Ch9 非变分技巧

§9.1 单调性方法

考虑拟线性方程

$$(*)\begin{cases} -\operatorname{div} \vec{a}(\nabla u) = f & \text{in } U. \\ u=0 & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

其中：$f\in L^2(U)$ 是给定的函数. $\vec{a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 向量场，U为$\mathbb{R}^n$中有界开集. $\partial U\in C^\infty$.
$\vec{a}=(a^1,\cdots,a^n)$.

由Ch8知，若存在 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 $\vec{a}$ 是F的梯度 i.e. $a(p)=\nabla F(p)$ $\forall p\in\mathbb{R}^n$
则(*)为 $L(p,z,x)=F(p)-f(x)z$ 的 Euler-Lagrange 方程. 但若上述位势函数F不存在，则Ch8的变分失效.

于是问：能否直接构造出解u？对非线性项有何要求？
当上面的F存在时，我们假设F凸 则 $\forall p,q\in\mathbb{R}^n$，有：

$$(\vec{a}(p)-\vec{a}(q))\cdot(p-q)=\sum_{i=1}^n\left(F_{p_i}(p)-F_{p_i}(q)\right)(p_i-q_i)$$
$$=\int_0^1\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n F_{p_ip_j}(p+t(q-p))(p_j-q_j)(p_i-q_i)\,dt\geq 0$$

F凸.

Def：若向量场 $\vec{a}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足 $(\vec{a}(p)-\vec{a}(q))\cdot(p-q)\geq 0$. $\forall p,q\in\mathbb{R}^n$，
则称$\vec{a}$为单调的.

下面将证明方程(*)在非线性项单调时的确存在弱解. 实际上，我们会看到 $-\operatorname{div} a(\nabla u)=f$ 是一个非线性椭圆方程. 仿照Ch8，假设a满足如下条件

① $|\vec{a}(p)|\leq C(1+|p|)$

② $\vec{a}(p)\cdot p\geq\alpha|p|^2-\beta$. $\forall p\in\mathbb{R}^n$ $\exists\alpha>0$ $\beta\geq 0$.

构造方程解的方法：Galerkin逼近.

②

设 $\{w_k\}_1^\infty$ 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(U)$ 中的特征函数，构成 $H_0^1(U)$ 的标准正交基.

$\{w_k\} \in C^\infty$

希望找：$u_m \in H_0^1(U)$，具有形式 $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$，且 $\int_U a(\nabla u_m)\cdot \nabla w_k \, dx = \int_U f w_k \, dx$ $\quad 1 \le k \le m$

在进行 Galerkin 逼近的过程之前，我们证明一个引理

Lemma 9.1.1（向量场的零点）. 设有连续向量场 $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. s.t.

$\exists r>0$, $\forall |x|=r$. $\vec{v}(x)\cdot x \geqslant 0$，则 $\exists x \in B(0,r)$ s.t. $v(x)=0$.

<u>Proof</u>：反证. 则 $\vec{v}(x) \neq 0$. $\forall x \in B(0,r)$.

令 $\vec{w}: B(0,r) \to \partial B(0,r)$ 为 $w(x) = -\dfrac{r v(x)}{|v(x)|}$，则 w 连续.

由 Brouwer 不动点定理，$\exists z \in B(0,r)$. $w(z)=z$.

$\Rightarrow z \in \partial B(0,r)$.

$$r^2 = z\cdot z = w(z)\cdot z = -\frac{r v(z)\cdot z}{|v(z)|} \le 0. \qquad \text{矛盾!}$$

$\square$

下面证明

Thm 9.1.1：$(*)$ 存在弱解.

Step 1：构造逼近解

Thm 9.1.2：$\forall m \in \mathbb{Z}_+$. $\exists u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$. s.t. $\forall 1 \le k \le m$ $\int_U a(\nabla u_m)\cdot \nabla w_k \, dx = \int_U f w_k \, dx$.

<u>Proof</u>：取 $v: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

~~定义~~ 满足：$\forall d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^m$.

$$v^k(d) = v^k(d_1, \dots, d_m) = \int_U \vec{a}\Big(\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j\Big)\cdot \nabla w_k - f w_k \, dx \quad 1 \le k \le m$$

则 $\vec{v}(d)\cdot d = \int_U a\Big(\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j\Big) - f\Big(\sum_{j=1}^m d_j w_j\Big) \, dx$

$$\underset{\exists \alpha>0,\ \beta>0}{\overset{\text{强制性条件②}}{\geq}} \int_U \alpha \Big|\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j\Big|^2 - \beta - f\Big(\sum_{j=1}^m d_j w_j\Big) \, dx$$

$$\overset{\|w_j\|_{H_0^1}=1}{=} \alpha |d|^2 - \beta |U| - \sum_{j=1}^m d_j \int_U f w_j \, dx.$$

$\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$

$$\ge \frac{\alpha}{2}|d|^2 - C \overset{|d|=r\text{时}}{\Longrightarrow} v(d)\cdot d \geqslant 0 \ (\text{这里需 } |d| \text{ 不能太小})$$

由 lem 9.1.1 有：$\exists d \in \mathbb{R}^m$ $\vec{v}(d)=0$ 从而达到要求 $\square$

Step 2：解的估计.

Thm 9.1.3：$\exists C>0$，仅与U和a有关 s.t. $\|u_m\|_{H_0^1(U)} \leq C(1+\|f\|_{L^2(U)})$.

<u>Proof</u>：上一问表明：

$$\int_U a(\nabla u_m)\cdot\nabla w_k\,dx = \int_U f w_k\,dx.$$

两边乘以 d_m^k，对k从1到m ~~…~~ 求和

$$\Rightarrow \int_U a(\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\,dx = \int_U f u_m\,dx.$$

由强~~椭~~制性条件②有：

$$\alpha\int_U |\nabla u_m|^2\,dx \leq \beta + \int_U f u_m\,dx$$

$$\leq \beta + \varepsilon\int_U u_m^2\,dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_U f^2\,dx.$$

$$\overset{\text{Poincaré不等式}}{\leq} \beta + C_\varepsilon \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2$$

取 $C_\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$，即有：

$$\|u_m\|_{H_0^1} \lesssim 1+\|f\|_{L^2}$$

□

我们若像ch7中一样，用Banach-Alaoglu定理选出弱收敛子列 $\{u_{m_l}\}$，但再令 $l\to\infty$，但要注意 $a(\nabla u_{m_l}) \longrightarrow a(\nabla u)$ 未必成立，因为这是非线性项.

Step 3：取极限：

由Banach-Alaoglu定理知 $\exists$子列 $\{u_{m_l}\}_1^\infty$ s.t.

$u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$ $(\exists u\in H_0^1(U))$

$\overset{H_0^1(U)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)}{\Longrightarrow}$ $u_{m_j} \to u$ in $L^2(U)$

下证 u满足 $\int_U a(\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_U f v\,dx \quad \forall v\in H_0^1(U)$.

④

~~①先~~ iT

(1°) 先证 $a(\nabla u_{m_\ell})$ 有 L^2 弱极限.

由①知. $\{a(\nabla u_m)\}$ 在 $L^2(U;\mathbb{R}^n)$ 中一致有界.
$\downarrow |a(p)|\leq 1+|p|$

从而 ∃ u_{m_ℓ} 的子列 (不妨还是 u_{m_ℓ} 吧). $a(\nabla u_{m_\ell}) \rightharpoonup \xi$ in $L^2(U;\mathbb{R}^n)$
for some $\xi \in L^2(U;\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \int_U \xi\cdot\nabla w_k\,dx = \int_U f w_k\,dx. \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$

$\{w_k\}$ 为 H_0^1 标准基 $\Rightarrow$ $\int_U \xi\cdot\nabla v\,dx = \int_U f v\,dx. \quad \forall v\in H_0^1(U)$

(2°) claim : $\int_U (\xi - a(\nabla u))\cdot\nabla v\,dx \geq 0 \quad \forall v\in H_0^1(U)$.

若 claim 成立. ~~对结合~~ 将 v 换成 $-v$ 知 上式实际为 "=".

结合(1°) 即有 $\int_U a(\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_U f v\,dx \quad \forall v\in H_0^1(U)$

余下只用证明 claim :

注意到 a 单调. 所以 :

$$\int_U (\vec{a}(\nabla u_m) - \vec{a}(\nabla w))\cdot(\nabla u_m - \nabla w)\,dx \geq 0 \quad \forall m\in\mathbb{Z}_+,\ w\in H_0^1(U)$$

而左

$$= \int_U \underline{\vec{a}(\nabla u_m)\cdot\nabla u_m} - a(\nabla u_m)\cdot\nabla w - \vec{a}(\nabla w)\cdot\nabla u_m + \vec{a}(\nabla w)\cdot\nabla w\,dx$$

$$= \underline{\int_U f u_m} - a(\nabla u_m)\cdot\nabla w - \vec{a}(\nabla w)\cdot(\nabla u_m - \nabla w)\,dx$$

m 取为 m_ℓ. 令 $\ell\to\infty$ 有

$$\int_U f u - \vec{\xi}\cdot\nabla w - a(\nabla w)\cdot(\nabla u - \nabla w)\,dx \geq 0$$

(1°)中令 $v=u$ 有 ~~$\int_U fu - \vec{\xi}\cdot\nabla w - a$~~ $\int \xi\cdot\nabla u = \int_U f u\,dx.$

结合以上二式有:

$$\int_U (\vec{\xi} - a(\nabla w)) \cdot \nabla(u-w)\, dx \geq 0 \quad \forall w \in H_0^1(U).$$

Fix $\varphi \in H_0^1(U)$. 令 $w = u - \lambda v$. $\lambda > 0$ 充分小. 代入上式有:

$$\int_U (\vec{\xi} - a(\nabla u - \lambda \nabla v)) \cdot \nabla v\, dx \geq 0.$$

令 $\lambda \to 0$ 即得 claim.

$\boxed{\text{回}}$ $\square$

Rmk: 关键一步是, 利用 a 单调, 将非线性项的极限成功处理.

$\square$

讨论(*)解的唯一性, 我们要另加一个条件:

③ (严格单调). $\exists \theta > 0$. $\forall p, q \in \mathbb{R}^n$. s.t. $(a(\vec{p}) - a(\vec{q})) \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \geq \theta |\vec{p} - \vec{q}|^2$.

~~Thm 9.1.4~~

~~Step 4~~, Thm 9.1.4 附加条件③, (*)的解唯一.

Proof: u, $\tilde{u}$ 为2个弱解.

则 $$\int_U a(\nabla u) \cdot \nabla v = \int_U a(\nabla \tilde{u}) \cdot \nabla v\, dx = \int_U f v\, dx. \quad \forall v \in H_0^1(U).$$

$$\Rightarrow \int_U (a(\nabla u) - a(\nabla \tilde{u})) \cdot \nabla v\, dx = 0. \quad \forall v \in H_0^1(U).$$

$$\overset{③}{\Rightarrow} \quad 0 \geq \theta \int_U |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2\, dx.$$

$$\Rightarrow \nabla(u - \tilde{u}) = 0 \quad a.e.$$

$$\overset{U\text{连通}}{\Longrightarrow} u = \tilde{u} \quad a.e.$$

Exercise 5.1 + 边值条件

$\square$

⑥

Rmk: ~~关于 H^2~~

实际上，我们可以证明 $u\in H^2$，从而 $-\operatorname{div} a(\nabla u)=f$ a.e. in U.

为此，取 $q,\xi\in\mathbb{R}^n$，$p=q+h\xi$，$h\neq 0$ 代入④

$$\Rightarrow ④:\sum_{i=1}^n \frac{\left(a^i(q+h\xi)-a^i(q)\right)}{h}\xi_i \geq \theta|\xi|^2$$

令 $h\to 0$ 有 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{p_j}^i(q)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$，$q,\xi\in\mathbb{R}^n$.（即一致椭圆条件）

从而 $-\operatorname{div} a(\nabla u)=f$

$$-\operatorname{div} a(\nabla u) = -\sum_{i=1}^n \partial_i a^i(\nabla u)$$

可以看作椭圆方程 $\Rightarrow u\in H^2$.

□

§9.2 ~~压缩映像原理与~~ Schauder 不动点定理

压缩映像原理在§7.3中已经讲过了，在此跳过

下面介绍 Schauder 不动点定理及其应用：

关键假设：紧性

Thm 9.2.1（Schauder 不动点定理）

设 $K\subset\subset X$ 非空，紧，凸，$A: K\to K$ 连续，则 A 在 K 中有不动点。

Proof. 固定 $\varepsilon>0$，从而∃有限多个点，$u_1,\dots,u_{N_\varepsilon}\in K$ s.t.

$K\subset\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon}\mathring{B}(u_i,\varepsilon)$.（由 K 紧即得）

设 K_ε 为 $\{u_1,\dots u_{N_\varepsilon}\}$ 的凸包

$$K_\varepsilon=\left\{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\lambda_i u_i \;\middle|\; 0\le\lambda_i\le 1,\ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\lambda_i=1\right\}\subset K\ (\text{因}K\text{凸})$$

定义：$P_\varepsilon: K\to K_\varepsilon$

$$u\mapsto P_\varepsilon[u]:=\frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{dist}(u,K-\mathring{B}(u_i,\varepsilon))u_i}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{dist}(u,K-\mathring{B}(u_i,\varepsilon))}\quad u\in K$$

P_ε 连续 且 $$\|P_\varepsilon[u]-u\|\le\frac{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{dist}(u,K-\mathring{B}(u_i,\varepsilon))\overbrace{\|u_i-u\|}^{<\varepsilon}}{\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{dist}(u,K-\mathring{B}(u_i,\varepsilon))}\le\varepsilon$$

关键一步

考虑 $A_\varepsilon: K_\varepsilon \longrightarrow K_\varepsilon$

$u \longmapsto P_\varepsilon[A[u]]$.

由 K_ε 同胚于 $\mathbb{R}^{M_\varepsilon}$ 某个 $\le M_\varepsilon$ 维空间中的单位闭球，则由 Brouwer 不动点定理

$\exists u_\varepsilon \in K_\varepsilon$. $A_\varepsilon[u_\varepsilon]=u_\varepsilon$.

K 紧 $\Rightarrow \exists \varepsilon_j \to 0$. $u_{\varepsilon_j} \xrightarrow{\exists} u$ in X.

而 $\|u_{\varepsilon_j} - A[u_{\varepsilon_j}]\| = \|A_{\varepsilon_j}[u_{\varepsilon_j}] - A[u_{\varepsilon_j}]\|$

$= \|P_{\varepsilon_j}[A[u_{\varepsilon_j}]] - A[u_{\varepsilon_j}]\| \le \varepsilon_j$.

$\varepsilon_j \to 0$ 有 $\|u - Au\| = 0$.

□

下面将 Schauder 不动点定理用分析语言叙述.

Def: 非线性算子 $A: X \to X$ 称作紧算子 若 $\forall$ 有界列 $\{u_k\}$, $\{A[u_k]\}$ 是预列紧 (即"闭包紧"). i.e. $\exists u_{k_j}$ s.t. $\{A[u_{k_j}]\}$ 在 X 中收敛.

Thm 9.22 (Schaefer 不动点定理)

$A: X \longrightarrow X$ 连续且紧. 且 $\{u \in X \mid u = \lambda A[u] \text{ for some } 0 \le \lambda \le 1\}$ 有界.

则 A 有不动点

Proof: 选取常数 $M>0$ s.t. 只要 $\exists \lambda \in [0,1]$ 使 $u = \lambda A[u]$, 就有 $\|u\| \le M$.

因为条件表明这样的 u 在 X 中有界

令 $$\tilde{A}[u] := \begin{cases} A[u] & \text{if } \|A[u]\| \le M \\ \dfrac{M A[u]}{\|A[u]\|} & \text{if } \|A[u]\| > M. \end{cases}$$

则 $\tilde{A}: B(0,M) \longrightarrow B(0,M)$. 且 $\tilde{A}: K \longrightarrow K$

取 K 为 $\tilde{A}(B(0,M))$ 的凸包. 由于 A, $\tilde{A}$ 紧, 故 K 紧. 由 Schauder 不动点定理

$\exists u \in K$ $\tilde{A}[u]=u$. 故只需证 u 也为 A 的不动点.

若否. 则 $\|\tilde{A}[u]\| \geq M$.

而 $u = \lambda A[u]$, $\lambda = \dfrac{M}{\|A[u]\|} < 1$

$\Big\{ \|u\| = \|\tilde{A}[u]\| = M$. 矛盾!

□.

Rmk: (1) Schaefer 不动点定理的好处是, 不再对集合的紧性有要求(因为转嫁给了非线性算子).

(2) Schaefer 不动点定理表明, 若我们能找到 λA $(0\leq\lambda\leq 1)$ 的不动点的界, 那么 A 就有不动点. 这个想法与PDE的先验估计类似:

先假设解存在(甚至很好), 得到一个先验估计(但不能利用解的"特殊性")

最后证明这样的解真的存在.

上面所谓的"特殊性"可用ch7.1中推测抛物方程弱解正则性结论时的过程来解释. 在那个推导中, 我们用了"特殊的"热方程代替了"一般的"抛物方程, 但并没有用到热方程解的特有性质

例如 解为 $u = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau)\,d\tau$. 以及 $u_0 \in L^p \Longrightarrow u \in C^\infty$

↑利用 Mikhlin-Hörmander 乘子定理

□

Corollary 9.2.1: 设 $0\in K$ 是 X 的凸子集. $A: K \to K$ 是连续&紧算子. 且 $\{u\in K \mid u = \lambda A[u], \exists\, 0\leq\lambda\leq 1\}$ 有界 则 A 在 K 中有不动点.

□

下面一个椭圆方程的例子,.

Example:

$$(*)\begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

U有界. $\partial U \in C^\infty$

$b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞. Lip.

Thm 9.2.3 (存在性) 若 $\mu>0$ 充分大. 则 $\exists u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$ 成为(*)的解.

Proof: 令 $f=-b(\nabla u)$　$u\in H_0^1(U)$.

由 b 是Lip 知 $f\in L^2(U)$.

设 w 是

$$(\#)\begin{cases}-\Delta w+\mu w=f & \text{in } U\\ w=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$ 的唯一弱解

由正则性结论. $w\in H^2(U)$. $\|w\|_{H^2}\lesssim\|f\|_{L^2}$.

下面我们来用Schaefer不动点定理.

希望: $X=H_0^1(U)$. $K=H^2\cap H_0^1$.

① $A: H_0^1\longrightarrow H_0^1\cap H^2\subset H_0^1$ 是连续, 紧的.

$u\longmapsto w$ (如上定义).

② μ 充分大时. $\{u\in H_0^1(U)\mid u=\lambda A[u]\ \exists 0\le\lambda\le1\}$ 在 $H_0^1(U)$ 中有界.

若"希望"的结论都成立 那么由Schaefer不动点定理即知

$\exists u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$. $A[u]=u$.

$\Rightarrow u$ solves (*).

首先: $\|A[u]\|_{H^2}\lesssim\|u\|_{H_0^1}+1$. ... (**)

为证 $A: H_0^1\to H_0^1$ 连续&紧.

$A[u_k] = w_k$　对 u_k 对应的 w_k

设 $u_k\to u$ in $H_0^1(U)$ 则由(**)知. $\sup_k\|w_k\|_{H^2(U)}<\infty$

$\Rightarrow\exists\ w_{k_j}\to w$ in $H_0^1(U)$.

由 w_{k_j} 定义知 $\forall v\in H_0^1(U)$. $\int_U\nabla w_{k_j}\cdot\nabla v+\mu w_{k_j}v\,dx=-\int_U b(\nabla u_{k_j})v\,dx$

$j\to\infty$. 有 $\int_U \underbrace{\nabla w\cdot\nabla v+\mu wv}_{\text{用}w_{k_j}\to w\text{ in }H_0^1}\,dx=-\int_U \underbrace{b(\nabla u)}_{\text{利用}b\text{ lip 与 }u_k\to u\text{ in }H_0^1}\cdot v\,dx$ $\forall v\in H_0^1(U)$ ~~A[u]~~

$\Rightarrow w=A[u]$

从而 $w_{k_j}\to w$ in $H_0^1(U)$ 推出了 $A[u_{k_j}]\longrightarrow A[u]$ in $H_0^1(U)$

$\therefore$ A连续. 利用 $H^2\hookrightarrow\hookrightarrow H_0^1$ 类似可得. A紧.

再证(2)：且 $\exists \lambda\in[0,1]$

设 $u\in H_0^1(U)$ $u=\lambda A[u]$

则 $\frac{u}{\lambda}=A[u]$. $u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$

且 $-\Delta u+\mu u=\lambda b(\nabla u)$ a.e. in U.

两边乘以 u，分部积分（事实上应先设 $u\in C_c^\infty$ 再逼近）

$$\Rightarrow \int_U |\nabla u|^2+\mu|u|^2\,dx=-\int_U \lambda b(\nabla u)u\,dx$$

$$\lesssim \int |u|(1+|\nabla u|)\,dx.$$

$$\lesssim \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2+C\int|u|^2+1\,dx.$$

$\mu>0$ 充分大时，有：$\|u\|_{H_0^1}^2\le C$. 且与 $0\le\lambda\le1$ 无关

$\square$

$f_k(x)\to f(x)$ on ...

$f(x)\to\frac{1}{2}$ a.s. ...

更多应用参见 Gilbarg, Trudinger 二阶椭圆方程 ch11.

§9.3 上解与下解

Schauder 不动点定理的方法对椭圆方程解之正则性有依赖（上一例用了 $u\in H^2$）

本节则是考虑利用极大值原理与比较原理：若有下解 $\underline{u}$，上解 $\bar{u}$，可否找到解 u，

$\underline{u}\le u\le\bar{u}$?

考虑：

$$(*)\begin{cases}-\Delta u=f(u) & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Smooth. $|f'|\le C$.

<u>Def</u>：称 $u\in H_0^1(U)$ (resp. $\bar{u}\in H^1$, $\underline{u}\in H^1$) 为 $(*)$ 的弱（resp 上、下）解

若 $$\int_U Du\cdot Dv\,dx = \int_U f(u)v\,dx$$

(resp. $\bar{u}$ $\ge$ $\bar{u}$).

$\underline{u}$ $\le$ $\underline{u}$

Rmk: $\bar{u}, \underline{u} \in C^2(U)$ 则 上解: $-\Delta \bar{u} \geq f(\bar{u})$ in U.
下解: $-\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u})$

Thm 9.3.1 (上、下解~~存在定理~~夹逼定理).

设(*)存在弱上解 $\bar{u}$, 弱下解 $\underline{u}$, 满足 $\begin{cases} \underline{u} \leq 0, \ \bar{u} \geq 0 & \text{on } \partial U \\ \underline{u} \leq \bar{u} & \text{a.e. in } U \end{cases}$

则(*)存在弱解 u. $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ a.e. in U.

<u>证明</u>: 我们用迭代法进行构造 u.

令 $u_0 = \underline{u}$. 设 u_k 已定义好了, 用以下方程归纳定义 $u_{k+1} \in H_0^1(U)$

$$(\#_k) \begin{cases} -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(u_k) + \lambda u_k \\ u_{k+1} = 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$. 使 $z \mapsto f(z) + \lambda z$ 不减. 这由 $|f'| \leq C$ 可以做到.

<u>Claim</u>: $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_k \leq \cdots$ a.e. in U.

先设 claim 成立, 那么下面证明 $u_k \leq \bar{u}$ a.e. in U.

$k=0$ 是显然的. 设对 k 成立. i.e. $u_k \leq \bar{u}$ a.e. in U.

对 $k+1$, 我们只用证 $\mathcal{L}^n\{u_{k+1} \geq \bar{u}\} = 0$ 即可.

$$\int_{\{u_{k+1} \geq \bar{u}\}} |\nabla(u_{k+1} - \bar{u})|^2 + \lambda (u_{k+1} - \bar{u})^2 \, dx$$

~~$u_k \le u$ a.e.~~ ~~且 $z \mapsto f(z)+\lambda z$ 不减~~

$$\underset{分部积分}{=} \int_{\{u_{k+1} \geq \bar{u}\}} (u_{k+1} - \bar{u}) \Big(\underbrace{\big(-(\Delta u_{k+1} - \Delta \bar{u})\big) + \lambda (u_{k+1} - u)}_{= f(u_k) + \lambda u_k - (f(\bar{u}) + \lambda \bar{u})} \Big)$$

$$\underset{u_k \leq \bar{u}}{\leq} \int_U (u_{k+1} - \bar{u})^+ \big[(f(u_k) + \lambda u_k) - (f(\bar{u}) + \lambda \bar{u}) \big] dx \underset{f(z)+\lambda z 不减}{\leq} 0$$

$\Rightarrow u_{k+1} \leq \bar{u}$ a.e. in U.

从而有: $\underline{u} \leq \cdots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \cdots \leq \bar{u}$ a.e. in U.

$\Rightarrow \exists\, u(x) \overset{a.e.}{=} \lim_{k \to \infty} u_k(x)$. 由 DCT 知 $u_k \to u$ in L^2.

最后只用验证 u 是 (*) 的弱解

~~证~~ 由于 $\|f(u_k)\|_{L^2(U)} \le C(\|u_k\|_{L^2(U)}+1)$.

故 $\underline{\sup_k \|u_k\|_{H_0^1(U)}} < \infty$

平方 $\simeq \int \nabla u_k\cdot\nabla u_k = -\int u_k \Delta u_k$

$= \int u_k(f(u_{k-1})+\lambda u_{k-1}-\lambda u_k)$.

$\lesssim_{C,\lambda} \|u_k\|_{L^2}^2 + \|u_{k-1}\|_{L^2}^2$

而 $\{u_k\}$ 是 L^2 中的柯西列，故右边有一致上界

由 Banach-Alaoglu 定理

$\exists$ 子列 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$.

现 Fix $v\in H_0^1(U)$，则由 $(\#_{k_j-1})$ 知

$$\int_U \nabla u_{k_j}\cdot\nabla v + \lambda u_{k_j} v\,dx = \int_U (f(u_{k_j-1})+\lambda u_{k_j-1})v\,dx.$$

$j\to\infty$　　注意 k_j-1 不一定在 $\{k_j\}$ 中

右边 $\longrightarrow \int_U (f(u)+\lambda u)v\,dx$　(这里用了 $u_k\to u$ in L^2)

左边 $\longrightarrow \int_U \underline{\nabla u\cdot\nabla v} + \lambda u v\,dx$

$u_{k_j} \rightharpoonup u$ in H_0^1 用在这一项上.

$\Rightarrow \int_U \nabla u\cdot\nabla v = \int f(u)v\,dx \Rightarrow u$ 为 (*) 的弱解.

$\underline{u} \le u \le \bar{u}$ a.e.

<u>余下只需证 claim:</u>

归纳证明.

$k=0$ ~~是~~　则由 $(\#_0)$ 知.

$$\int_U \nabla u_1\cdot\nabla v + \lambda u_1 v\,dx = \int_U (f(u_0)+\lambda u_0)v\,dx \quad \forall v\in H_0^1(U).$$

但 $\int \nabla u_0\cdot\nabla v \le \int_U f(u_0)v\,dx$

故
$$\int_U \nabla(u_1-u_0)\cdot\nabla v\,dx \ge \int \lambda(u_0-u_1)v\,dx.$$

令 $v=(u_0-u_1)^+$ 有 $\int_U \nabla(u_0-u_1)\cdot\nabla(u_0-u_1)^+ + \lambda(u_0-u_1)(u_0-u_1)^+dx \le 0$

由exercise 5.18得.

$$\nabla(u_0-u_1)^+ = \begin{cases} \nabla(u_0-u_1) & \text{a.e. on } \{u_0 \geq u_1\} \\ 0 & \text{a.e. on } \{u_0 \leq u_1\} \end{cases}$$

于是

$$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} |\nabla(u_0-u_1)|^2 + \lambda(u_0-u_1)^2 \, dx \leq 0$$

$\Rightarrow u_0 \leq u_1$ a.e in U.

归纳地假设对k成立 i.e. $u_{k-1} \leq u_k$ a.e in U.

由 $(\#_k)$ 知 $\int_U \nabla u_{k+1} \cdot \nabla v + \lambda u_{k+1} v \, dx = \int_U (f(u_k) + \lambda u_k) v \, dx$.

$(\#_{k-1})$ 知 $\int_U \nabla u_k \cdot \nabla v + \lambda u_k v \, dx = \int_U (f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) v \, dx$

$\forall v \in H_0^1(U)$

令 $v = (u_k - u_{k+1})^+$

同上 $\Rightarrow$

$$\int_{\{u_k \geq u_{k+1}\}} |\nabla(u_k-u_{k+1})|^2 + \lambda(u_k-u_{k+1})^2 \, dx$$

$$= \int_U \Big((f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k) \Big) (u_k - u_{k+1})^+ \, dx \leq 0$$

$\Rightarrow u_k \leq u_{k+1}$ a.e. in U claim证毕.

$\square$

§9.4 解的爆破与Pohozaev恒等式.

1. 解的爆破.

大初值:

设 (*) $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^2 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times (0,T) \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$.

我们证明当初值"较大"时,解不存在. 这个方程解产生爆破的原因是
$\frac{d}{dt}u=u^2$ 在 $u(0)>0$ 时会发生有限时间爆破. 另一方面 $-\Delta u$ 项带来的耗散
导出了热方程, 在奇点之外 C^∞
从而需要比较: u^2 带来的爆破, $-\Delta u$ 带来的光滑效应, 谁更大?

设 $-\Delta$ 是在 $H_0^1(U)$ (零边值) 下的主特征值为 $\lambda_1>0$. 对应有特征函数
$w_1\in C^\infty(U)$. $w_1>0$. $\int_U w_1\,dx=1$.

i.e. $\begin{cases} -\Delta w_1=\lambda_1 w_1 & \text{in } U \\ w_1=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

若 u 为 (*) 的 C^∞ 解 $g\geqslant 0$ 且不恒为 0. $\Rightarrow u>0$ in U_T (强极大值原理).

Thm 9.4.1 (大初值爆破)

$$\int_U g w_1\,dx>\lambda_1.$$

则 (*) 没有~~全局存在~~ C^∞ 解, $\forall T>0$.

Proof: 定义 $\eta(t):=\int_U u(x,t)w_1(x)\,dx. \quad 0\le t\le T$

$$\Rightarrow \eta'(t)=\int_U \partial_t u(x,t)w_1(x)\,dx$$

$$\overset{\partial_t u=\Delta u+u^2}{=\!=}\int_U(\Delta u+u^2)w_1\,dx.$$

$$\overset{\text{分部积分两次}}{=\!=}\int_U u\underbrace{\Delta w_1}_{\lambda_1 w_1}+u^2w_1\,dx$$

$$=-\lambda_1\eta+\int_U u^2w_1\,dx$$

$$\eta=\int_U uw_1\,dx=\int_U u\sqrt{w_1}\sqrt{w_1}\,dx$$

$$\le\sqrt{\left(\int u^2w_1\right)^{\cancel{2}}\cancel{dx}}\cdot\sqrt{\int w_1\,dx}$$

$$=\sqrt{\int u^2w_1\,dx}$$

$$\Rightarrow \eta'\ge-\lambda_1\eta+\eta^2.$$

令 $\xi(t) = e^{\lambda_1 t}\eta(t)$.

$$\xi'(t) = e^{\lambda_1 t}\eta'(t) + \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\eta(t)$$
$$\geq -\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\cancel{\eta(t)} + e^{\lambda_1 t}\eta^2(t) + \cancel{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}\eta(t).$$
$$= e^{\lambda_1 t}\eta^2(t).$$
$$= e^{-\lambda_1 t}\xi^2(t).$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} \geq -e^{\lambda_1 t}\xi^2(t).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{\xi}\right) \geq e^{-\lambda_1 t}.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\xi(t)} \geq -\frac{1}{\xi(0)} + \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}.$$

$$\Rightarrow \xi(t) \geq \frac{\xi(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \xi(0)(1-e^{-\lambda_1 t})}$$

但 $\int_U g w_1 \, dx > \lambda_1$

故 $\eta(0) = \xi(0) > \lambda_1$.

$$\Rightarrow \xi(t) \longrightarrow +\infty \quad \text{as } t \to t^* := -\frac{1}{\lambda_1}\log\left(\frac{\eta(0)-\lambda_1}{\eta(0)}\right)$$

□

<u>Rmk</u>: 我们实际上证明：(*)的解，要么光滑性差到我们无法判断（注意到证明中我们用了弱积分），要么在有限时间爆破.

□

小初值爆破.

$$(**)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

$g \geq 0$ 且不恒为0. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Thm 9.4.2 (小初值爆破).

$1<p<\frac{n+2}{n}$ 时, $\forall T>0$, (**) 都不存在一个非负可积的光滑解

Proof: $\mathbb{R}^n$ 中我们可以用热方程基本解完成估计(代替了特征函数).

令 $\eta(t)=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,\Phi(x,s)\,dx$.

其中 $\Phi(x,s)=\frac{1}{(4\pi s)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$, $\int\Phi\,dx=1$.

$$\eta'(t)=\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t u\,\Phi\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta u+u^p)\,\Phi\,dx$$

$\underline{\underline{\text{两次分部积分}}}$ $\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\Phi+u^p\Phi\,dx$.

$$\Delta_x\Phi(x,s)=\frac{1}{(4\pi s)^{\frac{n}{2}}}\left(-\frac{n}{2s}+\frac{|x|^2}{4s^2}\right)e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$$

直接计算 $\partial_{x_i}^2\Phi$ 再加起来.

$$=\left(-\frac{n}{2s}+\frac{|x|^2}{4s^2}\right)\Phi(x,s).$$

$$\Rightarrow \eta'(t)\geq -\frac{n}{2s}\eta(t)+\int_{\mathbb{R}^n}u^p\Phi\,dx.$$

而 $\eta^p=\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(x,t)\Phi(x,s)\,dx\right)^p$

$$\leq\Big(\underbrace{\|\Phi^{\frac{1}{p'}}\|_{L^{p'}}}_{=1}\;\|u\,\Phi^{\frac{1}{p}}\|_{L^p}\Big)^p$$

$$=\int u^p\Phi\,dx\leq\eta'(t)+\frac{n}{2s}\eta(t).$$

$\lambda:=\frac{n}{2s}$ $\Rightarrow \eta'(t)\geq-\lambda\eta(t)+\eta(t)^p$.

令 $\xi(t)=e^{\lambda t}\eta(t)$ $\Rightarrow \xi'(t)\geq e^{-\lambda(p-1)t}\xi^p$. ξ^p

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-p)}\xi^{1-p}\right)\geq e^{-\lambda(p-1)t}.$$

积分可得

$$\xi^{1-p}(t) \le \xi^{1-p}(0)\left(1-\frac{\xi^{1-p}(0)\,(1-e^{\lambda(p-1)t})}{\lambda}\right)$$

所以当 $\eta(0)=\xi(0)>\lambda^{\frac{1}{p-1}}$ 时

$\xi^{1-p}(t)\longrightarrow 0$ as $t\to$ some t^*

而 $\eta(0)>\lambda^{\frac{1}{p-1}}$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)\,\Phi(x,s)\,dx > \lambda^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\iff \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,e^{-\frac{|x|^2}{4s}}\,dx > \left(\frac{n}{2s}\right)^{\frac{1}{p-1}} s^{\frac{n}{2}} = C\cdot s^{\frac{n}{2}-\frac{1}{p-1}}$$

$\lambda=\frac{n}{2s}$

but $\frac{n}{2}-\frac{1}{p-1}<0$

故 $g\neq0$ 时 取 s 充分大 即有右边 $\to 0$ 但左边 $<\infty$

矛盾!

□

下面我们考虑之前见过的 p-Laplace 方程

$$(*)\quad\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

§8.5中,我们证明了 $1<p<\frac{n+2}{n-2}$ 时,$(*)$有非零的解

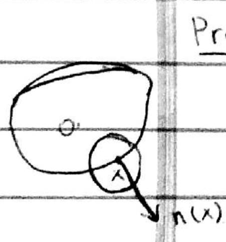
本节我们利用 Noetherian Theorem 导出的单调性证明 $p>\frac{n+2}{n-2}$ 时,$(*)$没有非零解.

Def. $U\subset\mathbb{R}^n$ 称作关于0的"星形域"(star-shaped),若 $\forall x\in\bar{U}$, $\{\lambda x\mid 0\le\lambda\le1\}\subset\bar{U}$

易见凸集肯定是星形域.

Lemma 9.4.1 (星形域的法向量) 设 $\partial U\in C^1$, U为关于0的星形域 则 $\forall x\in\partial U$ $x\cdot\vec{n}(x)\ge0$, $\vec{n}$为x处的外法向量

Proof: $x\in\partial U$: $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall y\in\bar{U}\cap B(x,\delta)$ 有 $\vec{n}(x)\cdot\frac{y-x}{|y-x|}\le\varepsilon$



$$\Rightarrow \limsup_{\substack{y\to x\\ y\in\bar U}} \vec{n}(x)\cdot\frac{(y-x)}{|y-x|}\le 0$$

相邻边界很小 → 是$<\varepsilon$,不是绝对值$<\varepsilon$

令 $y=\lambda x\in\bar{U}$ $\Rightarrow$ $\vec{n}(x)\cdot\frac{x}{|x|} = -\lim_{\lambda\to1}\vec{n}(x)\cdot\frac{(\lambda x-x)}{|\lambda x-x|}\ge0$

□

(18)

Thm 9.4.3 若U为星形域，$\partial U \in C^1$. ~~u=0 in U~~

则(*)在 $p > \frac{n+2}{n-2}$ 时 没有非零解

Proof: 在方程 $-\Delta u$ (~~…~~) $= |u|^{p-1}u$ 两边同乘$(x\cdot\nabla u)$ 并积分

$$\Longrightarrow \int_U (-\Delta u)(x\cdot\nabla u)\,dx = \int_U |u|^{p-1}u\,(x\cdot\nabla u)\,dx \quad \cdots(*)$$

这样选取乘子的原因在8.6节已经解释过

$$(*)\text{左} = -\int_U \Delta u\,(x\cdot\nabla u)\,dx$$

$$= -\sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_i^2 u\; x_j \partial_j u\,dx$$

$$(\text{分部积分}) = \sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_i u\, \partial_i(x_j \partial_j u)\,dx - \int_{\partial U} \partial_i u \cdot n^i x_j \partial_j u\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$=: I_1 + I_2$$

$$I_1 = \sum_{i,j=1}^n \int_U \partial_i u\, \underbrace{\delta_{ij}\,\partial_j u}_{\sum_j = \partial_i u} + \partial_i u\, x_j \partial_i \partial_j u\,dx$$

$$= \int_U |\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^n \int_U x_j \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i u\, \partial_j \partial_i u}_{=\frac{1}{2}\partial_j\left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2\right)}\,dx$$

$$= \int_U |\nabla u|^2 + \int_U \sum_{j=1}^n \partial_j\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) x_j\,dx$$

第2项分部积分 $\;\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_U |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial U} \frac{|\nabla u|^2}{2}(\vec{n}\cdot\vec{x})\,d\mathcal{H}^{n-1}.$

而 $u=0$ on ∂U 故 $\nabla u(x) \,//\, \vec{n}(x)$ $\forall x\in\partial U$.

$$\Rightarrow \nabla u(x) = \pm|\nabla u(x)|\,\vec{n}(x) \quad \text{on } \partial U.$$

$$\Rightarrow I_2 = -\int_U |\nabla u|^2 (\vec{n}\cdot\vec{x})\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

于是(*)左化为 $I_1 + I_2 = \left(1-\frac{n}{2}\right)\int_U |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2 (\vec{n}\cdot\vec{x})\,d\mathcal{H}^{n-1}.$

$$\text{而}(*)\text{右} = \sum_{j=1}^n \int_U |u|^{p-1}u\; x_j \partial_j u\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_U \underbrace{|u|^p \underbrace{\frac{u}{|u|}}_{sgn(u)} \cdot \partial_j u}_{=\partial_j\left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1}\right)}\; x_j\,dx = \sum_{j=1}^n \int_U \partial_j\left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1}\right) x_j\,dx \underset{\text{分部积分且 } u|_{\partial U}=0}{=} -\frac{n}{p+1}\int_U |u|^{p+1}\,dx$$

从而 (*) 化为

(#) $$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial U} |Du|^2(\vec{n}\cdot\vec{x})\,dS = \frac{n}{p+1}\int_U |u|^{p+1} dx.$$

而由 lemma 9.4.1. (#) 第2项 ≥ 0

所以
$$\left(\frac{n-2}{2}\right)\int_U |Du|^2 dx \leq \frac{n}{p+1}\int_U |u|^{p+1} dx.$$

但 $\int_U |Du|^2 dx = \int_U |u|^{p+1} dx$

这是因为 $-\Delta u = u|u|^{p-1}$

$\Longrightarrow -u\Delta u = u^2|u|^{p-1} = |u|^{p+1}$

两边积分, 左边分部积分一次即得

这样 若 $u\neq 0$ $\frac{n-2}{2} \leq \frac{n}{p+1} \Longrightarrow p \leq \frac{n+2}{n-2}$

$\because p > \frac{n+2}{n-2} \Longrightarrow u \equiv 0$

□

Rmk (1) (#) 称作 Derrick-Pohozaev 恒等式

(2) 关于 p-Laplacian, 我们还可以导出一些单调性

§8.6 中 $I[w] = \int_U |Dw|^p dx \Longrightarrow \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$

$\Longrightarrow$ 诺特定理表明: $\operatorname{div}\left(\left(Du\cdot x + \frac{n-p}{p}u\right)p|Du|^{p-2}Du - \vec{x}|Du|^p\right) = 0$

上式在 $B(0,r) \subset U$ 上积分

利用 Gauss-Green 公式得:

$$(n-p)\int_{B(0,r)} |Du|^p dx = r\int_{\partial B(0,r)} |Du|^p - p|Du|^{p-2}u_r^2\, dH^{n-1}$$

$(\vec{x}\cdot\vec{n}) = \vec{x}\cdot\frac{\vec{x}}{|x|} = |x| = r$ on $\partial B(0,r)$ $\boxed{u_r = \frac{(Du\cdot x)}{|x|}}$

$\Longrightarrow$
$$\frac{n-p}{r^{n-p+1}}\int_{B(0,r)} |Du|^p dx = \frac{1}{r^{n-p}}\int_{\partial B(0,r)} |Du|^p - p|Du|^{p-2}u_r^2\, dH^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{p-n}{r^{n-p+1}}\int_{B(0,r)} |Du|^p dx + \frac{1}{r^{n-p}}\int_{\partial B(0,r)} |Du|^p dH^{n-1} = \frac{p}{r^{n-p}}\int_{\partial B(0,r)} |Du|^{p-2}u_r^2\, dH^{n-1} \geq 0$$

而上式左边恰为 $\partial_r\left(\frac{1}{r^{n-p}}\int_{B(0,r)} |Du|^p dx\right)$, 故 $r \longmapsto \frac{1}{r^{n-p}}\int_{B(0,r)} |Du|^p dx$ 不减

□

§9.5 解的几何性质

本节讨论一些简单的几何性质.

方程解的取值 可以用水平集刻画 ⟶ 考虑水平集的几何性质.

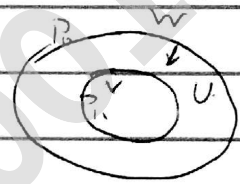
也可以用解本身的性质. 有例如 对称性、径向 等.

由于工具有限, 我们只讨论少量简单的例子.

1. 水平集是星形域.

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 开. $U=W-\bar{V}$. $\overset{\text{open}}{W}\supset\supset\overset{\text{open}}{V}$. 且 W. V 均是关于 0 的星形域

$\Gamma_0=\partial W$. $\Gamma_1=\partial V$.



考虑 $\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \Gamma_0\\ u=1 & \text{on } \Gamma_1\end{cases}$

那么由强极大值原理知 $0<u<1$ in U.

Thm 9.5.1 (星形域水平集)

$\forall\, 0<\lambda<1$ $\Gamma_\lambda:=\{x\in U \mid u(x)=\lambda\}$ 是光滑曲面. ~~且是某个关于~~ 0

~~而是~~ 且是某个关于0的星形域的边界

Proof. ① 先证 Γ_λ 是光滑超曲面.

$\forall \mu>0$. 注意到 $x\longmapsto u(\mu x)$ 是调和函数

从而 $v(x):=\frac{d}{d\mu}u(\mu x)\big|_{\mu=1}=\nabla u(x)\cdot x$ 也是调和函数(直接求Δ即可).

由 $u=0$ on Γ_0 知 $\nabla u(x)\,/\!/\,\vec{n}(x)$ along ∂W 而 $\begin{cases}0<u<1 \text{ in } U\\ u=0 \text{ on } \partial W\end{cases}$ 故 $\nabla u(x)$ 与 $-\vec{n}(x)$ 同向 $\forall x\in\partial W$

而 W 是关于0的星形域. 故 $\vec{x}\cdot\vec{n}(x)\geq 0$ on $\Gamma_0=\partial W$.

$$\Rightarrow v=\nabla u(x)\cdot x\leq 0 \text{ on } \Gamma_0$$

同理可以证明 $v=\nabla u(x)\cdot x\leq 0$ on Γ_1.

由调和函数强极大值原理知 $v<0$ in U. 这样 $\forall x\in U$ $\nabla u(x)\neq 0$

由隐函数定理知 $\Gamma_\lambda=\{x\in U \mid u(x)=\lambda\}$ 是 C^∞ 超曲面

(微分流形中的一个小结论)

但是

上面那句话装了一个不错的B，还蕴含了一些细节在里面.

实际的操作是：我们记 $x=(x',x_n)$, $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$

现知 $\forall (x_0',x_{n_0})\in U$, $\nabla_x u(x',x_n)\neq 0$

则 $\forall (x_0',x_{n_0})\in\Gamma_\lambda$. 据隐函数定理：· ∃邻域 $V_{x_0}\ni(x_0',x_{n_0})$

· ∃开集 $W_{x_0}\subset\mathbb{R}^{n-1}$

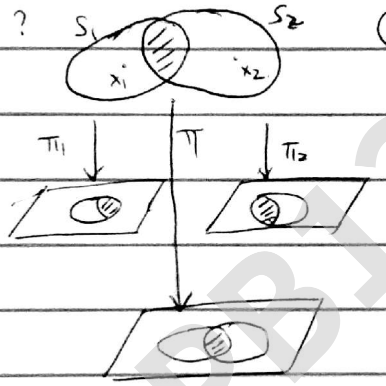
C^∞函数 $g_{x_0}: W_{x_0}\to\mathbb{R}$

s.t. $g_{x_0}(x_0')=x_{n_0}$.

每个 $x_0\in\Gamma_\lambda$ 这给出了一个小的曲面片 ← $u(x,g(x))=u(x_0',x_{n_0})=\lambda$

且每个曲面片 C^∞

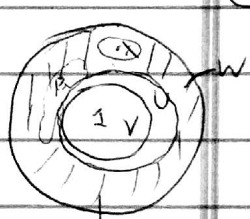
为何整体 C^∞？



因为 $S_1\to S_2$ 相应的 transition map $\pi_2\circ\pi_1^{-1}$ 是 C^∞的.

投影映射本身是 C^∞的.

② 延拓. 设 $u\equiv 1$ in V



对这块用强极大值原理

$U_\lambda=\{x\in W \mid u>\lambda\}$, 则 U_λ 为 W的开子集.

$\partial U_\lambda=\Gamma_\lambda$

由强极大值原理 U_λ 是连通集 为何？否则挖去 包含了V的 连通分支 $U_{\lambda,1}$.

那么 $W-U_{\lambda,1}$ 的边界上 $|u|\le\lambda$ 可行，是因为 $u|_V=1$, V连通

由强极大值原理知 $W-U_{\lambda,1}$ 的内点中有 $\exists x_0$. $u(x_0)=\lambda$

$\Longrightarrow u|_{W-U_{\lambda,1}}\equiv\lambda$. 这又会和 $u|_{\Gamma_0}=0$ 矛盾！

这因为 U_λ 有连通分支在 $W-U_{\lambda,1}$ 中

现在 设 $x\in\Gamma_\lambda$, $n(x)$ 为 Γ_λ 在x的外法向量. 则 $\nabla u(x)$ 与 $\vec{n}(x)$ 同向.

由 $u(x)<0$ 知 $x\cdot\vec{n}(x)>0$ $\forall x\in\Gamma_\lambda$

③ 此时可以证明 Γ_λ 是某个关于0的星形域的边界

若否 则 $\exists x\in\Gamma_\lambda$ s.t. $y=\mu x\notin U_\lambda$, $\mu<1$

但 $n(x)\cdot\frac{x}{|x|}=-\lim_{\mu\to1^-} n(x)\cdot\frac{\mu x-x}{|\mu x-x|}\le 0$ 矛盾！ □

~~9.1.2~~

2. 径向对称

我们希望 半线性方程

$$(*) = \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \qquad U = \mathring{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$$

的解 是径向解，即可以写作 $u(x) = v(r)$，$r = |x|$ 的形式。

实际上，在 Ch2 中，我们推导 Laplace 方程基本解的时候 就是假设了先为径向解，猜出基本解的形式（虽然这仅是一个给大二学生讲法 基本解由来的借口罢了，如基本解定义是 $-\Delta u = \delta$，δ 为 0 处的 dirac，才试是在广义上按意义下成立的，作 Fourier 变换，由 $\hat{\delta} = 1$，故 $4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = 1 \Rightarrow u = \left(\frac{1}{4\pi^2|\xi|^2}\right)^{\vee}$）。

= 最终结果

本节考虑 $(*)$ 时，还要加上条件 $u > 0$ in U

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz 连续。

目的：~~何时~~ 是否 u 必为径向解？

所用的方法称作移动平面法，这需要对已有的极大值原理加强

Lemma 9.5.1（Hopf 引理的加细）

$V \subset \mathbb{R}^n$ 开，$v \in C^2(\bar{V})$，$c \in L^\infty(V)$。

设 $\begin{cases} -\Delta v + cv \geq 0 & \text{in } V \\ v \geq 0 & \text{in } V \end{cases}$ 且 $v \not\equiv 0$

(1) 若 $x^0 \in \partial V$，$v(x^0) = 0$ 且 V 满足 在 x^0 处 内球条件（见 ch6），

则 $\frac{\partial v}{\partial n}(x^0) > 0$.

(2) $v > 0$ in V

Proof. 构造 $w = e^{-\lambda x_1} v$，$\lambda > 0$ 是待定常数

$\Rightarrow v = e^{\lambda x_1} w$

$cv \geq \Delta v = \lambda^2 v + 2\lambda e^{\lambda x_1} \partial_{x_1} w + e^{\lambda x_1} \Delta w$

$\Rightarrow -\Delta w - 2\lambda \partial_{x_1} w \geq (\lambda^2 - c) w \geq 0$ in V 取 $\lambda = \sqrt{\|c\|_{L^\infty}}$ 即可.

令 $K = -\Delta - 2\lambda\partial_{x_1}$

则 w 是 K 的上解，由强极大值原理知 $w > 0$ in V.

由 ch 6 的 Hopf 引理知 $\frac{\partial w}{\partial n}(x^0) < 0$

但 $\frac{\partial w}{\partial n}(x^0) = \nabla w(x^0)\cdot\vec{n}(x^0)$

$$= -e^{\lambda x_1^0}\frac{\partial v}{\partial n}(x^0). \quad (\text{因 } v(x^0)=0).$$

~~而 $v(x^0)=0$~~ $\Rightarrow$ (1) 成立.

$\Rightarrow$ (2) 成立 (因 $w>0$ in V). $\square$

Lemma 9.5.2 (边界项估计)

设 $u\in C^2(\bar{U})$ 满足 $(*)$ 且 $u>0$ in U. 则 $\forall x^0\in\partial U\cap\{x_n>0\}$

要么 $\partial_{x_n}u(x^0)<0$

要么 $\partial_{x_n}u(x^0)=0$, $\partial_{x_n}^2 u(x^0)>0$.

且无论是哪一种情况，u 作为 x_n 的函数都在 x^0 附近严格递减.

证明：Fix $x^0\in\partial U\cap\{x_n>0\}$

令 $\vec{\nu}=\vec{\nu}(x^0)=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ 为 ∂U 上在 x^0 处的外法向量. $\nu_n>0$.

① 若 $f(0)\geq 0$, 则 $\partial_{x_n}u(x^0)<0$

这因为 $-\Delta u - f(u) = 0$

$$-\Delta u - f(u) + f(0) - f(0)$$

$$\leq -\Delta u - (f(u)-f(0))$$

$$= -\Delta u - \underbrace{\int_0^1 f'(tu(x))\,dt}\cdot u$$

$$\leq -\Delta u + cu \qquad \text{令 } c = -\int_0^1 f'(tu(x))\,dt$$

由 Lem 9.5.1 知 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)<0$. 但在 ∂U 上，因 $u\equiv 0 \Rightarrow \nabla u \parallel \vec{\nu} \Rightarrow \partial_{x_n}u(x^0)<0$

$\nu_n>0$

② 现设 $f(0)\leq 0$. 若 $\partial_{x_n}u(x^0)<0$, 则证毕

~~若 $\partial_{x_n}u(x^0)=0$ (因~~ ∇u

否则 由于 $\nabla u\parallel\nu$ 知 $\nabla u(x^0)=0$. (因为此时 ∇u 只有 ∂_{x_n} 的分量了，而现在又不是 $\partial_{x_n}u(x^0)<0$ 的情况. 所以只能 $=0$

也就是那另一种情况)

而不妨设 $x^0=(0,0,\dots,0,1)$ $\vec{\nu}=(0,0,\dots,1)$

$\Delta_{n-1}u + \partial_n^2 u = -f(u)$

这是因为我们在 Ch2 中证明了 转轴变换下 (*) 的形式不会变

下面我们计算 $\partial_i\partial_j\gamma(x^0)$. 这么做是为了求 $\partial_{x_n}^2 u(x^0)$.

$u=0$ on ∂U $\Rightarrow \forall x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ with $|x'|\le 1$, $\gamma(x') := \sqrt{1-|x'|^2}$ 有 $u(x',\gamma(x'))=0$.

~~($1\le i,j\le n-1$)~~

~~求$\partial_i\partial_j$之后 先求一导~~

$$\cancel{\partial_i u(x',\gamma(x')) + \partial_n u(x',\gamma(x'))\,\partial_{x_i}\gamma} = 0$$

~~再求一导~~

$$\cancel{\partial_j\partial_i u(x',\gamma(x')) + \partial_n\partial_i u(x',\gamma(x'))\,\partial_{x_j}\gamma}$$
$$\cancel{+\partial_j\partial_n u(x',\gamma(x'))\,\partial_{x_i}\gamma}$$
$$+\partial_{x_i}\gamma\left(\partial_j\partial_n u(x',\gamma(x')) + \partial_n^2 u(x',\gamma(x'))\,(\partial_{x_j}\gamma)\right)$$
$$\cancel{+\partial_n u(x',\gamma(x'))\,\partial_{x_j}\partial_{x_i}\gamma} = 0$$

~~将 $(x',\gamma(x'))$ 带成 $x^0=(0,0,\dots,0,1)$~~

记 $v = \partial_n u(x',\gamma(x'))$　　v不要写开，不然会乱死你！

$u(x',\gamma(x'))=0$

求一导： $\partial_i u + \partial_n u\,\partial_i\gamma = 0 = \partial_i u + v\cdot\partial_i\gamma$　　傻逼Evans跳了多少步

再求一导： $\partial_j\partial_i u + (\partial_n\partial_i u)(\partial_j\gamma) + \partial_j v\,\partial_i\gamma + v\cdot\partial_j\partial_i\gamma = 0$

~~其中 $\partial_i v = \partial_i\partial_n u +$~~

取 $i=j$ 有： $\partial_i^2 u + \partial_i\partial_n u\,\partial_i\gamma + \partial_i v\,\partial_i\gamma + v\cdot\partial_i^2\gamma = 0$　　不要按书上那样做吧，

对 i 从 $1\sim n-1$ 求和　　感觉用不着

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i^2 u = \sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\partial_i\partial_n u}_{代入}\,\partial_i\gamma + \partial_i v\,\partial_i\gamma + v\,\partial_i^2\gamma$$

左边的方法，实际上已在第7章习题9的证明中出过

而 $\partial_i v = \partial_i\partial_n u + \partial_n^2 u\,\partial_i\gamma$　代入上式

有： $-\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i^2 u = \sum_{i=1}^{n-1}2\partial_i v\,\partial_i\gamma - \partial_n^2 u\,|\nabla_{n-1}\gamma|^2 + v\Delta_{n-1}\gamma$

而 $u\in C^2(\bar U)$ (C^2到边界条件不可缺！) 知 $\Delta u = -f(u)$ on ∂U

$\Rightarrow$ 上式左边 $= f(u) + \partial_n^2 u$

$$\Rightarrow (1+|\nabla_{n-1}\gamma|^2)\,\partial_n^2 u = -f(u) + \sum_{i=1}^{n-1}2\partial_i v\,\partial_i\gamma + v\Delta_{n-1}\gamma$$

下面求出 $\partial_i\gamma$ 即可. 因为 $v(x^0)=0$ (已设 $\nabla u(x^0)=0$).

$\gamma(x') = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}$ $\Rightarrow \partial_i\gamma = \frac{x_i}{(1-|x'|^2)^{\frac{1}{2}}}$　所以在 x^0 处 $\partial_i\gamma(x^0)=0$ $1\le i\le n-1$

$|\nabla_{n-1}\gamma|^2 = 0$

$10! \quad 5040\times 8\times 9\times 10$

72

1008

3528

36288

这样在 $x=x^0$ 处有

$$\partial_n^2 u(x^0) = -f(0) < 0$$ 证毕!

□

下面用移动平面法证明(*)的正解必是径向解

设 $0\le\lambda\le 1$ 记 $P_\lambda := \{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n=\lambda\}$

· $x_\lambda = (x_1,\dots,x_{n-1},2\lambda-x_n)$ 为 x 关于 P_λ 的反射

· $E_\lambda := \{x\in U \mid \lambda<x_n<1\}$

Thm 9.5.2 (径向对称) 若 $u\in C^2(\bar U)$ 是(*)的正解 则 $u(x)=v(r)$ $r=|x|$.

v 是 $[0,1]\to[0,\infty)$ 上的严格减函数.

证明: 对 $0\le\lambda<1$

考虑命题 $(*_\lambda)$: $u(x)<u(x_\lambda)$ $\forall x\in E_\lambda$

由 Lemma 9.5.2 知 $(*_\lambda)$ 在 $\lambda\to 1^-$ 时成立

令 $\lambda_0 = \inf\{0\le\lambda<1 \mid (*_\mu) 对 \lambda\le\mu<1 成立\}$

我们只用证明 $\lambda_0=0$.

因为如果我们一旦证到 $\lambda_0=0$, 我们就有 $\forall x\in U\cap\{x_n>0\}$

$$u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)\ge u(x_1,\dots,x_n).$$

类似 $\forall x\in U\cap\{x_n\ge 0\}$ $u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n)\le u(x_1,\dots,x_n)$.

这只需在 $U\cap\{x_n<0\}$ 上用一次之前的结果

$\Rightarrow u$ 关于 P_0 对称. ~~且~~ $\partial_{x_n}u=0$ on P_0

由于(*)旋转不变, 故结论成立.

下面证 $\lambda_0=0$, 反设 $\lambda_0>0$ 令 $w(x)=u(x_{\lambda_0})-u(x)$. $\forall x\in E_{\lambda_0}$.

$-\Delta w(x) = f(u(x_{\lambda_0})) - f(u(x)) = -cw$ in E_{λ_0}

$w\ge 0$ in E_{λ_0}.

$c = \int_0^1 f'(su(x_{\lambda_0})+(1-s)u(x))\,ds$

由加强 Hopf 引理知 $w>0$ in E_{λ_0}.

老套路了吧

$\partial_{x_n}w>0$ on $U\cap P_{\lambda_0}$.

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow u(x)<u(x_{\lambda_0}) && \text{in } E_{\lambda_0}\\ &\partial_{x_n}u<0 && \text{on } P_{\lambda_0}\cap U\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{lem 9.5.2}}$$ $\exists\,\varepsilon_0$ 充分小 s.t. $\forall\, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$

$u(x)<u(x_{\lambda_0-\varepsilon})$ in $E_{\lambda_0-\varepsilon}$

这与 λ_0 定义的极小性矛盾! □

§9.6 梯度流：凸线性泛函的"次微分"(sub-differential)

考虑非线性抛物方程

$$(*)\begin{cases} \partial_t u - \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u))_{x_i} = 0 & \text{in } U\times(0,\infty) \\ u=0 & \text{on } \partial U\times(0,\infty). \\ u=g & \text{on } U\times\{0\} \end{cases} \quad g\in L^2(U).$$

其中 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 的凸函数. $\begin{cases}|D^2L(p)|\le C & \forall p\in\mathbb{R}^n. \\ \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(p)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2 & p,\xi\in\mathbb{R}^n \quad \exists C,\theta>0.\end{cases}$

我们令 $I[u]=\begin{cases}\int_U L(\nabla u)\,dx & u\in H_0^1(U). \\ +\infty & \text{否则}\end{cases}$.

我们知道在线性热方程时，我们可以将方程写作 $u'(t)=A[u(t)]$ 的形式

在此，我们将设法将非线性方程写作

$$\begin{cases} u'(t)=-\partial I[u(t)] & t\geq 0 \\ u(0)=g \end{cases} \qquad (\partial I \text{ 是 } I \text{ 的"次微分"})$$

问：~~是否存~~：若 $g\in H^2\cap H_0^1$. 是否∃!解 $u\in C([0,\infty);L^2(U))$

$u'\in L^\infty((0,\infty);L^2(U))$

$u\in L^\infty((0,\infty);H^2\cap H_0^1(U))$ with $\|u(t)\|_{H^2}\le(\|u'(t)\|_{L^2})$?

~~回答~~

为了解决这些问题，我们须引入"次微分".

1. Hilbert空间上的凸函数

设 H 为 Hilbert空间，具有内积 $(\cdot,\cdot)$，范数 $\|\ \|$.

Def：(1) $I:H\to(-\infty,+\infty]$ 称作凸函数. 若 $\forall\, 0\le\tau\le1$. $u,v\in H$. $I[\tau u+(1-\tau)v]\le\tau I[u]+(1-\tau)I[v]$

注意这边为开 这边为闭

~~若 $I(H)\subset(-\infty,+\infty)$，则称~~

(2) 若 I 的取值不恒为 $+\infty$ 则称 I 为"恰当的"(proper)

(3) $D(I):=\{u\in H \mid I[u]<+\infty\}$ 称作 I 的定义域 (domain)

(4) 称 $I:H\to(-\infty,+\infty]$ 下半连续，若 $u_k\to u\in H \Longrightarrow I[u]\le\liminf_{k\to\infty} I[u_k]$

(5) 设 $I: H \to (-\infty, +\infty]$ 是恰当凸函数.

记 $\partial I[u] := \{ v \in H \mid I[w] \geq I[u] + (v, w-u) \ \forall w \in H \}$，$\partial I: H \to 2^H$ 称作 I 的次微分 (Subdifferential).

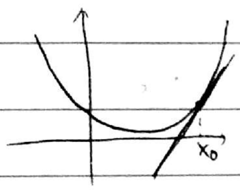
若 $\partial I[u] \neq \emptyset$. 则记 $u \in D(\partial I)$.

□

如何理解 (直观但不严谨地).

若 $H = \mathbb{R}$.

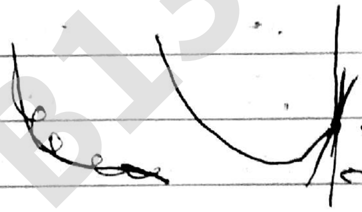
$\mathbb{R}$ 上的凸函数形如:



$y - I(x_0) = I'(x_0)(x - x_0)$ 每一点 x_0 处都有这样一条直线托着

↳ 即在 x_0 处的次微分.

而 ∂I 可能多值 比如:



← 图像尖角

← 这样有很多条直线"托着"图像.

6710 8864

6.7×10^7

$\times 32$

200

33554432

64

Thm 9.6.1 (次微分的基本性质)

$I: H \to (-\infty, +\infty]$ 是下半连续的恰当凸函数. 则

(1) $D(\partial I) \subseteq D(I)$

(2) 若 $v \in \partial I[u]$, $\bar{v} \in \partial I[\bar{u}]$ 则 $(v - \bar{v}, u - \bar{u}) \geq 0$

(3) $I[u] = \min_{w \in H} I[w] \iff 0 \in \partial I[u]$

(4) $\forall w \in H$. $\lambda > 0$. "$u + \lambda \partial I[u] \ni w$" 有唯一解 $u \in D(\partial I)$

即 $\exists u \in D(\partial I)$, $v \in \partial I[u]$ s.t. $u + \lambda v = w$.

<u>Proof</u>: (1) $\forall u \in$ ~~[illegible]~~ $D(\partial I)$. $v \in \partial I[u]$.

有 $\forall w \in H$ 成立 $I[w] - I[u] \geq (v, w-u)$

I proper $\Rightarrow \exists u_0$. $I[u_0] < +\infty$

$\Rightarrow I[u] \leq I[u_0] + (v, u - u_0) < +\infty \Rightarrow u \in D(I)$

(2) 给定 $v\in\partial I[u]$ $\bar{v}\in\partial I[\bar{u}]$

有 $I[\bar{u}]\geq I[u]+(v,\bar{u}-u)$

$I[u]\geq I[\bar{u}]+(\bar{v},u-\bar{u})$

由(1)知 $u\in D(I)\Rightarrow I[u]<+\infty$

故上面2个不等式左边 $<+\infty$ 于是相加可得

$0\geq(v,\bar{u}-u)+(\bar{v},u-\bar{u})$

$=(v-\bar{v},\bar{u}-u)$. $\Rightarrow(v-\bar{v},u-\bar{u})\geq 0$.

(3) 若 $0\in\partial I[u]$，则 $\forall w\in H$

$I[w]\geq I[u]+(0,w-u)=I[u]$ $\Rightarrow I[u]=\min\limits_{w\in H}I[w]$

反之若 u 是 $I[u]$ 的最小值，

则 $\forall w\in H$ $I[w]\geq I[u]=I[u]+(0,w-u)\Rightarrow 0\in\partial I[u]$.

(4) 给定 $w\in H$, $\lambda>0$

令 $J[u]=\frac{1}{2}\|u\|^2+\lambda I[u]-(u,w)$ $u\in H$

~~先证 于 要证~~ 我们希望证明 J 能在 H 上达到最小值.

若可以做到的话，那么由(3)知 $0\in\partial J[u]$ (设在 u 处能达到最小值)

~~从而 $\forall w\in H$~~ 而 $\partial J[u]=u-w+\lambda\partial I[u]$ ... (*) (待验证，书上直接混过去了)

从而 $w\in u+\lambda\partial I[u]$

此时再check唯一性. 若 $w\in\hat{u}+\lambda\partial I[\hat{u}]$，则 $\exists v\in\partial I[u]$, $\hat{v}\in\partial I[\hat{u}]$

使得 $\begin{cases}u+\lambda v=w\\ \hat{u}+\lambda\hat{v}=w.\end{cases}$

从而由单调公式(2) $0\leq(u-\hat{u},v-\hat{v})=(u-\hat{u},-\frac{u}{\lambda}+\frac{\hat{u}}{\lambda})$

$=-\frac{1}{\lambda}\|u-\hat{u}\|^2\leq 0$

$\Rightarrow u=\hat{u}$，(4)获证.

下面证明 J 可以在 H 中达到最小值

~~首先我们~~

~~首先考察~~

断言：① $u_k \rightharpoonup u$ in H $\Longrightarrow I[u] \le \liminf\limits_{k\to\infty} I[u_k]$

② $I[u] \ge -C - C\|u\|$ $\forall u\in H$. $\exists C>0$.

为何如此断言？

作出断言②是容易的（或至少在直观上），因为I具有凸性，理应在每一点处有一个"承托平面"，在$\mathbb{R}$上即为直线，在此则是线性借用类似于线性泛出的东西（尽管$\|u\|$不线性，但不妨认为它至少有一次幂般的模样）去"托住"I的"图像"。

为何作出断言①？是为了证明断言②

Proof of ②：反证：则 $\forall k$. $\exists u_k\in H$ s.t. $I[u_k] \le -k - k\|u_k\|$.

若$\|u_k\|$为H中的有界序列，则由Banach-Alaoglu之理知$\exists$子列 $u_{k_j} \rightharpoonup u$

借用①可以得到 $I[u] \le \liminf\limits_{k\to\infty} I[u_k] = -\infty$，这不可行，因为我们规定了I的取值$\in(-\infty,+\infty]$

于是必须假设$\{u_k\}$无界，不妨设$\|u_k\|\to\infty$（至少有一个这样的子列）。

令 $z_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} + (1-\frac{1}{\|u_k\|})u_0$，$k=1,2,\ldots$

$$I[z_k] \underset{I凸}{\le} \frac{I[u_k]}{\|u_k\|} + \left(1-\frac{1}{\|u_k\|}\right)I[u_0] \le -k + |I[u_0]|$$

$\{z_k\}$在H中又一致有界 $\xrightarrow{\text{Alaoglu}}$ $\exists$弱收敛子列 $z_{k_j} \rightharpoonup z\in H \xrightarrow{\text{Claim①}} I[z]=-\infty$

又矛盾，故②获证。

②获证之后，我们知 $\inf\limits_{w\in H} J[w] = m$ 是有限数。

选取极小化序列 $\{u_k\}\subset H$. s.t. $J[u_k]\to m$

m有限 $\Rightarrow \{u_k\}\subset H$ 有界 $\xRightarrow{\text{Alaoglu}}$ $\exists$弱收敛子列 $u_{k_j}\rightharpoonup u$

$\xRightarrow{\text{共鸣定理}}$ $\|u\| \le \liminf\limits_{j\to\infty}\|u_{k_j}\|$

$\Rightarrow \|u\|^2 \le \liminf\limits_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|^2$

I 弱下半连续 $\Rightarrow$ J在u处达到最小 $u\in H$ ✓

于是现在待验证的只有 $\partial J[u] = u-w+\lambda\partial I[u]$

~~$\forall v\in\partial J[u]$ 则必须满~~

$v\in\partial J[u] \iff \forall \tilde{w}\in H,\ J[\tilde{w}]\geq J[u]+(v,\tilde{w}-u)$

$\overset{\text{代入}J}{\iff} \frac{1}{2}\|\tilde{w}\|^2+\lambda I[\tilde{w}]-(\tilde{w},w)\geq \frac{1}{2}\|u\|^2+\lambda I[u]-(u,w)+(v,\tilde{w}-u)$

$\iff \frac{1}{2}(\underbrace{\tilde{w}+u}_{=2u+(\tilde{w}-u)},\tilde{w}-u)+\lambda(I[\tilde{w}]-I[u])-(\tilde{w}-u,w)\geq(v,\tilde{w}-u)$

$\overset{\theta=\tilde{w}-u}{\iff} \frac{1}{2}(2u,\theta)+\lambda(I[\theta+u]-I[u])-(\theta,w)+\frac{1}{2}\|\theta\|^2\geq(v,\theta)$

$\iff \forall\theta,\ (u-w+\frac{\theta}{2},\theta)+\lambda(\underbrace{I[\theta+u]-I[u]}_{\geq(\partial I[u],\theta)})\geq(v,\theta)$

↑是指任一$\partial I[u]$中元素

~~$\iff \forall\theta,\ (u-w+\frac{\theta}{2}+\partial I[u],\theta)\geq(v,\theta)$~~ 若不

~~$\iff v\in u-w+\lambda\partial I[u]$~~

(首先 ~~$\Leftarrow$ 是显然的，$\Rightarrow$ 方向 ... $u+\lambda\partial I[u]-w$ 与 v 的差充分小~~)

$\iff \forall\theta\ (v-(u-w-\lambda\partial I[u]),\theta)\leq\frac{1}{2}\|\theta\|^2$;

令$\|\theta\|\to 0$ 即有 $\partial J[u]=u-w-\lambda\partial I[u]$，证毕！

□

在§7.6中，我们引入了(线性)算子半群的方法来解决(线性)抛物方程的问题，其关键一步是构造/验证"压缩半群"(利用Hille-Yosida定理)，~~在此~~这利用了对预解式 R_λ ~~的估计~~ 和算子A的正则逼近 A_λ 的估计。

在此，我们将效仿§7.4的方法，引入类似于 R_λ、A_λ 的算子

→ Yosida逼近

Def：(1) $\forall\lambda>0$，定义非线性预解式 $J_\lambda: H\longrightarrow D(\partial I)$，其中 u 是 $u+\lambda\partial I[u]\ni w$ 的唯一解

$w\longmapsto J_\lambda[w]=u$.

(2) $\forall\lambda>0$，定义Yosida逼近 $A_\lambda: H\longrightarrow H$

$w\longmapsto \frac{w-J_\lambda[w]}{\lambda}$ $w\in H$.

A_λ可以看作∂I的"光滑逼近"。

Thm 9.6.2: $\forall \lambda > 0$. w $w' \in H$. 有:

(1) $\|J_\lambda[w] - J_\lambda[w']\| \le \|w - w'\|$

(2) $\|A_\lambda[w] - A_\lambda[w']\| \le \frac{2}{\lambda}\|w - w'\|$

(3). $0 \le (w - w', A_\lambda[w] - A_\lambda[w'])$

(4) $A_\lambda[w] \le \partial I[J_\lambda[w]]$

(5) 若 $w \in D(\partial I)$ 则 $\sup_{\lambda > 0}\|A_\lambda[w]\| \le |A^\circ[w]| := \inf_{z \in \partial I[w]} \|z\|$

(6) $\forall w \in \overline{D(\partial I)}$. $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda[u] = w$.

Proof: (1). 设 $u = J_\lambda[w]$ 则 $\exists\, v \in \partial I[u]$ s.t. $u + \lambda v = w$

$u' = J_\lambda[w']$ $\quad v' \in \partial I[u']$ $\quad u' + \lambda v' = w'$

$$\|w - w'\|^2 = \|(u - u') + \lambda(v - v')\|^2$$

$$= \|u - u'\|^2 + \lambda^2\|v - v'\|^2 + 2\lambda\underbrace{(u - u', v - v')}_{\text{单调算子},\ \ge 0}$$

$$\ge \|u - u'\|^2$$

故(1)成立

(2): $\|A_\lambda[w] - A_\lambda[w']\|$

$$= \left\|\frac{w - J_\lambda[w] - w' + J_\lambda[w']}{\lambda}\right\| \le \frac{1}{\lambda}\|w - w'\| + \frac{1}{\lambda}\|J_\lambda[w] - J_\lambda[w']\|$$

$$\overset{(1)}{\le} \frac{2}{\lambda}\|w - w'\|$$

(3). $(w - w', A_\lambda[w] - A_\lambda[w'])$

$$= \left(w - w', \frac{w - w'}{\lambda} - \frac{J_\lambda[w] - J_\lambda[w']}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\|w - w'\|^2 - \frac{1}{\lambda}(w - w', J_\lambda[w] - J_\lambda[w'])$$

$$\ge \frac{1}{\lambda}\|w - w'\|^2 - \frac{1}{\lambda}\|w - w'\|\cdot\underbrace{\|J_\lambda[w] - J_\lambda[w']\|}_{\le \|w - w'\|}$$

$$\overset{(1)}{\ge} 0$$

(4) $A_\lambda[w] = \dfrac{w - J_\lambda[w]}{\lambda}$.

~~$\forall u \in J_\lambda[w]$~~ 注记 $u \in J_\lambda[w] \iff u + \lambda v = w$ for some $v \in \partial I[u] = \partial I[J_\lambda[w]]$

故 $v = \dfrac{w - u}{\lambda} = \dfrac{w - J_\lambda[w]}{\lambda} = A_\lambda[w]$. 故 $A_\lambda[w] \in \partial I[J_\lambda[w]]$

(5) $w\in D(\partial I)$ 设 $z\in\partial I[w]$

设 $u=J_\lambda[w]$ 则 $\exists v\in\partial I[u]$ s.t. $u+\lambda v=w$ $\left(\Rightarrow v=\frac{w-u}{\lambda}=\frac{w-J_\lambda[w]}{\lambda}\right)$

从这观察到可以用单调不等式

$0\le(w-u,\ z-v)$

$=\left(w-J_\lambda[w],\ z-\frac{w-J_\lambda[w]}{\lambda}\right)$

$=(\lambda A_\lambda[w],\ z-A_\lambda[w])$

$\Rightarrow \lambda\|A_\lambda[w]\|^2\le\lambda(A_\lambda[w],z)\le\lambda\|A_\lambda[w]\|\cdot\|z\|$ $\forall\lambda>0$ $z\in\partial I[w]$

$\Rightarrow \sup\limits_{\lambda>0}\|A_\lambda[w]\|\le\inf\limits_{z\in\partial I[w]}\|z\|$

(6) 若 $w\in D(\partial I)$ 则 $\|J_\lambda[w]-w\|=\lambda\|A_\lambda[w]\|\overset{(5)}{\le}\lambda|A^0[w]|\to0$ as $\lambda\to0$

否则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists w'\in D(\partial I)$. $\|w'-w\|<\varepsilon$.

$\|J_\lambda[w]-w\|\le\|J_\lambda[w]-J_\lambda[w']\|+\|J_\lambda[w']-w'\|+\|w-w'\|$

$\overset{(1)}{\le}2\|w-w'\|+\|J_\lambda[w']-w'\|$

$<2\varepsilon$

$J_\lambda[w]\to w'$ as $\lambda\to0$

令 $\varepsilon\to0$ 即有 $\limsup\limits_{\lambda\to0}\|J_\lambda[w]-w\|=0$ □

下面考虑方程

(*) $\begin{cases} u'(t)+A[u(t)]\ni0 & t\ge0 \quad u\in H\text{ 给定.} \\ u(0)=u \end{cases}$

设H为实Hilbert空间, $I:H\to(-\infty,+\infty]$ 凸,恰当,下半连续

且设 ∂I 稠定, 即 $\overline{D(\partial I)}=H$.

(*) 中A取为 ∂I. 注意此时 ∂I 有很多坏处: 非线性, 不连续, 可能多值.

若(※)对每个初值u都存在唯一解，我们就将其记作

$u(t) = S(t)u$, $t \geq 0$　　$S(t): H \longrightarrow H$　　$\forall t \geq 0$

这和§7.6中算子半群的记号十分类似，但这里$S(t)$不是线性的

我们自然期待$S(t)$像§7.6中一样，具有半群性质

$$\begin{cases} S(0)u = u \\ S(t+s)u = S(t)S(s)u \\ t \longmapsto S(t)u \in C([0,\infty) \longrightarrow H), \forall u \in H \end{cases}$$

· 暂时做不到，因$A = \partial I$性质太差

· 但：可以用Yosida逼近（$A_\lambda \longrightarrow A$ in some sense），强行构造H上的压缩半群

Def：~~半~~非线性算子族$\{S(t)\}_{t\geq 0}: H \longrightarrow H$称作压缩半群 若

① $S(0)u = u$　　$\forall u \in H$

② $S(t+s)u = S(t)S(s)u$　　$\forall t, s \geq 0$, $u \in H$.

③ $u \longmapsto S(t)u$　　$\forall u \in H$ 是$[0,\infty) \longrightarrow H$的连续映射

回看方程(※)可以写作

$$(※') \begin{cases} u'(t) \in -\partial I[u(t)] & t \geq 0 \\ u(0) = u & \text{for a given initial data } u \in H \end{cases}$$

$\{u(t)\}$可以看作由∂I生成的"无穷维梯度流"（如果你学过微分流形/指数映射的话，可以类比由向量场生成的flow，只不过这里∂I非线性）

下面证明本节的关键定理

Thm 9.6.3（梯度流的解）

$\forall u \in D(\partial I)$, $\exists !$ 解u，满足 $u \in C([0,\infty); H)$，$u' \in L^\infty(0,\infty; H)$

且：① $u(0) = u$.

② $u(t) \in D(\partial I)$　　$\forall t \geq 0$

③ $-u'(t) \in \partial I[u(t)]$　　a.e. $t \geq 0$.

证明：我们无法直接对$A := \partial I$作出太多的操作，但可以操作

其Yosida逼近 $A_\lambda[w] := \dfrac{w - J_\lambda[w]}{\lambda}$　　$\forall \lambda > 0$

这是因为我们已证明 $A_\lambda : H \longrightarrow H$ 是处处有定义、Lipschitz连续的映射，那么据ODE存在唯一性定理

$$(\#_\lambda)\quad \begin{cases} u_\lambda'(t) + A_\lambda[u_\lambda(t)] = 0 & t \geq 0 \\ u_\lambda(0) = u \end{cases}$$ 有唯一解 $u_\lambda \in C^1([0,\infty), H)$

于是我们的证明分成以下两步：

Step 1: $\{u_\lambda\} \longrightarrow$ 某个 $u \in H$ in some sense.

$\{u_\lambda'\} \longrightarrow u' \in H$ in some sense

Step 2: 验证 u 满足 Thm 9.6.3 的结论

Step 1: $\forall v \in H,\ v \neq u$，考虑

$$(\#\#_\lambda)\quad \begin{cases} v_\lambda'(t) + A_\lambda[v_\lambda(t)] = 0 & t \geq 0 \\ v_\lambda(0) = v \end{cases}$$

则 $$\underbrace{(u_\lambda' - v_\lambda',\ u_\lambda - v_\lambda)}_{=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - v_\lambda\|^2} = (-A_\lambda[u_\lambda] + A_\lambda[v_\lambda],\ u_\lambda - v_\lambda) \overset{\text{Thm 9.6.2 (3)}}{\leq} 0$$

$\Longrightarrow \|u_\lambda(t) - v_\lambda(t)\| \leq \|u - v\| \quad \forall t \geq 0$

现在取 $v = u_\lambda(h)$，$h > 0$. 则由 $(\#_\lambda)$ 解的唯一性质，$v_\lambda(t) = u_\lambda(t+h)$.

$\Longrightarrow \|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\| \leq \|u_\lambda(h) - u\|$

$\Longrightarrow \frac{1}{h}\|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\| \leq \frac{1}{h}\|u_\lambda(h) - u\| \quad \forall h > 0$

令 $h \to 0$

有：$\|u_\lambda'(t)\| \leq \|u_\lambda'(0)\| = \|A_\lambda[u]\| \overset{\text{Thm 9.6.2 (5)}}{\leq} |A^\circ[u]| \quad \cdots\ (\star)$

下面开始证明 u_λ 收敛

$\forall \lambda, \mu > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 &= (u_\lambda' - u_\mu',\ u_\lambda - u_\mu) \\ &= (-A_\lambda[u_\lambda] + A_\mu[u_\mu],\ u_\lambda - u_\mu) \\ &= (-A_\lambda[u_\lambda] + A_\mu[u_\mu],\ (u_\lambda - J_\lambda[u_\lambda]) + (J_\lambda[u_\lambda] - J_\mu[u_\mu]) + (J_\mu[u_\mu] - u_\mu)) \\ &= (-A_\lambda[u_\lambda] + A_\mu[u_\mu],\ \lambda A_\lambda[u_\lambda] - \mu A_\mu[u_\mu] + (J_\lambda[u_\lambda] - J_\mu[u_\mu])) \end{aligned}$$

$$= -(A_\lambda[u_\lambda]-A_\mu[u_\mu],\ J_\lambda[u_\lambda]-J_\mu[u_\mu]) \geq 0.$$ 因为 $A_\lambda[u_\lambda]\in\partial I[J_\lambda[u_\lambda]]$，$A_\mu[u_\mu]\in\partial I[J_\mu[u_\mu]]$，由单调性公式即得

$$+(A_\lambda[u_\lambda]-A_\mu[u_\mu],\ \lambda A_\lambda[u_\lambda]-\mu A_\mu[u_\mu])$$

$$\leq -(A_\lambda[u_\lambda]-A_\mu[u_\mu],\ \lambda A_\lambda[u_\lambda]-\mu A_\mu[u_\mu])$$

$$\leq -\lambda\|A_\lambda[u_\lambda]\|^2-\mu\|A_\mu[u_\mu]\|^2+(\lambda+\mu)\|A_\lambda[u_\lambda]\|\,\|A_\mu[u_\mu]\|$$

~~由~~柯西不等式

$$\leq -\lambda\|A_\lambda[u_\lambda]\|^2-\mu\|A_\mu[u_\mu]\|^2+\lambda\left(\|A_\lambda[u_\lambda]\|^2+\frac14\|A_\mu[u_\mu]\|^2\right)+\mu\left(\|A_\mu[u_\mu]\|^2+\frac14\|A_\lambda[u_\lambda]\|^2\right)$$

$$\leq \frac{\mu}{4}\|A_\lambda[u_\lambda]\|^2+\frac{\lambda}{4}\|A_\mu[u_\mu]\|^2$$

因(☆) $\leq \dfrac{\lambda+\mu}{4}|A^0[u]|^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u_\lambda-u_\mu\|^2\leq\frac{(\lambda+\mu)}{2}|A^0[u]|^2 \quad t\geq0$$

$$\Rightarrow \|u_\lambda(t)-u_\mu(t)\|^2\leq\frac{(\lambda+\mu)}{2}t\,|A^0[u]|^2 \quad t\geq0 \quad \cdots(☆☆)$$

从而 ~~式~~ (☆☆) 右边 $\to0$ as $\mu,\lambda\to0^+$

$\Rightarrow \{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$ $\forall t\geq0$ 为 H 中的柯西列.

~~但又注意~~：故 $\exists u\in C([0,\infty);H)$ s.t. $u_\lambda\rightrightarrows u$ in $C([0,T];H)$ $\forall T$ as $\lambda\to0$.

$\boxed{注}$ $C[0,T]$ 中的范数即为 $\|\cdot\|_\infty$，由于上述估计对一切 t 成立，故是一致收敛

又由(☆)知 $u_\lambda'\rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H)$ ⟵ Evans上没有证明，我感觉应该是用 Banach-Alaoglu 取了一个子列（不妨还是全序列）由(☆)是说 $\{u_\lambda'\}$ 在 $L^2(0,T;H)$ 中一致有界 故 $u_\lambda'\rightharpoonup$ 某个 v 又 $u_\lambda\to u$ in $L^2(0,T;H)$ 故 $v=u'$（习题7.5）

~~check $\forall\varphi\in L^2(0,T;H)$, $\|\varphi\|_{L^2(H)}=1$~~

~~$\int_0^T u_\lambda'\varphi-u'\varphi$~~

且 $\|u'(t)\|\leq\liminf_{\lambda\to0}\|u_\lambda'(t)\|\leq|A^0[u]|$ a.e. $t\geq0$

共鸣定理

Step 2：验证 u 满足定理结论

2.1 ~~$u(t)\in D(\partial I)$，$-u'(t)\in\partial I[u(t)]$ （$\Rightarrow u'(t)+\partial I[u(t)]\ni 0$~~

• check $u(t)\in D(\partial I)$，$-u'(t)\in\partial I[u(t)]$ $\forall t\geq 0$

首先 $\|J_\lambda[u_\lambda](t)-u_\lambda(t)\|=\lambda\|A_\lambda[u_\lambda](t)\|$ (✱)

$=\lambda\|u_\lambda'(t)\|\leq\lambda\|A^0[u]\|$

$\to 0$ as $\lambda\to 0^+$

故 $J_\lambda[u_\lambda]-u_\lambda\rightrightarrows 0$ in $C([0,T];H)$ $\forall T>0$

又 $u_\lambda\rightrightarrows u$ in $C([0,T];H)$

故 $J_\lambda[u_\lambda]\rightrightarrows u$ in $C([0,T];H)$

又 $\forall t\geq 0$，$-u_\lambda'(t)=A_\lambda[u_\lambda(t)]\in\partial I[J_\lambda[u_\lambda(t)]]$

$\Rightarrow\forall w\in H$

$I[w]\geq I[J_\lambda[u_\lambda(t)]]-(u_\lambda'(t),w-J_\lambda[u_\lambda(t)])$

∂I定义

$\forall 0\leq s\leq t$

$(t-s)I[w]\geq\int_s^t I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]\,dr-\int_s^t(u_\lambda'(r),w-J_\lambda[u_\lambda(r)])\,dr$

~~右边令 $\lambda\to 0^+$（这是我们一直希望的）~~

~~$\liminf_{\lambda\to 0^+}\int_s^t I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]\,dr\geq\int_s^t$~~

~~Fatou引理~~

我们希望 $\lambda\to 0^+$ 时 上式右边 $\geq\int_s^t I[u]\,dt-\int_s^t(u',w-u)\,dr$

第一项：注意到 I 下半连续 & $J_\lambda[u_\lambda]\to u$ in $C([0,T];H)$ 知

$I[u]\leq\liminf_{\lambda\to 0}I[J_\lambda[u_\lambda]]\Rightarrow\liminf_{\lambda\to 0}\left(I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]-I[u]\right)\geq 0$. $\forall r\in[0,T]$

~~$\Rightarrow\liminf_{\lambda\to 0}(I[J_\lambda[u_\lambda]]-I[u])\geq 0$~~

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ $\exists\Lambda>0$ s.t. $\forall|\lambda|<\Lambda$ $I[J_\lambda[u_\lambda]]-I[u]\geq-\varepsilon$

下极限代表"最终一直发生"

从而 对 $I[J_\lambda[u_\lambda]]-I[u]+\varepsilon\geq 0$ 用 Fatou 引理（需 $|\lambda|<\Lambda$）.

注意：Fatou 引理一定要被积函数列非负，Evans上混过去了.

有 $0\le\int_s^t \liminf_{\lambda\to0}\left(I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]-I[u(r)]+\varepsilon\right)dr$

$$\le \liminf_{\lambda\to0}\int_s^t I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]\,dr-\int_s^t I[u(r)]\,dr+\varepsilon(t-s)$$

Evans上这步也混过去了.

$$\Rightarrow \liminf_{\lambda\to0}\int_s^t I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]\,dr \ge \int_s^t I[u(r)]\,dr-\varepsilon(t-s)$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 知. $\liminf_{\lambda\to0}\int_s^t I[J_\lambda[u_\lambda(r)]]\,dr \ge \int_s^t I[u(r)]\,dr$

第二项: $\int_s^t (u_\lambda'(r), w-\underbrace{J_\lambda[u_\lambda(r)]}_{\in H})\,dr$

$\downarrow \lambda\to0$. 因 $u_\lambda' \longrightarrow u$ in $L^2([0,T];H)$

$J_\lambda[u_\lambda(r)] \rightrightarrows u$ in $C([0,T];H)$

$\int_s^t (u'(r), w-u)\,dr$

仔细check一下:

$$\int_s^t (u_\lambda'(r), w-J_\lambda[u_\lambda(r)]) - (u'(r), w-u)\,dr$$

$$=\int_s^t (u_\lambda'(r), w-J_\lambda[u_\lambda(r)]+J_\lambda[u_\lambda(r)]-u) + (u_\lambda'(r), u-J_\lambda[u_\lambda(r)]) - (u'(r), w-u)\,dr$$

这两项放一起

$$=\int_s^t (u_\lambda'-u', w-u)\,dr + \int_s^t \|u_\lambda'(r)\|\,\|u-J_\lambda[u_\lambda(r)]\|\,dr$$

$\downarrow 0$. 利用 $u_\lambda'-u'\to0$ in $L^2([0,T];H)$ $\Longrightarrow 0$ 利用 $(A)\le|A^\circ[u]|$

$\longrightarrow 0$ as $\lambda\to0^+$ ✓

现在我们有

$$(t-s)I[w]\ge\int_s^t I[u(r)]\,dr-\int_s^t (u'(r), w-u(r))\,dr \quad \forall\, 0\le s\le t.$$

~~由第全~~ 两边除以 $t-s$ 令 $t\to s$ 据Lebesgue微分定理有:

$u', I[u]$ 全体 lebesgue 点

$\Rightarrow$ 对 a.e. $t \geq 0$. 有 $I[w] \geq I[u(t)] + (-u'(t), w - u(t)) \quad \forall w \in H$

$\Rightarrow u(t) \in D(\partial I)$

$-u'(t) \in \partial I[u(t)]$ $\quad \forall$ a.e. $t \geq 0$ 成立.

下面再证. 对不是 lebesgue 点的 t，也有 $u(t) \in D(\partial I)$. $-u'(t) \in \partial I[u(t)]$ 成立.

设固定 $t \geq 0$. 选取 $t_k \to t$ s.t. $u(t_k) \in D(\partial I)$ $\quad$ (由 lebesgue 点 ~~相关性~~ 知 ~~这种~~ ~~取法~~ 可行)

$-u'(t_k) \in \partial I[u(t_k)]$

由 $\|u'(t_k)\| \leq |A^0[u]|$ a.e. t 知

$\exists$ 子列 (不妨设为全序列) $u'(t_k) \longrightarrow v$ in H. for some $v \in H$.

Fix $w \in H$.

$I[w] \geq I[u(t_k)] + (-u'(t_k), w - u(t_k))$

令 $t_k \to t$ $\quad$ 再用弱收敛. $\quad$ 先用 u 的一致收敛

上式左边 $\geq \liminf\limits_{k\to\infty} I[u(t_k)] + (-v, w - u(t))$

$\geq I[u(t)] + (-v, w - u(t))$

$\Rightarrow u(t) \in D(\partial I)$. $-v \in \partial I[u(t)]$

于是目前只欠证唯一性, 此为显然, 实际上若 $\tilde{u}$ 也满足结论, 则

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - \tilde{u}\|^2 = (u - \tilde{u}, u' - \tilde{u}') \leq 0 \quad \text{a.e. } t \geq 0$$

这么做可行是因为 $-u' \in \partial I[u]$. $-\tilde{u}' \in \partial I[\tilde{u}]$, 再用单调性公式即可.

$\square$

Remark. (1) $A = \partial I$ 实际上生成了一个 H 上的非线性压缩半群:

$\forall u \in D(\partial I) \quad S(t)u := u(t) = \lim\limits_{\lambda \to 0} u_\lambda(t)$

$\|S(t)u - S(t)v\| \leq \|u - v\| \quad \forall t \geq 0 \quad u, v \in D(\partial I)$

再延拓到 $H = \overline{D(\partial I)}$ 上即可. $\{S(t)\}$ 称作梯度流

(2) 一般情况下, 并不一定有 $\overline{D(\partial I)} = H$, 我们在此假设了 ∂I 稠定, 避免了这个麻烦.

$\square$

回到本节最初考虑的问题

取 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集，$\partial U\in C^\infty$　$H=L^2(U)$

$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的凸函数

满足 $\begin{cases}|\nabla^2 L(p)|\le C & \forall p\in\mathbb{R}^n\\ \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(p)\xi_i\xi_j\ge\theta|\xi|^2\end{cases}$ ← 大概就是 Hessian 正定吧

令 $I[u]:=\begin{cases}\int_U L(\nabla u)dx & u\in H_0^1(U)\\ +\infty & \text{否则}\end{cases}$

Thm 9.6.4 (∂I 的刻画)

(1) $I:H\to(-\infty,+\infty]$ 凸，恰当，下半连续

(2) $D(\partial I)=H^2(U)\cap H_0^1(U)$

(3) 若 $u\in D(\partial I)$ 则 ∂I 单值，且 $\partial I[u]=-\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(L_{p_i}(\nabla u))$ a.e.

证明 (1) I 的恰当性与凸性显然，由 Thm 8.2.1 知 I 是弱(序列)下半连续

⟶ I 是(强)(序列)下半连续的(由上文)

(2) 在 $D=H^2(U)\cap H_0^1(U)$ 上

定义 $A[u]:=-\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(L_{p_i}(\nabla u))$　$u\in D(A)$

下证 $A=\partial I$

$\forall u\in D(A)$，设 $v=A[u]$　$w\in L^2(U)$

若 $w\notin H_0^1(U)$ 则 $I[w]=+\infty\ge I[u]+(v,w-u)\Rightarrow v\in\partial I$

若 $w\in H_0^1(U)$ 则 $(v,w-u)=-\int_U\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(L_{p_i}(\nabla u))(w-u)dx$

$\overset{\text{分部积分}}{=}\int_U\nabla_p L(\nabla u)\cdot\nabla(w-u)dx$

L 凸，故 $L(\nabla w)\ge L(\nabla u)+\nabla_p L(\nabla u)\cdot(\nabla w-\nabla u)$ a.e. in U

积分即得 $I[w]\ge I[u]+(v,w-u)$

$\Rightarrow A\subset\partial I$　$\Rightarrow D(A)\subseteq D(\partial I)$　$A[u]\in\partial I[u]$ $\forall u\in D(A)$

下面再证 $\partial I\subseteq A$

任取 $f\in L^2(U)$，考虑 $J[w]=\int_U L(\nabla w)+\frac{w^2}{2}-fw\,dx$

on $\mathcal{A}=H_0^1(U)$

J 在 $\mathcal{A}$ 上的极小化是方程 $u-\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(L_{p_i}(\nabla u))=f$ in U 的弱解

由 Thm 8.3.1 知，$\|u\|_{H^2(U)}\lesssim\|f\|_{L^2(U)}$ (需要证明)

$|f_n(x)|^{\frac{1}{p}}$　$|f_n(x)|^{\frac{p-1}{p}}g(x)|$

$\le$

$\int_{A_{m,n}}|f_n(x)|$

$p'=\frac{p}{p-1}$

40

$\Rightarrow u \in D(A)$, $u + A[u] = f$

从而 $\mathrm{Im}(I+A) = H$.

$\Rightarrow A = \partial I$ ✓

↑因为若 $v \in D(\partial I)$ $w \in \partial I[v]$ 则 $\exists u \in D(A)$

$\underbrace{u + A[u]}_{\in \partial I[u]} = v + \underbrace{w}_{\in \partial I[v]}$ $\xrightarrow[\text{Thm 9.6.1}]{\text{唯一性}}$ $u = v$, $w = A[u]$

□

对 (*) $\begin{cases} \partial_t u - \sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(\nabla u)) = 0 & \text{in } U \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$ $g \in L^2(U)$

$\Downarrow$

化为 $\begin{cases} u'(t) = -\partial I[u(t)] & t \geq 0 \\ u(0) = g \end{cases}$

$\Downarrow$ Thm 9.6.3. 若 $g \in H_0^1 \cap H^2$

则 $\exists!$ $u \in C([0, \infty), L^2(U))$, $u' \in L^\infty((0, \infty), L^2(U))$

为(*)的弱解

且 $\|u(t)\|_{H^2} \leq \|u'\|_{L^2}$

$\Rightarrow u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1 \cap H^2)$