特殊的习题

Ch1：[redacted]. $\boxed{35.36}$ Cantor set

Ch2：4. 5. 6. 8. 9. . 19

6. 11 积分 9. 19. 16

4. 5. 18 Fubini

(…)

Ch1 习题

(26) $A\subset E\subset B$ $m(A), m(B)<\infty$

证明：若 $m(A)=m(B)$ 则 E 可测

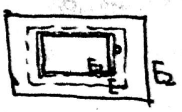
Proof： $E = A\cup(E\setminus A)$.

$E\setminus A\subset B\setminus A$. $m(B-A)=m(B)-m(A)=0$

零测集子集必可测且零测 $\Rightarrow E\setminus A$ 可测 □

(27) $E_1\subset E_2$ 均为 $\mathbb{R}^d$ 中的紧集. $a=m(E_1)<b=m(E_2)$

证明：$\forall c\in(a,b)$，存在紧集 E，$E_1\subset E\subset E_2$.
$m(E)=c$.



Proof：(1) $\exists$ 开集 $O\supseteq E_1$.
$m(O-E_1)<\underset{\sim}{b-c}$ ← $b-c$ 是由此凑出的（只要 $m(O-E_1)$ 充分小）即可.

$E_2\cap O^c$ 紧. $m(E_2\cap O^c)$
$\geq (b-a)-(b-c)=c-a$.

故.我们希望找到 $K\subset E_2\cap O^c$ s.t. $m(K)=c-a$ 即可.
K紧

若能找到这样的K，则 $K\cup E_1$ 为所求.

考虑使用连续函数介值定理

令 $f(r)=m(E_2\cap O^c\cap\overline{B(0,r)})$

$f(0)=0$

且 $\exists A>0$. $f(A)=m(E_2\cap O^c)\geq c-a$

claim f 连续.

若claim成立. 则 $\exists r_0>0$, s.t.
$m(E_2\cap O^c\cap\overline{B(0,r_0)})=c-a$.

故.令 $K=E_2\cap O^c\cap\overline{B(0,r_0)}$
$E=K\cup E_1$ 即可

Check：f 连续. fix $r_0>0$. $\forall h$ 充分小
不妨 $h>0$

$|f(r_0+h)-f(r_0)|$.

$=\left|m(E_2\cap O^c\cap\overline{B(0,r_0+h)})-m(E_2\cap O^c\cap\overline{B(0,r_0)})\right|$

$\leq m\left(E_2\cap O^c\cap(\overline{B(0,r_0+h)}-\overline{B(0,r_0)})\right)$

$\leq m\left(\overline{B(0,r_0+h)}-\overline{B(0,r_0)}\right)$

$=C_d\left((r_0+h)^d-r_0^d\right)$

$\to 0$ as $|h|\to 0$.

□

承认(34)题结论：

设 C_1. C_2 是两个Cantor-like集.
则 $\exists F:[0,1]\to[0,1]$ 满足：

(1) F 是连续双射

(2) F 单增（即 F 不减）

(3) F 将 C_1 满射到 C_2

□

(35) 求 f(可测). 亚(连续). 使
$f\circ\phi$ 不可测.

Proof：设 C_1. C_2 是 Cantor set.
$m(C_1)>0$. $m(C_2)=0$
$\phi: C_1\to C_2$ as in (34)

由32题(2)：$m(C_1)>0$ 故存在
不可测子集 $N\subset C_1$.

令 $f=\chi_{\phi(N)}(x)$.

则 $f\circ\phi(x)=\chi_N(x)$.

(why? $x\in N\Rightarrow\phi(x)\in\phi(N)\Rightarrow f(\phi(x))=1$
$x\notin N\Rightarrow\ \ \phi\ \ \Rightarrow\ \ =0$)

由N不可测知
$N=\{x\in\mathbb{R}^d \mid (f\circ\phi)(x)>\frac{1}{2}\}$ 不可测
$\Rightarrow f\circ\phi$ 不可测.

于是：我们现在要证 f 可测，即 $\phi(N)$ 可测。

$N \subset C_1$. $\phi: C_1 \longrightarrow C_2$ onto.

$\Rightarrow \phi(N) \subset C_2$. $m(C_2)=0$

零测集子集必零测 $\Rightarrow$ 可测 #.

下借此构造一个 Lebesgue 可测但不 Borel 的集合，

该集合即为 $\phi(N)$.

claim: Borel 集在连续函数下的原像是可测集。

若 claim 对，则反证：若 $\phi(N)$ Borel，则

$N = \phi^{-1}(N)$ ~~(ϕ^{-1} 不是指 ϕ~~ 是指原像集.

可测，矛盾！

Proof of claim:

令 $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(A)$ 可测$\}$.

则任何 $\mathbb{R}$ 上的开集含于 Σ.

又不难证明 Σ 是 σ-代数，故全体开集生成的 σ-代数含于 Σ.

即 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \Sigma$.

$\square$.

36. (1) 构造集合 $E \subset [0,1]$. s.t. 对任何 $[0,1]$ 上的非空开区间 I

$E \cap I$, $E^c \cap I$ 正测

(2) $f = \chi_E$ 满足：若 $g(x) = f(x)$ a.e., 则 g 必在 $[0,1]$ 中点点不连续.

Proof: 先设 (1) 对，来证 (2).

设 $g = \chi_E$ a.e.

Fix any $x \in [0,1]$.

令 $A_0 = \{y \in [0,1] : \chi_E(y) = 0\}$.

$A_1 = \{y \in [0,1] : \chi_E(y) = 1\}$

~~g 在与 χ_E 取值不同的点 A_0 与 A_1 上都~~

因 $g = \chi_E$ a.e.

故 A_0 中 g 与 χ_E 取值不同的点是零测的

A_1 中 - - - -

而对 x 的任一开邻域 $(x-\delta, x+\delta)$

$m((x-\delta, x+\delta) \cap A_0) > 0$

$m((x-\delta, x+\delta) \cap A_1) > 0$.

(因 $A_0 \sqcup A_1 = [0,1]$) 套用 (1) 即可

这说明 g 在 x 处并不连续.

(否则若 g 在 x 处连续，因 $g = \chi_E$ a.e. 故 g 在 $(x-\delta, x+\delta) \cap A_0$ 中 a.e. 取 0，$(x-\delta, x+\delta) \cap A_1$ 中 a.e. 取 1.

这连续函数在一个小邻域 $(x-\delta, x+\delta)$ 内不可能做到.) #

下面给出 (1) 的构造性证明：

想法：先构造一个正测度的 Cantor set E_0，测度为 a_{E_0}.

在 E_0 构造过程中被挖去的每个开区间中，填入一个经 scaling 后的 Cantor set，得 E_1.

再在 E_1 . . . . E_0 . . . .

. . . . . . E_2.

以此类推.

Step1: 构造一个测度 $\lambda\in(0,\frac{1}{2})$ 的 Cantor set，记作 C_λ.

① 挖去正中间长为 $\frac{1-\lambda}{2}$ 的开区间.

② 对每个余下的小区间，挖去正中间长为 $\frac{1-\lambda}{8}$ 的开区间，共挖掉 $\frac{1-\lambda}{4}$.

③ ⋮

ⓚ ……… 挖去正中间长为 $\frac{2(1-\lambda)}{4^k}$ 的开区间，共挖掉 $\frac{1-\lambda}{2^k}$.
(因为共 2^{k-1} 个这样的区间)

⋮

⇒ 得 C_λ. $m(C_\lambda)=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\lambda}{2^k}=\lambda$.

C_λ 具有如下性质：

① C_λ 不包含任何开区间

② $[0,1]\setminus C_\lambda$ 中，不含长度 $\geq\frac{1}{2}$ 的区间

③ $\forall$ 开区间 $I\subset[0,1]$. 若 $I\cap C_\lambda\neq\emptyset$ 则 $0<m(C_\lambda\cap I)<m(I)$.

~~证~~ ①②是易见的.

③: $I\cap C_\lambda\neq\emptyset$ 故 ~~I必与某~~ $\exists k$，I与第k步结束后所得的集合（记作 C_λ^k）相交.

⇒ I与 C_λ^k 中某个小区间 I_λ^k 相交 ~~$0<m(I\cap I_\lambda^k)<m(I_\lambda^k)$~~ ~~因I开~~

~~Fix k~~

~~在第k步之后，$I\cap I_\lambda^k$ 中被挖去部分的测度严格小于 $\frac{1}{2}$ 倍该区间长度~~

Fact: $\exists k$. ~~Fix this k~~. I_λ^k 中有一个区间端点 $A_\lambda^k\in I$. ~~$<\frac{1}{2}$ 是因~~

(没有的话，那必是: $\underbrace{(\quad)}_{I}\subset I_\lambda^k$，继续挖即可).

之后该区间端点会被保留.

Fix this k, then $\exists\tilde{k}>k$. 在 $C_\lambda^{\tilde{k}}$ 中，存在某个以 A_λ^k 为顶点的小区间完全含于I.

于是，这个小区间(记为 $I_\lambda^{\tilde{k}}$)在此后的操作中，只被挖去了其中的 $(1-\lambda)\times100\%$ 这么多.(相当于在这个小区间中再造 Cantor set). ⇒ $m(I\cap C_\lambda)>m(I\cap I_\lambda^{\tilde{k}})>0$.

⇒ ③ holds. #

Step2:
下面再来构造 36(1) 所求的集合.

令 $E_0=C_{\frac{1}{4}}$. (即在 Step 1 中令 $\lambda=\frac{1}{4}$)

E_1 在 E_0 构造过程中被挖去的每个区间中，填入一个经过伸缩的 $C_{\frac{1}{6}}$.(即该填入的 scaling Cantor set 占该区间长度的 $\frac{1}{6}$).

$E_0\cup$ 新填入的集合记作 E_1.

打红圈的数是凑的！我先假定了最终要的 $m(E)=\frac{1}{2}$

E_2: 在 E_1 ……… $C_{\frac{1}{10}}$ (……… $\frac{1}{10}$)

$E_1\cup$ …… 记作 E_2.

⋮

E_{k+1}. 在 E_k 构造过程中被挖去的每个开区间中，填入一个经伸缩的 $C_{\frac{1}{2^{2k+2}+2}}$ (即填入的 Scaling Cantor set 占该区间长的 $\frac{1}{2^{2k+2}+2}$)

得 E_{k+1}，依此类推.

令 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

则 $m(E_{k+1}) = m(E_k) + \dfrac{1-m(E_k)}{2^{k}+2}$.

$\Rightarrow m(E_k) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{k+2}}$

$\Rightarrow m(E) = \dfrac{1}{2}$.

E 构造完毕.

Step3: 验证性质: 任给开区间 $I \subset [0,1]$

(i) $m(E\cap I)>0$

首先 $[0,1]\setminus E$ 不含开区间

这因为: 若 E构造中某步中 有长为 δ 的开区间 $\subset [0,1]\setminus E$,

则其会被不断填入 Cantor set,

从而在后继的步骤中, 会出现, 不含

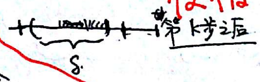
长度 $>\alpha\delta$ (for some $\alpha<1$) 的开区间,

再将 $\alpha\delta$ 换成 $\alpha\delta$, 依次类推 $\Rightarrow$ 所含开区间长度只可是 0

事实上利用Cantor set不含开区间即可.

从而 $[0,1]\setminus E$ 中, 一旦有开区间,

便被"Cantor化".



~~其次~~ 故 $I\cap E \neq \varnothing$.

$\Rightarrow I$ 至少与某一个小的 $C_{\frac{1}{2^{k+2}+2}}$ 相交. 由 Step 1 的③即得.

$m(I\cap$ 该集合$)>0$.

(ii) $m(E^c\cap I)>0$:

$[0,1]\setminus E_k$ 在 $[0,1]$ 稠

(因 $[0,1]\setminus E_k = \bigcap_{j=1}^{k}([0,1]\setminus E_j)$ 可列开稠集之交仍稠 (Baire纲 Thm).

且 $[0,1]\setminus E_k$ 是长度 $\le \frac{1}{2^k}$ 的开区间可列不交并

故. k充分大时, I 至少包含一个这样的区间 I_k^n. $\big(\cap([0,1]\setminus E_k)\big)$

Fix this k,

在E此后的构造中, ~~无非~~ 在 I_k^n 中无非是继续按之前的步骤

填入 Cantor set.

即 I_k^n 可以视作最初的 $(0,1)$.

我们已知道, 直至E构造结束时.

I_k^n 中被填入的集合, 其测度 $< m(I_k^n)$. #

$\Rightarrow m(E^c\cap I)$ ~~$\ge m(\ldots I_k^n) > 0$~~

$> m(I_k^n - I_k^n$ 被填入的集合$) > 0$.

$\square$

收敛性

· 可测函数收敛性.

$$
\begin{tikzcd}
& L^p(X)\,(p\geq 1) \arrow[d, shift right, "m(X)<\infty"'] \arrow[d, shift left, "\text{X中正测集，其测度有正的下界（例如计数测度）}"] \arrow[ddl, bend right, "\text{T9 Chebyshev不等式}"'] & \\
& L^1(X) \arrow[dl, shift right] \arrow[dr, shift left, "\text{子列}"] & \\
\text{依测度} \arrow[ur, shift right, "\text{收敛定理}"'] \arrow[rr, shift left, "\text{子列}"] & & \text{a.e.收敛} \arrow[ul, shift left, "\text{收敛定理}"] \arrow[ll, shift left, "m(X)<\infty"]
\end{tikzcd}
$$

(三)、证明 a.e. 收敛：一般考虑 Borel–Cantelli 引理

Borel–Cantelli 引理：

1.16 $\{E_k\}\subset\mathbb{R}^d$ 可测. $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<+\infty$

$$E=\limsup_{k\to\infty}E_k:=\{x\in\mathbb{R}^d \mid x\in E_k \text{ 对无穷个 } k\}$$

则. $m(E)=0$ （事实上. $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$

如何与收敛性挂钩？

$f_n\to f$ a.e. $\iff$ $f_n(x)\not\to f(x)$ 的全体 x 零测.

~~$f_n(x)\not\to f(x)$ at x. as $n\to\infty$~~

~~$\iff \exists\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{Z}_+$ s.t. $\forall n>N$, $|f_n(x)-f(x)|$~~ $>\varepsilon$.

而 $f_n(x)\not\to f(x)$ at x.

$\iff$ $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\forall N\in\mathbb{Z}_+$ $\exists n>N$. $|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon$.

$\iff$ $\exists j>0$ s.t. $\forall N\in\mathbb{Z}_+$ $\exists n>N$. $|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{j}$

$$\iff x\in\underbrace{\bigcup_{j=1}^{+\infty}\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty}\left\{|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{j}\right\}}_{\text{全体不收敛点}}.$$

故

$f_n\to f$ a.e.

$$\iff m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{j}\right\}\right)=0.$$

$$\iff m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{j}\right\}\right)=0 \quad \text{对任一 } j \text{ 成立}$$

$\Rightarrow$：是因为该集合 $\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}$

$$\iff \forall\varepsilon>0.\ m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\right\}\right)=0.$$

$\Leftarrow$：obvious.

eg: $f, f_n\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 且 $\forall n$. $\int_{\mathbb{R}^d}|f_n(x)-f(x)|\,dx\leq\frac{1}{n^2}$.

则 $f_n\to f$ a.e.

<u>Proof</u>. For fixed $\varepsilon>0$.

T9, Chebyshev不等式

$$\underbrace{m\{x: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}}_{E_n(\varepsilon)}\leq\frac{\|f_n-f\|_{L^1}}{\varepsilon}\leq\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n(\varepsilon)) \leq \frac{\pi^2}{6\varepsilon} < \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0.\ m(\limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)) = 0.$

$\Rightarrow \forall j.\ m(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\}) = 0$

$\Rightarrow m(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\}) = 0$

$\Rightarrow m(f_n \not\to f) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.e.} f.$

$\square$

关于依测度收敛.

Prop: (1). ~~⇐~~ 依测度 $\Longrightarrow$ 存在子列 a.e.

(2). ~~m(E)<~~ $m(X) < \infty$. f_n, f 定义在 X 上

$f_n \to f$ in measure $\Longleftrightarrow$ ∀子列 f_{n_k}, 存在子列 $f_{n_{k_j}}$ s.t. $f_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.e.} f$.

Proof: $\Rightarrow$ (1). $f_n \to f$ in measure.

则 $\forall \varepsilon > 0.\ m\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0$ as $n\to\infty$.

$\Rightarrow$ ~~$\forall k \in \mathbb{Z}_+$ 存在 $n_k \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $m\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)|$~~

$\underset{\text{fixed}}{\forall \varepsilon > 0}.\ \forall \delta > 0.$ 存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $\forall n > N.$

$m\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \delta$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{Z}_+\ \forall n > N\ m\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon.$

ε 换成 $\frac{1}{2^k}$ (因 $\sum \frac{1}{2^k} < \infty$).

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists n_k \in \mathbb{Z}_+\ n_k \to \infty$ s.t.

$m\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\} \leq \frac{1}{2^k}$

(下标必须全是跟 k 变的).

令 $E_k = m\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$ ~~$\leq \frac{1}{2^k}$~~

$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$ 由 Borel-Cantelli 引理

$m(\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0.$

即 $m(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$ ~~$\leq \frac{1}{2^k}$~~ $) = 0$

$x \in$ 该集合

$\Longleftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}_+\ \exists k > j$ s.t. $|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k}$

$\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_+.$ s.t. $\forall j \in \mathbb{Z}_+.\ \exists k > j$

s.t. $|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}$

$\Longleftrightarrow f_{n_k} \not\to f$ at x.

说明 $f_{n_k} \not\to f$ 的点零测.

$\square$

(2). $\Leftarrow$: 反证：若 $f_n \not\to f$ in measure.

则 $\exists\ \varepsilon>0,\ \delta>0$. $\{n_k\}\in \mathbb{Z}_+$.

$$m\{x\in X \mid |f_{n_k}(x)-f(x)|>\varepsilon_0\}\geq \delta_0 \quad \cdots ①$$

但由条件. $\exists\ f_{n_{k_j}} \to f(x)$ a.e.

故 ~~m(limsup~~

$$\forall \varepsilon>0\ m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{j=N}^{\infty}\{x\in X: |f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(\bigcup_{j=N}^{\infty}\{x\in X: |f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

这与 ① 相矛盾！

$\Rightarrow$: 由(1). 若 $f_n\to f$ in measure

则任何子列 $f_{n_k}\to f$ in measure

$\Rightarrow$ $\exists$ 收子列 $f_{n_{k_j}}\to f$ a.e.

□.

其它：$X\subset\mathbb{R}^d$ 有界可测.

$$d(f,g)=\int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,dx.$$

$f_n \longrightarrow f$ in measure $\Leftrightarrow d(f_n,f)\to 0$.

Omit the proof.

□

关于积分收敛.

用的较多的是 DCT (控制收敛).

出现"单调""非负"可用单调收敛.

~~出现~~较难的：可能考虑 Fatou 引理 ← 难在构造函数

Egoroff 定理 ← 出现 L^p ($p>1$) 范数一致有界 或 弱收敛.

1. DCT 可以减弱：控制函数与 n 有关)

a.e. 改成依测度

广义 DCT：$f_n\to f$ a.e. $\quad f_n, g_n, f, g\in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$|f_n|\leq g_n$ a.e.

$g_n\to g$ a.e. $\quad$ then $\int|f_n-f|\to 0$.

$\int g_n\to\int g$.

Proof：注意：$g_n+g\geq|f_n-f|\geq 0$ a.e.

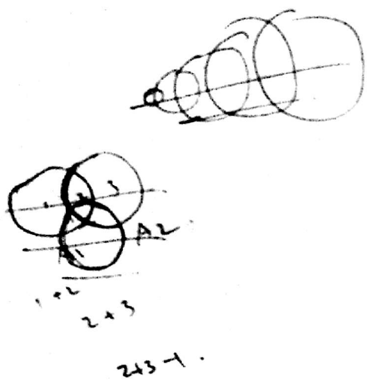
令 $h_n=g_n+g-|f_n-f|\geq 0$.

由 Fatou 引理. $\longrightarrow 2g$ a.e.

$$2\int g\leq \liminf\int g_n+\int g-\int|f_n-f|$$

$$=2\int g-\int|f_n-f|$$

□.



类似可以证明：

$f_n \to f$ a.e. 则 $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \iff \|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ $\forall 1 \le p \le \infty$

$1 \le p < \infty$ 时 $\|f_n\|_{L^p} := (\int |f_n|^p dx)^{1/p}$.

(令 $h_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p - |f_n - f|^p) \geq 0$. 用 Fatou) . $\square$

Fatou 也用不了的：考虑 Egoroff 定理.

Egoroff 定理：$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ on X, $m(X) < +\infty$

then $\forall \delta > 0$. $\exists X_\delta \subset X$. $m(X_\delta) < \delta$.

s.t. $f_n \rightrightarrows f$ on $X - X_\delta$.

Warning: (1) $m(X_\delta)$ 不能为 0.

(2) $m(X) < +\infty$ 不可去掉 (考虑 $f_n(x) = \chi_{[n,+\infty)}(x)$).

(3). $f_n \to f$ a.e. on X.

$g: X \to [0, +\infty]$. $\int_X g < +\infty$. $|f_n| \le g$ a.e. on X

then $f_n \rightrightarrows f$ a.e. on X.

证明套路与课本一致.

只是在估计：$m(E - E_k^n) = m\{\bigcup_{j \ge k} \{x \in X \mid \underbrace{|f_j(x) - f(x)|}_{\le 2g} \geq \frac{1}{n}\}\} \le m\{x \in X ; g(x) \geq \frac{1}{2n}\}$.

$\overset{\text{Chebyshev}}{\le} \int_X 2n \cdot g(x)\, dx < +\infty$ for fixed

有所不同.

#

eg：设 $f_n \to f$ a.e. on $[0,1]$.

且 $\int_0^1 |f_n|^2 dx \le M$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

则 $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Proof：难在 f_n 不收敛于 f (或 "f_n 与 f 偏差大") 时，那一部分难以估计.

用 DCT? 没有控制函数.

Fatou? 没有 $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$.

试用 Egoroff：

由 Egoroff 定理，

$\forall \varepsilon>0$. $\exists X_\varepsilon \subset [0,1]$. s.t.

$$\begin{cases} f_n \rightrightarrows f \text{ on } [0,1]-X_\varepsilon \\ m(X_\varepsilon) < \varepsilon \end{cases}$$

on $[0,1]-X_\varepsilon$：由 $f_n \rightrightarrows f$

故 $\forall \delta>0$. $\exists N$. $\forall n \geq N$. $|f_n(x)-f(x)|<\delta$.

$$\Rightarrow \int_{[0,1]-X_\varepsilon} |f_n-f|\,dx \leq \varepsilon\cdot\delta \leq \delta.$$

on X_ε：

$$\int_{X_\varepsilon} |f_n-f|\,dx \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\int_{X_\varepsilon} |f_n-f|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_{X_\varepsilon} 1\,dx\right)^{\frac12}$$

$$= \sqrt{m(X_\varepsilon)}\cdot\left(\int_{X_\varepsilon} |f_n-f|^2 dx\right)^{\frac12}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\cdot\left(\int_0^1 4(|f_n|^2+|f|^2)\right)^{\frac12}$$

$$\leq \cancel{\liminf_{n\to\infty}}\sqrt{\varepsilon}\left(4\int_0^1 |f_n|^2 + 4\liminf_{n\to\infty}\int |f_n|^2\right)^{\frac12}$$

$$\leq \sqrt{8M\varepsilon}.$$

~~先令~~ 令 $\delta\to0$. $\varepsilon\to0$ 即有 $\int_0^1 |f_n-f|\,dx \to 0$. □.

Rmk：在 X_ε 上. 不可以用关于"积分绝对连续性".

因为小量关于 n 不一致.

即. 对 $f_n - f$. 没有一致小的 ε. δ.

□.

可积函数性质：

$L^1 \nRightarrow$ 无穷远处 $\to 0$

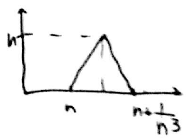
[2.6] (1) $\exists f\geq0$. on $\mathbb{R}$. $f\in L^1$.

$\limsup_{|x|\to\infty} f(x)=+\infty$.

(2). 但若 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 则

$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$.

Proof：(1) 令 f 在



(2). 否则. 若 $f(x) \nrightarrow 0$ 则. $\exists x_1$ $|f(x_1)|>\varepsilon$.

$\exists\delta>0$ $|f(x)|>\frac{\varepsilon}{2}$

on $(x_1-\delta, x_1+\delta)$.

又：$\exists x_2 > x_1+1$, $|f(x_2)| \geq \varepsilon$ $\Rightarrow |f| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ on $(x_2-\delta, x_2+\delta)$

(一致连续保证 δ 固定)

$\Rightarrow \cdots$ 得一列 $\{x_n\}$. 在无穷依 2δ 区间中. 值 $\geq \frac{\varepsilon}{2}$

$\int|f| = \infty$ 矛盾！ □

• 一个公式

$$\int|f(x)|^p dx = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\, m\{x: |f(x)|>\alpha\}\, d\alpha.$$

(Tonelli定理即可).

5: $F\subset\mathbb{R}^d$ 闭 $m(F^c)<\infty$. $\delta(x)=dist(x,F)$.

$$I(x):=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}\,dy.$$

(1) $I(x)<\infty$ a.e. $x\in F$

(2) $I(x)=\infty$ on F^c

Proof: (1) $\int_F I(x)\,dx=\int_F\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}\,dy\,dx.$

$$=\int_F\int_{F^c}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{d+1}}\,dy\,dx$$

因 $\delta=0$ on F.

Tonelli (not Fubini).

$$=\int_{F^c}\Big(\int_F\frac{1}{|x-y|^{d+1}}\cancel{dy}\,dx\Big)\delta(y)\,dy$$

$$\int_F\frac{1}{|x-y|^{d+1}}dx\overset{z=x-y}{=}\int_{|z|\geq\delta(y)}\frac{dz}{|z|^{d+1}}\leq\frac{C_d}{\delta(y)}$$

则 $|z|=|x-y|$, $x\in F$ $\to\geq dist(y,F)=\delta(y)$

(因 $\int_{|x|\geq A \text{ in } \mathbb{R}^d}\frac{1}{|x|^{d+s}}dx=\frac{C}{A^s}$.)

$\therefore \int_F I(x)\leq\int_{F^c}\frac{C_d}{\delta(y)}\delta(y)\,dy\leq C_d\, m(F^c)<\infty$

$\Rightarrow |I(x)|<+\infty$ a.e.

(2). 只是(1)中. $z\geq\delta(y)$ 换成 $z<\delta(y)$

而 $\int_{|z|<\delta(y)}\frac{dz}{|z|^{d+1}}=\infty$ □

~~上面用到过~~

伸缩变换公式:

16: $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_d)\in\mathbb{R}^d$. $\delta_i\neq0$ ~~则~~ $f^\delta(x)=f(\delta_1x_1,\dots,\delta_dx_d)$

则 $\int f^\delta(x)\,dx=\frac{1}{\delta_1\cdots\delta_d}\int f(x)\,dx$

Proof: 只用证 $f=\chi_E$ 的 Case (积分恒等式 直接证不出时,考虑先证 $f=\chi_E$). ~~不妨 $m(E)<\infty$~~

$\int f^\delta(x)\,dx$

$=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E(\delta_1x_1,\dots,\delta_dx_d)\,dx$.

Tonelli (not Fubini)

$=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\chi_E(\delta_1x_1,\dots,\delta_dx_d)\,dx_1\cdots dx_d$

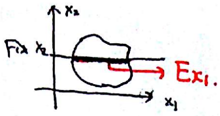
Tonelli定理保证可测性

$\cdot\int_{\mathbb{R}}\chi_E(\delta_1x_1,\dots,\delta_dx_d)\,dx_1$

19题 $\int_0^{\infty}m\{x_1: \chi_E(\delta_1x_1,\dots,\delta_dx_d)\geq\alpha\}\,d\alpha$.

~~而只有0≤α≤1时,该函数才可能有非零取值~~.

所以.



~~上式~~ $= \cancel{\int_0^1 \mathcal{L}^1_* \{ x_1 : \delta_1 x_1 \in \underbrace{E_{x_1}}_{E\text{在}x_1\text{方向投影}}, \delta_2 x_2 \in}$

~~1维Lebesgue~~ 外测度

$(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d) \in E$

$$= \int_0^\infty \mathcal{L}^1 \{ x_1 : \delta_1 x_1 \in E_{x_1}, \ldots, \cancel{\delta_d x_d \in E_{x_d}} \} \, d\alpha$$

$\underline{z_1 = \delta_1 x_1}$

$\mathcal{L}^1(\delta E) = \delta \mathcal{L}^1(E)$.

$(z_1, \delta_2 x_2, \ldots, \delta_d x_d) \in E$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\delta_1} \mathcal{L}^1 \{ z_1 : z_1 \in E_{z_1}, \cancel{\delta_2 x_2 \in E_{x_2}, \ldots, \delta_d x_d \in E_{x_d}} \} \, d\alpha.$$

$\delta_1 x_1 \in E_{x_1}$

$\Longleftrightarrow z_1 \in E_{\frac{z_1}{\delta_1}} \Longleftrightarrow z_1 \in \frac{1}{\delta_1} E_{z_1}$. $= \frac{1}{\delta_1} \int \chi_E(z_1, \delta_2 x_2, \ldots, \delta_d x_d) \, dx_1$.

依此类推即可

$\square$.

积分的平移连续性.

如何证得? 紧支集连续函数逼近.!

eg: $E \subset \mathbb{R}^d$ 有界可测. 则 $\lim_{h \to 0} m(E \cap (E + \{h\})) = m(E)$

Proof: $m(E \cap E + \{h\})$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{E+\{h\}}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_E(x-h) \, dx.$$

$h \to 0$. 由 $m(E) < \infty$ 与. 据控制收敛定理 (内部 $\leq \chi_E(x) \in L^1$).

$\chi_E(x-h) \to \chi_E(x)$ as $h \to 0$.

$\square$