Evans PDE 第8章习题解答 本节假设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 有界开集 $\partial U\in C^\infty$
任何函数均为 C^∞（除特殊说明）

[8.1] (1) 求证：$u_k(x)=\sin(kx)\rightharpoonup 0$ in $L^2(0,1)$

(2) 固定 $a,b\in\mathbb{R}$. $0<\lambda<1$. 定义 $u_k(x)=\begin{cases} a & 若\ \frac{j}{k}\le x<\frac{j+\lambda}{k} \\ b & 若\ \frac{j+\lambda}{k}\le x<\frac{j+1}{k}\end{cases}$ $j=0,1,\dots,k-1$

求证：$u_k\rightharpoonup \lambda a+(1-\lambda)b$ in $L^2(0,1)$

Proof：(1) 任取 $\varphi\in L^2(0,1)$. 则 $\varphi\in L^1(0,1)$.

则 $\langle u_k,\varphi\rangle=\int_0^1\varphi(x)\sin kx\,dx$

由 Riemann-Lebesgue 引理知. $\langle u_k,\varphi\rangle\to 0$ as $k\to\infty$

(2). 回顾一个结果.

设 $1\le p\le\infty$ $f\in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. 且周期为 T.

令：$u_k(x)=f(kx)\chi_{[0,1]}(x)$.

则 $u_k\rightharpoonup\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ as $k\to\infty$ in $L^p(0,1)$.

(见 Brezis Exercise 4.18).

借此，令 $f(x)=\begin{cases} a & \text{in } [j,j+\lambda) \\ b & \text{in } [j+\lambda,j+1)\end{cases}$ $\forall j\in\mathbb{Z}$

则 $u_k(x)=\begin{cases} a & \text{in } [\frac{j}{k},\frac{j+\lambda}{k}) \\ b & \text{in } [\frac{j+\lambda}{k},\frac{j+1}{k})\end{cases}$.

~~$u_k\rightharpoonup f$ in $L^p(0,1)$~~.

则 u_k 在 L^2 中的弱极限为 $\int_0^1 f(x)dx$

$=\lambda a+(1-\lambda)b$.

□

[8.2] 试找出 $L=L(p,z,x)$，使得 $-\Delta u+\nabla\phi\cdot\nabla u=f$ in U 是对应于能量泛函 $I[w]:=\int_U L(\nabla w, w, x)\,dx$ 的 Euler-Lagrange 方程（提示：含有指数项）

解：$-\Delta u$ 项显然是由能量泛函中的 $|\nabla u|^2$ 得来。

f 项是来自于 $f(x)\cdot z$ 对 z 求导

出现 $\nabla\phi\cdot\nabla u$、但 Δu 前无 ϕ，且两项异号，可以判断是有类似于 $e^{-\varphi(x)}$ 的因子乘在前面。

验证：$L(p,z,x)=\cancel{\frac{1}{2}}\, e^{-\varphi(x)}\left(\frac{1}{2}|p|^2-f(x)\,z\right)$.

~~则 $I[w]=$~~ 则 $I[w]=\int_U L(\nabla w, w, x)$ 对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\partial_{p_i}L(\nabla u, u, x)\right)_{x_i}+\partial_z L(\nabla u, u, x)=0.$$

$$\Rightarrow\quad \left(-\Delta u+\nabla\phi\cdot\nabla u-f(x)\right)e^{-\varphi(x)}=0$$

$$\Rightarrow\quad -\Delta u+\nabla\phi\cdot\nabla u=f \quad \text{in } U.$$

✓

□

[8.3] 定义热方程的"椭圆正则化"为如下方程：

$$u_t - \Delta u - \varepsilon u_{tt} = 0 \quad \text{in} \quad U_T \quad \cdots (*)$$

其中 $\varepsilon > 0$. $U_T = U \times (0, T]$

求证：$(*)$ 是某个能量泛函 $I_\varepsilon[w] := \iint_{U_T} L_\varepsilon(\nabla w, w_t, w, x, t)\, dx\, dt$

对应的 Euler-Lagrange 方程.

证明：此处 t 应视作第 $n+1$ 个变量，即与 x 地位相当.

~~如果直接构造~~ 但 $L(p, z, x)$ 中的 p_{n+1} 项应带有系数 (与 ε 有关)

若直接构造 $L(p, z, x) = \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2 + \varepsilon p_{n+1}^2) \cdot e^{-t}$

则在 $\partial_{p_{n+1}} L(\nabla u, u_t, u, x, t)$ 中，u_t 与 u_{tt} 的系数均是 ε，与原方程不符. 所以，在产生 u_t 项时，应同时产生一个 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的因子 (因为是形如 $e^{-t} u_t$ 的项对 t 求导而来)

考虑把指数项换成 $e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ 这样：

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left(L_{p_{n+1}}(\nabla u, u_t, u, x, t) \right) \\
&= \partial_t \left(\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} u_t \right) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left(u_{tt} - \frac{1}{\varepsilon} u_t \right) \\
&\qquad = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} (\varepsilon u_{tt} - u_t)
\end{aligned}$$

故 $L(p, z, x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} (p_1^2 + \cdots + p_n^2 + \varepsilon p_{n+1}^2)$

符合要求

$$I_\varepsilon[w] := \frac{1}{2} \iint_{U_T} e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \left(|\nabla_x w|^2 + \varepsilon |w_t|^2 \right) dx\, dt$$

□

[8.4] 设 $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 C^1 函数

(1) 求证：$L(P,z,x)=\eta(z)\det P$ $(P\in\mathbb{M}^{n\times n},\ z\in\mathbb{R}^n)$ 是 null Lagrangian.

(2) ~~若 $u\in C$~~ 求证：若 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^2 的，则 $\int_U \eta(u)\det\nabla u\,dx$ 仅依赖于 $u|_{\partial U}$ 的取值

证明 (1) 直接验证定义：对 $1\le k\le n$，有

$$-\sum_{j=1}^n\left(L_{p_j^k}(P,z,x)\right)_{x_j}+L_{z^k}(P,z,x)$$

$$=-\sum_{j=1}^n\left(\eta\cdot(P^*)_j^k\right)_{x_j}+\frac{\partial\eta}{\partial z^k}\cdot\det P$$

P^* 为 P 的伴随方阵.

$$=-\sum_{j=1}^n\left[\sum_{l=1}^n\frac{\partial\eta}{\partial z^l}\cdot\frac{\partial z^l}{\partial x^j}(P^*)_j^k+\eta\cdot\partial_{x_j}(P^*)_j^k\right]$$

$$+\frac{\partial\eta}{\partial z^k}\det P.$$

$\forall u\in C^\infty(U\to\mathbb{R}^n)$，取 $z=u$，$P=[\nabla u]=\left[\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$.

$$\text{则上式}=-\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n\frac{\partial\eta}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial x^j}[\nabla u^*]_j^k$$

$$-\eta\sum_{j=1}^n\partial_{x_j}\left([\nabla u^*]_j^k\right)+\frac{\partial\eta}{\partial u^k}\det[\nabla u]$$

$$=-\sum_{l=1}^n\frac{\partial\eta}{\partial u^l}\underbrace{\sum_{j=1}^n\frac{\partial u^l}{\partial x_j}[\nabla u^*]_j^k}_{\text{利用 } AA^*=|A|I}+0+\frac{\partial\eta}{\partial u^k}\det[\nabla u]$$

$$=\underbrace{-\sum_{l=1}^n\frac{\partial\eta}{\partial u^l}\delta_k^l}_{=\frac{\partial\eta}{\partial u^k}}\det[\nabla u]+\frac{\partial\eta}{\partial u^k}\det[\nabla u]$$

$$=0$$

(2) 是 Thm 8.1.1 的直接推论

□

[8.5] 固定 $x_0 \notin \vec{u}(\partial U)$，并选取一个函数 η 满足：$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dz = 1 \\ \operatorname{Spt} \eta \subset B(x_0, r). \end{cases}$

r 充分小：$B(x_0, r) \cap \vec{u}(\partial U) = \emptyset$

令 $\deg(\vec{u}, x_0) = \int_U \eta(\vec{u}) \det[\nabla \vec{u}] \, dx$

为 u 关于 x_0 的度　求证：$\deg(\vec{u}, x_0)$ 是整数

证明：~~作变量替换：~~ $\cancel{\vec{y} = \vec{u}(\vec{x})}$

则~~如上积分化为~~ $(\# u^{-1}\{x_0\}) \int_{\mathbb{R}^n} \cancel{\eta(y)} \, dy.$

~~令~~ $\cancel{y_0 = u(x_0)}$

$= \cancel{\# u \, \# \, u^{-1}\{x_0\}}$

① 先考虑 $[\nabla u(x)]$ 对所有 $x \in u^{-1}\{x_0\}$ 都非~~奇异~~的情况.

此时，只要 r 充分小，$u^{-1}(B(x_0, r))$ 彼此不交.

从而作变量替换 $y = u(x)$.

$$\int_U \eta(\vec{u}) \det[\nabla \vec{u}] = \underbrace{\#(u^{-1}\{x_0\})}_{\text{可以为}0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) \, dy = 1.$$

$\in \mathbb{Z}$.

② Locality：由 $\det[\nabla \vec{u}]$ 连续，所以，要么 $\det[\nabla \vec{u}] \equiv 0$.

~~没~~ de

要么 $\det[\nabla \vec{u}]$ 的零点不稠密.

从而

~~∴ 必存在球 B ⊆~~

若 ~~$\det[\nabla u](x_0) \neq 0$~~ x_0 是 u 的 regular value 则 $\exists r$ 充分小，使 ~~$\det[\nabla u]$ 在~~ $B(x_0, r)$ 中没有 u 的 critical value

情况变回 ①

若 ~~$\det[\nabla u](x_0) = 0$~~ x_0 是 u 的 critical value，则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r$ 充分小 for ~~...~~，$|\det[\nabla u]| < \varepsilon$ in $u^{-1}(B(x_0, r))$.

从而 $\deg(\vec{u}, x_0) = 0$

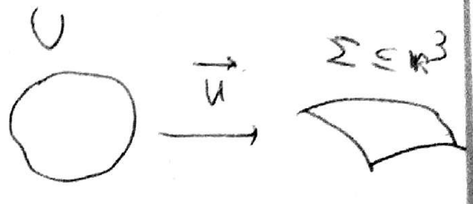
所以 deg 必是整数

□

[8.6] 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是 $u: U \to \mathbb{R}$ 的图像 其中 $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $u \in C^\infty$

则 $\displaystyle\int_U \frac{\det D^2 u}{(\sqrt{1+|Du|^2})^3}\,dx$ 是 Σ 的 Gauss 曲率的积分.

求证：该表达式仅与 $Du|_{\partial U}$ 有关



证明：令 $\vec{v} = Du$.

则 如上积分 $\displaystyle = \int_U \frac{\det D\vec{v}}{(1+|\vec{v}|^2)^{3/2}}\,dx$

令 $\displaystyle \eta(z) = \frac{1}{(1+|z|^2)^{3/2}}$ $z \in \mathbb{R}^2$ 则 上式 $\displaystyle = \int_U \eta(\vec{v}) \det D\vec{v}\,dx$

只需验证 $L(P, z, x) = \eta(z)\det P$ 是 null-Lagrangian

便有由 [8.4](2) 可得结论. 而这只要求 $\eta(z)$ 是 C^1 的即可,

See [8.4](1). 但这是显见的.

$\square$

[8.7]：设 $P \in \mathbb{M}^{n\times n}$. 求证：$L(P) = Tr(P^2) - (TrP)^2$

是 null-Lagrangian.

证明. 写成分量

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P_{ik}P_{ki} - P_{ii}P_{kk}.$$

$\therefore\ \forall 1 \le l \le n$.

$$\sum_{j=1}^n \left(L_{p_{jl}}(P)\right)_{x_j} = 2\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(P_{jl}) - 2\sum_{i=1}^n \partial_{x_l}(P_{ii}).$$

$\forall u \in C^\infty(U \to \mathbb{R}^n)$. 令 $P_{jl} = \partial_{x_l}(u^j)$. i.e. P 为 u 的 Jacobi 矩阵

则上式 $\displaystyle = 2\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(\partial_{x_l}(u^j)) - 2\sum_{i=1}^n \partial_{x_l}(\partial_{x_i}(u^i))$

$= 0$. 符合 null-Lagrangian 的定义.

$\square$

[8.8]：解释为何§8.2中的方法不适用于证明能量泛函

$I[w] := \int_U \sqrt{1+|Dw|^2}\, dx$ 在 $\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(U) \mid w = g \text{ on } \partial U\}$ 上 $\forall 1 \le q \le \infty$

极小化子的存在性

证明：注意到§8.2中的证明需要"强制性估计" coercive estimate

$$I[w] \geq \delta \|Dw\|_{L^q}^q - \gamma.$$

而此处，我们能得到的总~~要~~有 $I[w] \geq \|Dw\|_{L^1} + C$.

但 L^1 或 $W^{1,1}$ 不自反，极小化子需序列的 $W^{1,1}$ 有界性 ~~推~~ 有弱极限(子列)。 □

[8.9]（方程组的第2变分）设 $\vec{u}: U \to \mathbb{R}^m$ 是 $I[w] = \int_U L(Dw, w, x)\, dx$ 的一个 C^∞ 极小化子.

(1) 求证：$\sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial p_i^k \partial p_j^l}(Du, u, x)\, \eta_k \eta_l \xi_i \xi_j \geq 0$.

$\forall x \in U$.
$\eta \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(2). 举例：$L: M^{m\times n} \to \mathbb{R}$ 非凸

且 $\sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 L(P)}{\partial p_i^k \partial p_j^l} \eta_k \eta_l \xi_i \xi_j \geq 0$ $\forall P \in M^{m\times n}$
$\eta \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

证明：(1). 由u是极小化子知，$\forall v \in C_c^\infty(U \to \mathbb{R}^m)$

$$\frac{d^2}{dt^2} I[u+tv] \geq 0.$$

$$\Rightarrow \int_U L_{p_i^k p_j^l} D_i v^k D_j v^l + 2 L_{p_i^k u^l} v^l D_i v^k + L_{z^k z^l} v^k v^l \geq 0$$

特别地（仿照课本）令 $v(x) = \varepsilon \rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right) \eta\, \zeta(x)$.

$\xi \in \mathbb{R}^n$. $\eta \in \mathbb{R}^m$. $\zeta \in C_c^\infty(U; \mathbb{R})$

其中 $\zeta \in C_c^\infty(U)$. ρ 为§8.1.3中的zig-zag函数.

$|\rho'| = 1$ a.e.

$D_i v^k = \rho'\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right) \xi_i \eta^k \zeta + O(\varepsilon)$ as $\varepsilon \to 0^+$.

代入便有 $0 \le \int_U L_{p_i^k p_j^l} \xi_i \eta^k \xi_j \eta^l \zeta^2 dx \quad \forall \zeta \in C_c^\infty(U)$.

$\therefore L_{p_i^k p_j^l} \xi_i \xi_j \eta^k \eta^l \ge 0$.

(2) $L(P) = \det P = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$ ($n=2$ 时)

即可. 验证略

实际上 只需凸性条件对2个秩相差≤1的方阵成立即可,

这称作 Legendre - Hadamard 条件. □

[8.10] 用§8.4.1 中的方法去证明 $\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

在 $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$, $n>2$ 时. 非零弱解 $u \in H_0^1(U)$ 的存在性.

证明: 考虑能量泛函 $I[w] = \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_U |w|^{q+1}$

在 $\mathcal{A} = \{ w \in H_0^1(U) \mid \|w\|_{L^{q+1}} = 1 \}$ 上的极小化子.

Coercivity: $I[w]\big|_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 dx - \frac{1}{q+1} \cdot 1$

直接 满足强制性条件.

假设 $\{u_m\}$ 是一个极小化序列. 则 $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}$ 一致有界

由 Rellich - Kondrachov 定理: $u_m \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$

$\Downarrow H_0^1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^q$

不妨子列即是这个序列 $\longrightarrow u_m \to u$ in $L^{q+1}(\Omega)$

$\therefore \|u\|_{L^{q+1}} = 1 \Rightarrow u \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow I[u] \le \liminf_{m\to\infty} I[u_m]$

$\inf_{u\in\mathcal{A}} I[u] \le$ ... $I[u] = \lim_{m\to\infty} I[u_m]$

$\therefore u$ 也是极小化子.

显见(自己证明)该极小化子即为 $\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-1} u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ (for some $\lambda \in \mathbb{R}$)

的弱解：

$\lambda \neq 0$：否则由极大值原理知 $u \equiv 0$，但这与 $\|u\|_{L^{q+1}} = 1$ 矛盾

$\therefore \tilde{u} = \lambda^{\frac{1}{q-1}} u$ 即为原方程的 H_0^1 弱解

$\square$

[8.11] 设 $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 光滑，且 $0 < a \le \beta'(z) \le b \quad (z \in \mathbb{R})$.

$f \in L^2(U)$

(1) 请定义 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u) = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的 H^1 弱解

(2) 求证弱解存在唯一性.

证明 (1). $\forall v \in H^1(U)$.

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial U} Tv \cdot \beta(Tu) \, dS = \int_U fv$$

$T: H^1(U) \to L^2(\partial U)$ 是 Sobolev 迹算子.

为何？取 $v \in C^\infty(\bar{U})$，方程两边乘以 v

$$\int_U -\Delta u \cdot v = \int fv$$

左边分部积分 $= \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS$

$$= \int_U \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial U} \beta(u) v \, dS$$

β: Lipschitz，所以按如上定义 H^1 弱解合理.

[8.11] (2) 更正: 存在性可由能量泛函 $I[w] = \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 - \int_U fw + \int_{\partial U} \beta(w) w^2$ 的临界点给出。

唯一性：设 u_1, u_2 均为方程的解, $u = u_1 - u_2$, 则 $\Delta u = 0$ in U, $\partial_n u + \beta(u_1) - \beta(u_2) = 0$ on ∂U.

考虑 $\int_U |\nabla u|^2 = -\int_U u\Delta u + \int_{\partial U} u \partial_n u \, dS = -\int_{\partial U} (u_1 - u_2)(\beta(u_1) - \beta(u_2)) dS$. 注意到 β 单调递增，则利用拉格朗日中值定理得出上式必 $\lesssim -\int_{\partial U} |u_1 - u_2|^2 \le 0$, 这迫使等号成立，因此 $u_1 = u_2$.

[8.12] 设u是面积积分 $I[w] := \int_U \sqrt{1+|Dw|^2}\,dx$ 在 $\mathcal{A} = \left\{ w \,\middle|\, \begin{array}{l} w = g \text{ on } \partial U \\ J[w] = \int_U w = 1 \end{array} \right\}$

上的极小化子. 求证: u的图像具有常平均曲率

证明: 不妨 $g=0$. 否则考虑 $r = w - g$

令 $L[w] = I[w] + \lambda J[w]$

$$= \int_U \sqrt{1+|Dw|^2} + \lambda w \, dx.$$

对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\operatorname{div}\left(\frac{Dw}{\sqrt{1+|Dw|^2}}\right) + \lambda = 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\frac{Dw}{\sqrt{1+|Dw|^2}} = \text{const}$$ ∴ 具有常平均曲率

□.

[8.13] (对偶变分原理) 设 $f \in L^2(U)$ 求证:

$$\min_{w \in H_0^1(U)} \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw \, dx = \max_{\substack{\xi \in L^2(U \to \mathbb{R}^n) \\ \operatorname{div}\xi = f}} -\frac{1}{2}\int_U |\xi|^2 dx$$

<u>证明</u>: $\forall \xi \in L^2(U \to \mathbb{R}^n)$ with $\operatorname{div}\xi = f$. 有
$\forall w \in H_0^1(U)$.

$$\cancel{\int \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw}$$

$$\int_U fw = \int_U \operatorname{div}\xi \cdot w \overset{\text{分部积分}}{=\!=} -\int_U \xi \cdot Dw$$

$$\leq \int_U \frac{1}{2}(|Dw|^2 + |\xi|^2)$$

∴ 左 ≥ 右

$\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw$ ~~值~~的极小值在某个 $w \in H_0^1(U)$ 处达到.

这因为该泛函显然是 $\left\{\begin{array}{l}\text{convex} \\ \text{coercive}\end{array}\right.$

而其对应の Euler-Lagrange 方程即为 $-\Delta w = f$.

$\therefore$ 令 $\xi = -\nabla w$, 便有 $\operatorname{div} \xi = f$.

且上面的不等号取等.

$\square$

[8.14] (多值 PDE)

§8.4.2 的 (26) 式: ~~$\mathcal{A} = \int_U \frac{1}{2}|Dw|$~~

$\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(U) \mid w \geq h \text{ a.e. in } U\}$

$u \in \mathcal{A}$ 是 $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$ 的唯一解.

则有 (26) $\int_U Du \cdot D(w-u)\, dx \geq \int_U f(w-u)\, dx \quad \forall w \in \mathcal{A}$

求证: (26) 式可以改写作 $f \in -\Delta u + \beta(u-h)$.

其中 $\beta(z) = \begin{cases} 0 & \text{若 } z > 0 \\ (-\infty, 0], & \text{若 } z = 0 \\ \emptyset & \text{若 } z < 0 \end{cases}$

证明: (26) 左边分部积分

得 $\int_U (-\Delta u) \cdot (w-u)\, dx \geq \int_U f(w-u)\, dx.$

若 $u = h$ 则上式化为 $\forall \tilde{w} \in H_0^1(U)$, $\tilde{w} \geq 0$ a.e. $\int_U -\Delta u \cdot \underbrace{\tilde{w}}_{\text{正}} \geq \int_U f\tilde{w}\, dx$

$\Rightarrow \quad -\Delta u = f + 一项正的 \quad \text{a.e.}$

$\Rightarrow \quad -\Delta u + \beta(u-h) \ni f$

若 $u>h$ a.e. 则取 $w=h$ 有

$$\int_U -\Delta u\cdot(h-u) \geq \int_U f(h-u)\,dx$$

取 $w=2u-h$.

则 $$\int_U -\Delta u\,(u-h) \geq \int_U f(u-h)\,dx$$

$\Rightarrow$ 等号成立. 于是 $-\Delta u=f$ a.e. 对应 $\beta=0$

若 $u<h$ a.e. 这不可能 (与 $\mathcal{A}$ 定义矛盾!).

□

[8.15] (Pointwise Gradient Constraint)

(1) ~~求证~~:设 $\mathcal{A}=\{w\in H_0^1(U)\mid |Dw|\leq 1 \text{ a.e.}\}$ $f\in L^2(U)$.

求证: $I[w]=\int_U \frac{1}{2}|Dw|^2-fw\,dx$ 的极小化子存在且唯一.

记作 u.

(2) 求证: $\int_U Du\cdot D(w-u)\,dx \geq \int_U f(w-u)\,dx$. $\forall w\in\mathcal{A}$.

证明: 由课本 P492 ~ 493 对 Thm 8.4.3, 8.4.4 的证明知,

我们只用证明 $\mathcal{A}=\{w\in H_0^1(U)\mid |Dw|\leq 1 \text{ a.e.}\}$

是 $H_0^1(U)$ 中的弱闭集, 其它步骤完全一致.

首先 $\mathcal{A}$ 凸是显然: $\forall w_1,w_2\in\mathcal{A}$. $0\leq\lambda\leq 1$

$$|D(\lambda w_1+(1-\lambda)w_2)|$$
$$\leq \lambda|Dw_1|+(1-\lambda)|Dw_2|\leq 1 \text{ a.e.}$$

且 $\lambda w_1+(1-\lambda)w_2\in H_0^1(U)$.

由 Mazur 引理, 只用证 $\mathcal{A}$ 闭, 即等价于 $\mathcal{A}$ 弱闭.

这是显然的. 设 $\{u_n\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个序列. 且 $u_n\to u$ in $H_0^1(U)$.

~~则 $Du_n\to Du$ in L^2~~ $\Rightarrow u_n\to u$ in $L^2(U)$.

$\therefore$ 存在子列 $u_{n_k}\to u$ a.e. $\Rightarrow$ Du 存在 且

差商 $D^h u_{n_k}\to D^h u$ a.e. & in $L^2(U)$ $Du_n\to Du$ in L^2

这说明 $u\in H_0^1(U)\Rightarrow\mathcal{A}$ 闭, 从而弱闭 □

[8.16] 设 $n\geq 3$ U是有界开集且包含原点、证明：$u:=\frac{x}{|x|}\in H^1(U\to\mathbb{R}^n)$.
且是到 S^{n-1} 的调和映射 i.e. u为 $\begin{cases}-\Delta u=|\nabla u|^2 u\\ |u|=1\end{cases}$ in U 的弱解

证明. 先证 $u\in H^1(U\to\mathbb{R}^n)$. 对任何 $x\neq 0$ 有：

$$u_j=\frac{x_j}{|x|}\Rightarrow \partial_i u_j=\frac{\delta_{ij}|x|-x_j\frac{x_i}{|x|}}{|x|^2}=\frac{\delta_{ij}}{|x|}-\frac{x_ix_j}{|x|^3}$$

$$|\partial_i u_j|^2=\frac{\delta_{ij}}{|x|^2}-\frac{2\delta_{ij}x_ix_j}{|x|^4}+\frac{x_i^2x_j^2}{|x|^6}$$

$$\Rightarrow |\nabla u|^2=\sum_{i,j=1}^n|\partial_iu_j|^2=\frac{n}{|x|^2}-\frac{2|x|^2}{|x|^4}+\frac{|x|^4}{|x|^6}$$

$$=\frac{n-1}{|x|^2}$$

U包含0点 且有界开 $\Rightarrow$ $\int_U|\nabla u|^2dx=\int_U\frac{n-1}{|x|^2}dx<\infty$ 因 $n\geq 3$.

故 $\nabla u\in L^2$. 而 $u\in L^2$ 显见 $\therefore u\in H^1(U\to\mathbb{R}^n)$.

再证明 u是弱解，即验证

$$\int_U\nabla u:\nabla\varphi\,dx=\int_U|\nabla u|^2u\cdot\varphi\,dx$$

$\forall\varphi\in H_0^1(U\to\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(U\to\mathbb{R}^n)$.

$$\text{右边}=\int_U\frac{n-1}{|x|^2}\sum_{i=1}^n u_i\cdot\varphi_i\,dx=(n-1)\int_U\sum_{i=1}^n\frac{u_i\varphi_i}{|x|^2}dx$$

$$=(n-1)\int_U\sum_{i=1}^n\frac{x_i\varphi_i}{|x|^3}dx$$

$$\text{左边}=\int_U\sum_i\sum_j\partial_ju_i\cdot\partial_j\varphi_i$$

$$=\sum_i\sum_j\int_U\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|}-\frac{x_ix_j}{|x|^3}\right)\partial_j\varphi_i\,dx.$$

$$=\sum_i\sum_j\int_U\underbrace{\frac{\delta_{ij}}{|x|}}_{①}\partial_j\varphi_i\,dx-\sum_i\sum_j\int_U\underbrace{\frac{x_ix_j}{|x|^3}}_{②}\partial_j\varphi_i\,dx.$$

$$① = \sum_i \int_U \frac{\partial_i \varphi_i}{|x|} dx$$

$$\overset{分部积分}{=} -\sum_i \int_U \varphi_i \left(-\frac{x_i}{|x|^3}\right) dx = \sum_i \int_U \varphi_i \frac{x_i}{|x|^3} dx$$

$$② = -\sum_i \sum_j \int_U \frac{x_i x_j}{|x|^3} \partial_j \varphi_i \, dx$$

$$\overset{分部积分}{=} \sum_i \sum_j \int_U \partial_j \left(\frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) \cancel{\partial} \varphi_i \, dx$$

$$= \sum_i \sum_j \int_U \varphi_i \frac{(x_i + \delta_{ij} x_j)|x|^3 - x_i x_j 3|x|^2 \frac{x_j}{|x|}}{|x|^6} dx$$

$$= \sum_i \sum_j \int_U \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx + \sum_i \sum_j \int \frac{\delta_{ij} x_j \varphi_i}{|x|^3} dx$$

$$- \sum_i \sum_j \int \frac{3 x_i x_j^2}{|x|^5} \varphi_i dx$$

$$= n \cdot \sum_i \int_U \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx + \sum_i \int \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx$$

$$- 3 \sum_i \int \frac{x_i}{|x|^3} \varphi_i \, dx$$

$$= (n-2) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx$$

$$\Rightarrow ① + ② = (n-1) \int_U \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varphi_i}{|x|^3} dx$$

故 $\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|x|}$ 是弱调和映射

$\square$

[8.17] 设 $u, \hat{u}$ 是2个正的极小化子：$I[w] = \int_U |\nabla w|^2 dx$
如下能量泛函

$u, \hat{u} > 0$ in U 求证：$u \equiv \hat{u}$ in U

证明：令 $w = \left(\frac{u^2 + \hat{u}^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$s = \frac{u^2}{u^2 + \hat{u}^2}, \quad \eta = \frac{u^2 + \hat{u}^2}{2}$$

$$\partial_i w = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2 + \hat{u}^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\left(\frac{\partial_i u + \partial_i \hat{u}}{2}\right)} (u \cdot \partial_i u + \hat{u}\,\partial_i \hat{u})$$

$$(\partial_i w)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{u^2 + \hat{u}^2} \left(u^2 (\partial_i u)^2 + \hat{u}^2 (\partial_i \hat{u})^2 + 2u\hat{u}\, \partial_i u \partial_i \hat{u}\right)$$

$$= \frac{u^2 + \hat{u}^2}{2} \cdot \left(\frac{u^2(\partial_i u)^2}{(u^2 + \hat{u}^2)^2} + \frac{2u\hat{u}\,\partial_i u \partial_i \hat{u}}{(\quad)^2} + \frac{\hat{u}^2(\partial_i \hat{u})^2}{(u^2 + \hat{u}^2)^2}\right)$$

$$= \eta \left| s \frac{\partial_i u}{u} + (1-s)\frac{\partial_i \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2$$

$$\therefore |\nabla w|^2 = \eta \left| s \frac{\nabla u}{u} + (1-s)\frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}} \right|^2.$$

Jensen不等式
x^2 凸

$$\le \eta \left(s \left|\frac{\nabla u}{u}\right|^2 + (1-s)\left|\frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}}\right|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla \hat{u}\right|^2$$

积分：$\int_U |\nabla w|^2 \le \frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int |\nabla \hat{u}|^2 \le \int_U |\nabla w|^2.$

$u, \hat{u}$ 是极小化子

$\therefore$ 这表明等号成立.

由~~均值~~Jensen不等式取等条件有 $\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla \hat{u}}{\hat{u}}$ a.e.

那么 $\partial_i\left(\frac{u}{\hat{u}}\right) = \frac{\partial_i u \cdot \hat{u} - \partial_i \hat{u} \cdot u}{\hat{u}^2} = \frac{\partial_i u}{u} \cdot \frac{u}{\hat{u}} - \frac{\partial_i \hat{u}}{\hat{u}} \cdot \frac{u}{\hat{u}}$

$\Rightarrow u/\hat{u} = \text{const}$ $\qquad = 0$ a.e.

而 $\int |\nabla \hat{u}|^2 = \int |\nabla u|^2$ $\therefore \frac{\hat{u}}{u} = 1$ a.e.

即 $\hat{u} = u$ a.e.

□

[8.18]：设 a_1, a_2 是 U 上的正值光滑函数，且 $a_1 \le a_2$

设 u_1, u_2 分别为如下方程的光滑解：$\mathrm{div}(a_1 \nabla u_1) = 0$ in U.

$\mathrm{div}(a_2 \nabla u_2) = 0$

且 $\nabla u_2 \neq 0$ a.e.

再假设：$u_1 = u_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{on } \partial U. \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

求证：$a_1 \equiv a_2$. $u_1 \equiv u_2$ in U.

证明：u_1, u_2 分别是能量泛函 $I_1[w] = \int_U a_1 |\nabla w|^2 dx$

$I_2[w] = \int_U a_2 |\nabla w|^2 dx$

唯一的极小化子.

而 $\int_U a_1 |\nabla u_1|^2 dx = \int_U a_1 \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 \, dx$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} \int_{\partial U} a_1 \cdot u_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} ds - \int_U \underbrace{\mathrm{div}(a_1 \nabla u_1)}_{=0} u_1 \, dx$$

$$\overset{\text{条件}}{=} \int_{\partial U} a_2 \cdot u_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial n} ds - \int_U \underbrace{\mathrm{div}(a_2 \nabla u_2)}_{=0} u_2 \, dx$$

$$\overset{\text{仿照以上}}{=} \int_U a_2 |\nabla u_2|^2 dx$$

$$\overset{a_2 \ge a_1}{\ge} \int_U a_1 |\nabla u_2|^2 dx.$$

但由极小化子唯一性知 $u_1 \equiv u_2$ in U. 从而 $a_1 \equiv a_2$ in U

□

[8.1 9] (波方程的动量守恒)

设 u 为非线性波方程 $\partial_{tt} u - \Delta u + f(u) = 0$ 的解

考虑 $\vec{x}(x,t,\tau) = (x+\tau e_k, t)$. 试用诺特定理找出动量密度 p_k

$w(x,t,\tau) = u(x+\tau e_k, t)$ 　　动量流 j_k

s.t. $\partial_t p_k - \operatorname{div} j_k = 0 \quad 1 \le k \le n.$

证明: 设 F 是 f 的原函数, 则该方程的 Lagrangian 为

$$L(\nabla w, w_t; w; x, t) = \frac{1}{2} w_t^2 - \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 + F(w)\right)$$

即 $L(p, z, x, t) = \frac{1}{2} p_{n+1}^2 - \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) - F(z).$

$$\vec{x}(x,t,\tau) = (x+\tau e_k, t)$$

$$\therefore \vec{v} = e_k.$$

$$w(x,t,\tau) = u(x+\tau e_k, t)$$

$$\therefore m = \partial_{x_k} u.$$

那么, 由诺特定理:

$$\sum_{i=1}^n \Big(m \underbrace{\partial_{p_i} L(\nabla u, u_t; u; x, t)}_{=-p_i} - L(\nabla u, u_t; u; x, t)\overset{\delta_{ik}}{v^i}\Big)_{x_i}$$

$$+ \partial_t\Big(m \underbrace{\partial_{p_{n+1}} L(\nabla u, u_t; u; x, t)}_{=p_{n+1}} - L(\nabla u, u_t; u; x, t)\underbrace{v^{n+1}}_{=0}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\partial_k u\,(-\partial_i u) - \delta_{ik}\left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right)\right)_{x_i}$$

$$+ \partial_t(\partial_k u \cdot u_t) = 0$$

$$\therefore p_k = \partial_k u \cdot u_t$$

$$j_k = \partial_k u \cdot \nabla u + e_k\left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right)$$

满足 $\partial_t p_k - \operatorname{div} j_k = 0. \quad 1 \le k \le n.$

□

[8.20] 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是区域，$B(0,R)\subseteq U$，u 在 U 中是调和函数，$u(0)=0$ 但 u 不恒为 0。对 $0<r<R$，定义：

$$a(r)=\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}u^2\,dS$$

$$b(r)=\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(0,r)}|\nabla u|^2\,dx$$

在 §8.62 中，我们已有单调性公式

$$\dot b=\frac{2}{r^{n-2}}\int_{\partial B(0,r)}u_r^2\,dS$$

(1) 求证：$\dot a=\dfrac{2}{r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(0,r)}u\cdot u_r\,dS=\frac{2}{r}b$

(2) 求证：$b^2\le\dfrac{r}{2}a\dot b$

(3) 令 $f=\dfrac{b}{a}$，求证：$\dot f\geq 0$，这称作 Almgren 单调性。

(4) ~~求证~~ 若令 $\beta=\dfrac{2b(R)}{a(R)}$，$\gamma=\dfrac{a(R)}{R^\beta}$。

求证：$\dfrac{\dot a}{a}\le\dfrac{\beta}{r}$，从而 $a(r)\geq\gamma r^\beta$ $(0<r<R)$

证明：(1) $a(r)=\dfrac{1}{r^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B(0,r)}u^2(x)\,dS(x)\xlongequal{\text{令 }x=rw}\int_{\partial B(0,1)}u^2(rw)\,dS_w$

则 $w\in\partial B(0,1)$，$dS(x)=r^{n-1}dS_w$

$$\Rightarrow a'(r)=\int_{\partial B(0,1)}2u(rw)\cdot\partial_r u(rw)\,dS_w$$

$$\xlongequal{x=rw}\frac{2}{r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}u\cdot\partial_r u\cdot dS$$

∂_r 在边界即为法向导数

$$=\frac{2}{r^{n-1}}\int_{\partial B(0,r)}u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\xlongequal{\text{散度定理}}\frac{2}{r^{n-1}}\int_{B(0,r)}|\nabla u|^2dx$$

$$=\frac{2}{r}\cdot b$$

(2) 由上一问的计算过程，

$$b=\frac{1}{r^{n-2}}\int_{\partial B(0,r)}u\cdot\partial_r u\,dS$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式即得结论。

(3) 由(1)知 $b=\dfrac{r}{2}\dot a$

从而 $b^2\le\dfrac{r}{2}a\dot b\Rightarrow\dfrac{r}{2}\dot a b\le\dfrac{r}{2}a\dot b\Rightarrow\dot b a-\dot a b\geq 0$

$$\Rightarrow\dot f=\frac{\dot b a-\dot a b}{a^2}\geq 0.$$

(4) 由(3)知 $f(r)$ 关于 r 递增

$$\therefore \quad f(r) \leq f(R)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b(r)}{a(r)} \leq \frac{b(R)}{a(R)}$$

$\dot{a} = \frac{2}{r} b$

代入β的定义

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{2} \frac{\dot{a}(r)}{a(r)} \leq \frac{b(R)}{a(R)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}(r)}{a(r)} \leq \frac{\beta}{r}$$

即 $$\frac{d}{dr}(\ln a(r)) \leq \frac{\beta}{r}$$

而 $$\ln a(r) = \ln a(R) - \int_r^R \frac{d}{d\rho}(\ln a(\rho))\, d\rho$$

$$\geq \ln a(R) - \int_r^R \frac{\beta}{\rho}\, d\rho$$

$$= \ln a(R) - \beta \ln R + \beta \ln r$$

$$\Rightarrow \quad a(r) \geq a(R) \cdot R^{-\beta} \cdot r^{\beta}$$

$$= \gamma \cdot r^{\beta} \qquad \forall\, 0 < r < R$$

$\square$