似闻名于世的Riemann ζ-函数，我们可以在任何的数域上定义Dedekind ζ-函数以及更一般的L-函数，也能够根据数域的Idele群的特征定义Hecke L-函数。这些函数由级数定义，在一个半平面上是全纯的，我们可以把他们延拓成复平面上的亚纯函数并给出相应的函数方程。Tate给出了一种延拓L函数的方法，他将L函数写成和局部域有关的因子的乘积，在局部域上利用傅里叶变换将这个因子延拓到复平面上，随后在整体域的Adele环上用傅立叶变换延拓L函数并通过与局部的比较来得到函数方程。Tate's thesis可以参考 [5] 中由Tate写的Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions, 也可以参考 [10]. L-函数和ζ-函数中蕴藏着很多关于数域的信息，比如Dedekind ζ-函数在1处的留数是一个和数域的类数（理想类群的大小）、判别式、导子等相关的值。由解析的方法我们还能够给出二次域、分圆域以及一般的Abel数域的类数公式，这方面参考冯克勤 [1] 的第二部分。想学一些解析数论，可以参考[11],[12],[13]。[11]是一本入门的小册子，不需要什么基础就可以阅读。[12],[13]主要是讲加性数论和积性数论的，比如平方和问题，waring问题等。这些方向涉及一些解析数论，比如熟知的哥德巴赫猜想，孪生素数猜想，Tao定

理。主要研究各种gap，素数分布，素数的猜想等。

3. 局部与整体

在解丢番图方程的时候，我们经常会把一个方程模掉一个素数来研究。一个自然的问题就是，如果一个方程模掉任何素数都有解，它是否一定有有理解？通常这是不成立的，但我们希望这在一些情况（比如，二次型）下成立，这样就可以把问题化归到“局部”的情况上。为了了解“局部”的世界，Hensel发现在有理数上存在通常的绝对值以外的一种度量：p进度量。这种度量基于两个数的差对于素数p的幂次，这个幂次越大，说明两个数之间越接近（为什么这么定义？因为相等的两个数模任何p^n都是同余的，而我们在比较两个不同的数时候，也是从模p,模$p^2, \cdots$这样依次进行的）。正如有理数在通常的绝对值度量下不完备，我们也需要对p进度量做完背化，这样就得到了p进数域$\mathbb{Q}_p$。这种度量的特殊之处在于将三角不等式换成了超距不等式（我们称其为非阿基米德赋值/度量），由此产生了各种奇妙的性质。对“局部域”（打引号是因为我没有给出具体的定义）的扩张、分歧等现象。[1]的第三部分和[2]的第二章都介绍了基础的p-adic分析，定义赋值域上的分歧指数，剩余类域次数，最后会发现有很多的结果和数域(经典代数数论)上类似，是数域的推广。标准的教材是Serre [9]. 关于二次型的局部-整体原则，Hasse principal，推荐Serre [4].

4. 类域论

类域论的起源就是Kronecker-Weber的结果，有理数域的极大abel扩张是所有分圆域的合成。Hilbert第12个问题是然后将Kronecker-Weber定理推广到数域上，由这个问题开始，高木贞治建立了类域论。当然现在也只是知道对于虚二次域的极大abel扩张，这和椭圆曲线有着极大的联系，这是后话，但是其他数域至今没有好的结果。类域论是刻画一个域的Galois扩张和这个域本身的算术对象之间关系的理论。对于局部域K，存在K到它的极大Abel扩张的Galois群的一个映射，使得对任何正规扩张L，这个映射诱导出L相对K的Galois群的Abel化与$K^\times/N_{L/K}(L^\times)$之间的同构。同时$K$的Abel扩张和$K^\times$的norm子群（形如$N_{L/K}(L^\times)$的群)之间形成了对应，而norm子群实际上就是$K^\times$的有限指数的开子群。在这样的对应下，我们可以看到K的扩张这种“外部”的信息其实是被$K^\times$本身作为拓扑群的“内部”结构确定的，类域论就是联系这两面的一块“镜子”。对于整体域，我们也有类似的类域论，不过需要考虑整体域的Idele类群。局部类域论的证明也具有深刻意义，一种方法是直接通过Lubin-Tate形式群来构造，另一种是计算2阶Galois上同调（Brauer群）来导出类域论映射。这方面的参考书为[6], [7], [8]，[9]。[6]，[7]都是用群的上同调的方法研究类域论(局部类域论)，所以需要学一点Galois上同调，可以参考milne的第一章。[16]是一本非常好的关于类域论和椭圆曲线的书，这本书主要为了说明什么样的素数可以写成x^2+ny^2的形式，给了一个充要条件，也证明了为什么虚二次域类数是1的是那9个，当然关于复乘和椭圆曲线的内容也很多，值得一读。

后续课程

代数数论课程的后续有很多，细分下来有许多许多，比如算术几何、椭圆曲线、自守形式、

Langlands纲领、Galois表示、p进Hodge等等。这些方向主要用到的工具各不相同甚至差别很大，有的需要大量代数几何，也有的需要大量分析上的技巧，不多赘述，还是建议联系相关方向的老师指导推荐书目，可以避免走很多弯路。

5.1 算术几何1：椭圆曲线 椭圆曲线是亏格1 的代数曲线，在数论中有这重要的应用和地位，是证明费马大定理的主要工具。椭圆曲线形式上是$y^2 = x^3 + ax + b$，代数几何角度可以定义椭圆曲线的加法，还有j不变量，这是判断同构的不变量，也是模空间的对应。从复乘的角度，又是复数域模去一个格的形式，在几何上就是一个复环面(甜甜圈哈哈哈)。研究椭圆曲线主要是研究其在不同数域上的结果。第一部分在数域上研究的是其有理点作为群的结构，利用height可以得到modell定理：这个群是有限生成abel群。所以就可以写成两个部分，自由部分和torsion部分，torsion部分Mazur给出$E(\mathbb{Q})$只有15种可能，但是自由部分的秩一直是困扰数学家们的问题，可能每个秩都能存在椭圆曲线，但是在概率角度，秩0和秩1的椭圆曲线各占百分之50。这部分也牵涉到了著名的BSD猜想，在椭圆曲线上可以定义L函数，这个L函数的在1处零点的阶和自由部分的秩是相等的，进一步的和Selmer群和Shafarevich群也有这联系。这部分可以参考[14]的第十章。第二部分就是复乘，复数域上椭圆曲线研究，对于椭圆曲线自同态环大于$\mathbb{Z}$的时候称为带复乘的椭圆曲线。对于自同态环是$\mathcal{O}$是虚二次域的order的时候，$cl(\mathcal{O})$作用在自同态环是$\mathcal{O}$的椭圆曲线同构类上是传递的，进一步结合类域论的基本定理可以得到虚二次域的极大abel扩张。这一部分可以参考[15]的第二章。第三部分在有限域上的研究，有限域上的椭圆曲线自同态环：ordinary是虚二次域order， supersingular是四元数代数的order。这部分在密码学上有很大的应用。总之，[14],[15]是很好的椭圆曲线入门书，[14]的全部和[15]的前两章可以基本入门椭圆曲线，而且不需要很多代数几何，可能只需要看[14]的前两章的内容就可以了。[17]是AMS的小册子，这一系列的书依旧写的很好入门，容易读且内容很多，不需要什么基础就可以读懂。[18]是Sutherland在MIT上课的讲义，适合做椭圆曲线方面研究来阅读，涉及内容很广，包括复乘和有限域的椭圆曲线，他不仅做一些数论问题（最近找到了42如何写成三个整数立方和），也做密码方面的研究。

5.2 算术几何2：Abel簇 和椭圆曲线类似，我们想定义高亏格g的曲线C，可以定义超椭圆曲线，大概就是$y^2 = f(x)$的形式，其中$f(x)$的次数是$2g + 1$或者$2g + 2$（取决于到一维射影直线的2次覆盖中无穷远点是不是分歧的）。将$H^0(C,\omega)$的一组基拿出来在$H_1(C,\mathbb{Z})$上积分组成$g \times 2g$的矩阵，将每个列向量看成一个元素组成了$\mathbb{C}^g$的一组2g维格，$\mathbb{C}^g$商掉这个格就是一个abel簇，称为C的Jacobian。这样联系了超椭圆曲线和abel簇。但是在复数域上，并不是每个$\mathbb{C}^g$商掉一个格都是一个abel簇，所以需要看什么时候是射影的，也就是有强除子，需要引入theta函数，所以成为abel簇的时候需要存在一个Riemann型。在代数几何的语言abel簇就是交换的完备群簇，有群的性质。同样的可以利用高度函数去证明Modell定理。这部分可以参考[19]讲述了Modell定理和Roth定理，还有一些算术几何中的问题。学习Abel簇的理论可以选择Milne的讲义[7]，或者[20]。[20]是每个章节是由一位很有名的人物写的，内容很丰富。当然很好的选择是[21]，很多书都会少一些证明，让参考Munford的书，所以想完整了解Abel簇这本书必不可少。

6. 模形式 模形式是一类特殊的复解析函数，在某类模群作用下满足一定条件的函数。对于不同的模群得到的模形式也不一样。由于公式符号比较多，在这里不着重介绍了，模形式有很多的应用，比如在椭圆曲线中的椭圆函数，还有和复乘相关的问题，还有丢番图方程里的四平方和问题等，这里推荐[22]，这本书讲了三个部分，第一个是椭圆模形式，和椭圆曲线有关的，二，三部分讲了Hilbert模形式和Siegel模形式是和Abel簇有关系的。[24]是一本详细的入门书，推荐对模形式感兴趣的学习。[23]的后部分都在讲模形式，和椭圆曲线有关系的，最后还简介了Fermat大定理，可以和前面的椭圆曲线一起学，但是这本书椭圆曲线部分没有Silverman讲的顺畅（可能是因为没有用代数几何的工具，计算居多）。[25]是李文威老师写的模形式，内容大概和[24]差不多，也讲了一些椭圆曲线之类的。

7. 分圆域和岩泽理论

8. Galois 表示

9. 自守形式、Langlands纲领

10. p进Hodge理论

注意事项：

代数数论课程的内容都可以在参考书中的对应部分找到。以下需要注意：

1. 慎重一来就看Neukirch, 这人写的书虽然很好但是语言组织太差，感觉看得头痛就不要作为主教材了。（相性好的抽象大佬可以靠这个加速进度）

2. 如果一个地方看不清楚就多算例子找感觉，[1]的习题都是不错的。

3. 构造性的证明不仅要关心结论，也要看如何构造的。最好自己证明一遍。

4. 不要害怕计算！

5. 在遇见好康的结论之前并没有坦途，数论研究是非常具体的。

6. 若学到群上同调和各种群，那说明老师升级地掺杂了一些类域论。

5.3.6 解析数论

科大没有开设这门课程，也很少有研究解析数论的老师

预备知识：数学分析、傅立叶分析、复分析、初等数论。

参考书：

基础入门:

[1] Apostol: Introduction to Analytic Number Theory.

再进一步:

[2] Harold Davenport: Multiplicative number theory.

[3] Karatsuba: Basic Analytic Number Theory.

再进一步可看:

[4] Melvyn B. Nathanson: Additive Number Theory The Classical Bases.

[5] 潘承洞、潘承彪：哥德巴赫猜想.

其他参考书籍:

[6] Elias M. Stein,Rami Shakarchi: Fourier Analysis.

[7] Jean Pierre Serre : A Course in Arithmetic.

[8] M. Ram Murty: Problems in Analytic Number Theory.

[9] Iwaniec Henryk, Kowalski Emmanuel: Analytic number theory.

[10] Donald J. Newman: Analytic Number Theory.

[11] Melvyn B. Nathanson: Additive Number Theory Inverse Problems and the Geometry of Sumsets.

[12] Alina Carmen Cojocaru,M. Ram Murty: An Introduction to Sieve Methods and Their Applications.

[13] B. Bollobás, F. Kirwan, C.T.C. Wall&P. Sarnak: The Hardy-Littlewood method.

[14] Elias M. Stein, Rami Shakarchi: Complex Analysis.

学习建议：

本人给出学习解析数论的个人建议,先学习[1]入门,此时能大概知道解析数论里的很多基本概念,也能知道L函数,ζ函数最最基本的用法,学习这个时同时也能辅以[6], [7], [14]，傅里叶分析、复分析在解析数论中也有着非常重要的作用.而在进一步就可以参看[2]和[3]了解乘性数论中的一些基本结论，此时可以参看[8], [9]等书，基本的加性数论可以了解下[4]和[11],之后看的书籍可能就与你想要了解解析数论的哪些问题有关,由于本人希望阅读张益唐的Bounded gap between primes,所以被推荐了双潘的哥德巴赫猜想[5]一书。此时(或者此前)建议尽快找老师指导你解析数论的学习，不要白白做无用功。同时一定要明白解析数论只是研究数论的一种工具，不要死钻在解析数论之中，其他方向的内容也应当有所学习，譬如目前热门的 Kloosterman 和等的研究就需要用到代数几何的工具。最后，祝此文读者学路顺利。

基本介绍：

解析数论这一学科就是用解析方法研究数论问题，因此很大程度上是一个问题导向的杂糅学科，也即是说不同的问题会有着不同的方法和工具，其间的差别可能非常之大(关于这个可以看[10]，其用解析的方法研究了很多完全不同的有趣问题，不过方法都很fancy, 希望读者不会被带偏.)但很多数情况下我们都会用到一些共同的工具,由此也会有些共通的知识-如素数分布、圆法等.由此也可以粗略的将解析数论如下分类:研究素数分布的乘性数论 (Multiplicative Number Theory)，以及问题导向研究加性问题的加性数论 (Additive Number Theory,或称堆垒数论) ,以及其他一些对渐进公式等杂七杂八问题的研究。接下来笔者将稍微进一步地进行阐述：

1. 乘性数论

该内容主要研究乘法的原子–素数的分布情况,由于我们知道,当$\Re s > 1$时,我们有

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi_p(1 - \frac{1}{p^s})^{-1} \tag{5.8}$$

这样我们就能将全体素数的研究转换到一个由全体自然数表示的,貌似更好的函数的研究.譬如Euler对有无穷多个素数的证明:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty \Leftrightarrow \Pi_p(1 - \frac{1}{p})^{-1} = \infty \Leftrightarrow \lim_{s\to 1^+} \sum_n \frac{1}{n^s} = \infty. \tag{5.9}$$

我们便能够将对素数的研究变为对$\zeta(s)$这一解析函数的研究.而通过考虑

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{5.10}$$

其中$\Lambda(n)$是Von Mangoldt函数,当$n = p^k$时取值$\log p$,其余取0. 以及

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & y = 1, \\ 1 & y > 1. \end{cases} \tag{5.11}$$

我们会想要将$\zeta(s)$进行解析延拓,事实上,其可以很轻易地解析延拓到$\Re s > 0$上(注意$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_{1^-}^{\infty} t^{-s} d[t] = \frac{1}{s-1} + s\int_{1^-}^{\infty}\{t\}t^{-s-1}dt$其中积分是Stieltjes积分),有这个即可证明素数定理,但一般的,我们通过Poisson求和公式可以得到对于$0 < \Re s < 1$.

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s). \tag{5.12}$$

从而我们能够将$\zeta(s)$延拓到全平面上,并且通过对$\Gamma(s)$的估计得到右半平面$\zeta(s)$的估计,并且用围道积分得到 $\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)$的精确公式.

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1 - x^2). \tag{5.13}$$

其中ρ为$\zeta(s)$的零点.这样,通过对ζ函数零点分布的研究,我们就能够得到更加精确的素数公式.

现在我们来到L函数,当我们考虑证明Dirichlet定理时,我们会引入模q的Dirichlet特征$\chi(n)$,由于Dirichlet特征的正交性,我们可以用它来将正整数列$\{a_n\}$中,所有非模q余a的数删去,再由$\chi(n)$的积性.我们同样会有在$\Re s > 1$时

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{\chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(a)\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \phi(q) \sum_{n=1, n\equiv a \mod q}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{5.14}$$

由于除主特征外,其他$L(1,\chi)$在$s = 1$处都有界,通过说明$L(1,\chi) \neq 0$我们就能得到模q余a的素数具有无穷多个.当然,完全类似的,我们希望将L函数解析延拓到全平面,然后依此给出$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x} \chi(n)\Lambda(n)$的估计,沿用同样的方法,我们同样有$L(s,\chi)$的函数公式,并且有

$$\psi(x,\chi) = -\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m}. \tag{5.15}$$

通过对$L(s,\chi)$的零点进行估计(这个更加困难),我们能够得到算术级数中的素数定理,如果$q \le (\log x)^N$,则有:

$$\begin{aligned} \psi(x;q,a) &= \frac{x}{\phi(q)} + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \bar{\chi}(a)\psi(x,\chi) + O(\frac{1}{\phi(q)}\{x\exp[-c(\log x)^{1/2}] + \log^2 qx\}) \\ &= \frac{x}{\phi(q)} + O(x\exp[-c(\log x)^{1/2}]). \end{aligned} \tag{5.16}$$

但有时这种余项估计还不够,我们会引入如下的平均估计,记

$$E(x;,q,a) = \psi(x;q,a) - \frac{x}{\phi(q)}, E(x;q) = \max_{(a,q)=1} |E(x;q,a)|, E*(x,q) = \max_{y\le x} E(y,q).$$

则当$x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-A} \le Q \le x^{\frac{1}{2}}$时,我们有:

$$\sum_{q\le Q} E^*(x,q) \ll x^{\frac{1}{2}} Q (\log x)^5$$

以及

$$\sum_{q\le Q} \sum_{a=1,(a,q)=1}^{q} (\psi(x;q,a) - \frac{x}{\phi(q)})^2 \ll xQ\log x.$$

等结果,这些可能会在各种各样的具体问题之中用到,这方面内容主要可参考[2],[3].现在我们再介绍一些其他的方法.

2. 筛法

筛法的历史非常久远,最早可以追溯到古希腊的Eratosthenes筛,筛法主要是通过一定的手段对集合A符合一定条件的数a_n的和的上界和下界,[12]给出了一个较为详细的介绍,在本篇中,将只介绍本人较为熟悉的 Brun 筛和 Selberg 筛,这方面可参看[4].以下是本人研究这些写的迫真拙作,读者可直接跳过.

《生活在素数上》

近代哥德巴赫猜想研究以Brun于1915年提出的初等组合筛法为嚆矢,滥觞于Ш н и р е л ь м а н
(Shnirelman) 的密率论正在失去他们的借鉴意义,但面对看似无垠的筛法的海洋,我想循历史发源开始理解好过仓促地起航.

我们怀揣热忱的灵魂天然被赋予对超越性的追求,不屑于乘法原子对素数的约束,钟情于它们的其他性质,但当这种期望流于对素数分布的研究,乃至开始探讨素数加性性质时,困难便就此发生了.乘性与加性的错位无法为我们提供明确的行为张本,纵然我们已有素数分布的模糊蓝图,但仍不能在浪潮之巅看清目的地的方向.

”通过如今被称为Brun筛法的组合手段,Brun证明了...”Nathanson这句话可谓是切中了肯綮.筛法的组合色彩是不可祛除的,而我们运用分析的工具之时也无时无刻不在从组合处借力.筛法暂且被我们把握为研究素数强有力而粗糙的工具,一定程度上也是我们尚缺乏对素数分布精确的体验和认知,而这种无知更远在组合的方法之上.

在孜孜矻矻以寻求哥德巴赫猜想答案的道路上,对素数的估计就是在于筛法于乘性数论对接中塑性的动态过程.而我们的底料便是对组合手段,素数分布的觉感和研究.倘若我们对素数分布的研究进行祛魅后,又对不断膨胀的筛法进行赋魅,那么再丢掉预期的同时,未尝也不是丢掉了工具.

毫无疑问,从组合筛法的一觇的筛法有过时的成分,但我们所因摒弃的不是对此的批判,而是其批判的廉价,批判导致的失去动机的虚无倾向.当格罗滕迪克仿佛来自虚空而解析数论学者仍在对粗糙的筛法修修补补之时,我们不应斥之以媚俗.

工具的不同终归只是方法上的区分,在刻画的性质区别上也未必明晰.譬如当我们进行放缩,在途中得到带余项的素数定理,这究竟是伴随着对素数分布的认知更加精确还是更加模糊?在我们用筛法和解析工具研究素数分布的同时,素数分布也在改进这些工具.即不可否认这些结果的重要性,又要承认这些方法有轻狂的失真,不妨让猜想走在观念之前.用不被禁锢的头脑去体味Erdös的创想与热情,并效大卫希尔伯特之言”Wir müssen wissen. Wir werden wissen!”,永远怀揣一颗充满希望的内心.

用在素数上的生活方式体现素数的超越性,保持婞直却又不拘泥于所谓完全精确的刻板形象.这便是筛法的粗糙估计为我们提供的理想工具范式.生活在素数上–不断改进工具–升上天空.

$\square$

重回正题,Brun筛法是一种组合筛法,其通过观察到容斥原理中如下的不等关系,设$N(I) = N(i_1, ..., i_k)$为X中满足 $P_{i_1}, ..., P_{i_k}$ 中任一性质的元素的个数,以及$N(\emptyset) = |X| = N$, N_0是X中不具备任一P_i性质的元素,如果m是非负偶数,则

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \sum_{|I|=k} N(I) \le N_0 \le \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{|I|=k} N(I)$$

从而我们考虑$X=\{n(x-n)|0\le n\le x\}, P=p|p \quad prime\le y, P_i$为被$p_i$整除,我们有

$$N(i_1,...,i_k)=\frac{2^k x}{p_{i_1}...p_{i_k}}+2^k\theta, |\theta|\le 1$$

取m为待定偶数,则我们大致就有

$$N(x)\le x\sum_{k=0}^{r}\sum_{I}\frac{(-2)^k}{p_{i_1}...p_{i_k}}-x\sum_{k=m+1}^{r}\sum_{I}\frac{(-2)^k}{p_{i_1}...p_{i_k}}+O(\sum_{k=0}^{m}C_k^r 2^k). \tag{5.17}$$

再对后面两项进行估计,则可定出m和y,并且得到$N(x)\ll\frac{x}{\log^2 x}$,从而得到集合$\{p_1+p_2\}$的密率为正,进而得证哥德巴赫猜想.但毫无疑问,Brun的筛法是无比粗糙的,我们想要进一步加细我们筛法的估计,Selberg筛通过二次型的最小值,给出了一种加权筛法.得到

$$S(A,\mathcal{P},z)\le\frac{|A|}{G(z)}+\sum_{d<z^2,d|P(z)}3^{\omega(d)}|r(d)|,$$

其中$\omega(d)$是d的不同素因子个数.但是有时我们也不会只满足于估计上界,我们同样会需求估计下界的筛法,事实上Jurkat-Richert定理就做了这一工作.它的证明用到了很多非常硬的计算和数学分析技巧,所以若是数学分析基础不够好,学习这一方面可能会有一定难度.有了Jurkat-Richert定理再加上我们之前的Bombieri定理就可以给出陈景润定理1+2的一个简化证明.

3. 圆法

圆法也称Hardy-Littlewood方法,其主要原理来自于Cauchy积分公式的一个特例,或者说是三角级数的正交性,即

$$\int_0^1 e^{2\pi i n\theta}d\theta=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & \text{其他正整数}\end{cases} \tag{5.18}$$

由此,以Waring问题为例,我们令$S(\alpha)=\sum_{1\le n\le N^{\frac{1}{k}}}e(n^k)$,我们可以通过估计

$$\int_0^1 S(\alpha)^m e(-N\alpha)d\alpha$$

的渐进公式来说明当N充分大时,$N=x_1^k+...x_m^k$的解的存在性.但是怎么估计又成了一个难题,Hardy-Littlewood注意到(猜测到)当α靠近有理数之时$S(\alpha)^m e(-N\alpha)$的值可能贡献比较大,因此其引入如下对区间$[0,1]$的剖分:取 $m(a,q)=\{\alpha:|\alpha-a/q|\le\frac{1}{P}\},(a,q)=1$, 则通过对分母$q$的大小我们可以划分出Major arc和Minor arc,当$q<P_1$时是Major arc,$P_1\le q\le P$时是Minor arc.那么,我们可以带一定误差地估计出Major arc上该积分的值(这里需要一定的数学分析技巧和观察,用一些比较好的函数去带较小误差地逼近$S(\alpha)$),而后,我们通过Minor arc中元素都离分母较大有理数很近可以给出Minor arc上$|S(\alpha)|$的上界(这往往是圆法证明里最为关键的一步),从而得到解的个数的渐进公式.步骤比较机械,主要问题就是对Minor arc上$S(\alpha)$积分的控制.

再譬如哥德巴赫猜想中,取$S(\alpha)=\sum_{p\leq N}e(n\alpha)$,Vinogradov考察$\int_0^1 S^3(\alpha)e(-N\alpha)d\alpha$,通过得到$|S(\alpha)|$在靠近分母比较大的有理数时的上界,来给出较小的余项估计,来证明三素数定理.

圆法在其他问题中也有运用,譬如可以用来做一些子集和问题,研究子集中等差数列,以及其他不同的加性基的和的问题,这方面由于本人知识比较缺乏,无法过于深入的介绍,读者可参看[12],不过笔者想向读者介绍圆法(也许算圆法)一个比较fancy的运用(来自[10],这本书还介绍了很多解析工具在组合问题里的妙用),关于整数分拆的渐进公式.令$p(n)$为整数n的无序分拆个数,记$F(z)$为其生成函数,则我们知道:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n=\Pi_p k=1^{\infty}\frac{1}{1-z^k}. \tag{5.19}$$

通过简单计算,我们能够得到:

$$\log F(e^{-\omega})=\frac{\pi^2}{6\omega}+\frac{1}{2}\log(1-e^{-\omega})\sum\frac{1}{k}(\frac{1}{e^{k\omega}-1}-\frac{1}{k\omega}+\frac{e^{-k\omega}}{2}) \tag{5.20}$$

而后面的项在$|\arg\omega|<c<\pi/2$时被$M\omega$所控制,从而我们有:

$$F(z)=\Pi_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^k}=\sqrt{\frac{1-z}{2\pi}}\exp(\frac{\pi^2}{6\log\frac{1}{z}})[1+O(1-z)],\frac{|1-z|}{1-|z|}\leq c. \tag{5.21}$$

我们取$\phi(z)=\sqrt{\frac{1-z}{2\pi}}\exp(\frac{\pi^2}{12}\frac{1+z}{1-z})=\sum q(n)z^n$,我们可以估计,在$\frac{|1-z|}{1-|z|}\geq 3$的区域, 有 $\int_B B(F(z)-\phi(z))/z^{n+1}dz\ll\frac{2}{r^n}\exp(\frac{1}{1-r})$.而在小于3的地方,也能估计出一个上界,从而能够得到:

$$p(n)=q(n)+O(n^{-5/4}e^{\pi\sqrt{n/6}}).$$

而我们又可以估计出

$$q(n)\sim\frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}n}.$$

从而就给出了$p(n)$的估计.

4。解析方法研究其他一些问题和方法

解析数论还会涉及到一些关于图形内格点个数的估计,以及其他方面,诸如代数数论中给定高度H计算有理点个数的渐进公式,以及筛法在加性组合外的应用等等,对于这方面我并不了解，所以也无从介绍。

5.3.7 表示论

该课程自2016年春季之后中断开设，后于2020年春季学期重新开设。

科大的“群与代数表示论”(MA04106, MA05107)课程

参考书：

[1] 丘维声：群表示论；

[2] Pavel Etingof：Introduction to Representation Theory;

[3] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups，GTM 42, Springer;

[4] William Fulton: Representation Theory: A First Course, GTM 129, Springer;

[5] 冯克勤：群与代数表示引论；

[6] I. Martin Isaacs：Character Theory of Finite Groups.

[7] 薛航教授的讲义：http://www.math.ac.cn/xshd/hyyzt/201902/W020191210557979361932.pdf

学习建议：

有限群表示论的前置知识为近世代数和线性代数，主要内容为有限群的表示的定义和构造，不可约表示，诱导表示，特征标，以及表示论的一些应用。一个群的表示就是这个群在某个线性空间上的一个群作用。一个很自然的想法就是我们能否将这些表示进行较好的刻画，而由Maschke定理：若域的特征不整除群的阶，则每个有限维表示都是不可约表示的直和，因此这类域上的表示理论的研究转化为寻找群的所有不可约表示。但是这样还是比较抽象，而特征标理论的建立可以帮助我们把很多抽象的问题转化为具体的计算，比如在性质比较好的域上，表示的不可约的判断，表示的直和分解等等都可以用特征标的计算来判断。还有非常重要的一点就是从旧的表示构造新的表示，比如商，直和，张量积，而一个比较非平凡的方法就是诱导表示：从子群的表示构造出原来的群的一个表示。研究表示论还可以研究群在域上生成的群代数，在这种语言下，群的表示等价于群代数上的模，不可约表示就是单模等等，因此利用环论，模论的工具我们也可以来进行研究。此外，通过研究一个群的表示还可以反过来得到这个群本身的一些性质，从而通过研究表示论还可以反过来得到一些纯群论的结果，一个经典例子就是Burnside可解性定理。

初学者建议阅读[1]的1-5章，写的比较易懂。[2]的很多重要内容都放在习题中。[3]写的非常简练，我个人认为不太适合初学者。[5]是2020年春季学期使用的教材，特点是相对更注重一般的域上的表示而不是只考虑复表示。[6]的内容比较深入，部分习题难度比较大。[7]是2019年中国科学院暑校的讲义，并不是以非常书面的语言写的，可能不太符合一些人的口味。此外，学习的过程中注意一定要多算例子。

李群及其表示论

这部分仅对应科大开设的课程，不是指整个李群学科。该课程仅在2013年秋季学期由王作勤教授开设过一次（李群引论，MA05169）

参考书：

[1] Anthony W.Knapp: Lie Groups Beyond an introduction;

[2] 王作勤教授的讲义：http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Lie.html;

[3] Mark R. Sepanski：Compact Lie Groups，GTM 235, Springer;

[4] Daniel Bump：Lie Groups，GTM 225, Springer.

学习建议：

[1]和[2]都是写的非常精彩的教材，其中[1]相对友好一些，不过比较厚。这门课程自2013年后就没有再开设过。前置知识为群论，线性代数，微分流形，实分析和泛函分析(主要用在李群表示论)，可能还需要一些代数拓扑(主要用于研究李群的覆叠空间)。主要内容为李群的一些基本理论，李群在线性空间上的作用(即表示论)，还有李群的结构理论。

抽象调和分析/拓扑群表示论

科大数学系没有这门课，仅是在2016年春季学期任广斌老师的调和分析(MA04310)课程的后半学期出现过一部分。

预备知识：实分析、泛函分析、点集拓扑、近世代数中的群论。

参考书：

[1] Gerald B. Folland: A Course in Abstract Harmonic Analysis

[2] 李文威教授的讲义: https://www.wwli.asia/downloads/BasicRep.pdf

[3] 薛航教授的讲义: http://www.math.ac.cn/xshd/hyyzt/201902/W020191210557979361932.pdf

[4] M. W.Wong: Wavelet Transforms and Localization Operators.

学习建议：暂缺。主要内容为：

1. 基础知识：拓扑群、Haar测度、齐次空间等基本定义，以及表示论的基本概念。

2. 紧群表示：核心内容是Peter-Weyl定理，其直接例子即为傅立叶级数——紧Abel群上的不可约酉表示

3. 实例：矩阵群的表示、仿射群表示、Weyl-Heisenberg群表示等等。

4. 应用：小波分析的理论基础，见参考书[4].

5.3.8 李代数

科大的“李代数与表示论”(MA04402, MA05162)课程

参考书：

[1] James E. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory;

[2] Jean-Pierre Serre: Complex Semisimple Lie Algebras;

[3] Jean-Pierre Serre: Lie Algebras and Lie Groups;

[4] William Fulton: Representation Theory: A First Course, GTM 129, Springer;

[5] 陈洪佳教授的讲义：http://staff.ustc.edu.cn/~hjchen/L18/S1.pdf

[6] MIT的讲义：https://math.mit.edu/classes/18.745/Notes/

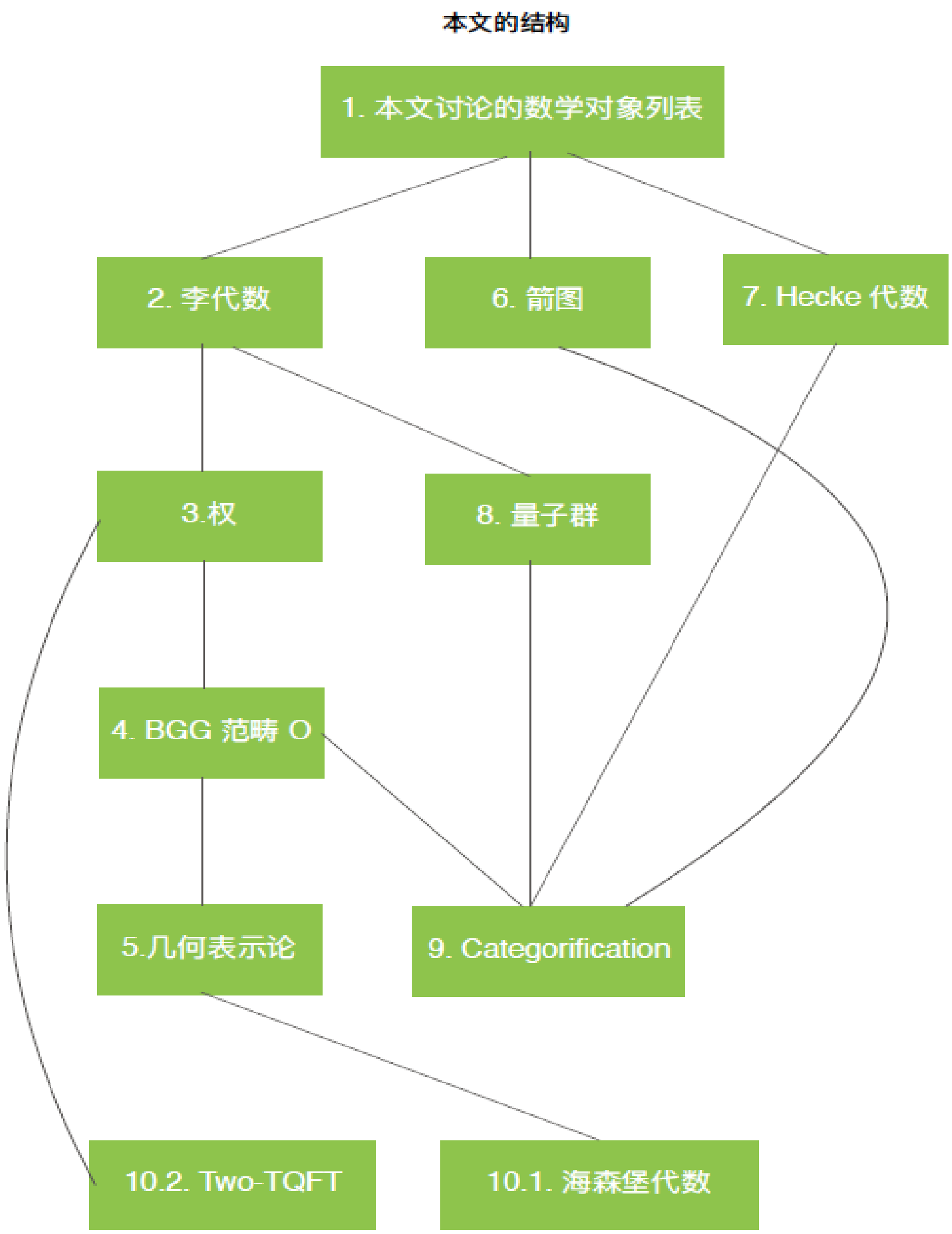
学习建议： 前置知识：群论和线性代数。李代数可以单独地来学，也可以和李群一起学。中科大采用的是前者，所用教材是[1]，一般上前四章内容。不过[1]这本书读起来比较吃力，想学这本书最好是网上阅读别人写的讲义，比如汕头大学的吴正尧教授写的讲义：https://wuzhengyao.oschina.io/homepage/Lie.pdf，这份讲义大致覆盖了前三章的内容。[2]需要有一点李代数基础，前两章是没有证明的综述。[4]写了很多的李代数的表示论的内容。[5]似乎是18年的上课讲义，把结尾的“S1”改成“S2”，“S3”……“S13”以及“S14-16”就可以得到每次课的讲义。

李代数简而言之就是赋予了一个李括号结构的线性空间，一个典型例子就是$(R^3, \times)$。李代数上有很多类似于群和环的结构，比如子代数，理想，可解，幂零，半单之类的，因此学起来也不会感到太陌生。这门课主要内容为李代数的一些基本概念，幂零李代数，可解李代数以及一些判别法，基础的一些表示理论，以及有限维李代数里很重要的一类李代数，半单李代数。通过环面子代数，复半单李代数的研究可以转化为对根系的研究，然后利用Coxeter graphs和Dynkin diagrams对根系分类，反过来得到复半单李代数的结构分类。这些大致上就是科大的李代数课程的主要内容。学习的过程中一定要注意掌握例子，该计算的地方不要偷懒。

5.3.9 李代数与表示论的深入介绍

本文旨在向科大大二学生介绍一部分笔者所知道的表示论，因此尽量假定读者只知道基本的微积分与线性代数。感兴趣的同学还可以看看我的表示论笔记（们）。由于作者水平有限，错误在所难免，若发现错误请邮件 s6liwang@uni-bonn.de （王暸 收）指正，不胜感激！

首先列出本文的框架。后面的具体内容是直接嵌入了笔者撰写的文件，故页码与本指南并不统一。



0. 食用方法

死生，命也，其有夜旦之常，天也。人之有所不得与，皆物之情也。
—— 《庄子》

数学学习的基本矛盾是学生**有限的时间**和**无限的知识**的矛盾。中国人碰到新东西的时候总想着找本书从第一章开始定义引理定理，弊端可能包括：

- 往往结果是根本没有看到需要用到的地方就到期末考试了，导致有很多东西来不及学；
- 实际用到的往往只是（甚至是退化的）特例，一头扎进抽象的理论会迷失方向；
- 重理论轻应用，不会用理论，就像凡人拿着青龙偃月刀，看起来威风却根本舞不动；
- 不知道抽象的东西具体的背景和动机，从而影响抽象理论的学习。

而另一方面，外国学生绝大部分人的选择是很大程度上牺牲细节，直接把结论当作黑箱用。弊端可能包括：

- 理解不够深入，运用不够熟练，甚至很多地方会犯想当然的错误；
- 极有可能没有意识到背后抽象的结构；
- 不够熟练影响后续学习。

二者之间如何保持一个平衡，这就是一个问题。诚然我们不能邯郸学步丢了我们固有的优势，可即便是教授（尤其几何方向），也不清楚每个细节。据笔者观察，组内的外国同学根本不是按照逻辑顺序来学习的，而是通过例子，混杂了大量的感性认识。**笔者认为这恰恰是中国学生应该学习的！**笔者的导师认为，重要的并非清楚每个证明，熟练掌握每个理论，而是：

- 尽快接触较为前沿的内容；
- 搞清楚理论的一些前后联系；
- 知道重要的特例，学会重要的 trick；
- 对于哪些地方用了黑箱心中有数，如有需要可以回过头去弄清楚。

这样的好处是着眼大局，抓大放小，**特别适用于科大人，**因为我们本科阶段仔细锤炼了技巧，比起外国人更少为老师跳过的细节困扰！

笔者导师开的基础课会一步步给出完整的证明，而在硕士阶段就火箭开足马力。但这就需要一个好老师选取适当的材料，并指出哪些证明是重要的哪些可以跳过，帮忙将论文翻译成看得见摸得着的例子。这条件的确很难满足，那这篇科普的定位就明确了：简短介绍一些好的话题，而笔者的课程笔记提供详细的讨论，以期弥补资源的不足。因而对于读者而言重要的不是读完记住几个名词或者从头到尾推一遍逻辑，而是以此为信标在未知的迷雾中辨认出一条非常模糊的路线。尽善尽美是不现实的，而如何在未知中摸索出一条道路，才是研究二字的真正含义吧！

1. 代数

代数是指一个线性空间 V 带有一满足结合律的双线性乘法 $V \times V \to V$，例如所有 $n \times n$ 矩阵的集合。为了与下面各种奇奇怪怪的代数区分开，这样的代数也称为结合代数。由结合代数衍生出了许多代数的概念，例如：

- **李代数**： 这个"乘法"记作李括号 $[-,-]$，定义为满足反交换：$[a,a]=0$ 以及 Jacobi 恒等式 $[x,[y,z]]+[[x,z],y]+[z,[x,y]]=0$. 这个等式可以这样看：考虑伴随表示，也即李代数 $\mathfrak{g}$ 的元素视为线性映射 $\mathrm{ad}\ x := [x,-] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，那么这个作用满足

$$\mathrm{ad}\ x([y,z]) = [\mathrm{ad}\ x(y), z] + [y, \mathrm{ad}\ x(z)]$$

  如果把右边的李括号视为某种非交换也非结合的乘法，那么这便是导数的莱布尼茨法则。事实上李代数天然就是某些求导操作。

- **coalgebra**：在结合代数中把乘法视为一个映射 $\mu_A : A \otimes A \to A$，那么结合律可以写作

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu_A \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \mu_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A \end{tikzcd}$$

  图表交换的意思是从左上到右下有两个映射，它们是相等的。而单位元可以视为 $\eta : k \to A$，其中 k 是基域，满足

$$\begin{tikzcd} A \otimes k \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta"] \arrow[dr, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & k \otimes A \arrow[l, "\eta\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, equal] \\ & A & \end{tikzcd}$$

  读者可以注意到，这两个交换图是等价于结合代数的公理的。这里说明一下，域上的张量积是一清二楚的，例如若 A 的一组基是 e_1, e_2 那么 $A \otimes A$ 的一组基是

$$e_1 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_2,\ e_2 \otimes e_1,\ e_2 \otimes e_2$$

  这不是严格的定义，喜欢形式化的同学暂时知道张量积由某种泛性质定义即可。
  那么现在这个 coalgebra 的概念就是把结合代数的这些图表箭头全部反向，也就是

说，一个 coalgebra 是一个线性空间 C 加上如下数据：

① 余乘 **Comultiplication** $\Delta_C : C \to C \otimes C$

② **Counit** $\epsilon : C \to k$ 这里 k 是线性空间结构里那个域。

满足余结合律 coassociativity:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta_C \otimes \mathrm{id}_C"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta_C"] & C \arrow[l, "\Delta_C"] \arrow[u, "\Delta_C"']
\end{tikzcd}$$

以及 counit 条件

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \epsilon"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\epsilon \otimes \mathrm{id}"'] & K \otimes C \cong C \cong C \otimes K
\end{tikzcd}$$

- **Bialgebra**：既是结合代数也是 coalgebra 并且结构相容，即 comultiplication, counit 都是代数同态。

- **Hopf 代数**：Bialgebra 加上一个对极映射 **antipode** 满足六边形公理

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes 1_H"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & I \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "1_H \otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

  这个对极映射的作用之一如下：可以考虑 grouplike elements, 即满足 $\Delta x = x \otimes x$ 的元素，它们构成一个群，乘法逆元由对极给出。

- **Frobenius 代数**：一个有限维代数和 coalgebra，其乘法 μ 和 comultiplication Δ 满足 Frobenius 关系。

$$\Delta \circ \mu = (\mathrm{id} \otimes \mu) \circ (\Delta \circ \mathrm{id}) = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)$$

  注意这里 Frobenius 代数不再是 bialgebra!

- **Lie superalgebra**：作为线性空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ ，定义 $\mathfrak{g}_0$ 中的元素 degree 为 0，$\mathfrak{g}_1$ 中的元素 degree 为 1, 它们之间的李括号满足

$$[a, b] = (-1)^{\deg a \deg b}[b, a]$$

下面让我给出一些例子说明这些概念为什么有趣。

2.李代数

乍一看李代数是个很奇怪的东西，那么让我们先看一个例子： 前面所说所有 $n \times n$ 矩阵的集合是个结合代数，它同时也是李代数 $\mathfrak{gl}_n$, 李括号由交换子给出： $[x, y] = xy - yx$. 一般地，任意结合代数在交换子下成为一个李代数。注意到这在一般的李代数中并没有意义：我们只有李括号而没有右边的乘法！

然鹅有需求就有发明，这就是所谓的 **Poincaré-Birkhoff-Witt** 定理和万有包络代数 **universal enveloping algebra**. 即：任意李代数都能嵌入一个最“普遍”（即满足一个泛性质）的结合代数 $U(\mathfrak{g})$ ， 使得李括号是 $U(\mathfrak{g})$ 里的交换子。$U(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf 代数。

2.1. 表示与范畴

现在李代数感觉依然感觉非常抽象，而这正是我们需要表示的原因。一个（线性）表示就是对某个线形空间 V 一个李代数同态（与李括号交换的线形映射） $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，后者代表 V 上的线性变换的集合视为李代数，V 也称为一个 $\mathfrak{g}$ 上的模。不计较精确定义的话“表示”和“模”两个术语可以互换。如果 V 没有非平凡子空间在 $\mathfrak{g}$ 作用下不变，我们就说 V 是个不可约表示。

把所有模放在一起，任意两个模，只考虑 $\mathfrak{g}$-模同态 **homomoprhism**， 即所有与 $\mathfrak{g}$ 的作用交换的线性映射，这些数据就构成了表示的**范畴**。一般来说，范畴是指以下数据：

- 一类对象 **object** $\mathcal{O}$ ；
- 任意两个对象 A, B 之间的态射 **morphism** 集合 $\hom(A, B)$ ；
- 任意对象 A, B, C 之间态射的复合

$$\hom(A, B) \times \hom(B, C) \to \hom(A, C)$$

  满足结合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ，若所有复合有定义；
- 单位态射 **identity** $1 \in \hom(A, A), \forall A \in \mathcal{O}$ 满足 $1 \circ f = f, g \circ 1 = g$ 对于任意使得这些复合有意义的态射 f, g.

例如读者最熟悉的范畴便是集合的范畴，即对象是集合而态射是集合的映射。其次便是线性空间的范畴，即对象是线性空间，态射是线性映射。把所有李代数放在一起，态射取李代数同态，即保持李括号的线性映射，也构成一个范畴。而上文中李代数表示的范畴，对象是李代数的表示，态射是表示的同态。

格罗滕迪克教导我们，与其盯着单个对象的结构，不如研究一类对象的范畴。只需要研究清楚范畴内态射的性质，换言之一个对象如何与其它的对象互动，就清楚了这个对象本身的性质，哪怕它本身的结构我们一无所知。前文提到的泛性质，便是一个绝佳的例子：给定李代数 $\mathfrak{g}$ ，它的万有包络代数严格来说应该是如下数据： $U(\mathfrak{g})$ 加上一个李代数同态 $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$，由如下性质唯一决定：

- 任意结合代数 A 及李代数同态 $\mathfrak{g} \to A$，存在唯一的结合代数同态 $U(\mathfrak{g}) \to A$ 满足如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, dashed] \\
A &
\end{tikzcd}$$

换言之

$$\hom_{k\text{-alg}}(U(\mathfrak{g}), A) = \hom_{\text{Lie alg}}(\mathfrak{g}, A)$$

其中前者是结合代数同态，后者是李代数同态。这样的例子实际上在线性代数中我们就见过了：若 B 是线性空间 V 的一组基，那么对任意线性空间 W，

$$\hom_{\text{Set}}(B, W) = \hom_{\text{Vec}}(V, W)$$

前者是集合的映射，后者是线性映射。这里暂且戛然而止吧，感兴趣的同学可以查阅**米田（Yoneda）引理**。在代数几何中这种观点将非常重要，例如我们可以把几何的对象视为一个函子，而诸如光滑，闭子集这样的几何条件可以翻译为函子的性质。

回到表示论，这个学科的一个观点就是研究（好的）表示范畴的结构，即这个范畴中的所有"基本"的对象和态射，并且期望这些基本的数据通过特定的组合可以给出整个范畴。例如在科大代数学中的有限群复表示的范畴就可以做到，这样的范畴是最简单的表示范畴，我们说它是**半单(semisimple)** 的。一般来说即便我们寻求比半单稍弱一点的条件，这个奢侈的期望也是落空的，但是在目前笔者能碰到的绝大部分情况下，按照这个思路我们依然能够得到很多信息。前面提到 $U(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf 代数，好处便是李代数的表示作为线性空间的张量积也是自然的表示，从范畴的角度看我们说表示范畴是**张量范畴**。张量范畴也是表示论中的重要研究对象，例如这里面可以谈范畴的生成元和生成关系。

强大的线性代数技巧（orz）可以告诉我们，特征0代数闭域上李代数大致分为三种：

- 幂零李代数，比如全体 $n \times n$ 对角元为 0 的上三角矩阵的集合；
- 可解李代数，比如所有 $n \times n$ 上三角矩阵的集合；
- **半单李代数/reductive李代数**，比如 $\mathfrak{sl}_n$ (半单，实际上是单），$\mathfrak{gl}_n$ （约化）。

前两种相对比较简单，有**同时上三角化**的定理告诉我们它们其实就是上三角矩阵的子代数。我们用这些结论来研究后面两种最有趣的情况，而这两种情况是有**分类定理**的，也就是单李代数只有几种，并且与 **Dynkin** 图一一对应。它们的有限维表示都是**完全可约/半单，**即唯一分解为不可约表示的直和。回忆线性空间 U, V 的直和是集合 $U \oplus V = U \times V$，数乘是 $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ 其中 λ 是基域元素。表示的直和只需将 λ 换成代数的元素即可。

而 $\mathfrak{sl}_2$ 的例子又是一切的基础：它的有限维不可约表示具有神奇的对称性：

$$
\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "1"] & v_1 \arrow[l, bend left, "n"] \arrow[r, bend left, "2"] & v_2 \arrow[l, bend left, "n-1"] \arrow[r, bend left, "3"] & \cdots \arrow[l, bend left, "n-2"] \arrow[r, bend left, "n-1"] & v_{n-1} \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "n"] & v_n \arrow[l, bend left, "1"]
\end{tikzcd}
$$

where the blue arrows denote the action of f and the red ones the action of e.

以及 $hv_i = (n - 2i)v_i$. 这里有一个传统的记号：

$$
e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

而这反映了半单李代数本身的对称性：一般地，半单李代数分解为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$，恰好对应 $\mathfrak{sl}_2$ 中的 e, h, f. 而一般情况下用所谓的 **root system** 来描述这个分解。单李代数和 root system 的分类占据了科大李代数课程的大部分内容。从现在开始没有特别说明就默认我们讨论半单李代数。

科大的李代数用的 Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representations.* 这书有些证明不太好，而且也不好读，笔者的导师推荐布尔巴基，但是笔者并没有看过，因为之前在科大硬着头皮啃了 Humphreys.

3.最高权表示 (highest weight representations)

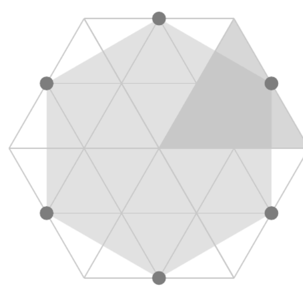
3.1. 权

首先我们介绍 权 **weight** 的概念。注意到 $\mathfrak{sl}_2$ 的有限维不可约表示有一组基是 h 的特征向量：$hv_i = (n-2i)v_i$. 并非所有的 $\mathfrak{sl}_2$ 表示都满足这个性质，但是有限维表示都满足。一般的半单李代数同样如此，因而我们只考虑有一组基 v_i 满足

$$hv_i = \lambda_i(h)v_i, \forall h \in \mathfrak{h}$$

的（不一定有限维）表示，这里每个 $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的一个线性函数，称为权，满足上式的向量称为**权向量**。

注意到在 $\mathfrak{sl}_2$ 表示中所有的权是从 $-n$ 到 n 间隔为 2 的整数。并且最大的权对应的权向量满足 $ev_0 = 0$，并且通过 f 的作用可以得到整个表示。一般地，给定一个表示， Humphreys 把 $\ker \mathfrak{n}^+$ 里的向量叫做 maximal vector ，它们之所以重要是因为它们控制了有限维表示。我们的第二个条件就是研究一个 maximal vector 生成的表示，即**最高权表示**。没有任何附加条件的“自由”的最高权表示叫做 **Verma module**，这类无穷维表示和 $\mathfrak{h}^*$ 的元素一一对应，并且有唯一的不可约商。而所有的不可约表示和权一一对应，从而和 Verma module 一一对应。其中有限维不可约表示对应某些特定的权，例如下图是 $\mathfrak{sl}_3$ 的根系示意图， 而决定有限维表示的权是图中灰色三角形区域中网格的顶点。



虽然 Verma module 是无穷维的，它们依然是可以通过 root system 的组合信息研究的，因而是研究李代数表示的重要工具，下一节再详细解释。

3.2. 同调代数

前面说到我们关心的是表示的范畴，不幸的是所有表示的范畴并不能由 Verman module 加上一些简单的操作给出，因而我们退而求其次，找一个好的范畴来研究，这个好的范畴是

一个**最高权范畴**的原型。最高权范畴的准确定义我暂且不给出，因为这至少又需要一页纸了，我们暂且只需要知道，只要给出最高全范畴的定义指定的信息，就可以抽象地运用**同调代数 homological algebra** 得到很多信息。前文提到的阿贝尔范畴便是同调代数的基本素材。同时有很多具体的例子是最高权范畴（我们很快就会在意想不到的地方碰到它），换言之李代数的（好的）表示范畴反映了更多有趣的东西。

前文提到的**阿贝尔范畴**便是同调代数的基本素材。也就是说我们可以像线性映射一样有直积，直和，像与核，以及态射集都是阿贝尔群。古典的同调代数核心内容是**导出函子**。**函子 functor** 就是"范畴之间的映射"。这里打引号是因为严格来说范畴本身一般不是集合，感兴趣的同学可以看看**公理化集合论**（但笔者觉得这对学数学没什么帮助）。举个（最重要的）例子，任意一个（好的）阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ ，以及其中的对象 M 考虑函子 $\hom(-,M): \mathscr{A} \to \mathfrak{Ab}$, 即将任意 $\mathscr{A}$ 中的对象 N 对应到阿贝尔群 $\hom(N,M)$, 可以得到一列函子 $\mathrm{Ext}^n(-,M): \mathscr{A} \to \mathfrak{Ab}$ 其中 $n \in \mathbb{N}$, 并且

$$\mathrm{Ext}^0(-,M) = \hom(-,M)$$

具体说来，构造分为三步：

- 任意 $\mathscr{A}$ 中的对象 N，我们取一列 projective object $P_n : n \in \mathbb{N}$ 以及映射 $d_n : P_n \to P_{n-1}$，其中约定 $d_0 : P_0 \to N$， 并使得下面的图是正合 **exact** 的，即每两个相邻箭头中，左边那个映射的像恰好是右边那个映射的核。

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to N \to 0$$

这叫做 N 的 **projective resolution.**

- 应用 $\hom(-,M): \mathscr{A} \to \mathfrak{Ab}$ 得到阿贝尔群的（不再正合）的 复形 complex, 即相邻两个箭头复合为 0.

$$\cdots \to \hom(P_n,M) \to \hom(P_{n-1},M) \to \hom(P_{n-2},M) \to \cdots \to \hom(N,M) \to 0$$

- 复形都可以取**同调**，取上面复形的同调，即得到 $\mathrm{Ext}^n(-,M): \mathscr{A} \to \mathfrak{Ab}$.

讲这是为了强调，如果有一些好的 resolution, 往往能够具体计算一些导出函子。例如在下面的 $\mathcal{O}$ 和箭图表示的范畴中都有著名的 resolution.

这里只涉及到了古典的看法，而更进一步还可以谈论所谓的**三角范畴**和**导出范畴**，简单说就是考虑复形的范畴，考虑复形映射的**映射锥 mapping cone**（来自拓扑），这就构成了一个三角范畴，利用三角范畴的性质可以比较干净地构造出导出范畴。在这个观点下，上面的导出函子 Ext^n 就是导出范畴中的一个态射，一般来说导出函子是导出范畴之间的函子。例如在代数几何中 **Serre 对偶**就可以用导出范畴的语言表述。

4. Berstein-Gelfand-Gelfand category $\mathcal{O}$

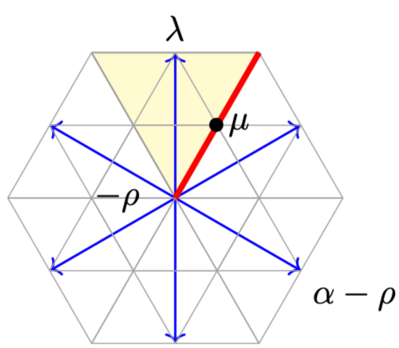
前面提到一般的无穷维表示则可能非常差，例如在之前的 $\mathfrak{sl}_2$ 表示中 h 的作用始终是对角阵，一般地，$\mathfrak{h}$ 在有限维表示上的作用都是可以同时对角化的，而这在无穷维表示上是错的。另一方面，只考虑有限维表示也是不够的，即便是想研究有限维表示，我们也需要 Verma module. 于是标题中的三个人定义了一个足够好的**范畴** $\mathcal{O}$，简单说来就是我们只考虑由最高权表示"粘起来"的表示。准确的表述如下：$\mathcal{O}$ 里面的每一个表示 M 都有一个**滤链 filtration**，即一串子表示 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ 使得每个 M_i / M_{i-1} 是最高权表示。这是个**最高权范畴 highest weight category** 的例子。

$\mathcal{O}$ 是个阿贝尔范畴，最高权范畴的理论给出了关于它结构的非常多的信息，可以说这是一个人类了解得相当多的范畴，因而用于研究不少其他的对象。

这上面还有非常多有趣的函子，其中之一便是所谓的 **translation functor.** 为此我们需要一个范畴的分解 $\mathcal{O} = \oplus \mathcal{O}_\lambda$. 对于 $M \in \mathcal{O}_\lambda, N \in \mathcal{O}_\mu$ 成立

$$\mathrm{Ext}^1(M, N) = \hom(M, N) = 0$$

换言之这些子范畴之间没什么太近的关系。而 translation functor 把它们联系起来，例如下图表示 $\mathfrak{sl}_3$ 的根系，一个 translation functor 就将 $\mathcal{O}_\lambda$ 中的表示变换到一些 $\mathcal{O}_\mu$ 中的表示，λ, μ 在图中的相对位置可以给出很多信息。至于为什么这些函子有趣，见 §9.



图：translation functor

此外 **BGG resolution,** 大概是关于 $\mathcal{O}$ 最著名的结果了，这个定理给出有限维不可约表示的标准 resolution, 其中每一项都是 Verma module. 这样的好处便 Verma module 是最高权范畴里面的好的对象，因而可以得到很多信息。同样有趣的话题是李代数上同调，这也是一个导出函子，篇幅有限不细讲了。

对这部分感兴趣的同学可以参考 Humphreys: *Representations of semi simple Lie algebras and the BGG category O.*

5. 几何表示论

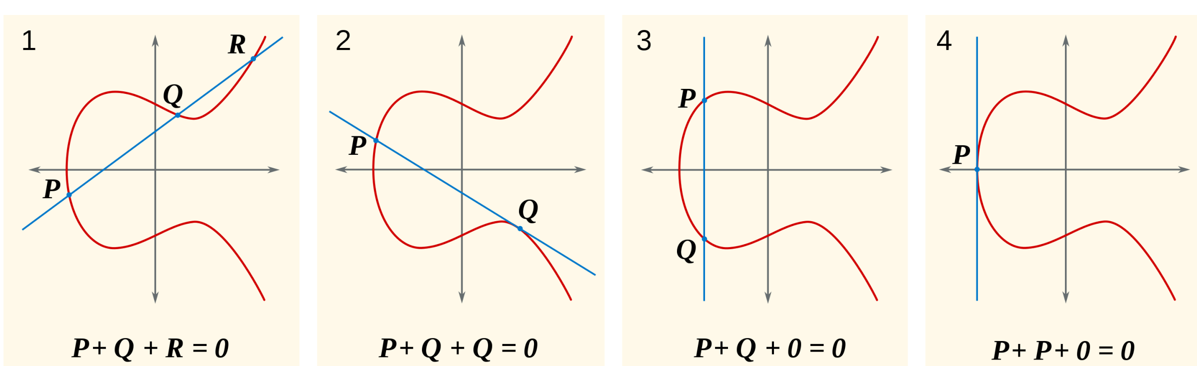
5.1. 拓扑与几何的研究对象

首先拓扑空间 **topological space** 是拓扑学的基本研究对象，回忆数学分析中连续映射等价于开集的原像是开集，也就是说只需要有开集的概念就可以谈连续映射，而不需要度量。因此指定一族开集的集合之间便可以谈连续映射，称为拓扑空间。

而代数拓扑和几何中的 **CW** 复形、流形、概型、代数簇等等都是加上一些条件的拓扑空间。例如流形就是局部与欧氏空间在拓扑空间的范畴中同构的。概型局部是 **Spectrum**，即一交换环的素理想的集合带 **Zariski 拓扑**。格罗滕迪克告诉我们，这可以和流形用统一的观点来看，即一个拓扑空间加上每个开集上的"函数"。这里又打了引号因为严格来讲是这个拓扑空间上的一个层 **sheaf**. 以下尽量不涉及这些，就不细讲了，毕竟这是个表示论简介。

上同调 cohomology 是几何与拓扑的基本工具之一，这是一个特定的几何对象范畴到一个代数对象范畴的函子（也是代数拓扑和同调代数的起源）。例如不同维数的欧氏空间在集合范畴中都是同构的（存在一一对应），而在拓扑空间范畴中是不同的（不存在连续双射，其逆映射也连续），为了说明这一点，例如就可以利用它们的**紧支集的 de Rham 上同调**不同。奇妙的是在代数中也有类似的图景，例如数论中**类域论 class field theory** 一个快捷的证明便是利用 **Galois 群的上同调**，群上同调是群作用不变量的导出函子。(顺便 Galois 群又和拓扑里的基本群非常相似，格罗滕迪克用它定义了代数几何版本的基本群。)

例：实射影平面，这是一个经典的几何对象，即欧氏平面加上无穷远处的一个普通圆圈，使得每一点看起来都和欧氏平面的点没有区别。严格说来，它可以看作是欧氏空间中过原点的直线的集合，加上特定的拓扑成为一个流形。这是很久以来就熟知的东西，经典平面几何中就有诸如通过射影平面上的变换将直线的交点变到无穷远处，也即把相交线变成平行线的操作。跑个题：此外也可以考虑射影平面上面的二次和三次曲线，这些都是经典代数几何的研究对象，例如光滑的三次曲线是**椭圆曲线 elliptic curve**，曲线上的（有理）点构成一个交换群，加法可以由简单的作图给出，下图是一些例子。



（图片来自维基百科）

5.2. 旗簇，Borel-Weil-Bott 定理

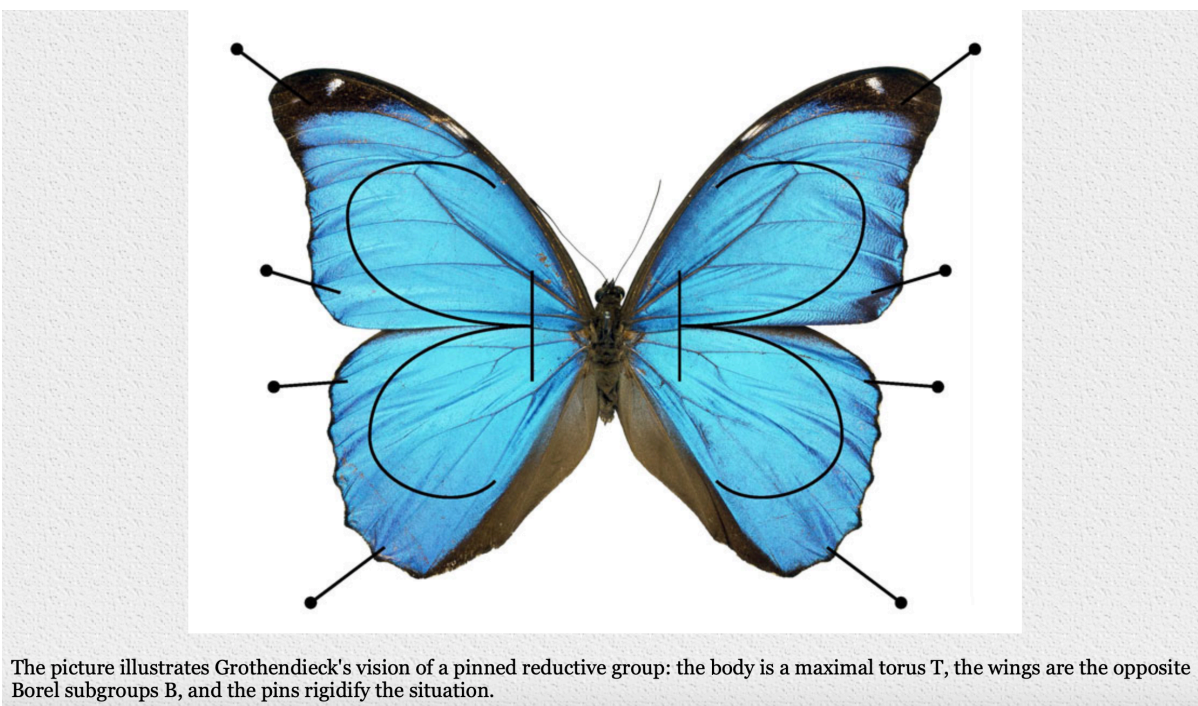
旗簇 **flag variety** 是射影平面的推广，它是 $\mathbb{C}^n$ 中的 **flag** 的集合，即固定 $d_1 < d2\ldots \in \mathbb{N}$

$$Fl = \{0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots F_l = \mathbb{C}^n \mid \dim F_i = d_i\}$$

注意到取 $l=2, d_1=1$ 就得到了射影空间。这上面可以给定拓扑使它变成流形或者光滑代数簇。现在就可以介绍 **Borel-Weil-Bott** 定理了。回到半单李代数，给定一个**抛物子代数 parabolic subalgebra** $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$,（定义略）以及 $\mathfrak{p}$的一个有限维不可约表示，我们可以构造一个几何对象，即旗簇上的 **equivariant vector bundle,**（向量丛 **vector bundle** 直观上就是空间的每一点长出一个向量空间，不严格定义了）它的唯一非平凡上同调 **cohomology** 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可约表示。这又可以具体的从根系的组合算清楚。封面图便是这个定理 $\mathfrak{sl}_3$ 的例子，其中三角形网格是所有的权，数字表示对应的向量丛的上同调的维数。

实际上李代数本身就来自一个几何对象，即**李群，**李代数是李群上面的一些**求导操作**（**左不变向量场**），因而**莱布尼茨法则**在李代数的表示中比比皆是。一个李群是一个流形同时也是个群，例如复平面上模长为 1 的复数集合。但是笔者的导师认为微分几何看不见 **singularity**，因而代数几何是更合适的工具，我们下面就从代数几何的角度来看。

5.3. 代数群



图：约化代数群，来自 https://www.jmilne.org/math/Books/iag.html

代数群，即把李群的流形换成代数簇。这里用了更经典的看法以求几何上更直观。概型语言的描述同样有趣：概型范畴或者代数簇范畴中的群对象 G ，即对范畴中的任意对象 S，$\hom(S,G)$ 是个群（跑个题，例如 **Eilenberg-MacLane space** 就是在代数拓扑中著名的群对象，上同调论可以由这些空间构造出来）。比如这个观点允许我们谈论 p **-进数域**上的代数群，它的理论和复代数群有很大不同。我们这里只讨论复**仿射代数群**，即 GL_n 的闭子群（这是个大定理其实），因为我们关心的表示是一个代数群同态 $G \to GL_n$，并且任意代数群都有极大的仿射商。

代数群同样分为可解和半单两种，前者同样有同时上三角化定理，而对于半单代数群，有与半单李代数几乎一摸一样的结构定理。它的极大阿贝尔子群 T 叫做**极大环面（maximal torus）**，取它的正规化子 $N_G(T)$，即我们可以谈论商群 $N_G(T)/T$，这叫做 G 的 **Weyl** 群。极大可解子群 B 叫做 **Borel 子群**，例如 GL_n 作为最经典的代数群有一个**标准 Borel 子群**，即所有可逆上三角矩阵组成的群。如上图蓝蝴蝶所示。例如半单代数群的 **Bruhat 分解** $G = \cup BwB$， 其中 w 取自 Weyl 群（元素的提升），并且这是个不交并。每个双陪集也叫舒伯特胞腔 **Schubert cell.**

前面提到的**旗簇**，一个看法便是代数群的**商** G/B . 射影空间和 **Grassmannian** 也可以实现为代数群的商 G/P，这里 P 是任意包含我们的 Borel 子群的闭子群，称为**抛物子群**。这些商空间也有继承的舒伯特胞腔分解，这可以用来决定上同调或者周（周炜良）群。舒伯特胞腔的闭包称为 Schubert variety, 也是重要的研究对象。

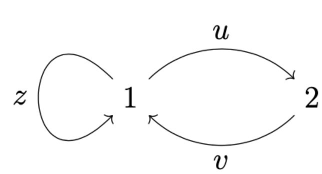
那么代数群和前面的诸多代数的概念有什么关系呢？我们可以谈论代数群在一点的切空间，这就给了我们对应的李代数。Borel 子群在群的单位元处的切空间是 Borel 子代数，抛物子群在群的单位元处的切空间是 抛物子代数。

代数群的**仿射坐标环**，即这个曲面上的“函数”全体，是个 Hopf 代数，它的余乘法由代数群的乘法给出，antipode 是代数群的求逆元操作。仿射代数群的表示等价于这个 Hopf 代数的 **comodule.**

对这部分感兴趣的同学可以看 milne 的书或者 Springer 或者 Hungerford 的线性代数群。

6. 箭图 Quiver

在我继续讨论李代数之前，让我先介绍一下表示论中另一个有趣的对象，**箭图**。望文生义，箭图就是形如下图的图。



给定一个箭图，可以定义一个 **path algebra,** 这是个结合代数，取一个线性空间，它的基是所有的路径，例如图中的 e_1, e_2, u, v, z, vu , etc. 其中比如 e_2 是从 2 到 2 什么都不干也算的，叫做 **lazy path.** 路径的乘法是直接连接，如果连不成一个路径那就规定得到 0 . 例如

$$v \cdot u = vu,\ u \cdot v = uv,\ u \cdot e_1 = u,\ e_1 \cdot u = 0,\ e_2 \cdot u = u,\ u \cdot e_2 = 0$$

所有的有限维代数都是某个 path algebra 的商。为什么要谈有限维代数？因为它们既是诺特又是 **Artin** 的，因而有限生成表示有 **Jordan-Hölder series**. 在此不展开了，只提一句 $\mathcal{O}$ 里面的表示也满足这个条件。感兴趣的同学可以看看 **Auslander-Reiten** 理论。

我们可以研究箭图的表示，**Gabriel** 定理告诉我们，最简单的情况是我们的箭图忘掉箭头后是 A D E 类型的 Dynkin 图，并且这是当且仅当。

到这里事情开始变得有意思了，但是故事不止于此。这个定理的一个证明是给定一个箭图，构造一个**代数群**在一个线性空间上的作用，于是神奇的事情发生了：在 **Zariski** 拓扑下这个群作用的**闭轨道**和**完全可约表示**一一对应。实际上还可以提出各种各样的条件，如半稳定，**tilting** 等等。多说一句，代数几何中一个课题便是**稳定性条件**，而表示也有（半）稳定的概念，其中可能有某种神奇的联系。

另一个我一定要提到的东西叫做 **Nakajima quiver variety,** 它便是由前面所说的群作用来的的一个**几何不变量商**。简单说来它和箭图的某些表示一一对应。一个简单的例子（但不是 Nakajima quiver variety）是 type A Dynkin 图（经过魔改）给出**旗簇 flag variety.**

回到李代数，回忆上面的分解$\mathcal{O} = \oplus\, \mathcal{O}_\lambda$ ，事实上 $\mathfrak{sl}_2$ 的 $\mathcal{O}_0$ 作为范畴等价于如下箭图的表示。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

with relation $ba = 0$.

另一个有趣的事实是，下图 **Kronecker quiver** 的表示范畴的导出范畴和射影直线的凝聚层 **coherent sheaf** 范畴的导出范畴等价。

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & \bullet \end{tikzcd}$$

感兴趣的同学可以参考 Schiffler: *Quiver representations*. 如果是对于 quiver variety 更感兴趣可以参考 Kirillov: *Quiver representation and quiver varieties.* 说明一下，Kirillov 比 Schiffler 需要更多的背景。

7. Hecke 代数

7.1. Coxeter 群

让我先介绍 **Coxeter** 群。任给一个图，即一些点和它们之间的边，都可以构造一个群，其中点对应生成元，边决定生成关系。例如对于 type A Dynkin 图，我们每一个顶点对应一个二阶生成元 s_i，每条边对应一个生成关系 $(s_i s_{i+1})^3 = 1$，这就给出了**置换群**。这套规则给出的群叫做 Coxeter 群，典型的例子如 **Weyl** 群（即 Dynkin 图给出的 Coxeter 群），二面体群，以及高维正多面体的对称群。例如三维空间的正多面体对称群对应下面的图，由上自下分别是：正四面体，正方体，正八面体，正二十面体，正十二面体。

Table 1.2. Coxeter diagrams related to Platonic solids

Platonic solid	Coxeter diagram	diagram notation
tetrahedron	1 —— 2 —— 3	A_3
cube	1 ══ 2 —— 3	
octahedron	1 —— 2 ══ 3	B_3
icosahedron	1 —— 2 —5— 3	H_3
dodecahedron	1 —5— 2 —— 3	

这和箭图有啥关系呢？例如我们有 **BGP reflection functor.** 这些函子可以给出一些箭图的全部不可分解表示，并且是一个好的顺序。

Coxeter 群都有一个标准表示，其中生成元对应到欧氏空间里的反射，我们用这个标准的表示来研究它的结构，也有相应的 roots 的概念，在此就不展开了。

我要特别提及的是**抛物子群**的概念。Coxeter 群的结构里面是包括了点决定的二阶生成元的，称为 **simple reflection/simple transposition**，取其中的一些生成的子群叫做抛物子群。Weyl 群的抛物子群通过加上一边的翅膀就和代数群的抛物子群一一对应。

7.2. Hecke 代数

现在 考虑一个有限 Coxeter 群 W, 你们在科大的代数学中会学到，表示论就是**群代数** $k[W]$ 的表示论。群代数就是取 W 为基的线性空间，定义乘法由群的乘法给出。那么 Hecke 代数就是 $k[W]$ 的一个形变，即我们修改群的乘法。例如对于对称群，我们定义

Definition 2.1.5. The *generic Hecke algebra* attached to S_n is the algebra $\mathcal{H}_v(S_n)$ over $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ generated by H_i for $1 \leq i \leq n-1$ subject to the relations

$$H_i^2 = 1 + (v^{-1} - v)H_i \tag{H1}$$

$$H_iH_j = H_jH_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \tag{H2}$$

$$H_iH_{i+1}H_i = H_{i+1}H_iH_{i+1} \tag{H3}$$

好了现在让我们来看看神奇的故事吧，首先为什么要这样定义呢？实际上 H2 H3 很好理解，它们是对称群的生成元的关系（ **braid relation** ）。那么我们只需要知道这个 H1 是怎么来的。注意到如果我们令 v=1，那么 $H_i^2 = 1$ 我们就得到了二阶生成元，从而这个 Hecke 代数就变成了对称群的群代数。为了解释这个神秘的形变参数 v，我们考虑有限域上的旗簇上的函数。

Definition 2.1.1. The (finite) *Hecke algebra* associated with $GL_n(\mathbb{F}_q)$ is the $\mathbb{C}$-algebra

$$H_n(q) := \{f : B\backslash G/B \to \mathbb{C}\} = \{f : G/B \to \mathbb{C} : f(bx) = f(x),\ \forall b \in B, x \in G/B\}$$

where the multiplication is given by the convolution of functions

$$(f * g)(y) = \frac{1}{|B|}\sum_{h \in G} f(h^{-1}y)g(h)$$

那么首先一个观察是，如果记 $C(w) = BwB$ 为 w 对应的舒伯特胞腔，

Lemma 2.1.2. *The following holds:*

- $H_n(q)$ *has a* $\mathbb{C}$*-basis consisting of the indicator functions* $\mathbb{1}_w$ *for* $w \in S_n$ *defined by*

$$\mathbb{1}_w(x) = \begin{cases} 1, & x \in C(w); \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

- $\mathbb{1}_e$ *is the unit for the multiplication.*

为了产生一个未定参数，我们可以变动 q，

For a simple transposition $s \in S$,

$$\mathbb{1}_s * \mathbb{1}_s = q\mathbb{1}_e + (q-1)\mathbb{1}_s$$

于是用 $\sqrt{q}^{-1}$ 乘以每个指示函数就得到了我们的 Hecke 生成元。

Hecke 代数有一组标准基 $\{H_w \mid w \in W\}$ ，其元素与 Hecke 代数的构造中那个 Coxeter 群的元素一一对应。此外还有一个二阶自同构，称为 bar involution, 由此得到一组 Kazhdan-Lusztig 基 $\{\underline{H}_w \mid w \in W\}$ ，它们在 bar involution 下不变，并且满足一些附加条件，这些性质唯一确定这组基。

那这跟李代数有什么关系？这就是著名的 **Kazhdan-Lusztig 猜想**：通过 Hecke 代数的两组基之间的基变换矩阵的系数 $P_{y,w}$ 可以得到 Verma module 的 Jordan-Hölder series 的信息：

$$\mathrm{ch}(L_w) = \sum_{y \le w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\,\mathrm{ch}(M_y)$$
$$\mathrm{ch}(M_w) = \sum_{y \le w} P_{w_0w,w_0y}(1)\,\mathrm{ch}(L_y)$$

8. 量子群

8.1. 量子群

现在让我们进入量子化的世界。顾名思义，这是从量子物理来的，除了解微分方程之外，一个非常深入的话题是**几何量子化**（麻小南教授做过这方面的报告，网上可以找到），这里面的量子可积系统中出现的代数结构便是表示论的课题。

首先在经典情况下 ，Serre 给出了半单李代数的**生成元和生成关系，**而所谓的 **deformation quantization** 就是魔改了这些关系，加入了一个形变参数 **deformation parameter** q . 例如：对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$

Definition 3.1.1. Let $U_q(\mathfrak{g})$ be the $\mathbb{C}(q)$ algebra with generators $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$ for $1 \le i \le k-1$, with relations

- "Cartan relations" for all i, j

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \qquad K_i K_j = K_j K_i$$

- "$\mathfrak{sl}_2$ type relations"

$$K_i E_i = q^2 E_i K_i \qquad K_i F_i = q^{-2} F_i K_i$$

- “gluing relations”

$$K_{i\pm1}E_i = q^{-1}E_iK_{i+1} \qquad K_{i\pm1}F_i = q^{1}F_iK_{i\pm1}$$

$$K_iE_j = q^{0}E_jK_i \qquad K_iF_j = q^{0}F_jE_i, \qquad |i-j|>1$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q-q^{-1}}$$

- Serre relations

$$E_i^2E_{i+1} - [2]E_iE_{i+1}E_i + E_{i+1}E_i^2 = 0$$

$$F_i^2F_{i+1} - [2]F_iF_{i+1}F_i + F_{i+1}F_i^2 = 0$$

$$E_iE_j = E_jE_i \qquad F_iF_j = F_jF_i \qquad |i-j|>1$$

这个 $U_q(\mathfrak{g})$ 被称为量子群，虽然它根本不是群而是一个 Hopf 代数，它的要义在于，$U(\mathfrak{g})$ 的 comultiplication 太对称了，看不出个所以然，而加入了这个形变参数就破坏了这个对称性，从而看出来一些有趣的东西。对于量子群的表示，我给一个 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表示的例子。我们感兴趣的表示是 $V=\mathbb{C}(q)^2$ 上如下的作用：

$$\begin{tikzcd}
v_2 \arrow[loop above, "-q^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "E"] & & v_1 \arrow[loop above, "-q"] \arrow[ll, bend left, "-F"]
\end{tikzcd}$$

其中绿色的箭头表示 $K\in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的作用。前面提到，对于 Hopf 代数，表示的张量积也是表示，那么 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 在 $V\otimes V$ 上的作用如图所示。

$$\begin{tikzcd}
v_2\otimes v_2 \arrow[r, bend left, "{[1]}"] & v_1\otimes v_2 - q^{-1}v_2\otimes v_1 \arrow[l, bend left, "{-[2]}"] \arrow[r, bend left, "{-[2]}"] & v_1\otimes v_1 \arrow[l, bend left, "{[1]}"] \\
& v_2\otimes v_1 + q^{-1}v_1\otimes v_2 &
\end{tikzcd}$$

那么现在让我们看看一些关于量子群的有趣的事情吧。首先，从**几何**出发可以构造量子群。例如考虑一些 quiver variety 上的**可构造函数**，以及这些簇上的如下的映射：

$$\mathfrak{M}(d) \xleftarrow{\pi_1} \bigcup_w \mathfrak{M}(w, w+1, d) \xrightarrow{\pi_2} \mathfrak{M}(d)$$

这里 $\mathfrak{M}(d), \mathfrak{M}(w, w+1, d)$ 都是特定的 quiver variety. 量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 通过如下的拉回-推出操作作用在 $\coprod \mathfrak{M}(d)$ 上的可构造函数空间上，实现这些函数为 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的不可约表示。

$$\begin{aligned}
Ef &= q^{-\dim(\pi_1^{-1}(\cdot))}(\pi_1)_! \pi_2^* f \\
Ff &= q^{-\dim(\pi_2^{-1}(\cdot))}(\pi_2)_! \pi_1^* f \\
K^{\pm 1} f &= q^{\pm(d - 2\dim(\cdot))} f
\end{aligned}$$

又比如说，由 quiver 表示的范畴可以定义 **Hall 代数**，而 **Ringel-Green** 定理说，量子群的一半嵌入 Hall 代数。不仅如此，利用某些 Hopf 代数的 **Drinfeld double**, 我们可以构造出整个量子群。（当时讨论班没怎么听懂，就到这里吧 :p）

8.2. Schur-Weyl duality

首先我们有经典的 Schur-Weyl 对偶：

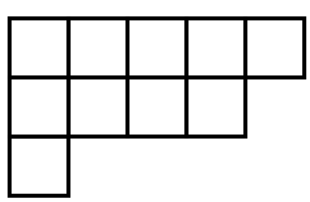
Schur-Weyl Duality 3.4. *We have the decomposition*

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{|\lambda|=n} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda V.$$

as a representation of $S_n \times \mathrm{GL}(V)$ *where* V_λ *runs through all the irreducible representations of* S_n *and each* $\mathbb{S}_\lambda V := \mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V^{\otimes n})$ *is an irreducible representation of* $\mathrm{GL}(V)$ *or is zero.*

In fact, $\mathbb{S}_\lambda V$ is zero when $\lambda_{d+1} \neq 0$ where $d = \dim V$, that is, the number of parts of λ is greater than d.

这里 S_n 是对称群，它的不可约复表示和**杨图**一一对应，杨图的一个例子是



定理中记作 V_λ（见 Etingof）。实际上量子群是李代数的形变，Hecke 代数是对称群的群代数的形变，于是这个对偶也有量子化的版本：

Denote the $U_q(\mathfrak{sl}_k)$ action on $V^{\otimes d}$ by $\Phi : U_q(\mathfrak{sl}_k) \to \mathrm{End}(V^{\otimes d})$.

Theorem 3.1.14 (Schur-Weyl duality). *The $U_q(\mathfrak{sl}_k)$ action on $V^{\otimes d}$ extends to a $U_q(\mathfrak{sl}_k)$-$\mathcal{H}_q(S_d)$ bimodule structure where H_i acts as the $\mathbb{C}(q)$-linear endomorphism*

$$\Psi(H_i) := \mathrm{id}^{\otimes(i-2)} \otimes R_{i,i+1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes d-i}$$

where $R : V \otimes V \to V \otimes V$ is defined by

$$v_a \otimes v_b \longmapsto \begin{cases} v_b \otimes v_a & a > b \\ v_b \otimes v_a + (q^{-1} - q) v_a \otimes v_b & a < b \\ -q v_a \otimes v_a & a = b \end{cases}$$

Moreover,

$$k \geq d \implies \begin{cases} \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_k)}(V^{\otimes d}) \cong \mathrm{im}\,\Psi \\ \mathrm{End}_{\mathcal{H}_q(S_d)}(V^{\otimes d}) \cong \mathrm{im}\,\Phi \end{cases}$$

例如回忆 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 在$V \otimes V$ 上的作用：

$$\begin{tikzcd}
v_2 \otimes v_2 \arrow[r, bend left, "{[1]}"] & v_1 \otimes v_2 - q^{-1} v_2 \otimes v_1 \arrow[l, bend left, "{-[2]}"] \arrow[r, bend left, "{-[2]}"] & v_1 \otimes v_1 \arrow[l, bend left, "{[1]}"] \\
& v_2 \otimes v_1 + q^{-1} v_1 \otimes v_2 &
\end{tikzcd}$$

由上面的公式可以得到 S_2 的 Hecke 代数唯一的生成元的作用：

$$H v_1 \otimes v_1 = q^{-1} v_1 \otimes v_1 \qquad H v_2 \otimes v_2 = q^{-1} v_2 \otimes v_2$$

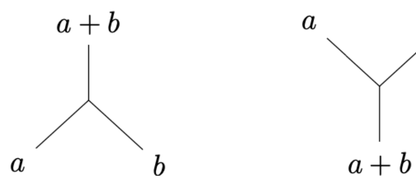
$$H v_1 \otimes v_2 = v_2 \otimes v_1 \qquad H v_2 \otimes v_1 = v_1 \otimes v_2 + (q^{-1} - q) v_2 \otimes v_1$$

特别的，上图每一行都是 Hecke 代数的模，这里读者可以直接看出 Hecke 代数的作用和量子群的作用确实是交换的。

为了研究量子群表示的范畴我们引入一个新的范畴 **Web**.

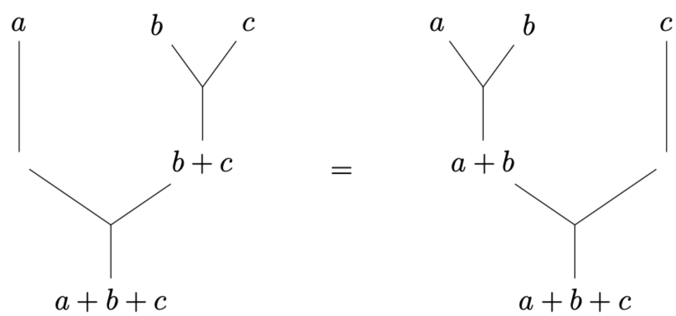
Definition 3.2.13. The (universal) web category (of type A) is the $\mathbb{C}(q)$-linear category **Web** which is the additive closure of the strict monoidal category generated (as monoidal category) by

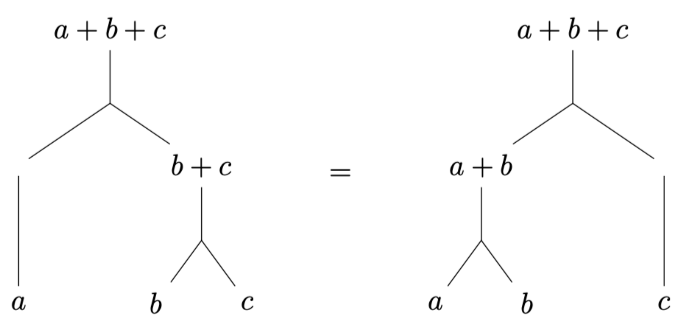
- Objects: finite sequence of natural numbers, with tensor product given by juxtaposition of sequences and the empty sequence as the tensor unit.
- Morphism sets = $\mathbb{C}(q)$-vector spaces spanned by diagrams (called webs) of the following form



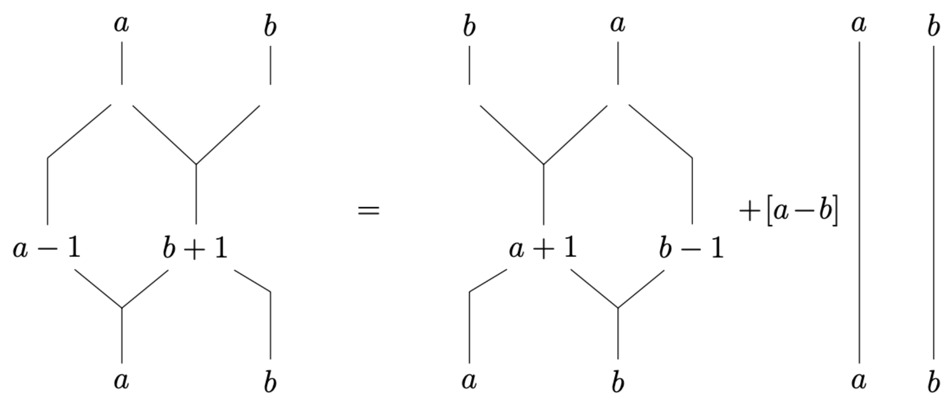
modulo the following relations

(Web 1) (co)associativity.





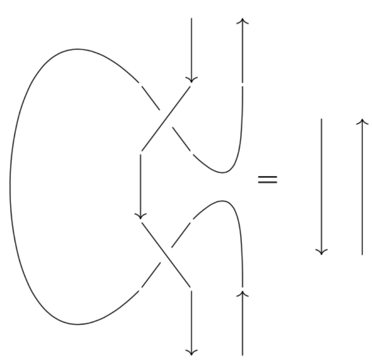
(Web 2) (Thin) square switches.



为什么要有这个东西呢？因为前面提到了我们关心的是表示的范畴（实际上是它的一个全子范畴），于是比如说对于 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 我们可以取前面提到的二维表示 V 把一串自然数 $d_1, \ldots d_l$ 等同于一个表示

$$d_1, \ldots d_l := \bigwedge^{d_1} V \otimes \bigwedge^{d_2} V \ldots \bigwedge^{d_l} V$$

于是就可以画图代替写下来一堆映射的复合，比如

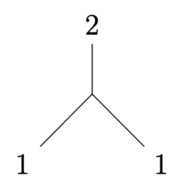


这个图表示了左图的复杂复合映射等于恒等映射。根据这个精神，我们只需要找出对应于 Web 的表示同态就可以利用网的关系来计算了，这是可以做到的，这些映射称为 intertwiners，例如

Example 3.2.6. Let $k=2$, the special special intertwiner $\bigwedge^1 V \otimes \bigwedge^1 V \longrightarrow \bigwedge^2 V$

$$v_i \otimes v_j \longmapsto \begin{cases} v_i \wedge v_j & i>j \\ q^{-1} v_j \wedge v_i & i<j \\ 0 & i=j \end{cases}$$

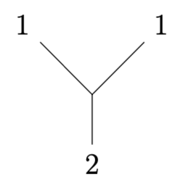
This is represented by the following picture



There is another special special intertwiner $\bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^1 V \otimes \bigwedge^1 V$

$$v_2 \wedge v_1 \longmapsto q v_2 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_2$$

This is represented by the following picture

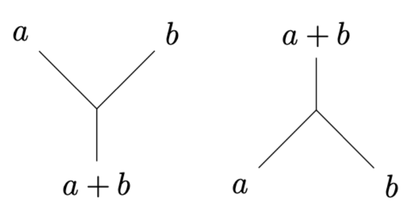


The following theorem says that all intertwiners come from **Web**.

Theorem 3.2.22. *There is a $\mathbb{C}(q)$-linear, full monoidal functor*

$$\Psi : \mathbf{Web} \longrightarrow \mathbf{Fund}(U_q(\mathfrak{gl}_k))$$

$$d \longmapsto d := \bigwedge^d V$$



$\longmapsto$ Special intertwiners

这里量子群变成了 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 是一个小细节问题，就不说了。另外事实上生成关系也是可以写出来的。

9. Categorification

现在我们把量子群，BGG 范畴和箭图联系起来：为此我们需要魔改这个范畴：还是以 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 为例，先把 $\mathscr{O}_0$ 等价于之前提到的箭图表示的范畴，这样就可以给所有的模一个 **grading**，然后考虑导出范畴，所有的函子也变到导出函子，于是终于有了

Theorem 3.4.15. *Let* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2$. *Consider*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_0^{(2,0)})\right) \arrow[r, bend left, "{[\mathrm{incl}[-1]\langle -1\rangle]}"] \arrow[d, bend left, "{[\tilde{\Theta}_0^{-\rho}]}"] & \mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_0^{(1,1)})\right) \arrow[l, bend left, "{[\mathcal{R}Z^*[1]\langle 1\rangle]}"] \arrow[r, bend left, "{[\mathcal{L}Z]}"] \arrow[d, bend left, "{[\tilde{\Theta}_0^{-\rho}]}"] & \mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_0^{(0,2)})\right) \arrow[l, bend left, "{[\mathrm{incl}\langle -1\rangle]}"] \arrow[d, bend left, "{[\tilde{\Theta}_0^{-\rho}]}"] \\
\mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_{-\rho}^{(2,0)})\right) \arrow[r, bend left, "{[\mathrm{incl}[-1]\langle -1\rangle]}"] \arrow[u, bend left, "{[\tilde{\Theta}^0_{-\rho}]}"] & \mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_{-\rho}^{(1,1)})\right) \arrow[l, bend left, "{[\mathcal{R}Z^*[1]\langle 1\rangle]}"] \arrow[r, bend left, "{[\mathcal{L}Z]}"] \arrow[u, bend left, "{[\tilde{\Theta}^0_{-\rho}]}"] & \mathcal{K}_0\left(D^b({}^{gr}\mathcal{O}_{-\rho}^{(0,2)})\right) \arrow[l, bend left, "{[\mathrm{incl}\langle -1\rangle]}"] \arrow[u, bend left, "{[\tilde{\Theta}^0_{-\rho}]}"]
\end{tikzcd}$$

and the correspondence of the basis vectors given by

$\mathcal{K}_0(\mathcal{O}_0^{(2,0)})$	$\mathcal{K}_0(\mathcal{O}_0^{(1,1)})$	$\mathcal{K}_0(\mathcal{O}_0^{(0,2)})$
$[L(0)] = [M^{(2,0)}(0)]$	$[M(s.0)],\ [M(0)]$	$[M^{(2,0)}(0)] = [L(0)]$
$v_2 \otimes v_2$	$v_1 \otimes v_2,\ v_2 \otimes v_1$	$v_1 \otimes v_1$
$(V \otimes V)_{(2,0)}$	$(V \otimes V)_{(1,1)}$	$(V \otimes V)_{(0,2)}$

These data give a categorification of the $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ *modules* $V \otimes V, \bigwedge^2 V$ *under the following identifications*

- E *acts as the red arrows and* F *the blue ones;*
- D_1 *acts by* $\mathrm{id} \oplus \langle 1\rangle[1] \oplus \langle 2\rangle[2]$;
- D_2 *acts by* $\langle 2\rangle[2] \oplus \langle 1\rangle[1] \oplus \mathrm{id}$;
- K *acts by* $\langle -2\rangle[-2] \oplus \mathrm{id} \oplus \langle 2\rangle[2]$.

这里解释一下，一个阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ 的格罗滕迪克群 $K_0(\mathscr{A})$ 是取所有的对象同构类为生成元，以短正合列为生成关系的阿贝尔群。这可以推广到三角范畴，而导出范畴是三角范畴。上图中 $\mathscr{K}_0(\mathscr{A})$ 表示 $K_0(\mathscr{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}(q)$. 定理是说，李代数表示的导出函子通过格罗滕迪克群这个操作完美对应量子群和 Hecke 代数在量子群的表示上的作用。

而一般的 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$，就需要魔改更多了：我们需要对给定一个抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 定义一个抛物版本的 BGG 范畴 ${}^{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_0$ ，然后量子群的作用也更复杂：

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_\lambda^{\underline{b}} \arrow[dl, "Z"'] & \\
\mathcal{O}_\lambda^{\underline{a}} & & \mathcal{O}_\lambda^{\underline{a}'} \arrow[ul, "\mathrm{incl}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_\lambda^{\underline{b}} \arrow[dr, "Z^*"] & \\
\mathcal{O}_\lambda^{\underline{a}} \arrow[ur, "\mathrm{incl}"] & & \mathcal{O}_\lambda^{\underline{a}'}
\end{tikzcd}$$

用这些我们也能得到同样好的 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ 和 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 表示的 categorification. 需要提及这样的图表我们会经常见到，通常在几何中有 **Fourier-Mukai** 变换和 **correspondence** 的概念。在下一节我就会给出一个 correspondence 的应用。

10. More topics of various flavours

10.1. 海森堡代数和希尔伯特概型

海森堡代数是一个无穷维的 Lie super algebra. 给定一个 super vector space 和一个双线性型可以构造一个海森堡代数。

Definition 1.2. A *super vector space* is a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graded vector space $H = H^0 \oplus H^1$. If H, H' are super vector spaces, then $\hom(H, H'), H \otimes H'$ inherit a natural super structure.

Let H be a finite dimensional super vector space over $\mathbb{Q}$, with a nondegenerate even symmetric bilinear form, where even means that $H^0 \perp H^1$ and symmetric means

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \langle \beta, \alpha \rangle$$

for all homogeneous elements α, β.

Example 1.3. A typical example is the cohomology ring $H = H^*(X, \mathbb{Q})$ of a compact manifold X of even real dimension, with the bilinear pairing

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \cup \beta$$

Before we introduce the Heisenberg algebra we first give a toy example.

Example 1.4. Let $\mathfrak{g}_0$ be the Lie algebra generated by p, q, c and relations

$$[pq] = c, \qquad [pc] = [qc] = 0$$

$\mathfrak{g}_0$ acts on $M := \mathbb{C}[x]$ via

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x}, \qquad q \mapsto x\cdot, \qquad c \mapsto \mathrm{id}$$

Moreover, this representation is irreducible with highest weight vector 1, with Poincaré series

$$\sum \dim M_n t^n = (1-t)^{-1}$$

There is also a $\mathfrak{g}_1$ where the p, q are odd elements and $[pq] = pq + qp$. Then the same relations together with $[pp] = [qq] = 0$ gives the super Lie algebra $\mathfrak{g}_1$ acting on the exterior algebra

$$M = \bigwedge\nolimits^{\bullet} \mathbb{C}x = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x$$

via

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x}, \qquad q \mapsto x\wedge, \qquad c \mapsto \mathrm{id}$$

海森堡代数就是上面这个例子的无穷维版本，在这个表示中 q 也称为 creation operator, p 称为 annihilation operator, 想必是对应物理中粒子的生成和湮灭吧。

东京大学的中岛启 （Hiraku Nakajima）有一个著名的构造：点的**希尔伯特概型**的同调/上同调是海森堡代数的不可约表示。下面我先一一介绍用到的工具。

- 希尔伯特概型：取一光滑复射影曲面 X, 考虑点的希尔伯特概型 $X^{[n]}$ (上面的每一个点是一个 X 上 n 个“点”构成的子概型，如果读者知道的话是表示了一个“flat family of closed subschemes”的函子)，这也是光滑射影簇/复流形，所以比如 $X^{[0]} = pt$, $X^{[1]} = X$.

- **correspondence**. 要详细介绍这个概念必须引入各种同调论或周群的概念，这是一个抽象的机器，输入是一个闭子流形 Z，输出是一个映射 $H_*(M_2) \to H_*(M_1)$. （实际上是输入 Z 的同调类，或者相交理论意义下的 **cycle**）。重要的是 correspondence 给出的映射可以复合，而复合映射也是 correspondence，也就是说由一个 $H_*(M_1 \times M_2)$ 中的同调类输入这个抽象机器给出。

- 考虑所有 $X^{[n]}$ 的 $\mathbb{Q}$ 系数奇异同调（或者上同调）的直和，中岛老师构造了海森堡代数在上面的一个作用，使得它是个经典的海森堡代数的不可约表示。（奇异同调和上同调是基本的拓扑不变量，科大的代数拓扑课有介绍。）

What is a correspondence?

$$\begin{tikzcd}
& H_*(M_1 \times M_2) \arrow[dl] & {[Z]} \arrow[l, "\text{input}"'] \\
H_*(M_1) & & H_*(M_2) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

where M_1, M_2 be oriented smooth compact manifolds, Z is a closed submanifold in $M_1 \times M_2$.

中岛老师定义了如下的 correspondence $P_\alpha[i]$ 作用在 $\mathbb{H} := \bigoplus_n H_*(X^{[n]})$ 上面。

$$\begin{tikzcd}
& & \alpha, \beta \arrow[dl, "\text{input}"'] \\
& H_*(X^{[n-i]} \times X^{[n]}) \arrow[dl] & P[i] \arrow[l, "\text{input}"'] \\
H_*(X^{[n-i]}) & & H_*(X^{[n]}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

他的定理如下:

Theorem 3.4 (Nakajima, Grojnowski). *The following relations hold:*

$$[P_\alpha[i], P_\beta[j]] = (-1)^{i-1}\delta_{i,-j} \cdot i\langle\alpha, \beta\rangle id$$

where $[,]$ *is the super Lie bracket*

$$[A, B] = AB - (-1)^{\deg A \deg B} BA$$

波恩的学长 Göttsche 计算了 $\mathbb{H} := \bigoplus_n H_*(X^{[n]})$ 的维数（实际上**character formula**），就得到了

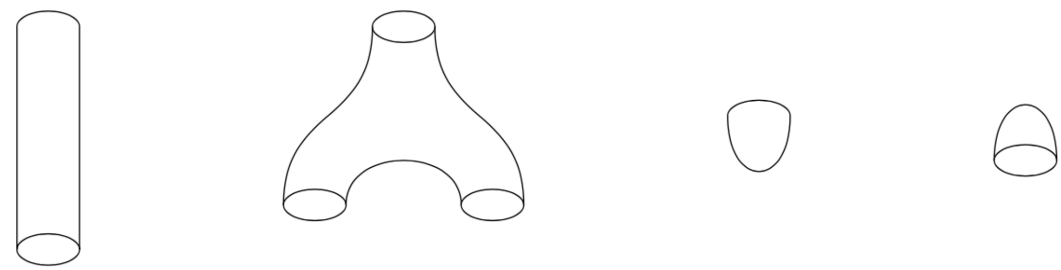
Corollary 3.5. *The homology group* $\mathbb{H}$ *is an irreducible highest weight representation of the Heisenberg algebra with the highest weight vector*

$$\mathbf{1} \in H_0(X^{[0]}) \cong \mathbb{Q}$$

10.2. Frobenius 代数和二维拓扑量子场论

首先介绍 2-Cob, 这是一个范畴,

- 其对象是一维紧无边流形，换言之由拓扑的定理就是有限个圆圈的不交并,
- 态射是如下带边二维流形的一些等价类:

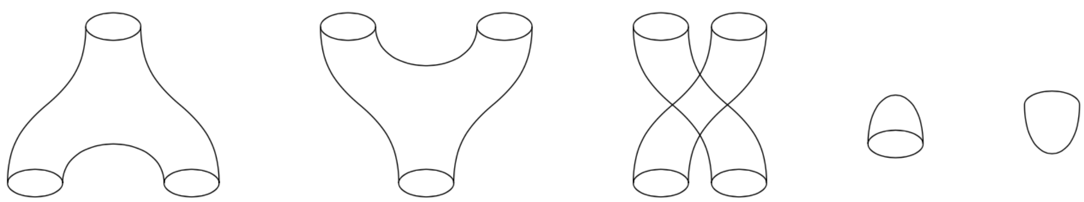


$id: 1 \to 1$ $\quad$ $2 \to 1$ $\quad$ $0 \to 1$ $\quad$ $1 \to 0$

这也是个张量范畴:

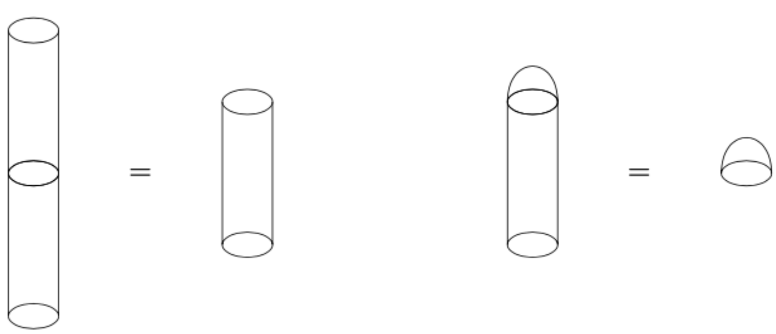
Theorem. The category 2-Cob is a monoid category with tensor product the disjoint union and unit $\emptyset$.

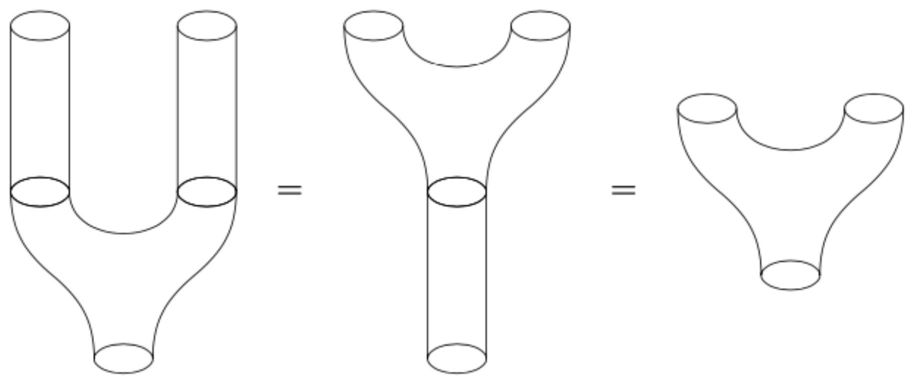
It is generated as monoid category by the object 1 and the following classes of morphisms.

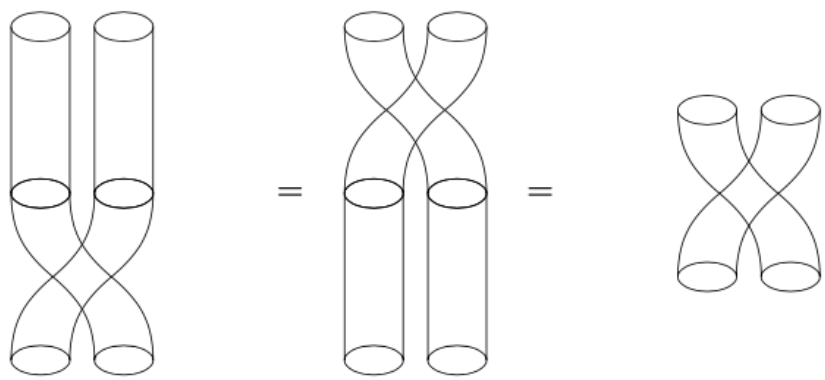


并且生成关系也可以写出来:

- identity relations.

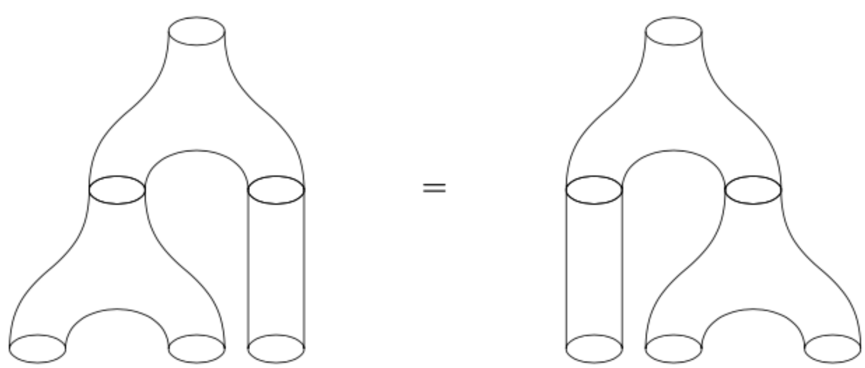


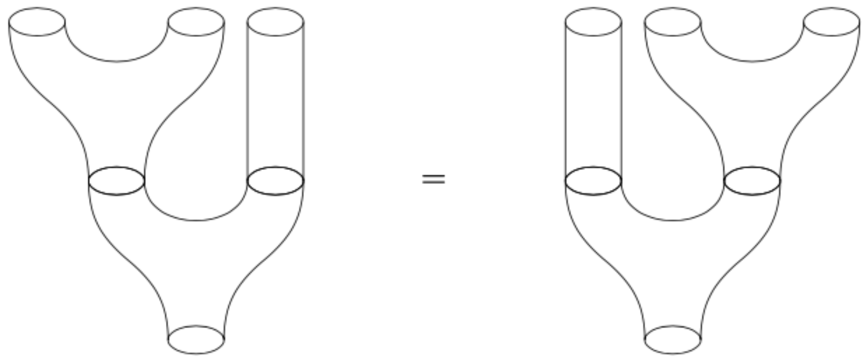




and all relations obtained from turning the above diagrams upside down.

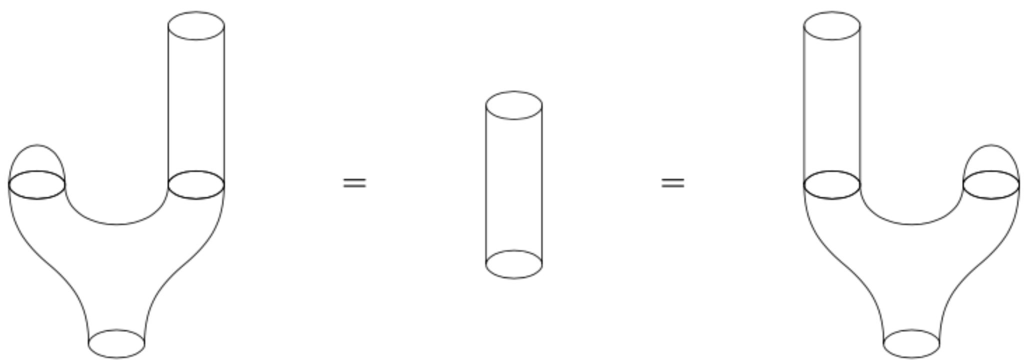
- Associativity/Coassociativity.

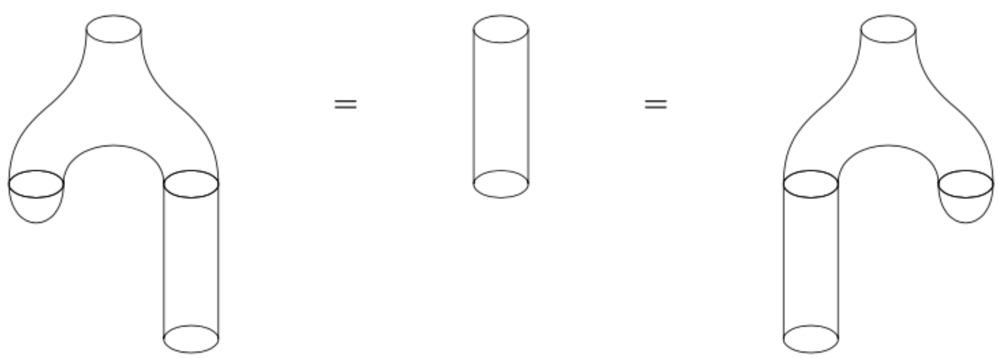




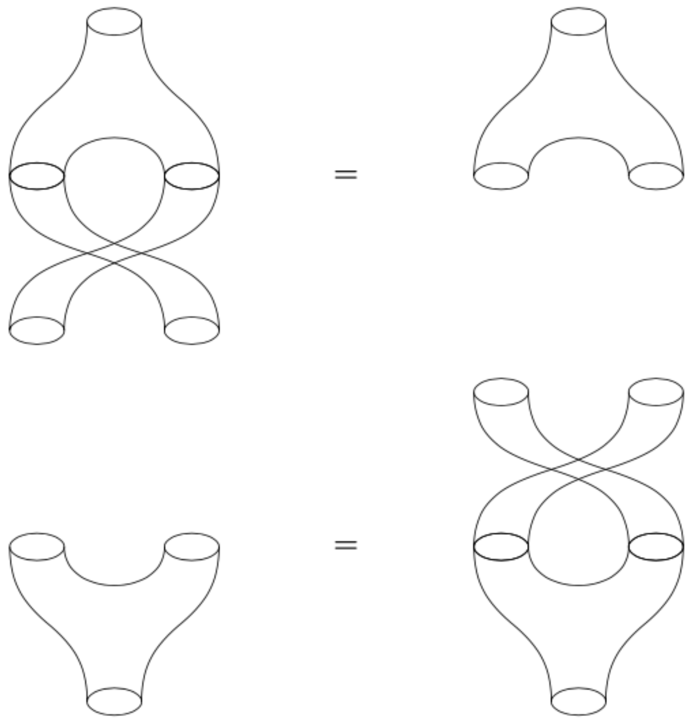
(Here equality means equality as morphisms in 2-Cob.)

- Sewing disks, or unit/counit.

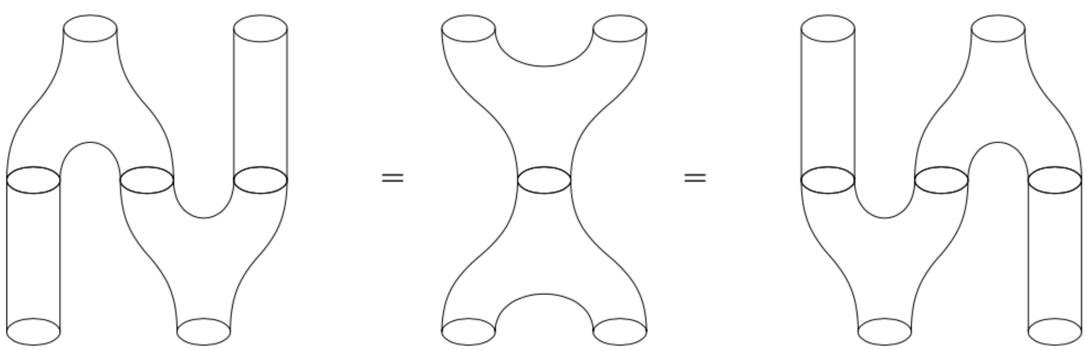




- Commutativity.



- Frobenius relation.



有了这个就可以定义 2维拓扑量子场论了：

Definition. A 2 dimensional topological quantum field theory (TQFT) over k is a monoidal functor $F : \text{2-Cob} \to (k\text{-Vec}, \otimes)$.

其中 k-Vec 是线性空间的范畴，在线性空间的张量积下成为一个张量范畴。这个函子是由它在一个圈处的取值决定的，

In other words, a 2-TQFT is the data of a finite dimensional vector space A with linear maps

- (multiplication) $m : A \otimes A \to A$
- (comultiplication) $\Delta : A \to A \otimes A$
- (symmetry) $T : A \otimes A \to A \otimes A$
- (unit) $\epsilon : k \to A$
- (counit) $\eta : A \to k$

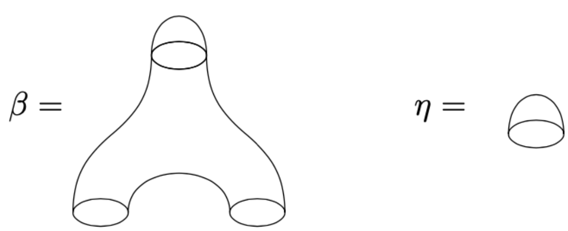
Satisfying the definition relations in 2-Cob.

另一方面我们又有一个经典的代数对象， Frobenius 代数：

Definition. A Frobenius algebra is a finite dimensional algebra with a linear map $\eta : A \to k$ (Frobenius form), such that kernel contains no nontrivial left ideal.

实际上可以证明，给出一个 2-TQFT ，也即给出上面提到的几点数据，等价于给出一个 Frobenius 代数。例如下图的 η 就给出 Frobenius 代数定义中的线性映射。

Informally, one thicks of η and β as follows:



10.3. 更多

不用说，表示论中还有更多有趣的内容，例如旗簇的 Schubert cells 可以给出它的上同调或者周环，这个环的乘法蕴含了 Schubert variety 相交的信息，它本身又称为 **Nil Hecke algebra.** 更一般的，**intersection theory** 是代数几何的重要内容，correspondence 即是由相交论的构造得出的，而旗簇上的相交论又是最经典的例子之一。更进一步还可以谈论等变上同调 **equivariant cohomology,** 笔者导师 18 年一篇文章讲的是 Yang-Baxter 代数在 Grassmannian 的等变上同调上作为 correspondence 的作用。笔者水平有限，就止笔于此，希望对读者有用。

5.4 组合与图论

参与这部分编写的作者有：

图论：马岳、黄一轩

代数图论：袁晓播

概率组合、算术组合：荆一凡

其它内容：袁晓播、荆一凡

5.4.1 图论(本硕贯通课程)

建议教材与参考书：

[1] 徐俊明：图论及其应用 Chapter 1,2,3,4,5,6[教材];

[2] Reinhard Diestel: Graph Theory(GTM173), third (2005) edition, Chapter 1,2,4,5,6,10[图论圣经].

学习建议：

图论是组合数学的一(ban)大(bi)分(jiang)支(shan)。组合数学关心的问题是集合中的对象满足一定规则排列的模式，是研究离散结构(图)的存在、构造、计数、分析、优化问题的学科。在一般课（非马杰）上，组合数学主要聚焦于计数问题，更建构、有定式，与主流数学差异不大。相比之下，图论课上关心的问题更接近真正意义上的组合数学，也因此更注重技巧和方法，学习过程中当将精力更多放在方法与技术的学习与运用，而非定义与定理本身。图论的另一个特征是形象，过度陷入主流数学的纯抽象思考不利于本课程的学习。这门课主要介绍了图论基本概念与相关结论，重点介绍了树、平面图、网络与流、匹配、染色的经典结论与部分应用（由于算法不是本课程重点，以下介绍跳过应用部分，对图论相关算法问题可参考[3]）。

（1）图的基本概念☆☆☆☆☆：

这一部分包括（有向/无向）图与常见概念的定义，路、圈、竞赛图的简单结论，二部图的判定定理，Euler图、Hamilton图的判定与性质，及其他延伸内容（如Turan定理、Ramsey理论）。本部分虽然很杂，但几乎所有内容都是重要的。对于图的相关概念（度、邻居、距离、连通性、多部图、子图、路、圈）及握手引理、二部图判定定理、Euler图判定定理、Turan定理，要记忆并熟练应用。对其他证明较简洁的结论、例题（如：强连通竞赛图点泛圈、以最小度估计直径、Hamilton问题Ore条件证明），要学习其证明思想与技巧。另外，要熟记常见反例Petersen图的性质。本章部分课后习题有较大难度，但也体现了图论组合证明的美妙之处，读者应当留意。

（2）树与图空间☆☆：

本章主要介绍树与森林的概念、图（圈/割）空间及支撑树。读者当理解树作为极大无圈图、极小连通图的性质，知道树是二部图、平面图，知道树/森林的边数、点度等结论。图空间部分内容并不重要且涉及线性空间的知识，此处当留意边割集与键、关联矩阵与邻接矩阵、割空间与圈

空间概念的异同与联系，并学会使用线性代数方法计算图的支撑树数目。

（3）平面图☆☆：

这一部分介绍平面图的相关结论。读者需要理解平图中点与面（face）的对偶，知道Euler定理及极大平面图（三角剖分图）并使用其做证明与估计。本章的核心是引入平面图判定定理(Kuratowski定理)，不过此结论在课内并没有什么应用与拓展。

（4）网络流与连通度☆☆☆：

这一部分主要包括网络流与连通度两部分。网络流部分当重点理解流的定义，熟练记忆并使用最大流最小截定理以及Menger定理的各种形式作为工具。连通度部分要理解并区分点连通度与边连通度、（点）分离集与截边集的概念。

（5）匹配与独立集☆☆☆☆：

本章主要包括匹配与独立/覆盖两部分。匹配部分是重点内容，读者需要掌握Hall定理及Tutte定理的证明，体会证明中对最大匹配性质的使用，记忆它们的常见推论、拓展并会熟练运用。独立集部分了解匹配、独立集、点覆盖、边覆盖的定义、联系与几个相关结论即可。

（6）染色理论☆☆：

染色理论一章分为点染色与边染色。点染色部分当了解定义并关注Brooks定理。此部分缺乏边染色部分那样强的结论，读者要重点学习使用k色临界图的思想（正如平面图部分的极大平面图），习题部分关于色多项式的结论也应当注意。边染色部分的核心是Vizing定理。染色理论一章与匹配与独立集一章有联系，读者当留意。

注：

本课程对于对组合数学感兴趣的同学有启蒙作用。有志于图论方向课题的同学在学习本门课之后，可关注超图理论、拓扑图论、代数图论、极值图论、概率图论、网络流、染色理论等方向，目前科大/中国除了拓扑图论较冷门外，其他方向都能找到合适的导师，其中极值图论较为热门。**组合数学其他方向（如：组合设计、组合矩阵论等）及应用/计算数学方向的同学也应当以学习基础课的态度学习本课程**。其它方向的同学修此课程更多是起到开拓视野的作用，与其他更适合的课程冲突时应当考虑放弃本课程修读。

其他参考书目：

[3] Alexander Schrijver: A Course in Combinatorial Optimization[图论算法简明]；

[4] Vitaly I. Voloshin: Introduction to Graph and Hypergraph Theory[超图理论简明]；

[5] Chris Godsil, Gordon Royle: Algebraic Graph Theory(GTM207)[代数图论圣经]；

[6] Lowell W. Beineke, Robin J. Wilson: Topics in Topological Graph Theory[拓扑图论介绍]；

[7] 马杰的MA05/MA06课[极值图论前沿开蒙].

[8] Yufei Zhao (MIT): Extremal graph theory and additive combinatorics, lecture notes. [马杰老师极值图论课程的参考资料]

5.4.2 代数图论

教材与参考书：

[1] Chris Godsil, Gordon Royle: Algebraic Graph Theory (GTM207);

[2] Norman Biggs: Algebraic Graph Theory (Second Edition).

授课教授：Jack H. Koolen

本课程介绍了离散数学的一个分支——代数图论的基本内容，即通过代数工具（课程中涉及到的主要是线性代数和最基本的抽象代数）研究图的一些性质。以下仅根据我久远片断模糊的记忆举几个例子。

1. 图的邻接矩阵与特征值
   一个图的（邻接矩阵的）特征值与其本身的性质之间存在一些关系。例如：导出子图的特征值均位于原图的最大和最小特征值之间；一个图的最大特征值介于其最大度与平均度之间；二部图的特征值总成对 $(\lambda, -\lambda)$ 出现；k-正则图绝对值最大的特征值是k等。

2. Perron-Frobenius定理及应用
   结合线性代数中的Perron-Frobenius定理（尤其是对称阵版本）我们可以得到连通图特征值的更多性质。

3. 图的自同构群
   计算某些特殊图类的自同构群。可用于判断图类间的关系，例如，一个Petersen graph并不是Cayley graph。

4. 一些图的划分
   例如Distance Partition，Equitable Partition和对应的商矩阵与原图的特征值之间的关系。

注：作为我系罕见的由外籍教师教授的课程，本课也是准备出国的同学练习课堂听力和口语的绝佳机会。

其它参考资料：

[3] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: Graph Theory (GTM244)

（本书（及练习题）中有极其丰富的各种与图论有关的内容）

[4] http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture22.pdf （介绍了expander和特征值的关系）

5.4.3 组合数学的概率方法

教材与参考书：

[1] Noga Alon, Joel H. Spencer: The Probabilistic Method (Fourth Edition);

[2] Svante Janson, Tomasz Łuczak, Andrzej Rucinski: Random Graphs.

注：我系并未单独开设此课程，但一些内容在马杰教授的研究生课程《极值与概率图论》中有所涉及。

对随机图的研究有时可以给出一些确定的结论。例如 Erdős (1959) 一个经典的结果：一个图的最小圈长和染色数可以同时趋于无穷大（见[1]第三章末尾）。近年来概率方法在组合图论前沿问题研究中有着极为广泛的应用。

[1] 书中对一些常见的基本方法做了很好的整理总结，很适合作为课程或自学教材使用。每章后的练习题数量不多但质量很高，其中个别问题有较大难度（有标注）。坊间传闻该方向有些教授会让博士生做该书全部习题。

其它参考资料：

[3] http://staff.ustc.edu.cn/~jiema/ExtrGT2016/

[4] http://staff.ustc.edu.cn/~jiema/ExtrGT2017/

（以上为马杰教授《极值与概率图论》（2016，2017）课程主页，均有电子版讲义可供下载。）

5.4.4 算术组合

教材与参考书

[1] Terence Tao, Van Vu: Additive Combinatorics.

注：我系并未开设此课程。该方向为现代组合数学主流方向之一，本节为这个方向做一个简要的介绍。

组合数学研究的是离散的物体的结构，整数作为最为人熟知的离散对象，自然也在组合数学的研究范围内。如果说数论是一门主要研究素数的学科，算数组合学关心所有整数的分布。算数组合（Arithmetic Combinatorics）分为加性组合（Additive Combinatorics）和乘性组合（Multiplicative Combinatorics），前者主要研究阿贝尔群中元素的分布，后者研究环以及非阿贝尔群上的元素分布。

算数组合与纯数学中的其他领域有很多交叉，这个方向运用的主要工具来自极值组合、调和分析、动力系统、代数几何、逻辑、概率论等，这里举两个例子。

第一个例子是Freiman问题。对于群G的子集A，定义$A + A$为A中所有元素对的和组成的集合。Freiman定理说，如果$A + A$可以被常数个A的陪集覆盖，那么A有某种特殊结构（被一个陪集序列包含）。当G为有限torsion的阿贝尔群时，Freiman问题最好的结果使用极值组合的工具证明。当G为一般阿贝尔群时，Freiman问题最好的结果使用调和分析证明。G为一般非阿贝尔群的情况最近被Breuillard, Green和陶哲轩解决，他们的主要工具是逻辑中的非标准分析，并且巧妙的运用李群来代替阿贝尔群中的Bohr set结构。

另一个例子是Szemerédi问题。1936年，Erdős和Turán提出了一个著名猜想，即整数的正密度子集包含任意长的等差数列。这个猜想在1975年左右被Szemerédi用极值组合证明，在证明中 Szemerédi 应用了一个引理，现在被称为 Szemerédi正则性原理，后来成为了极值图论的核心定理之一。1977年，Furstenberg使用动力系统的工具，给出了 Erdős-Turán猜想的新证明。应用动力系统的思想，Green和陶哲轩在2004年证明了素数包含任意长的等差数列，解决了这个长达 300多年的猜想。正如上文所说，算数组合并不偏爱素数，因此算数组合学家们认为素数包含任意长等差数列的原因和素数无关，所有分布密度和素数相当的集合都应满足这个性质。实际上，早在1976年Erdős便提出了著名的倒数和猜想，即如果一个整数的子集中所有元素的倒数和发散，这个集合包含任意长的等差数列。这个猜想对长度为3的等差数列至今还是未解决的。1999年Bourgain引入调和分析的工具，通过对Bohr set的分析，给出了倒数和猜想对长度为3的等差数列当时最好的结果，也为这个问题指明了新方向。倒数和猜想对任意长度等差数列的研究，目前最好的进展来自Gowers，在他的证明中他引入了Gowers范数，现在成为了算数组合以及调和分析领域的一个研究热点。应用Gowers范数，Green和陶哲轩将Szemerédi正则性原理推广到一般函数，现在被称为算术正则性引理：对于任意定义在整数集的有界函数，可以把它拆为三个有界函数的和，其中第一个有很强的（李群）结构，第二个是误差项（即L^2范数很小），第三个分布非常均匀（即Gowers范数很小）。

[1]书中对算术组合中加性组合的常见方法（组合方法，分析方法，代数方法，概率方法，几何方法）进行了一个总结。美中不足的是，该书写于2001年，而近些年这个领域进展飞速，因此有一些新思想新工具没有被包含。

5.4.5 其它有趣的内容

- Erdős' Problems on Graphs
  http://www.math.ucsd.edu/~erdosproblems/
  该网页对与图有关的 Erdős 问题做了一个整理，AMAZING！

- 一些有趣的知乎专栏

  - Some Interesting Combinatorial Problems https://zhuanlan.zhihu.com/combinatorics
  - 一些待解决的组合数学问题 https://zhuanlan.zhihu.com/c_1033295288991264768

  作者皆为组合图论方向的在读博士生，内容质量有保障。

- 多项式方法与离散几何
  Polynomial Method是一个比较新比较火的话题。这个名词有时指代组合零点定理（见3.8）的相关内容和应用，有时指代主要用于离散几何中的一些多项式方法。以下仅列出与后者有关的一些资料。

  - Larry Guth 的课程主页（有讲义）http://math.mit.edu/~lguth/PolynomialMethod.html
    参考书目：Larry Guth：Polynomial Methods in Combinatorics
    该书是这个领域的经典教材，目前网上并无（清晰合法的）电子版。
  - Terry Tao 的博客 https://terrytao.wordpress.com/tag/polynomial-method/
  - Adam Sheffer 的博客 https://adamsheffer.wordpress.com/pdf-files/

5.5 概率论

5.5.1 概率论与随机过程

参与这部分编写的作者有：

概率论与随机过程、鞅论与随机积分：姚东、李卫雨

极限理论：章俊彦

深入内容：姚东、郭炯吉

（高等）概率论

预备知识：实分析、概率论

建议教材：

[1] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 5th edition, Chapter 2, 3, 5. (Durrett主页上可以下载, 答案则是对应第3版教材)

参考书：

[2] 钟开莱：概率论教程；

[3] David Williams: Probability with Martingales (概率与鞅), 1991;

[4] 缪柏其、胡太忠：概率论教程，中国科学技术大学出版社。

学习建议：高等概率论程讲的内容主要是对本科概率论内容作出实分析刻画上的补充。包括集合、测度论性质、积分理论，条件期望和随机变量收敛等等。除了条件期望部分外，其他大部分在实分析中应该接触过。

- 集合与测度论：集合部分包括σ-代数回顾，以及相关的π类, λ类，单调类定理还有$\pi-\lambda$定理（这个定理就告诉我们要想证明某性质对很多东西成立只要证明对于具有某些性质的子集对就行，这极大地简化了证明）。测度论部分还是会回顾概率测度的性质，然后会再讲Borel Cantelli引理(第二B-C引理实际上只要随机变量两两独立就可以了，另外可以多了解几个版本的B-C引理，它们都很有用，见[1]的对应部分)。

- 分布函数与数学期望：基本性质就不说了，值得一提的是变量替换公式的概率论版本，实际上是从一个测度诱导出另一个测度。

- 条件期望：高概里面相对较难的内容是条件数学期望的理解。条件期望存在的基石是 Radon–Nikodym定理。条件数学期望的概率含义是在L^2范数下对某个随机变量进行估计（实际上是L^2正交投影），取条件期望的那个σ-代数可以直观地看作我们已知的信息，这些在很多书上都有讲到。条件数学期望的几条性质（比如塔式法则）一定要很熟练。

- 随机变量收敛：无需多说，需要留意弱收敛的等价刻画（在本科概率论教材的第七章也有）。除此之外，概率测度的胎紧性（Prokhorov定理、一致可积）理论也是非常重要的部分，不容忽视。

注：除了数院开设MA04的高等概率论之外，管院统计系的胡治水老师也会开设高等概率论，用他的自编讲义，以[1,4]为参考书，并且为管院统计系春季的课程“极限理论”作铺垫。主要内容≤数院高概，但更侧重对极限定理、一致可积的讲述。胡治水老师对证明的分析技巧和套路讲解比较透彻。而刘党政老师的高等概率论则直接从符号测度的 Radon-Nikodym 定理开始讲，默认了一些比较基本的测度论知识。

随机过程

预备知识：高等概率论

建议教材与参考书：

[1] Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, GTM 274;

[2] I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, GTM 113;

[3] Rick Durrett: Probability Theory and Examples, 5th edition, Ch 4, 5(Ch 5,6 for 4th edition).

[4]* Olav Kallenberg: Random Measures, Theory and Applications, Springer 2017.

学习建议：

这门课是数院高等概率论课程的后继，主要讲授鞅论、连续时间马氏链和布朗运动的基本性质。

- 薄立军老师的随机过程：

  这门课主要参考的是GTM 113的鞅论与布朗运动的部分。这本书完全自己读的话还是有点费时间的，薄老师的课会讲到其中一部分。[1]比[2]简单一些，可读性更强一些。

  这门课首先会讲随机过程基本概念。一般来说随机过程都是适应的，并且研究的随机过程通常都是 RCLL的（左极限存在，右连续）。随机过程比较重要的地方就是大家会关心他的轨道的性质，而不再是固定时间看随机变量分布。因此，数学上需要知道满足某些性质的随机过程确实存在（比如轨道连续性的随机过程可以通过 Kolmogrov连续性定理构造）。

  鞅的部分之前提过，取决于本科应用随机过程内容，这部分可能没有太多新的东西（除了变成连续时间）。布朗运动部分，需要知道构造方法（比如用 Kolmogrov 连续性定理，再如用级数构造）。还有 Donsker不变原理，即随机游走在时间和空间合适的scaling下会收敛到布朗运动。这个证明还有结论都非常地重要！如果做概率论研究的话，这里面涉及到的方法和定理都是以后会碰到的。

  前面我们提到有时候会用鞅工具来研究问题，对于布朗运动，课上会构造几种鞅，通过他们可以研究首达时分布，首次击中点分布，等等。

- 贺鑫老师的随机过程：

  贺鑫老师的教材主要是[3]的第4、5章和[1]的第2、3章，主要涉及鞅论、连续时间的马氏链、布朗运动。这是一门严谨的偏实分析风格的课程，是直观的本科随机过程的抽象版本。作业为课后习题，考试会指明是从哪几道作业中出，外加一两道新题目。贺老师每次课前有一句数学家鸡汤或者推荐书籍/电影。板书清晰、逻辑明确。每周有Office hour可以去问问题。所有上课遗留的问题、作业证明的难点都会在下次课或群里补充完整。

5.5.2 鞅论与随机积分

预备知识：高等概率论、随机过程

建议教材与参考书：

[1] I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, GTM 113;

[2] Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, GTM 274;

[3] 徐佩：鞅论与随机积分讲义

[4] Nobuyuki Ikeda(池田信行), Shinzo Watanabe(渡辺信三): Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Second Edition-Elsevier (1988)

学习建议：鞅论部分前面提到了一些，在这门课里面需要经常遇到局部鞅（local martingale，取递增停时后成为martingale）和半鞅（semi-martingale）。

这门课比较重要的地方就是掌握几个基本工具：B-D-G不等式，Girsanov变换（测度变换，把一个分布不太好确定的过程变成分布已知的过程，比如布朗运动）。鞅表示定理 (Martingale representation)也是很有用的工具（比如彭实戈证明倒向随机微分方程有解就用到了）。还有布朗运动的 Levy判别法的证明和结论也都很有用。另外,这门课会涉及一点Malliavin Calculus的东西，感兴趣的可以自己再去深入了解下。对于这门课的SDE部分，学习的时候可以和常微分方程解存在唯一性进行比较，其实并没有全新的想法。技巧上的话，加停时技巧是有用的工具，因为这可以把一些有singularity的过程变得较好控制，所以经常会用到。

这门课的考核：无考试，交过一次课后习题作业、两次open problem大作业，研究一些特殊结构的SDE的解的存在唯一性（怎么定义解？存在性？唯一性？需要加什么条件？）。大作业和授课的关系是割裂的，"授之以鱼考之以鳕鲣鳔鳓……"：上课是愉快的鞅论（基本被随机过程-贺鑫版覆盖），大作业是研（抄）究（书）SDE。

5.5.3 概率极限理论

预备知识： 高等概率论

建议教材与参考书：

[1] Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, 4th edition. Chapter 2-5;

[2] 林正炎、陆传荣、苏中根：概率极限理论基础；

[3] Olav Kallenberg: Foundation of Modern Probability.

学习建议： 这门课由统计系的胡治水老师在每年春季开设，对概率论里的极限定理作出较为深入的讨论，并讲授离散鞅论。授课内容主要有：大数定律的各种形式、三级数定理、中心极限定理的各种形式、无穷可分分布、稳定分布(Stable Law)、Stein方法与正态逼近、离散鞅论、随机游走的性质*、Donsker不变原理*、Banach空间中的概率极限理论*。（打星号代表选讲）

这门课的内容实际上仅是[2]的一半甚至更少。如果想较为深入地学习概率极限理论，[2]这本书是非常值得一读的，二百多页的篇幅实则记载了相当多的深入知识和较为现代的概念。

- 大数定律：这部分需要掌握弱、强大数定律的充要条件与证明，包括各种形式的Borel-Cantelli引理；此外，0-1律、三级数定理的方法也要求掌握。参考书为[1]的第二章。

- 中心极限定理：这部分会从最简单的iid情况的中心极限定理开始，讲到Lindeberg-Feller CLT, 非iid情况，以及缓变函数有关的CLT(Karamata)，可以参考[1]的第三章和[3]。之后讲了中心极限定理的收敛速度(Berry-Essen不等式)。后面的无穷可分分布与稳定分布族则是关注一个很自然的问题：一列随机变量（或者一个随机变量方阵），其行和在$n \to \infty$的时候的极限分布族是什么？换句话说，也就是问什么样的分布有资格成为随机变量和函数的极限分布？进一步地，收敛于极限分布族中的某一给定的分布，需要怎么样的条件？最后作为补充，老师会讲一些Stein方法，也就是如何处理不独立的随机变量列的方法。

- 离散鞅：没什么好说的。

- Banach空间中的概率论：这部分讲述的是取值于波兰空间(Polish, 即可分Banach空间)的随机变量的概率极限理论。这对于随机过程乃至偏微分方程的概率方法都是至关重要的基础。详细内容可以参见[2]的第六章。

5.5.4 其它有趣的内容

笔者在此列出一些自认为有趣或是重要的内容，这些在课堂上并不一定会出现。

1. 关于马氏链的理论，中文书可以看北师大李增沪老师的讲义第3、4章。另外，泛函分析中的算子半群理论（例如Hille-Yosida定理）也可以看看。入门马氏链理论可以阅读 James Norris 的马氏链（这里还推荐 Nicolas Privault 在新加坡南洋理工大学的讲义）；当然， Sheldon Ross 的随机过程作为入门书籍总是很好的。除此之外，对应用概率向的马氏链比较感兴趣的同学可以把 Douc-Moulines-Priouret-Soulier 的书当作字典进行查阅；若对更纯数学的离散概率感兴趣，则可以考虑通过 Levin-Peres-Wilmer 的"Markov Chains and Mixing Times" 一书学习 mixing time 的知识：这一领域不难入门，但技巧性非常强，其中 Allan Sly 与 Eyal Lubetzky 对于 Glauber dynamics 的 cut-off phenomenon 的严格证明被美国数学会高度评价。

2. 遍历定理：可以看Durrett书的第七章(其实这部分讲的也不算很全，更详细的可以再参考Martin Hairer的讲义。

3. 布朗运动的Donsker不变原理的证明与应用，这用到了Skorohod嵌入定理。布朗运动是概率论中非常基本的模型，在研究它的过程中出现的很多问题和研究想法对于今后研究纯概率领域（比如用一些数学物理领域的想法研究随机矩阵这种不算作纯概率）是很有帮助的。这里推荐 Morters-Peres 的 "Brownian Motion"；除此之外，Revuz-Yor的《连续鞅与布朗运动》一书可以当作字典查阅，里面很多习题来自于早期的论文，包含着很全面的现代概率论（SLE、KPZ、随机曲面等）发展前的许多经典结论。

4. GTM 113最后一章有一些关于局部时（local time）的理论，可以了解一下。

5. 关于概率论与PDE的联系，可以看Durrett第五版的第九章了解一些初步内容。当然最基本的 Feynman-Kac 公式肯定要知道。想了解更多的，可以看一本综述类的书籍 "Stochastic Equations in Infinite Dimensions", 作者是Giuseppe Da Prato， Jerzy Zabczyk. 如今概率论方法被不断应用到PDE中，例如，$\mathbb{T}^d(d = 2, 3)$上的随机Naiver-Stokes方程与欧拉方程的研究被认为与湍流的刻画有关（感兴趣的同学可以先看 Kuksin-Shirikyan 的 "Mathematics of 2D Turbulence" 了解基本内容，目前一个比较活跃的团队是美国马里兰大学的 Jacob Bedrossian 团队）；此外，带随机项的色散方程（以薛定谔方程为首）也正处于研究当中。

6. 对应用概率有兴趣的同学可以看"Essentials of Stochastic Processes"这本书的排队论(Queuing Theory)和数理金融(Math Finance)部分。

7. 我们在基础课学习期间基本之后接触到连续鞅的随机积分，若对稍微一般的半鞅（例如包含泊松过程这种带跳的随机过程）的随机积分有兴趣，则可以阅读 Peter Medvegyev 的 Stochastic Integration Theory（笔者认为这本书的语言叙述没有 Protter 的 Stochastic Integration and Differential Equations 那么晦涩，但证明仍然严格，并且内容讲解更加循序渐进，例子也多一些）。此外，同学们也可以阅读 Fima C. Klebaner 所著的"Introduction to Stochastic Calculus with Applications"的第九章，这本书的第11-14章有很多随机积分在金融、工程与生物上的应用。

5.5.5 有关2016年春季开设的随机分析选讲

2016年的春季学期，科大数院曾经开设过“随机分析”课程（不是管院统计系开的那个随机分析），由徐佩、刘党政、王冉（现就职于武汉大学）三位老师主讲。内容涉及随机矩阵初步（刘党政）、Stein方法（徐佩）、大偏差理论（王冉）。

随机矩阵是刘党政教的，他自己也做这方面的研究，这也是概率分支里面一个活跃期相对较长的方向。除了刘党政老师之外国内做随机矩阵的权威则是东北师范大学的白志东教授（新中国的首批博士之一，毕业于中国科大），他是第一个严格得到圆律的学者。在上世纪九十年代随机矩阵发展的瓶颈期，这一个工作的重要性是不言而喻的。另外，白志东教授的个人经历与研究经历也可谓非常励志。但从那之后他和他的团队的工作就主要侧重于高维随机矩阵（协方差矩阵）及其与高维统计的联系上。除了在长春，中国香港也聚集着许多研究随机矩阵的学者。相对而言，这两个地方是国内研究随机矩阵的中心。

随机矩阵由于其问题来源非常广泛，所以各个领域都有一些研究随机矩阵的专家。近年来研究随机矩阵较为强力的方法主要有：（近十年前）数学物理界的方法，由（姚鸿泽 Horng-Tzer Yau, Harvard）以及 Làszlò Erdös（IST，地处奥地利维也纳，这个地方还有 Seiringer, 他是做量子多体系统(Quantum many-body system)的专家，二者都出自同一门派）提出，并在许多问题上有了重大突破（例如 random regular graph 第二特征值的分布等等）；另一个则是 Rudelson-Vershynin 等人利用几何泛函分析的工具结合 Littlewood-Offord 问题研究随机矩阵的可逆性等问题，他们在2018年12月给出了非常经典的伯努利矩阵的可逆性问题的完整解答。（这来自 Konstantin Tikhomirov, 文章技术性非常强，若有兴趣则可以先从 Rudelson-Vershynin 等人稍早的工作入手循序渐进）。除此之外, Yan Fyodorov, Balint Virag, Alice Guionnet, Peter Forrester, Jinho Baik 等人都从不同角度研究了随机矩阵诸多非常深刻的性质。随机矩阵相关文献很多，初步了解可以阅读陶哲轩的教材，以及 Anderson-Guionnet-Zeitouni 的专著对这个领域进行初步了解。

Stein方法部分是徐佩教的，这个是证明分布逼近的有用的工具，比较好的参考书是A. D. Barbour 和 Louis Chen（陈晓云，新加坡国立大学的荣休教授，是Stein方法的顶尖专家）的 “An introduction to stein’s method” 。一般来说你希望给出好的Error bound可以参考这本书。国内这方面的一个专家是邵启满教授（南方科技大学统计系的建系主任，与陈晓云同为该领域的泰斗）. 斯坦福大学的 Sourav Chatterjee 早年的许多成名工作都与Stein方法有关，譬如利用 Stein method 改进 spin glass 的一些结果等。对于Stein方法的学习，笔者认为它虽然不是现在研究的热门领域，但懂得一些基本方法对于进行概率的研究是有益处的；虽然Stein方法局限性也非常大，在证明正态分布也不是那样万能，但不失为在思考此类问题时可以入手的一大方法。在数理统计上Stein方法的应用就更加的丰富起来。（邵启满后来在self-normalized limit theory的工作就有很多其在Stein method工作上的基础）

大偏差理论方面，主要讲义是 S. R. S. Varadhan的讲义（上方课程主页有下载）。做概率问题关心的东西往往有几个层次：Law of large numbers层次，Fluctuations 层次（比如中心极限定理），

再就是 Large Deviations 层次（也就是关心小概率事件）。希望了解大偏差应用的同学可以看下 SRS Varadhan的新书 “Large deviations.”.Amir Dembo, Ofer Zeitouni的书则可以作为这方面的字典用。

对于大偏差的学习想法应该是和学习Stein method较为类似但又有所不同，不同的地方在于在概率论中我们研究某一事件的大偏差是一个非常自然的问题，我们不大可能对大部分出现正态分布的事件利用Stein method得到相应结果，但对于概率大多数事件，我们却可以问它们的大偏差现象如何刻画。相同的地方则在于，对于一般的大偏差理论，和Stein method都是有相当的局限性的，随着高度依赖模型的若干性质出现，许多比较传统的方法都会失效，所以在初学时也不必沉迷于死磕大偏差，Stein method等专著，随着研究深入自然后对自己需要学习什么研究什么有更好的认识，不必有“基础不牢，地动山摇”这样的顾虑。

概率论部分的总结

概率论的研究与我们传统认知中其它比较纯数学的方向乃至统计都有很大的不同，它有着自己比较独特的审美，对于所需要的知识铺垫也与学习其他基础数学等方向不同。对概率论有兴趣的同学切记把握这一点，找准自己的定位，不要和对其他方向感兴趣的人跟风。当然，学习很多基础知识（黎曼几何等）依旧是很有必要的。概率论研究的特点就是可做的问题很多（这一点和其他分支比如几何是不一样的），所以需要你有自己的鉴赏力：尽管方向和问题都很多，但从结果来看却有很大的差别，除去个人能力的因素，对于问题的审美直接影响着你所做研究的质量，有句话讲“男怕入错行”，在概率这一方向上体现的尤为突出。

近年来概率有很多比较火热的方向，比如二维统计物理，随机矩阵，KPZ，随机连续/离散曲面等等(比如KPZ是这几年非常火热的一个方向，有两个菲尔兹奖Okounkov以及Martin Hairer的工作和KPZ有很大关联，14年的ICM一小时报告人 Alexei Borodin, 还有Jeremy Quastel, Ivan Corwin等ICM 45分钟报告人都是这一领域的领头人物。但像上述**这些热门领域都存在的一个现象就是学术壁垒非常高**，如果不是所谓的“圈里人”很难从这些专家及其团队手中分得一杯羹)。也有很多近年来式微的方向（比如上世纪末非常流行的理论随机分析，还有上世纪后五十年比较流行的传统极限理论）。从这样的趋势我们可以大致认为，**现代概率论与 Kolmogorov 严格化以来的概率论已经有了极大的不同**：在上世纪我们研究概率更偏向于发展更为一般的理论，研究i. i. d.随机变量的极限性质，研究随机半鞅的随机积分等类似问题。但现当代的概率论则偏重于基于一些复杂的模型来解决其中的概率问题。这些复杂系统的特殊性导致了我们在一般情况下得到的许多结论和方法都不再适用，这就需要我们借助于不同方向的工具来发展新的理论与方法，去回答或者严格证明这些也许已经在物理文献中预测出来的结论结果等等。

从高等院校的角度来看，美国的概率论水平并不像其他某些方向可以稳坐世界第一，像法国、以色列、瑞士等国家有着非常多非常优秀的概率学家。美国顶尖的概率学家也大多都有法国或者以色列的背景。相比上世纪末的连续概率来说，做离散概率是新世纪以来概率学界的潮流。

例如，目前美国做概率论的人主要还是做离散部分的比较多。一个最近挺火的研究领域是可积概率(integrable probability), 很多大佬都在搞（除了页面上写着的，还有 Shirshendu Ganguly(UCB)等）。当然，这个能火多久可能还需要时间的检验。总的来说，有比较强的物理/计算机/生物背景的问题都是很有意义的问题。

概率里的分支有很多，这里也很难一一列举，但这里要说明的是，现代概率的发展是非常迅速的，很多方向连比较系统的综述都不是很多，更不必说中文教材，可以直接google相关方向的文章进行阅读，慢慢摸索其中脉络，也不失为一种非常好的训练。

对概率论研究有疑问的同学可以与我们联系与讨论，联系方式是：

- 姚东：2013级数院华罗庚班班毕业生，现就读于杜克大学，
  邮箱是 dy67@duke.edu

- 郭炯吉：香港科技大学2016级，研究方向为随机矩阵、KPZ普适性 (KPZ universality)，
  邮箱是 magnagjj08@gmail.com