ch 8 . Calculus of Variations

$A[u]=0$

$\downarrow$

Find a function $I[\cdot]$ s.t. $A[\cdot]$ 是 I 的导数.

$$A[\cdot]=I'[\cdot]$$

$\Rightarrow I'[u]=0$

$\Rightarrow$ 找能达到的极小化子

· 第一变分与 E-L 方程

$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p, z, x) \longrightarrow L(\vec{p}, z, \vec{x})$

$(p_1 \cdots p_n;\ z;\ x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} D_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ D_z L = L_z \\ D_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}) \end{cases}$$

设 $I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)\, dx$ $\quad w: \bar{U} \to \mathbb{R}$ smooth. $w=g$ on ∂U

设. $u=g$ on ∂U 且是 I 的极小化子.

$u \in C^\infty$.

claim: u 自动成为上方程之解.

Pf: $\forall v \in C_c^\infty(U)$. $i(\tau) := I[u+\tau v]$ $\tau \in \mathbb{R}$

u 为 I 的极小化子. $\Rightarrow i'(0)=0$.

$u+\tau v = u = g$ on ∂U.

$L(u_{x_1}+\tau v_{x_1}, \dots, u_{x_n}+v_{x_n}, u+\tau v, x_1, \dots, x_n)$.

$$i(\tau) = \int_U L(Du+\tau Dv, u+\tau v, x)\, dx$$

$$i'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du+\tau Dv, u+\tau v, x) \cdot v_{x_i} + L_z \cdot v\, dx.$$

$\tau=0$

$$i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) \cdot v_{x_i} + L_z(Du, u, x)\, v\, dx$$

v cpt cpted

$$= \int_U \left(-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x)\right) v\, dx$$

$$\Rightarrow\ -\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U. \quad \dots (*)$$

$(*)$ is called the Euler-Langrange Equ.

章俊彦 PB13001112

eg: $L(p,z,x) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}(p_1^2+\cdots+p_n^2)$.

$\Rightarrow L_{p_i} = p_i \qquad L_z = 0$

$\Rightarrow$ E-L. eqn is

$-\sum_{i=1}^n (u_{x_i})_{x_i} + 0 = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ in U

$I[w] = \frac{1}{2}\int_U |Dw|^2\,dx$.

eg. $L(p,z,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij} p_i p_j - z f(x) \qquad a^{ij} = a^{ji}$

$L_{p_i} = \sum_{j} a^{ij} p_j$.

$L_z = -f(x) \qquad I[w] = \int \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij} w_{x_i} w_{x_j} - wf\,dx$.

$\Rightarrow -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a^{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x)$ in U.

eg: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cts. $\qquad F(z) = \int_0^z f(y)\,dy$

$I[w] = \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - F(w)\,dx$

$\Rightarrow -\sum_{i=1}^n (u_{x_i})_{x_i} = f(u). \qquad \Rightarrow -\Delta u = f(u)$.

eg: $L(p,z,x) = (1+|p|^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L(Dw,w,x) = (1+|\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}}$

$L_{p_i} = \frac{1}{2}(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2p_i \qquad L_z = 0$

$= \frac{p_i}{\sqrt{1+|p|^2}}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)_{x_i} = 0$ in U. $\Rightarrow \underbrace{\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)}_{n\text{倍的平均曲率}} = 0$

从而极小曲面的平均曲率为0.

章俊彦 PB13001112

8.1.3. 二阶变分 ③

u 为 $I[\cdot]$ 的极小化子. $i(\tau)=I[u+\tau v] \Rightarrow \begin{array}{l} i'(0)=0 \\ i''(0)\geq 0. \end{array}$

~~$u+\tau v$~~ $I[w]$ 与 $\int_U$ 交换

$$i'(\tau)=\int_U \sum_{i} L_{p_i}(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)v_{x_i}+L_z(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)v\,dx$$

$$i''(\tau)=\int_U \sum_{i,j} L_{p_ip_j}(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)v_{x_ix_j}$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\underbrace{L_{p_i z}}_{\frac{\partial^2 L}{\partial p_i\partial z}}(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)v_{x_i}v+L_{zz}(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)v^2\,dx$$

$$\overset{\tau=0}{\Rightarrow}\quad 0\leq i''(0)=\int_U \sum_{i,j} L_{p_ip_j}(Du,u,x)v_{x_ix_j}+2\sum_{i=1}^{n}L_{p_i z}(Du,u,x)v_{x_i}v$$

$$+L_{zz}(Du,u,x)v^2\,dx \qquad \forall v\in C_c^\infty(U).$$

$\cdots(**)$.

① $(**)$ 对在 ∂U 上取 0 的 Lipschitz 函数 v 也对.

如何证明? 利用逼近. Fix $\xi\in\mathbb{R}^n$.

$$v(x):=\varepsilon\rho\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\zeta(x) \quad x\in U. \quad \zeta\in C_c^\infty(U).$$

$$\rho(x)=\begin{cases} x & 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases} \qquad \rho(x)=\rho(x+1).$$

$(\Rightarrow |\rho'|=1$ a.e.$)$.

$$v_{x_i}(x)=\rho'\left(\frac{x\cdot\xi}{\varepsilon}\right)\xi_i\zeta+O(\varepsilon). \quad \text{as } \varepsilon\to 0^+.$$

$$\Rightarrow 0\leq\int\sum_{i,j=1}^{n} L_{p_ip_j}(Du,u,x)(\rho')^2\xi_i\xi_j\zeta^2+O(\varepsilon). \quad \forall$$

包括了另2项的求导.

$$\Rightarrow 0\leq\int_U\sum L_{p_ip_j}(Du,u,x)\xi_i\xi_j\zeta^2\,dx \quad \forall\zeta\in C_c^\infty(U).$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j}L_{p_ip_j}(Du,u,x)\xi_i\xi_j\geq 0 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.\ x\in U. \quad \cdots(\#)$$

$(\#)$ 将在极小化子存在性理论中用到.

8.1.4 方程组

$L: M^{m\times n}\times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \to \mathbb{R}$.

$L = L(P, z, x) = L(p_1^1, \dots, p_n^m, z^1, \dots, z^m, x_1, \dots, x_n)$

$P \in M^{m\times n}$ $\quad z\in \mathbb{R}^m$. $\quad x\in U$

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^m & \cdots & p_n^m \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x)\,dx.$ $\quad w: \bar{U}\to\mathbb{R}^m$ $(w^1\dots w^m)$. $\quad w=g$ on ∂U. $g:\partial U\to\mathbb{R}^n$ 给定

$$\Rightarrow Dw(x) = \begin{pmatrix} w^1_{x_1} & \cdots & w^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ w^m_{x_1} & \cdots & w^m_{x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

下面证明：$I[\cdot]$的任一光滑极小值 $\vec{u}=(u^1,\dots,u^m)$ with $u=g$ on ∂U 必定是某个非线性方程的解. Fix $v\in C_c^\infty(U\to\mathbb{R}^m)$.

$i(\tau) := I[u+\tau v]$. $\quad i'(0)=0$

$$= \int_U \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(Du, u, x)\, v^k_{x_i} + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(Du, u, x)\, v^k\, dx$$

分部积分

$$\Longrightarrow \quad -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i^k}(Du, u, x)\right)_{x_i} + L_{z^k}(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U \quad 1\le k\le m$$

$\dots$ (***)

□

• 零 Lagrangian 泛函：

Def: L is called a null Lagrangian if

$$-\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i^k}(Du, u, x)\right)_{x_i} + L_{z^k}(Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U \quad 1\le k\le m$$

is automatically solved by all smooth functions $u: U\to\mathbb{R}^m$

若 L 是 null Lagrangian, 则 $I[w] = \int_U L(Dw, w, x)\,dx$ 仅与 $w|_{\partial U}$ 有关

Thm 8.1.1 设 L 为 null Lagrangian. $u, \tilde{u}\in C^2(\bar{U}\to\mathbb{R}^m)$. $u=\tilde{u}$ on ∂U

则 $I[u] = I[\tilde{u}]$

章俊彦 PB13001112

Pf: Set $i(\tau) = I[\tau u + (1-\tau)\tilde{u}]$ 只用证 $i'(\tau) \equiv 0$.

$$i(\tau) = \int_U L(\tau Du + (1-\tau)D\tilde{u},\ \tau u + (1-\tau)\tilde{u},\ x)\, dx$$

$$i'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} L_{p_i^k}(\tau Du + (1-\tau)D\tilde{u},\ \tau u + (1-\tau)\tilde{u},\ x)\,(u^k_{x_i} - \tilde{u}^k_{x_i})$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} L_{z^k}(\tau \cdots\cdots)\,(u^k - \tilde{u}^k)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_U \Big[-\sum_{i=1}^{n} \big(L_{p_i^k}(\alpha \cdots\cdots)\big)_{x_i} + L_{z^k}(\cdots)\Big](u^k - \tilde{u}^k)\, dx$$

$$= 0$$

□

Rmk: $m = 1$ 时. 这样的L ~~(中)~~ 只有 $L(p, z, x) = p$.

$m \geq 2$ 时 nontrivial. 井.

Notation

设 cof A ~~是~~ 为 A 的伴随矩阵 $(\mathrm{cof}\, A)_i^k = \underbrace{(-1)^{i+k} A_{ki}}_{\text{余式}}$

lemma: $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ smooth 则 $\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{cof}\,(Du)_i^k)_{x_i} = 0$.

Hint: 由 $|P| = P^T.(\mathrm{cof}\, P)$ 两边对 P_m^k 求导. 令 $P = Du$ ~~即~~可 □

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} u^k_{x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{cof}\, Du)^k_{j,x_j}\Big) = 0$$

若 $\det Du(x_0) \neq 0$. then $\sum \mathrm{cof}\,(\quad) = 0$. at x_0.

If not. consider ~~de~~ $Du(x_0) + \varepsilon I$.

$\tilde{u} = u + \varepsilon x$. 再 $\varepsilon \to 0$

Thm 8.1.2: $\forall p \in M^{m\times n}$. $L(p) = \det p$ 是零 Lagrangian. □

□.

章俊彦 PB13001112

§8.2 极小化子的存在性

8.2.1: 强制性 coercivity 与 下半连续性

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x)\,dx \qquad \begin{matrix} w: U \to \mathbb{R} \\ w = g \text{ on } \partial U \end{matrix}$$

何时有极小化子？

1. 强制性

设 $1<q<\infty$ (Fix) 且 $\exists\ \alpha>0,\ \beta\geq 0$ s.t. $L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - \beta\ \ \forall p\in\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{R},\ x\in U$

$\Rightarrow I[w] \geq \alpha \|Dw\|^q_{L^q(U)} - \gamma \quad \cdots (*) \qquad \gamma := \beta|U|$

$\Rightarrow I[w] \to \infty$ as $\|Dw\|_q \to \infty$

$(*)$ 称作 $I[\cdot]$ 的 强制性条件 (coercivity condition)

注意到，对 $W^{1,q}(U)$ 函数 (with $w=g$ on ∂U) 也可以定义 $(*)$ 这样的 强制性条件.
└ 在 trace 的意义下

令 $\mathcal{A} := \{ w\in W^{1,q}(U) \mid w=g$，在迹的意义下$\}$

2. 下半连续性 (lower-semicontinuity)

为何引入下半连续性？

本节的目的是为了~~证明~~找出 $I[\cdot]$ 的极小化子，即让 $I[\cdot]$ 达到极小值.

但仅有强制性条件无法做到：

$$m := \inf_{w\in\mathcal{A}} I[w] \quad \cancel{\text{dne}}$$

则由inf定义，存在 $\underbrace{u_k\in\mathcal{A}}_{\text{称作极小化序列 (minimizing sequence)}}$ s.t. $I[u_k] \to m$ as $k\to\infty$

欲证明 $\{u_k\}$ 有某种意义下的收敛子列，我们需要"紧性"

若仅有 $(*)$ 对，我们只能得出 $\{u_k\}$ 是 $W^{1,p}(U)$ 中的有界序列，并不一定有强收敛子列. 但 $1<q<\infty$ 时，L^q 自反. 由Banach-Alaoglu定理知

$\exists$ 弱收敛子列 i.e. $\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{in } L^q(U) \\ Du_{k_j} \rightharpoonup Du & \text{in } L^q(U) \end{cases}$

且 $u=g$ on ∂U

$\Rightarrow u\in\mathcal{A}$

PB13001112

但现在又有个新问题，有了 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U)$，并不一定有 $I[u]=\lim_{j\to\infty} I[u_{k_j}]$ 即：I 关于弱收敛并不保证连续性.

为何？因为 $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ ~~在~~ in L^q

$$\not\Downarrow$$

$$Du_{k_j} \to Du \quad a.e.$$

为了避免这个问题，我们须引入下半连续的条件

Def：称 $I[\cdot]$（关于序列）弱下半连续在 $W^{1,q}(U)$ 上，若 $I[u] \le \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$ 能由 $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}$ 导出.

□

下面我们来寻找合理的条件，~~使得~~ 对 L 中的非线性项加以限制，来保证 $I[\cdot]$ 能满足条件.

3. 凸性 (Convexity).

在第二变分的推导中，我们知道，若 u 是极小化子，则

$$(*) \quad \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_ip_j}(Du,u,x)\xi_i\xi_j \ge 0. \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^n$$

联想：凸函数 二阶导 >0. (i.e. Hesse 正定).

这使得我们要对 L 加上凸性的条件 (why?)

Thm 8.2.1：(弱下半连续). 设 L 是光滑，有下界的函数. 且 $p \longmapsto L(p,z,x)$ 凸 $\forall z\in\mathbb{R}$ $\forall x\in U$

则 $I[\cdot]$ 在 $W^{1,q}(U)$ 上弱下半连续.

证明：任取 $\{u_k\}_1^\infty$ 使 $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U)$.

令 $l=\liminf_{k\to\infty} I[u_k]$，则要证 $I[u]\le l$

$$\overset{\|}{\int_U L(Du,u,x)}.$$

由共鸣~~定~~定理知 $\sup_k \|u_k\|_{W^{1,q}(U)} < \infty$

即，可能是某个子列

从而 $l=\lim_{k\to\infty} I[u_k]$ (up to subsequence)

又因为 $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}$，$W^{1,q} \subset\subset L^q(U)$. 所以 $u_k \to u$ in $L^q(U)$

$\Rightarrow$ $u_k \to u$ a.e. in U (子列意义下)

那么由 Egorov 定理，$\forall \varepsilon>0$，$\exists$(闭集) E_ε s.t. $\begin{cases} u_k \rightrightarrows u \text{ on } E_\varepsilon \\ \mathcal{L}^n(U\setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \end{cases}$

不妨 $0<\varepsilon'<\varepsilon$ 有 $E_\varepsilon \subseteq E_{\varepsilon'}$

⑧

令 $F_\varepsilon = \{x\in U \mid |u(x)| + |Du(x)| \le \frac{1}{\varepsilon}\}$

因 u, Du 几乎处处有限 (因为至少是 L^q 函数). 所以 $\varepsilon\to 0$ 时 $\mathcal{L}^n(U\setminus F_\varepsilon)\to 0$.

再设 $G_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$ 则 $\mathcal{L}^n(U\setminus G_\varepsilon)\to 0$ as $\varepsilon\to 0$.

而且在 G_ε 上 $\begin{cases} u_k \rightrightarrows u \\ |u(x)|+|Du(x)|\le \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$

下面利用极限过程来证明 $l=\lim\limits_{k\to\infty} I[u_k] \ge I[u]$

因为L有下界 故不妨设 $L\ge 0$, (否则考虑 $\tilde{L} = L+\beta$, $\beta>0$).

于是 $I[u_k] = \int_U L(Du_k, u_k, x)\,dx \ge \int_{G_\varepsilon} L(Du_k,u_k,x)\,dx$.

由于L关于p是凸函数 所以 $L(Du_k,u_k,x)\ge L(Du,u_k,x) + D_pL(Du,u_k,x)(Du_k-Du)$

[L二阶导≥0, 直接扔了]

$\Rightarrow I[u_k]\ge \int_{G_\varepsilon} L(Du,u_k,x) + \int_{G_\varepsilon} \nabla_p L(Du,u_k,x)(Du_k-Du)\,dx$.

令 $k\to\infty$ 左边 $= l$

右边 $\xlongequal{u_k\rightrightarrows u \text{ on } G_\varepsilon} \int_{G_\varepsilon} L(Du,u,x) \cancel{+\int_{G_\varepsilon} 0\,dx} + \lim\limits_{k\to\infty}\int_{G_\varepsilon}\nabla_pL(Du,u_k,x)(Du_k-Du)\,dx$

$\xlongequal{Du_k\rightharpoonup Du \text{ in } L^q} \int_{G_\varepsilon} L(Du,u,x)$.

故第二项 $\to 0$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 有 $l \ge \int_U L(Du,u,x)\,dx$.

由单调收敛定理

□

Rmk ①从以上证明中可以看出, 凸性条件在处理 $Du_k \rightharpoonup Du$ 时起到作用, 一阶展开的线性项由此消失, 且不用管高阶项.

② $u_k\to u$ in L^q 是一个很强的条件, 故我们不需要 $z\mapsto L(p,z,x)$ 的凸性

⇓子列 a.e. ⇒ 用 Egorov 定理导出一致收敛

③ 构造 F_ε 是为了保证最后一步 MCT 的可行性

□

黄俊彦 PB13001112

下面我们证明 $\mathcal{A}$ 中极小化子的存在性定理

Thm 8.2.2 (极小化子存在性) 设L满足

① 强制性条件 ~~(田)~~: $L(p,z,x) \geq \alpha|p|^q - \beta$ for some $\alpha>0$, $\beta\geq 0$.

② L关于p是凸的

③ $\mathcal{A}=\{u\in W^{1,q}(U) \mid w=g \text{ on } \partial U\}$ 非空.

则存在至少一个 $u\in\mathcal{A}$ s.t. $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$

<u>Proof</u>: $m:=\inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$ 不妨 $m<+\infty$, 选取极小化序列 u_k s.t. $I[u_k]\to m$.

在①中不妨 $\beta=0$ 则 $L(p,z,x)\geq\alpha|p|^q$ for some $\alpha>0$.

$$\Rightarrow I[w]=\int_U L(Dw,w,x)\,dx \geq \alpha\int_U |Dw|^q\,dx.$$

$m<\infty \Rightarrow \sup\limits_k \|Du_k\|_{L^q}<\infty$

事实上 ~~田~~ $\sup\limits_k \|u_k\|_{W^{1,q}(U)}<\infty$ 也对, 为了验证此事实, 只用证明 $\sup\limits_k\|u_k\|_{L^q}<\infty$

$$\|u_k\|_{L^q(U)} \underset{\forall w\in\mathcal{A}}{\leq} \|u_k-w\|_{L^q(U)}+\|w\|_{L^q(U)} \overset{\text{Poincaré 不等式}}{\leq} C\|Du_k-Dw\|_{L^q(U)}+C$$

$Tr(u_k-w)=0 \Rightarrow u_k-w\in W_0^{1,q}(U)$ 零迹定理

$\leq C'$, 这就得以验证.

从而 u_k 在 $W^{1,q}(U)$ 中一致有界, ~~依needs~~ 由Banach-Alaoglu定理知, $\exists$ 子列 $u_{k_j}\rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(U)$

余下只用证 $u\in\mathcal{A}$ ~~证~~

$\|u\|_{W^{1,q}(U)}\leq\liminf\limits_{j\to\infty}\|u_{k_j}\|_{W^{1,q}(U)}$ (由共鸣定理可得) $\Rightarrow u\in W^{1,q}(U)$

欲证 $Tr\,u=g$ on ∂U. 只需证 $u-w\in W_0^{1,q}(U)$, $\forall w\in\mathcal{A}$

$\forall w\in\mathcal{A}$, $u_k-w\in W_0^{1,q}(U)$. 它是 $W^{1,q}(U)$ 的闭子空间

由Mazur引理, 其对弱极限封闭 $\Rightarrow u-w\in W_0^{1,q}(U)$

易知, $m\leq I[u]\leq\liminf\limits_{j\to\infty} I[u_{k_j}]=m=\inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$, 证毕! □

~~在证得存在性~~

在证得存在性之后, 我们问: 何时极小化子唯一? ~~由~~ 为了导出唯一性, 我们对L需要加上更多的限制

章俊彦 PB13001112

Thm 8.2.3 (极小化子的唯一性).

设 ① $L=L(p,x)$ 与 z 无关

② $\exists\theta>0$ s.t. $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$. $\sum_{i,j} L_{p_ip_j}(p,x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2$

则 $I[\cdot]$ 的极小值 $u\in\mathcal{A}$ 是唯一的.

Proof: 存在性在 8.2.2 已证. 设 $u,\tilde{u}\in\mathcal{A}$ 都是 $I[\cdot]$ 在 $\mathcal{A}$ 的极小化子.

令 $v=\dfrac{u+\tilde{u}}{2}\in\mathcal{A}$

Claim: $I[v]\leq\dfrac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2}$, 且等号成立 $\Longleftrightarrow u=\tilde{u}$ a.e.

由 ② 知 $p\longmapsto L(p,x)$ 是一致凸的 ($\forall x$)

$\Rightarrow$ $\forall x\in U$ $p,q\in\mathbb{R}^n$

$$L(p,x)\geq L(q,x)+D_pL(q,x)(p-q)+\frac{\theta}{2}|p-q|^2$$

Set $q=\dfrac{Du+D\tilde{u}}{2}$ $p=Du$

$$\Rightarrow L(Du,x)=L\left(\frac{Du+D\tilde{u}}{2},x\right)+D_pL\left(\frac{Du+D\tilde{u}}{2},x\right)\cdot\left(\frac{Du-D\tilde{u}}{2}\right)+\frac{\theta}{8}|Du-D\tilde{u}|^2$$

$$\Rightarrow I[u]\geq I[v]+\int_U D_pL\left(\frac{Du+D\tilde{u}}{2},x\right)\left(\frac{Du-D\tilde{u}}{2}\right)dx+\int_U\frac{\theta}{8}|Du-D\tilde{u}|^2dx$$

对 $I[\tilde{u}]$ 有

$$I[\tilde{u}]\geq I[v]+\int_U D_pL\left(\frac{Du+D\tilde{u}}{2},x\right)\left(\frac{D\tilde{u}-Du}{2}\right)dx+\int_U\frac{\theta}{8}|Du-D\tilde{u}|^2dx$$

相加:

$$\frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2}\geq I[v]+\frac{\theta}{8}\int_U|Du-D\tilde{u}|^2dx$$

$$\geq I[v]$$

The equality holds iff $D(u-\tilde{u})=0$ a.e.

since $u=\tilde{u}$ on ∂U $\Rightarrow$ $u=\tilde{u}$ a.e. in U (Trace Theorem)

□

章俊彦 PB13001112

4. E-L方程的弱解:

之前的讨论均是讨论 $u\in C^\infty(U)$ 的情况，如今，将u限制为 $W^{1,q}(U)$ 函数，为了得出此情况下 Euler-Langrange 方程解的存在性，我们需要加一些关于L（及其导数）的增长条件。

设 ①: $|L(p,z,x)| \le C(|p|^q+|z|^q+1)$

②: $\begin{cases} |D_pL(p,z,x)|\le C(|p|^{q-1}+|z|^{q-1}+1) \\ |D_zL(p,z,x)|\le C(|p|^{q-1}+|z|^{q-1}+1) \end{cases}$ for some $C>0$.

$\forall p\in\mathbb{R}^n,\ z\in\mathbb{R},\ x\in U$

Def（E-L方程的弱解）称 $u\in\mathcal{A}$ 为边值问题

$$(*)\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(Du,u,x)\right)_{x_i}+L_z(Du,u,x)=0 & \text{in } U \\ u=g & \text{on } \partial U \end{cases}$$

的弱解，若 $\forall v\in W_0^{1,q}(U)$，有 $\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du,u,x)v_{x_i}+L_z(Du,u,x)v\,dx=0$ ……(#)

□.

为何如此定义？类似于ch6.7中弱解的定义：

$\forall v\in C_c^\infty(U)$（作为测试函数），乘在(*)两边，分部积分有(#)成立，

若 $u\in W^{1,q}(U)$

则由② $|D_pL(Du,u,x)|\le C(|Du|^{q-1}+|u|^{q-1}+1)\in L^{q'}(U)$

$|D_zL(Du,u,x)|\le C(|Du|^{q-1}+|u|^{q-1}+1)\in L^{q'}(U)$

用 C_c^∞ 逼近，即有(#)对 $W_0^{1,q}(U)$ 成立

□

Thm 8.2.4（E-L方程弱解存在性）

设L满足增长条件 ①②，$u\in\mathcal{A}$ 是I的极小化子，则u为 (*) 的弱解

证明. Fix $v\in W_0^{1,q}(U)$. set $i(\tau):=I[u+\tau v]$ $\tau\in\mathbb{R}$.

由①知 $I[\tau]<\infty$ $\forall\tau$,

设 $\tau\neq0$，我们希望计算 $i'(0)$

章俊彦 PB13001112

⑫

这需要计算差商

$$\frac{i(\tau)-i(0)}{\tau}=\int_U \frac{L(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)-L(Du,u,x)}{\tau}dx$$

$$=:\int_U L^{\tau}(x)\,dx$$

$$L^{\tau}(x)\overset{a.e.}{=}\frac{L(Du+\tau Dv,\ u+\tau v,\ x)-L(Du,u,x)}{\tau}$$

$$\xrightarrow{\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n}L_{p_i}(Du,u,x)\,v_{x_i}+L_z(Du,u,x)\,v \qquad a.e.$$

as $\tau\to 0$

实际上是由下面的计算,用Lebesgue微分定理导出的

又: $$L^{\tau}(x)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{d}{ds}L(Du+sDv,\ u+sv,\ x)\,ds$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\sum_{i=1}^{n}L_{p_i}(Du+sDv,\ u+sv,\ x)\,v_{x_i}+L_z(Du+sDv,\ u+sv,\ x)\,v\,ds$$

$$|L^{\tau}(x)|\le C\left(|Du|^{q}+|u|^{q}+|Dv|^{q}+|v|^{q}+1\right)\in L^1(U)\quad \forall\tau\neq 0$$

由控制收敛定理,

$\tau\to 0$ 时

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{i'(0)}\overset{\exists}{=}\int_U\sum_{i=1}^{n}L_{p_i}(Du,u,x)\,v_{x_i}+L_z(Du,u,x)\,v\,dx$$

因为 u是极小化子

从而 u为弱解 □

Rmk (*) 也有不对应于 $I[\cdot]$ 极小化的解. 但若 $(p,z)\mapsto L(p,z,x)$ 对任一x都是一个凸函数, 则 (*) 的任一弱解必为 I 的极小化子.

$$(*)\begin{cases}-\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}(Du,u,x)\right)_{x_i}+L_z(Du,u,x)=0 & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$$

章俊彦 PB13001112

$\forall w \in \mathcal{A}$. 有

$$L(q,w,x) \geq L(p,z,x) + D_p L_p(p,z,x)\cdot(q-p) + D_z L(p,z,x)\cdot(w-z).$$

$p = Du$ $q = Dw$ $z = u$ $w = w$ 有:

$$L(Dw,w,x) \geq L(p,Du,u,x) + D_pL(Du,u,x)\cdot(Dw-Du)$$
$$+ D_zL(Du,u,x)(Dw-u)$$

~~左~~
两边积分. 右边 ~~有~~ 最后两项积分为 0 (用 (*) 弱解定义, 以及 $w-u \in W_0^{1,q}(U)$).

$\Rightarrow$ u 为极小化子.

□

5、方程组.

$$I[\vec{w}] = \int_U L(D\vec{w}(x), \vec{w}(x), x)\,dx.$$

$\vec{w}: U \to \mathbb{R}^m$.

$L: \mathbb{M}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \to \mathbb{R}$. 给定.

设有强制性条件

①: $L(P,z,x) \geq \alpha|P|^2 - \beta$ $P \in \mathbb{M}^{m\times n}$. $z \in \mathbb{R}$. $x \in U$ for $\alpha > 0$. $\beta \geq 0$

$\mathcal{A} = \{\vec{w} \in W^{1,q}(U \to \mathbb{R}^m) \mid \vec{w} = \vec{g} \text{ on } \partial U\}$

Thm 8.2.5 (极小化子存在性).

设 L 满足① 且关于变量 P 是凸的, 设 $\mathcal{A} \neq \phi$. 则 $\exists\ \vec{u} \in \mathcal{A}$ s.t. $I[u] = \inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$

~~Proof~~

证明与之前的完全类似.

□

与之前相同, 我们有

Thm 8.2.6 (极小化子唯一性) 设 L 与 z 无关, $P \mapsto L(P,x)$ 是凸的, 则 $I[\cdot]$ 的极小化子 $u \in \mathcal{A}$ 是唯一的.

□

若有

$$② \begin{cases} |L(P,z,x)| \leq C(|P|^q + |z|^q + 1) \\ |D_pL(P,z,x)| \leq C(|P|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \quad 时 \\ |D_zL(p,z,x)| \leq \end{cases}$$

则对方程组 (*) $\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (L_{p_i^k}(Du,u,x))_{x_i} + L_{z^k}(Du,u,x) = 0 & \text{in } U \\ u^k = g^k & \text{on } \partial U \end{cases}$

黄俊茂 PB13001112

称 $u\in\mathcal{A}$ 为弱解，若

$$\sum_{k=1}^{m}\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i^k}(Du,u,x)\,w^k_{x_i} + L_{z^k}(Du,u,x)\,w^k\,dx = 0$$

$\forall w\in W_0^{1,q}(U\to\mathbb{R}^m)$

则与 Thm 8.2.4 相同，我们有

Thm 8.2.7：若L满足②，$u\in\mathcal{A}$ 为 $I[\cdot]$ 的极小化子，则 u 为 (*) 的弱解

□

1. 多凸性 (Polyconvexity).

有些方程组不满足 thm 5-7 的要求，但仍可以用变分法研究. ~~我们将要~~

例如，L 不再关于 P 变量是凸函数，但 I 仍是弱下半连续的.

lemma 8.2.7 (行列式的弱下半连续性).

$n<q<\infty$，$u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$

则 $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{q/n}(U)$

Proof：首先注意到 $(\det P)\cdot I = P\cdot\underbrace{(\operatorname{cof}P)}_{\text{P的伴随阵}}{}^T$

$$\Rightarrow \det P = \sum_{j=1}^{n} P^i_j(\operatorname{cof}P)^i_j \qquad 1\le i\le n.$$

~~现 $\forall w\in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$.~~

$$\cancel{\det Dw = \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}w^i(\operatorname{cof}Dw)^i_j \qquad 1\le i\le n}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\partial \det P}{\partial p^i_j} = (\operatorname{cof}P)^i_j}$$

~~Set $P=Dw$. 对 x_j 求导~~ (对j求和) ~~有~~

$$\cancel{\sum_{j,k,m=1}^{n}\delta_{ij}(\operatorname{cof}Du)^k_m\,w^k_{x_m x_j} = \sum_{k,j=1}^{n}\partial w^k_{x_i x_j}(\operatorname{cof}Dw)^k_j + w^k_{x_i}(\operatorname{cof}Dw)^k_{j,x_j}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} w^k_{x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{cof}Dw)^k_{j,x_j}\Big)=0 \quad \text{则对}}$$

由于我们已证明：$\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{cof}Dw)^i_{j,x_j}=0$

$$\Rightarrow \det Dw = \sum_{j=1}^{n}\left(w^i(\operatorname{cof}Dw)^i_j\right)_{x_j} \quad \cdots\ (1)$$

⇒ det Dw 的行列式可以写成散度形式

$$\Rightarrow \forall v\in C_c^\infty(U).\quad \int_U v \det Dw \, dx = -\sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} w^i (\operatorname{cof} Dw)^i_j \, dx. \qquad 1\le i\le n. \quad \cdots ②$$

由逼近. 可得 对 $u_k \in W^{1,q}(U\to\mathbb{R}^n)$. 有

$$\int_U v\cdot \det Du_k \, dx = -\sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u_k^i (\operatorname{cof} Du_k)^i_j \, dx.$$

而 $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U)$. ⇒ $\{u_k\}$ 是 $W^{1,q}(U)$ 中一致有界序列(由共鸣定理)

$n<q<\infty \quad W^{1,q}(U) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{q}}(U;\mathbb{R}^n)$

故 $\{u_k\}$ 等度连续

由 Arzela-Ascoli引理. $u_k \rightrightarrows u$ (up to a subsequence)

Claim: $\forall \psi\in C_c^\infty(U).\ \forall i,j.$

$$\lim_{k\to\infty}\int_U \psi \cdot \operatorname{cof}(Du_k)^i_j \, dx = \int_U \psi (\operatorname{cof} Du)^i_j \, dx.$$

若claim对. 那么

$$\left|\int_U v \det Du_k - \int_U v \det Du\right|$$

这两项→0. 利用 $u_k^i \rightrightarrows u^i$

$$= \left| -\sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u_k^i (\operatorname{cof} Du_k)^i_j \, dx + \sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u^i (\operatorname{cof} Du_k)^i_j \, dx - \sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u^i (\operatorname{cof} Du_k)^i_j \, dx + \sum_{j=1}^n \int_U v_{x_j} u^i (\operatorname{cof} Du)^i_j \, dx \right|$$

这项→0 利用claim, 和 u^i 的有界性

$\to 0$ as $k\to\infty$

Claim的证明并不困难. 因 $(\operatorname{cof} Du_k)^i_j$ 是各个 $\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j}$ 构成的多项式而已 所以利用 $u_k \rightrightarrows u$ 即得

如今, 我们知道 $\{u_k\}$ 在 $W^{1,q}(U\to\mathbb{R}^n)$ 中一致有界. $|\det Du_k| \le C|Du_k|^n$.
则 $\{\det Du_k\}$ 在 $L^{q/n}$ 中一致有界, 从而有弱收敛(到 $\det Du$) 的子列

□

章俊彦 PB13001112

下面我们利用引理8.2.7得出一个类似8.2.1的弱下半连续的结论.

我们不再假设 $L=L(P,z,x)$ 关于P convex. 我们假设 $m=n$. 且

$L(p,z,x)=F(p,\det p,z,x)$

$\forall z\in\mathbb{R}^m,\ x\in\mathbb{R}^n,\quad (p,r)\mapsto F(p,r,z,x)$ 凸

Thm 8.2.8 设 $n<q<\infty$, L是有条件凸的. 则 $I[\cdot]$ 在 $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$上弱下半连续.

Proof: 任选一个序列 $\{u_k\}$ $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^n)$.

由lem 8.2.7 有 $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{q/n}$.

令 G_ε 如 8.2.1 所述

$$I[u_k]=\int L(Du_k,u_k,x)\,dx \geq \int_{G_\varepsilon} L(Du_k,u_k,x)\,dx$$

$$=\int_{G_\varepsilon} F(Du_k,\det Du_k,u_k,x)\,dx$$

$$\geq \int_{G_\varepsilon} F(Du,\det Du,u_k,x) + \underbrace{\int_{G_\varepsilon} F_p(Du,\det Du,u_k,x)(Du-Du_k) + F_r(\ )(\det Du-\det Du_k)}_{\to 0 \text{ as } k\to\infty}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty}\ \geq \int_{G_\varepsilon} F(Du,\det Du,u,x)$$

$\varepsilon\to 0$. 即有 $I[u]\leq \liminf\limits_{k\to\infty} I[u_k]$ □

与定理之前同理. 我们有

Thm 8.2.9: 设 $n<q<\infty$ L满足 $L(P,z,x)\geq \alpha|P|^q-\beta$ $(\forall P\in M^{m\times m},\ z\in\mathbb{R}^m,\ x\in U)$

L is polyconvex

$A\neq\emptyset$

则 $\exists u\in A$ s.t. $I[u]=\min\limits_{w\in A} I[w]$

章俊彦 PB13001112

8.2.5: 局部极小化子.

问 $I[\cdot]$ 的临界点究竟是全局的极小化子,还是仅为局部极小化子.

设 u 为如下方程的光滑解

$$(*)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}(Du,u,x)\right)_{x_i} + L_z(Du,u,x) = 0 & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases}$$

从而 u 是 $I[w]=\int_U L(Dw,w,x)\,dx$ 的临界点,

设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 是一个包含0的开区间, $\{u(\cdot,\lambda)\mid \lambda\in I\}$ 是一族单参数的光滑函数, 且是

$$(**)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}\left(L_{p_i}(Du(x,\lambda),u(x,\lambda),x)\right)_{x_i} + L_z(Du(x,\lambda),u(x,\lambda),x) = 0 & \text{in } U \\ u(x) = u(x,0), & x\in U \end{cases}$$

令 $R=\bigcup_{\lambda\in I}\{\text{the graph of functions } u(\cdot,\lambda)\}$

~~我们~~ 设 $\theta:\bar{U}\to I$ 是光滑函数. $\theta=0$ on ∂U

令 $w(x)=u(x,\theta(x))$. 则 $w=u=g$ on ∂U $\cdots(\#)$

Thm 8.2.10 (Local Minimizer). u 是 R 中的局部极小化子, 即 $I[u]\le I[w]$. $\forall w$ 如上.

Rmk: 从而如果 u 是 E-L 方程的解, 且能嵌入一族其它解, 则 u 是 $I[\cdot]$ 的极小化子 (在所有得至(#)的 w 中).

若 $u_\lambda>0$ (λ 小时), 我们可以将任一个充分靠近 u 的函数 w 写成这形式.

但注意 Dw 并不一定与 Du 接近

Proof: 我们首先注意到:

$$w_{x_i}(x)=u_{x_i}(x,\theta(x))+u_\lambda(x,\theta(x))\,\theta_{x_i}\qquad 1\le i\le n$$

$$\Rightarrow I[w]=\int_U L(Dw,w,x)\,dx$$

$$=\int_U L(Du+u_\lambda D\theta,\ w,\ x)\,dx$$

$$\ge\int_U L(Du,w,x)+u_\lambda D_pL(Du,w,x)\,D\theta\,dx \quad\cdots ①$$

下面我们引入一个向量场 $\vec{b}=(b^1,\dots,b^n)$ 如下:

PB13001112

$$b^i := \int_0^{\theta(x)} u_\lambda(x,\lambda)\cdot L_{p_i}(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x)\, d\lambda. \qquad 1\le i\le n$$

2) $\operatorname{div}\vec{b} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} b^i$

$$= \sum_{i=1}^n \theta_{x_i}\, u_\lambda(x,\theta(x))\, L_{p_i}(Du(x,\theta(x)), u(x,\theta(x)), x)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^{\theta(x)} u_{\lambda x_i}(x,\lambda)\cdot L_{p_i}(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x) + u_\lambda(x,\lambda)\, L_{p_i}(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x)_{x_i}\ \cancel{dx}\ d\lambda$$

$$= u_\lambda(x,\theta)\cdot D\theta\cdot D_pL(Du(x,\theta(x)), w(x), x)$$

$$+ \int_0^{\theta(x)} \sum_{i=1}^n u_{\lambda x_i}(x,\lambda)\, L_{p_i}(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x) + u_\lambda(x,\lambda)\, L_z(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x)\ d\lambda$$

由于 $(L(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x))_\lambda = \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du,u,x)\,u_{x_i\lambda} + L_z(Du,u,x)\,u_\lambda$

$$\therefore \operatorname{div}\vec{b} = u_\lambda(x,\theta(x))\cdot D\theta\cdot D_pL(Du(x,\theta(x)), w(x), x) + \int_0^{\theta(x)} \frac{\partial}{\partial\lambda} L(Du(x,\lambda), u(x,\lambda), x)\, d\lambda.$$

$$= u_\lambda(x,\theta(x))\cdot D\theta\cdot D_pL(Du(x,\theta(x)), w(x), x)$$

$$+ L(Du(x,\theta), u(x,\theta), x) - L(Du,w,x).$$

Thus. $I[u] \ge \int_U L(Du,w,x) + u_\lambda\cdot D_pL(Du,w,x)\cdot D\theta\ dx$

$$= \int_U L(Du,w,x) + \operatorname{div}\vec{b} - \cancel{u_\lambda D_pL(Du,w,x)}$$

$$L(Du(x,\theta), u(x,\theta), x) - L(Du,w,x)$$

$$= \int_U L(Du(x,\theta(x)), u(x,\theta(x)), x) + \operatorname{div}\vec{b}\ dx$$

$$= I[u]$$

格林公式 ($\theta=0$ on $\partial U \Rightarrow \vec{b}=0$ on ∂U) □

章俊彦 PB13001112

§8.3 极小化子的正则性

设 $I[w] := \int_U L(Dw) - wf\,dx$，其中 $f \in L^2(U)$. $\cdots(*)$

令8.2中的 $q=2$，从而增长性条件变为

$(**)$: $|D_pL(p)| \le C(|p|+1)$ $\quad p \in \mathbb{R}^n$

则任一极小化子 $u \in \mathcal{A}$ 是E-L方程 $-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f$ in U.

i.e. $\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du) v_{x_i}\,dx = \int_U f v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(U)$

8.3.1: 二阶导数估计.

我们证明：若 $u \in H^1$ 是方程 $(\#)$ $-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f$ in U 的弱解，则 $u \in H^2_{loc}(U)$，但这需要加更多条件：

①: $|D^2L(p)| \le C \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$

②: L 一致凸. i.e. $\exists \theta > 0$, $\sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(p)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2 \quad \forall p, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Thm 8.3.1 (Seconde derivaties of Minimizers)

(1) 设 $u \in H^1(U)$ 是 $(\#)$ 的弱解，L 满足①②. 则 $u \in H^2_{loc}(U)$.

(2). 若 $u \in H_0^1(U)$，$\partial U \in C^2$，则 $u \in H^2(U)$. $\|u\|_{H^2(U)} \le C\|f\|_{L^2(U)}$.

Proof: $\forall V \subset\subset U$ 选取开集 W，$V \subset\subset W \subset\subset U$.

取截断函数 $\zeta \in C_c^\infty(U)$，$\begin{cases} \zeta = 1 & \text{on } V \\ \zeta = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n - W \\ 0 \le \zeta \le 1 \end{cases}$

设 h 充分小，$1 \le k \le n$.

$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \in H_0^1(U)$. 令

由于 u 为弱解，故

$$\sum_{i=1}^n \int L_{p_i}(Du) \cdot v\,dx = \int f v\,dx$$

差商分部积分 $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^n \int_U D_k^h(L_{p_i}(Du))(\zeta^2 D_k^h u)_{x_i}\,dx = -\int_U f D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\,dx$

$$D_k^h(L_{p_i}(Du)) = \frac{L_{p_i}(Du(x+he_k)) - L_{p_i}(Du(x))}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} L_{p_i}(sDu(x+he_k) + (1-s)Du(x))\,ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \sum_{j=1}^n L_{p_ip_j}(sDu(x+he_k) + (1-s)Du(x)) (u_{x_j}(x+he_k) - u_{x_j}(x))\,ds$$

$= \sum_{j=1}^{n} a^{ij,h}(x) \; D_k^h u_{x_j}(x)$

其中 $a^{ij,h}(x) := \int_0^1 L_{p_ip_j}\big(sDu(x+he_k)+(1-s)Du(x)\big)\,ds$. $1\le i,j\le n$.

代入左边，有.

$\sum_{i=1}^{n}\int_U D_k^h(L_{p_i}(Du))(\zeta^2 D_k^h u)_{x_i}\,dx$.

$= \sum_{i=1}^{n}\int_U \sum_{j=1}^{n} a^{ij,h}(x)\, D_k^h u_{x_j}(x)\cdot\zeta^2 D_k^h u_{x_i}$ $\leftarrow I_1$

$+ \sum_{j=1}^{n} a^{ij,h}\, D_k^h u_{x_j}\cdot 2\zeta\zeta_{x_i} D_k^h u \; dx$ ~~$= 右 = \int_U f D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$~~ $\leftarrow I_2$

$= 右 = -\int_U f D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\; dx$.

$I_1 \overset{L一致凸}{\geq} \theta\int_U \zeta^2\, |D_k^h Du|^2\, dx$

$|I_2| \le C\int_W \zeta\, |D_k^h Du|\, |D_k^h u|\, dx$.

$\le \varepsilon\int_W \zeta^2 |D_k^h Du|^2\, dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_W |D_k^h u|^2 dx$.

$|右| \le \varepsilon\int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2\, dx + \frac{C}{\varepsilon}\int_W f^2+|Du|^2 dx$

同~~thm~~ 6.3节 H^2正则性证明.

令 $\varepsilon = \frac{\theta}{4}$

$\Rightarrow \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \le C\int_W f^2 + |D_k^h u|^2 dx$

$\le C\int_U f^2 + |Du|^2 dx$

$\because \zeta = 1$ in V

$\therefore \int_V |D_k^h Du|^2 \le C\int_U f^2 + |Du|^2 dx$

$\forall V\subset\subset U$.

$\Rightarrow$ $Du \in H^1(V) \Rightarrow u\in H^2_{loc}(U)$

Mimic the proof. of thm 4 in §6.3.2 (带边正则性证明)

有 $\|u\|_{H^2} \le C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1})$.

章俊彦 PB13001112

又: $\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du)\, u_{x_i}\, dx = \int_U f\cdot u\, dx \quad u\in H_0^1 \quad \partial U\in C^2$.

~~由~~ $DL(p)-DL(0)\cdot p \geq \theta|p|^2$.

$\therefore p$ 取到 Du.

有 $\theta \|Du\|_{L^2}^2 \leq \int_U fu\, dx$

$\leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$

$\leq C(\varepsilon)\|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|u\|_{L^2}^2$

$\leq C(\varepsilon)\|f\|_{L^2}^2 + C\varepsilon\|Du\|_{L^2}^2$

取 $C\varepsilon = \frac{\theta}{2}$. 再用 Poincare 不等式即可. □

8.3.2: 高阶正则性.

对非线性 PDE 而言，第6章的正则性证明不再适用，因为我们对非线性项求导，非线性项会变得无法处理.

选取 $w\in C_c^\infty(U)$, $1\leq k\leq n$. 令 $v:=-\partial_{x_k}w$ in $\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du)v_{x_i}\,dx = \int_U fv\,dx$, $f=0$

$u\in H_{loc}^2(U)$ $\overset{\text{分部积分}}{\Longrightarrow}$ $\int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_ip_j}(Du)\, u_{x_kx_j} w_{x_i}\, dx = 0$

下面再令 $\tilde{u}:=u_{x_k}$

$a^{ij}:=L_{p_ip_j}(Du)$

Fix $V\subset\subset U$ $\Rightarrow \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\,\partial_{x_j}\tilde{u}\,\partial_{x_i}w\,dx = 0 \quad \forall w\in C_c^\infty(U)$.

$\overset{\text{逼近}}{\Longrightarrow} \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\,\partial_{x_j}\tilde{u}\,\partial_{x_i}w\,dx = 0 \quad \forall w\in H_0^1(U)$

$\Rightarrow \tilde{u}\in H^1(V)$ is a weak. sol to $-\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}\tilde{u}) = 0$ in V

$\boxed{\text{但是}}$，我们不能用6.3节的正则性定理得出 $\tilde{u}\in C^\infty$. 因为 a^{ij} 只是 L^∞ 函数，并不 C^∞.

事实上. 由 [G-T] Ch8 的 De Giorgi–Moser 迭代可以得出

$\tilde{u}\in C_{loc}^{1,\gamma}(U)$

若 L ~~的系数~~ 是光滑的. 则 $a^{ij}\in C_{loc}^{0,\gamma}(U)$ $\overset{\text{Schauder 估计 (G-T 第4章)}}{\Longrightarrow}$ $u\in C_{loc}^{2,\gamma}(U) \Rightarrow a^{ij}\in C_{loc}^{1,\gamma}(U)$

无限重复此过程 (Bootstrap) $\Rightarrow u\in C_{loc}^{3,\gamma}(U) \Rightarrow \cdots$

$\Rightarrow u\in C^\infty(U)$ □

章俊彦 PB13001112

㉓

Thm 8.4.2 (Lagrange 乘子). 设 $u\in\mathcal{A}$ 满足 $I[u]=\min_{w\in\mathcal{A}} I[w]$.
then $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $\int_U Du\cdot Dv\,dx=\lambda\int_U g(u)\,v\,dx$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

Rmk: Thm 8.4.2 中的 u 弱 进而成为 非线性边值问题的解

$$(\#)\begin{cases}-\Delta u=\lambda g(u) & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

λ 称作 关于积分限制 $J[u]=0$ 的 Lagrange 乘子.

形如(#)的问题 $(u\neq 0)$ 称作 非线性~~边值~~特征值问题

Proof: ~~固定~~ 任取一个 $v\in H_0^1(U)$.

先设 $g\neq 0$ a.e. in U.
再任取 $w\in H_0^1(U)$. with $\int_U g(u)w\,dx\neq 0$. ~~因 $g\neq 0$~~
(否则 $g=0$ a.e.).

令 $j(\tau,\sigma)=J[u+\tau v+\sigma w]$
$$=\int_U G(u+\tau v+\sigma w)\,dx \qquad \tau,\sigma\in\mathbb{R}$$

$j(0,0)=\int_U G(u)\,dx=0$

$j\in C^1$

$\frac{\partial j}{\partial\tau}=\int_U g(u+\tau v+\sigma w)\,v\,dx.$ $\qquad \frac{\partial j}{\partial\sigma}=\int_U g(u+\tau v+\sigma w)\,w\,dx.$

$\frac{\partial j}{\partial\sigma}(0,0)\neq 0$ (因 $\int g(u)w\,dx\neq 0$)

那么由隐函数定理, $\exists\ C^1$ 函数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s.t. $\begin{cases}\phi(0)=0\\ j(\tau,\phi(\tau))=0 & \forall \text{充分小}\ \tau\end{cases}$
e.g. $|\tau|\leq\tau_0$.

$\exists$ ~~然~~ 且: $\phi'(0)=-\dfrac{\int_U g(u)\,v\,dx}{\int_U g(u)w\,dx}$

§8.4 Constraints

本节讨论某些加的特殊限制条件的问题，尤其关注 Lagrange 乘子的作用

8.4.1 非线性特征值问题.

① $I[w] := \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 dx \quad \forall\ w=0 \text{ on } \partial U$

且加以限制：$J[w] = \int_U G(w)\,dx = 0$. ②

$G: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是给定的 C^∞ 函数

再设 ~~$|g(z)|$~~ $g = G'$ 满足 $|g(z)| \le C(1+|z|)$

$\Rightarrow |G(z)| \le C(1+|z|^2)$

令 $\mathcal{A} = \{w\in H_0^1(U) \mid J[w]=0\}$ U 为 $\partial U\in C^\infty$ 的有界连通开集

Thm 8.4.1（限制极小化子存在性）.

设 $\mathcal{A}\neq\phi$ 则 $\exists\, u\in\mathcal{A}$. $I[u] = \min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$.

<u>Proof</u>: 取 $\{u_k\}\subset A$. s.t. $I[u_k]\longrightarrow m := \inf\limits_{w\in A} I[w]$

$\Rightarrow \{u_k\}$ 为 H_0^1 中有界序列.

由 Banach-Alaoglu 定理 $\exists$ 弱收敛子列 $u_{k_j}\rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$.

再由共鸣定理可得 ~~$I[u]\le m$~~

$I[u] \le \liminf\limits_{j\to\infty} I[u_{k_j}] \le m$.

下面只用证: $u\in\mathcal{A}$.

由 $H_0^1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ 知. $u_{k_j}\to u$ in $L^2(U)$.

$\Rightarrow |Ju| = |J(u) - J(u_k)| \le \int_U |G(u) - G(u_k)|\,dx$

$\le C\int_U |u-u_k|\,(1+|u|+|u_k|)\,dx$

$\longrightarrow 0$ as $k\to\infty$

□

24

下面将 $w(\tau)$ 取成 $w(\tau)=\tau v+\phi(\tau)w \quad (|\tau|\le\tau_0)$.

$i(\tau)=I[u+w(\tau)]$

由于 $j(\tau,\phi(\tau))=0$ 知 $J[u+w(\tau)]=0$ 从而 $u+w(\tau)\in\mathcal{A}$

$\Rightarrow i(\cdot)$ 在 0 处有极小值

$\Rightarrow i'(0)=0$, ~~即: $0=i'(0)=\int_U (Du+\tau Dv+\phi(\tau))Dw$~~

$$i'(\tau)=\frac{d}{dt}I[u+w(\tau)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U|\nabla(u+w(\tau))|^2dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U|\nabla u+\tau\nabla v+\phi(\tau)\nabla w|^2dx$$

$$=\int(\nabla u+\tau\nabla v+\phi(t)\nabla w)\cdot(Dv+\phi'(\tau)\nabla w)dx$$

Set $\tau=0$

$$0=i'(0)=\int_U\nabla u\cdot(\nabla v+\phi'(0)\nabla w)\,dx$$

Since $\phi'(0)=-\dfrac{\int_U g(u)v\,dx}{\int_U g(u)w\,dx}$

So we define $\lambda=\left(\int_U\nabla u\cdot\nabla w\,dx\right)\Big/\int_U(g(u)w)\,dx$

then $\int_U Du\cdot Dv\,dx=\lambda\int_U g(u)v\,dx \quad \forall v\in H_0^1(U)$,

If $g=0$ a.e in U. 则 $\nabla G(u)=g(u)\nabla u=0$ a.e. 又因 U 连通

所以 $G(u)=0$ a.e. (因 $J[u]=\int_U G(u)\,dx=0$)

又 $\because Tr\,u=0$ 故 $G(u)=0$

这样 $u=0$ a.e. 否则 $I[u]>I[0]=0$, 于是待证等式两边都是 0

$\square$

8.4.2 单侧限制与变分不等式

上一节我们通过对 $\mathcal{A}$ 加以 $J[w]=0$ 以及非线性项的控制证得了极小化子的存在性. 本节考虑的是单侧限制, 即 $\forall x\in U$, 我们对 $u(x)$ 的取值加以单侧的限制.

考虑能量泛函 $I[w]=\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw\,dx$

$\mathcal{A} := \{w\in H_0^1(U) \mid \underbrace{w\geq h \text{ a.e. in } U}_{\text{对}w\text{的单侧限制}}\}$ 　$h:\bar{U}\to\mathbb{R}$ 是给定的光滑函数.

Thm 8.4.3 (单侧限制下, 极小化的存在性)

设 $\mathcal{A}\neq\emptyset$. 则 $\exists!\, u\in\mathcal{A}$ s.t. $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$

证明: ① 存在性的证明与 8.4.1 如出一辙. 只是在验证 $\mathcal{A}$ 条件时, 要稍作改动.

设 $\{u_{k_j}\}\subset A$ 是一列极小化子 $u_{k_j}\rightharpoonup u$ in H_0^1

$\Rightarrow u_{k_j}\to u$ in L^2

因为 $u_{k_j}\geq h$ a.e. 故 $u\geq h$ a.e. (因 $\exists$ 子列 $u_{k_{j_l}}\to u$ a.e.)

$\Rightarrow u\in\mathcal{A}$.

② 唯一性. 若除了 u, 还有 $\tilde{u}$ 是极小化子, $u\neq\tilde{u}$

令 $w=\frac{u+\tilde{u}}{2}\in\mathcal{A}$ (因 $\mathcal{A}$ 凸)

$$I[w]=\int_U \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\nabla u+\nabla\tilde{u}}{2}\right)^2\right| - f\left(\frac{u+\tilde{u}}{2}\right)dx$$

$$=\int_U \frac{1}{8}\left(|\nabla u|^2+|\nabla\tilde{u}|^2+2\nabla u\cdot\nabla\tilde{u}\right) - f\cdot\left(\frac{u+\tilde{u}}{2}\right)dx$$

$$=\int_U \frac{1}{4}\left(|\nabla u|^2+|\nabla\tilde{u}|^2\right) - \frac{1}{8}|\nabla u-\nabla\tilde{u}|^2 - f\cdot\left(\frac{u+\tilde{u}}{2}\right)dx$$

$$\overset{u\neq\tilde{u}}{<}\int_U \frac{1}{4}|\nabla u|^2-\frac{fu}{2}\,dx+\int_U \frac{1}{4}|\nabla\tilde{u}|^2-\frac{f\tilde{u}}{2}\,dx$$

$$=\frac{I[u]+I[\tilde{u}]}{2}$$

这与极小性矛盾!

□

对于上述加了限制条件的 I, 我们给出类似于 Euler-Langrange 方程的变分刻画

章俊彦 PB13001112

Thm 8.4.4（极小化的变分刻画）.

设 $u\in\mathcal{A}$ 是唯一的极小化，i.e. $I[u]=\min\limits_{u\in\mathcal{A}} I[u]$

则 $\int_U \nabla u\cdot\nabla(w-u)\,dx \geq \int_U f\cdot(w-u)\,dx \quad \forall w\in\mathcal{A} \quad \cdots(*)$.

$(*)$ 称作变分不等式

<u>Proof</u> Fix $\forall w\in A$. 则 $\forall 0<\tau\leq 1$ $\quad u+\tau(w-u)=(1-\tau)u+\tau w\in\mathcal{A}$（因 $\mathcal{A}$ 凸）.

令 $i(\tau):=I[u+\tau(w-u)]$ 则 $i(0)\leq i(\tau)\ \forall 0\leq\tau\leq 1$

$\Rightarrow i'(0)\geq 0$.

下面计算 $i'(0)$，我们会发现它正是 $(*)$左 $-$ $(*)$右：

$$\frac{i(\tau)-i(0)}{\tau}=\frac{1}{\tau}\int_U \frac{|\nabla u+\tau\nabla(w-u)|^2-|\nabla u|^2}{2}-f(u+\tau(w-u)-u)\,dx$$

$$=\int_U \nabla u\cdot\nabla(w-u)+\frac{\tau|\nabla(w-u)|^2}{2}-f(w-u)\,dx$$

$\tau\to 0^+$. 上式 $=\int_U \nabla u\cdot\nabla(w-u)-f(w-u)\geq 0$

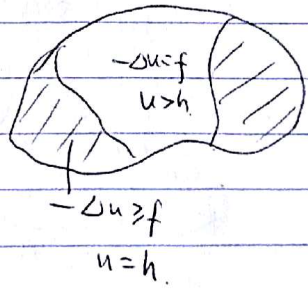
$\square$

变分不等式的解释

设 $u\in W^{2,\infty}(U)$，$\partial U\in C^\infty$（这是可以证的．见：Kinderlehrer-Stampacchia：An Introduction to Variational Inequalities, SIAM）

$\Rightarrow O:=\{x\in U \mid u(x)>h(x)\}$ 开.

$C:=\{x\in U \mid u(x)=h(x)\}$ 是相对闭集.



$\boxed{\text{Claim}}$ $u\in C^\infty(O)$，$-\Delta u=f$ in O

事实上，只用证 u 是上述方程的弱解，即

$\forall v\in C_c^\infty(O)$ $\quad \int_O \nabla u\cdot\nabla v-fv\,dx=0$，从而

再由椭圆方程正则性定理得出结论

Fix $v\in C_c^\infty(O)$，若 $|\tau|$ 充分小，则 $w:=u+\tau v\geq h$．$\Rightarrow u\in\mathcal{A}$

$\Rightarrow \tau\int_O \nabla u\cdot\nabla v-fv\,dx\geq 0$（$\forall|\tau|$ 充分小）

$\Rightarrow$ 只能 $\int \nabla u\cdot\nabla v-fv\,dx=0$ ✓

下面证明 $-\Delta u\geq f$ a.e. in U.

Fix $v\in C_c^\infty(U)$. $v\geq 0$. 且 $0<\tau\leq 1$ 时 $\quad w:=u+\tau v\in\mathcal{A}$

进而 $\int_U \nabla u\cdot\nabla v-fv\,dx\geq 0$.

PB13001112

由于 $u\in W^{2,\infty}(U)$，所以 $\int_U(-\Delta u-f)v\,dx\geq 0$（即可以分部积分），$\forall v\in C_c^\infty(U)$，
$\Rightarrow -\Delta u\geq f$ a.e. in U.

于是我们证明了：

$$(\#)\begin{cases} u\geq h,\quad -\Delta u\geq f & \text{a.e. in } U \\ -\Delta u=f & \text{on } U\cap\{u>h\}\end{cases}$$

Rmk：$F:=\partial O\cap U$ 称作"自由边界"。具有自由边界的 PDE，往往可以用变分不等式（~~变~~）化简，因为（#）中没有什么与自由边值有关的信息。

8.4.3：调和映射

下面考虑映到球面的调和映射，~~…~~

设 $\mathcal{A}=\{w\in H^1(U;\mathbb{R}^m)\mid w=g \text{ on } \partial U,\ |w|=1 \text{ a.e.}\}$.

如何~~…~~极小化 $I[w]=\frac{1}{2}\int|\nabla w|^2dx\quad \forall w\in\mathcal{A}$.

$\Updownarrow$

极小化 $U\longrightarrow S^{m-1}$ 的能量 $\longrightarrow$ Find ~~a~~ minimizer.

这在"液晶"的行为刻画的 PDE 中很重要。

考虑 $\begin{cases}-\Delta u=|\nabla u|^2u & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$

pointwise constraints：$|u|=1$.

极小化的是否应有：$\int_U\nabla u:\nabla v\,dx=\int_U|\nabla u|^2u\cdot v\,dx\quad \forall v\in H_0^1\cap L^\infty(U\to\mathbb{R}^m)$

$\lambda=|\nabla u|^2$ 是 constraint "$|u|=1$" 对应的 Lagrange 乘子。

Thm 8.4.5（调和映射的 E-L 方程）

设 $u\in\mathcal{A}$ 满足 $I[u]=\min\limits_{w\in\mathcal{A}}I[w]$，则 u 是上述调和映射的弱解。

证明：Fix $v\in H_0^1(U\to\mathbb{R}^m)\cap L^\infty(U\to\mathbb{R}^m)$.

由于 $|u|=1$ a.e. 知 $|u+\tau v|\neq 0$ a.e.（τ 充分小）$\Rightarrow v(\tau)=\frac{u+\tau v}{|u+\tau v|}\in\mathcal{A}$

$\Rightarrow i(\tau):=I[v(\tau)]$ 在 $\tau=0$ 时有极小（因 u 是极小化的，且 $|u|=1$ a.e.）

那么 $i'(0)=0$。下面具体求 ~~i~~ $i'(0)$ 即可

$$i(\tau)=I[v(\tau)]=\frac{1}{2}\int_U|\nabla v(\tau)|^2dx.$$

$$\cancel{=\frac{1}{2}\int_U \left|\nabla\left(\frac{u+\tau v}{|u+\tau v|}\right)\right|^2dx.}$$

而 $\nabla v(\tau) = \begin{pmatrix} \partial_1 v^1 & \cdots & \partial_1 v^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n v^1 & \cdots & \partial_n v^n \end{pmatrix}$.

$\boxed{注}$ ∇v, $\nabla v'$ 是矩阵

$A:B$ 是指 $\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$.

所以

$$i'(\tau) = \cancel{\tfrac{1}{2}} \int_U \nabla v(\tau) : \nabla(\cancel{2}\, v'(\tau))\, dx .$$

$$i'(0) = \int_U \nabla v(0) : \nabla v'(0)\, dx \overset{v(0)=u \text{ a.e.}}{=} \int_U \nabla u : \nabla v'(0)\, dx .$$

而 $v(\tau) = \dfrac{u+\tau v}{|u+\tau v|}$

$$v'(\tau) = \frac{v\cdot|u+\tau v| - ((u+\tau v)\cdot v)\frac{u+\tau v}{|u+\tau v|}}{|u+\tau v|^2} \quad (直接计算. 或者写成分量再合并).$$

$$\Rightarrow v'(0) = \frac{v|u| - (u\cdot v)u}{|u|^2} \underset{|u|=1 \text{ a.e.}}{=} v - (u\cdot v)u .$$

故 $i'(0)=0 \Rightarrow$

$$0 = \int_U \nabla u : \nabla v - \nabla u : \nabla\big((u\cdot v)\, u\big)\, dx .$$

再化简上式第2项

$$\nabla u : \nabla\big((u\cdot v)u\big)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 u^1 & \cdots & \partial_1 u^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n u^1 & \cdots & \partial_n u^n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \partial_1((u\cdot v)u^1) & \cdots & \partial_1((u\cdot v)u^n) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n((u\cdot v)u^1) & \cdots & \partial_n((u\cdot v)u^n) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \partial_j u^i \, \partial_j\big((u\cdot v)\, u^i\big).$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (\partial_j u^i \, \partial_j u^i)(u\cdot v) + \underbrace{\partial_j u^i \, \partial_j (u\cdot v) \cdot u^i}$$

但 $|u|^2 = 1$ 求一导也可看出

$\Rightarrow u \perp \nabla u$

$\Rightarrow (\nabla u)^T \cdot u = 0$

故这项为0

$$= |\underbrace{\nabla u}_{这是个矩阵}|^2 (\underbrace{u\cdot v}_{这是个标}) \quad \text{a.e.}$$

所以我们有 $0 = \displaystyle\int_U \nabla u : \nabla v\, dx - \int_U |\nabla u|^2 (u\cdot v)\, dx$

$\Rightarrow u$ 为调和映射弱解

黄俊彦 PB1300112

8.4.4：不可压缩性

① Stokes问题 设 $U\subset\mathbb{R}^3$ 是有界单连通域.

$$\mathcal{A}=\{w\in H_0^1(U\to\mathbb{R}^3)\mid \operatorname{div}\vec{w}=0 \text{ in } U\}$$

$$I[w]:=\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2-f\cdot w\,dx,\quad f\in L^2(U\to\mathbb{R}^3).$$

u: Steady flow 的速度场

$\operatorname{div} u=0 \Rightarrow$ 流体不可压（密度不变）.

f: 外力.

~~考虑~~ 上述I的极小化子存在唯一性的证明并不困难，那么如何找到对应的Euler-Lagrange方程呢？

考虑Stoke's问题，p为压力（作为 $\operatorname{div} u=0$ 的Lagrange乘子）.

$$\begin{cases}-\Delta u=f-\nabla p & \text{in } U\\ \operatorname{div} u=0 & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$

Thm 8.4.6: $\exists\, p\in L^2_{loc}(U)$ s.t.

$$\int_U \nabla u:\nabla v\,dx=\int_U p\operatorname{div}\vec{v}+f\cdot\vec{v}\,dx\qquad \forall\,\vec{v}\in H^1(U\to\mathbb{R}^3)$$

且紧支于U

证明：我们采取老套路：

为了找出p，我们先进行光滑化，试图得到一列在某个空间中一致有界的序列 $\{p^\varepsilon\}$，使得 p_ε 满足光滑化后的类似等式，再用Banach-Alaoglu定理便有 $\exists\, p^{\varepsilon_j}\rightharpoonup p$ as $\varepsilon_j\to 0$. 代入光滑化的结果得到最终结论.

这个套路在~~五.3节~~ ch7中曾经反复用到.

先设 $v\in\mathcal{A}$，则 $\forall\tau\in\mathbb{R}$ $u+\tau v\in\mathcal{A}$.

$$\Rightarrow 0=i'(0)=\int_U \nabla u:\nabla v-f\cdot v\,dx.$$

Step 1: 光滑化 Fix $V\subset\subset U$, $\partial V\in C^\infty$ 是单连通域. 选取一个 $w\in H_0^1(V;\mathbb{R}^3)$ s.t. $\operatorname{div}\vec{w}=0$. 选取 $0<\varepsilon<\operatorname{dist}(V,\partial U)$. $v=v^\varepsilon:=\eta_\varepsilon * w$ （$w=0$ in $U\setminus V$）

那么 $0=\int_U \nabla u:\nabla v^\varepsilon-f\cdot v^\varepsilon\,dx$

因为 $f\cdot(w*\eta_\varepsilon)=(f*\eta_\varepsilon)w$

$=\int_U \nabla u^\varepsilon:\nabla w-f^\varepsilon\cdot w\,dx$ （其实就是任取一个mollify都一样吧）

@光滑　那么分部积分可得

PB13001112

$$\Rightarrow \int_V (-\Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon)\cdot w \, dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(V \to \mathbb{R}^3) \text{ with } \operatorname{div} w = 0$$

Step 2：找 p^ε

Fix $\zeta \in C_c^\infty(V;\mathbb{R}^3)$　令 $w = \nabla \times \zeta$　(那么能 $\nabla \cdot w = 0$).

令 $h = \Delta u^\varepsilon + f^\varepsilon$

$$\rightarrow 0 = \int_V h \cdot (\nabla \times \zeta) \, dx$$

$$= \int_V h^1(\partial_2 \zeta^3 - \partial_3 \zeta^2) + h^2(\partial_3 \zeta^1 - \partial_1 \zeta^3) + h^3(\partial_1 \zeta^2 - \partial_2 \zeta^1) \, dx$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} \int_V \zeta^1(\partial_2 h^3 - \partial_3 h^2) + \zeta^2(\partial_3 h^1 - \partial_1 h^3) + \zeta^3(\partial_1 h^2 - \partial_2 h^1) \, dx$$

$\overset{\zeta\text{任意}}{\Longrightarrow} \nabla \times h = 0 \Rightarrow h$ 是无旋场.

故 $\exists p^\varepsilon \in C^\infty(V)$. s.t. $\nabla p^\varepsilon = h$　(无旋 $\Longleftrightarrow$ 有势)

$= \Delta u^\varepsilon + f^\varepsilon$.

(不妨 $\int_V p^\varepsilon = 0$　否则加个常数就好)

Step 3：对 p^ε 作一致上界估计

我们不加证明地使用一个事实

Fact ~~对 $v^\varepsilon: V \to \mathbb{R}^3$ ...~~

$$\begin{cases} \operatorname{div} v^\varepsilon = p^\varepsilon & \text{in } V \\ v^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial V \end{cases} \quad \exists \text{光滑解}$$

并有 $\|v^\varepsilon\|_{H^1(V;\mathbb{R}^3)} \le C \|p^\varepsilon\|_{L^2(V)}$.

这个结果参见：

Dacorogna, Moser 在 1990年发在 Ann. Inst. H. Poincaré 上的文章
(好杂志啊...).

下面证明 $\|p^\varepsilon\|_{L^2(V)} \lesssim \|u\|_{H^1(V)} + \|f\|_{L^2(V)}$

至于为什么右边长那样，我们可以在计算过程中猜出来. 注意到我们在中间用了一次分部积分，从而把上界从 H^2 范数降成了 H^1 范数. 这是因为 $v^\varepsilon \in H^1$，它可以求一阶导

PB13001112

$$\int_V (p_\varepsilon)^2 dx = \int_V p^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon dx$$
$$= -\int_V \nabla p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon dx$$
$$= \int_V (-\Delta u^\varepsilon - f^\varepsilon) \cdot v^\varepsilon dx.$$
$$= \int_V \nabla u^\varepsilon : \nabla v^\varepsilon - f^\varepsilon \cdot v^\varepsilon dx$$
$$\leq \|v^\varepsilon\|_{H^1(V\to\mathbb{R}^3)} \left(\|u^\varepsilon\|_{H^1(V)} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(V)}\right)$$
$$\lesssim \|p^\varepsilon\|_{L^2} \left(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\right).$$
$$\Rightarrow \|p^\varepsilon\|_{L^2(V)} \lesssim \|u\|_{H^1(V)} + \|f\|_{L^2(V)}.$$

Step 4: 取极限

由Banach-Alaoglu定理 $\exists \varepsilon_j \to 0$. $p^{\varepsilon_j} \rightharpoonup p$ in $L^2(V)$

for some $p \in L^2(V)$

因 $\|p\|_{L^2(V)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|p^{\varepsilon_j}\|_{L^2(V)}$

令 $\varepsilon_j \to 0$

$$\Rightarrow \int \nabla u : \nabla v \, dx = \int_V p \operatorname{div} v + f\cdot v \, dx.$$

最后 $\forall V_k \subset\subset U$. $V_k \nearrow$ $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ (U的紧穷竭).

$\Rightarrow \forall k\ \exists p_k \in L^2(V_k)$

$$\int_{V_k} \nabla u : \nabla v \, dx = \int_{V_k} p_k \operatorname{div} \vec{v} + f\cdot v \, dx. \quad \forall v \in H_0^1(V_k; \mathbb{R}^3).$$

在p_k每个加上某些const. 可得 $p_k = p_l$ on V_l

$\Rightarrow p = p_k$ on each V_k 即为所求.

□

32

② 非线性不可压的~~材料~~弹性力学问题

在这，不可压条件变成了 $\det \nabla u = 1$.

~~考虑~~ 设 $L: M^{3\times 3} \times U \to \mathbb{R}$ 为能量密度. $I[w] := \int_U L(Dw, x)\,dx$.

$w \in \mathcal{A} = \{ w \in W^{1,q}(U;\mathbb{R}^3) \mid w = g \text{ on } \partial U,\ \det \nabla w = 1 \text{ a.e.} \}$ $q > 3$

也就是在此，我们将 $\det \nabla u = 1$ 作为 constraint 条件

Thm 8.4.7: 设 $p \mapsto L(p, x)$ 凸. 且 $L(p,x) \geq \alpha |p|^q - \beta$ $\forall p \in M^{3\times 3}$ $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ ~~$\mathcal{A} \neq \phi$~~

设 $\mathcal{A} \neq \phi$. 则 $\exists u \in \mathcal{A}$ $I[u] = \min\limits_{w \in \mathcal{A}} I[w]$

Proof: 选取极小化序列 $\{u_{k_j}\} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U;\mathbb{R}^3)$.

$$I[u] \leq \liminf_{j\to\infty} I[u_{k_j}]$$

$\Rightarrow$ ~~we hav~~ 只用再证 $u \in \mathcal{A}$. 然而由 8.2 节的引理 $\det Du_{k_j} \rightharpoonup \det Du$ in $L^{q/n}$

故 $\det Du = 1$ a.e.

□

<u>Rmk</u>: 对 Stoke's 问题，不可压条件为 $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

对非线性的弹性力学问题，不可压条件为 $\det \nabla u = 1$

<u>为何?</u> 设 u 为速度场 (Stokes)

displacement (elasticity) $\vec{b}$ 为速度场

则对粒子的运动我们有如下 ODE 刻画

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(x(t), t) & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x \end{cases}$$

~~记~~ 将 令 $x(t) = x(t, x)$. 则 $\forall t > 0$. $x \mapsto x(t,x)$ 保体积(因为不可压).

故 $J(x,t) = \det \nabla_x \vec{x}(t,x) = 1$ $\forall x$

$J(x, 0) = 1$.

由 Euler 公式: $J_t = (\nabla_x \cdot \vec{b})(x,t) J$ ~~(分离变量)~~

故 $\operatorname{div} \vec{b} = 0$ 时, volume preserving

□

童俊彦 PB13001112

§8.5 临界点.

之前已经知道，能量泛函的极小化必是能量泛函临界点，但 Euler-Lagrange 方程可能不止这些解，那些不是极小化的解称为能量泛函的"鞍点"(saddle point)

8.5.1: 翻山定理

设 H 为 Hilbert 空间(实线性) 具有范数 $\|\cdot\|$, 内积 $(\cdot,\cdot)$

设 $I: H\to\mathbb{R}$ 是 H 上的非线性泛函.

<u>Def</u>: ~~设 I 在 u~~ 若在 $u\in H$ 处. $\exists v\in H$ s.t.

$$I[w]=I[u]+(v,w-u)+o(\|w-u\|) \quad w\in H \qquad \cdots(*)$$

成立，则称 I 在 $u\in H$ 处可微.

若 $v\exists$. 则唯一，记作 $v=I'[u]$

下面假设 $I\in C^1(H;\mathbb{R})$. 一般来说我们还要假设.

(#): $I': H\to H$ 在 H 的任何有界集上 Lipschitz 连续.

<u>记号</u> (1) $C=\{I\in C^1(H;\mathbb{R}) \mid I \text{ 满足(\#)}\}$

(2) 若 $c\in\mathbb{R}$, 则记 $A_c:=\{u\in H,\ I[u]\le c\}$

$K_c:=\{u\in H \mid I[u]=c,\ I'[u]=0\}$

<u>Def</u>: (1) $u\in H$ 是 I 的临界点. 若 $I'[u]=0$

(2) 若 $K_c\ne\varnothing$, 则称 c 为临界值.

(3). 称 $I\in C^1(H;\mathbb{R})$ 满足 Palais-Smale 紧性条件, 是指

对任何 H 中的序列 $\{u_k\}$, 只要成立以下两式

(i) $\{I[u_k]\}_{k=1}^{+\infty}$ 有界

(ii) $I'[u_k]\to 0$ in H, ~~$I'[u_k]$~~

就有 $\{u_k\}$ 在 H 中列紧(即闭包紧).

我们现在想证明: 若 c 不是临界值，则我们可以将 $A_{c+\varepsilon}$ 很好地形变收缩到 $A_{c-\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ 小). 这个方法可以用于 H 中一些 ODE 的求解, 解产生的 flow 像从山上掉下来一样.

章俊彦 PB13001112

34

Thm 8.5.1 (形变收缩定理).

设 $I\in C$ 满足 Palais-Smale条件. 设 $K_c=\phi$ (即 c 不是临界值).

则 $\forall \varepsilon>0$ 充分小. $\exists\, 0<\delta<\varepsilon$.

$$\exists\, \eta\in C([0,1]\times H\longrightarrow H)$$

s.t. $\eta_t(u)=\eta(t,u)$ $\quad 0\le t\le 1\quad u\in H$ 满足

(i). $\eta_0(u)=u\quad \forall u\in H$

(ii) $\eta_1(u)=u\quad \forall u\notin I^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$

(iii) $I[\eta_t(u)]\le I[u]\quad u\in H,\ 0\le t\le 1$

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta})\subset A_{c-\delta}$

证明. Step 1: Claim: $\exists\, 0<\sigma,\varepsilon<1$. s.t. $\|I'[u]\|\geq \sigma\quad \forall u\in A_{c+\varepsilon}-A_{c-\varepsilon}$

反证 claim: 若 $\forall \sigma,\varepsilon\in(0,1)$. $\exists\sigma_k\to 0$. $\varepsilon_k\to 0\quad u_k\in A_{c+\varepsilon_k}-A_{c-\varepsilon_k}$

且 $\|I'[u_k]\|\le\sigma_k\to 0$

那么由 Palais-Smale条件. ~~$\exists u\in H$~~ $\exists\, u_{k_j},\ u\in H\quad u_{k_j}\to u$ in H.

但 $I\in C^1(H;\mathbb{R})$ 故 $I[u]=c$, $I'[u]=0$

$\Rightarrow K_c\neq\phi$. 矛盾

Step2: 构造 η

Fix δ, s.t. $0<\delta<\varepsilon, \frac{\sigma^2}{2}$

令 $A=\{u\in H\mid I[u]\le c-\varepsilon$ or $I[u]\geq c+\varepsilon\}$

$B=\{u\in H\mid c-\delta\le I[u]\le c+\delta\}$

由于 I' 在有界集上有界. 我们~~证明~~知 $u\longmapsto \mathrm{dist}(u,A)+\mathrm{dist}(u,B)$ 在每个有界集上有正的下界

$$\Rightarrow\quad g(u)=\frac{\mathrm{dist}(u,A)}{\mathrm{dist}(u,A)+\mathrm{dist}(u,B)}\quad \text{在有界集上 Lipschitz连续}$$

$0\le g\le 1\qquad g=0$ on A

$\qquad\qquad\quad\ \ =1$ on B.

$$\text{令}\quad h(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ \frac{1}{t} & t>1\end{cases}.$$

$V: H\longrightarrow H$

$u\longmapsto V(u)=-g(u)\,h(\|I'[u]\|)\,I'[u]\qquad u\in H,\qquad V$ bdd.

$\forall u\in H$ 考虑 ODE

$$(\#)\begin{cases}\frac{d\eta}{dt}(t)=V(\eta(t)) & t>0\\ \eta(0)=u.\end{cases}$$

Step 3: 验证 (i)-(iv).

V有界且在有界集上 lipschitz连续. 则∃!解

记 $\eta=\eta(t,u)=\eta_t(u)$ $t\ge 0$, $u\in H$. 限制在$C[0,1]$上, 我们有 $\eta\in C([0,1]\times H;H)$

从而满足(i), (ii) ↳ $u\notin I^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]\Rightarrow V=0$

下面验证(iii)

$$\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)]=\left(I'[\eta_t(u)],\frac{d}{dt}\eta_t(u)\right)$$

$$=\left(I'[\eta_t(u)],V(\eta_t(u))\right)$$

$$=-g(\eta_t(u))h(\|I'[\eta_t(u)]\|)\cdot\|I'[\eta_t(u)]\|^2$$

特别地 $\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)]\le 0$ $u\in H$, $0\le t\le 1$.

$\Rightarrow$ (iii) 成立

最后证(iv) $\eta_1(A_{c+\delta})\subset A_{c-\delta}$

设 $u\in A_{c+\delta}$ ~~反证 若 $\eta_1(u)\notin B$~~ ((

若$\exists t\in[0,1]$ s.t. $\eta_t(u)\notin B$. 则证毕(由(#)). 否则设 $\eta_t(u)\in B$. $\forall 0\le t\le 1$

则 $g(\eta_t(u))=1$ $0\le t\le 1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}I[\eta_t(u)]=-h(\|I'[\eta_t(u)]\|)\|I'[\eta_t(u)]\|^2$$

若 $\|I'[\eta_t(u)]\|\ge 1$. 则 $\frac{d}{dt}I[\eta_t(u)]=-\|I'[\eta_t(u)]\|^2\le-\sigma^2$

若 ------ ≤ 1 则 ~~$I[\eta_1(u)]\le \underbrace{I[u]}_{\le c+\delta}-\sigma^2$ 上式仍对~~

$$\Rightarrow I[\eta_1(u)]\le I[u]-\sigma^2\le c-\delta$$

□

2. 翻山定理: 利用形变收缩η, 得出 critical point ∃.

Thm 8.5.2 (翻山定理)

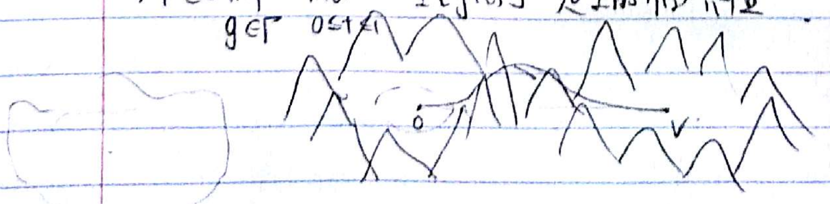
(i) $I\in\mathcal{C}$ 满足 $I[0]=0$

(ii) $\exists r,a>0$. $I[u]\ge a$ if $\|u\|=r$

(iii) $\exists v\in H$ $\|v\|>r$, $I[v]\le 0$

令 $\Gamma=\{g\in C([0,1];H)\mid g(0)=0,\ g(1)=v\}$

则 $c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{0\le t\le 1}I[g(t)]$ 是I的临界值



0→v 必须翻山

⇓

经过鞍点 ← 对于 level = c 的鞍点

不一定是真正的鞍点

章俊彦 PB13001112

Proof:

显之 $c \geq a$. 假设 c 不是 I 的临界点，则 $K_c = \phi$

选取 $0<\varepsilon<\frac{a}{2}$. 由形变收缩定理，$\exists\ \delta\in(0,\varepsilon)$. 同胚 $\eta: H \longrightarrow H$

s.t. $\eta(\mathcal{A}_{c+\delta}) \subset \mathcal{A}_{c-\delta}$

$\eta(u) = u$. $\forall u \notin I^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$

$\Rightarrow \exists\ g\in\Gamma$ s.t. $\max\limits_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] \leq c+\delta$.

则 $\hat{g} := \eta\circ g \in \Gamma$ 因 $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$

$\eta(g(1)) = \eta(v) = v$.

但 $\max\limits_{0\leq t\leq 1} I[\hat{g}(t)] \leq c-\delta$

由 Thm 8.5.1 (iv)

$c := \inf\limits_{g\in\Gamma} \sup\limits_{0\leq t\leq 1} I[g(t)] \leq c-\delta$.

这不可能

□

· 应用：半线性椭圆方程

考虑 (*) $\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } U \subset \mathbb{R}^d \text{ 开} \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

设 ① $f\in C^\infty$. $1<p<\frac{d+2}{d-2}$

② $\begin{cases} |f(z)| \lesssim (1+|z|)^p \\ |f'(z)| \lesssim 1+|z|^{p-1} \end{cases}$ $z\in\mathbb{R}$.

③ $0\leq F(z) \leq \gamma f(z) z$ for some $\gamma<\frac{1}{2}$ 其中 $F(z) = \int_0^z f(x)dx$

④ $|F(z)| \approx |z|^{p+1}$ $z\in\mathbb{R}$ (从而 $f(0)=0$).

例如 $f(u) = |u|^{p-1}u$ 满足如上条件

显见 0 是 (*) 的解，现在问，是否有其它解

我们证明：

Thm 8.5.3: (*) 有至少一个非平凡弱解

Rmk: 当 p, U 发生变化时，解的存在性可能会变，我们会在 §9.4 中，利用 Pohozaev 恒等式证明 supercritical 时，的事.

Proof: 令 $I[u]=\int_U \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\,dx \quad u\in H_0^1(U)$.

我们想对 $I[\cdot]$ 用翻山引理(从而找到非平凡临界点)

令 $H=H_0^1(U)$, $\|u\|_{H_0^1}:=\|\nabla u\|_2$

$$I[u]=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_U F(u)\,dx=:I_1[u]-I_2[u]$$

下面逐条验证翻山定理的条件.

(1) 首先证明 $I\in C=\{I\in C^1(H_0^1\to\mathbb{R}) \mid I':H_0^1\to H_0^1$ 在 H_0^1 的任一有界集上 Lipschitz 连续$\}$

为此,首先注意到: $\forall u, w\in H_0^1(U)$

$$I_1[w]=\frac{1}{2}\|w\|^2=\frac{1}{2}\|w+u-u\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|w-u\|^2+(u,w-u)$$

$\Rightarrow I_1$ 在 u 处可微, $I_1'[u]=u \quad \Rightarrow I_1\in C$

再证 $I_2\in C \quad I_2[u]=\int_U F(u)\,dx$.

Observation: 在 Ch6 中, 我们证过 $\forall v^*\in H^{-1}(U)$. $\begin{cases} -\Delta v=v^* & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

有唯一解 $v\in H_0^1(U)$. $v:=Kv^*$, $K:H^{-1}(U)\to H_0^1(U)$ 是等距同构

特别: 若 $w\in L^{\frac{2d}{d+2}}(U)$ 则 $\langle w^*,u\rangle:=\int_U wu\,dx$ 是 $H^{-1}(U)$ 上的连续线性泛函. 而 $\frac{2dp}{d+2}<\frac{d+2}{d-2}\frac{2d}{d+2}=\frac{2d}{d-2}=2^*$

故由 Sobolev 嵌入定理知: $f(u)\in L^{2d/(d+2)}(U)\subseteq H^{-1}(U) \quad \forall u\in H_0^1(U)$

下面证明: $I_2'[u]=K[f(u)]$. 若能证此, 则

对 $\forall u,\tilde{u}\in H_0^1(U)$. $\|u\|, \|\tilde{u}\|\le L$, 都有

$$\|I_2'[u]-I_2'[\tilde{u}]\|=\|K[f(u)]-K[f(\tilde{u})]\|_{H_0^1(U)}$$

$$=\|f(u)-f(\tilde{u})\|_{H^{-1}(U)}$$

$$\le\|f(u)-f(\tilde{u})\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(U)}$$

$$\lesssim\|(1+|u|^{p-1}+|\tilde{u}|^{p-1})|u-\tilde{u}|\|_{\frac{2d}{d+2}}$$

$\frac{d+2}{2d}=\frac{d-2}{2d}+\frac{2}{d}\longrightarrow$ $\lesssim\|(1+|u|^{p-1}+|\tilde{u}|^{p-1})\|_{L^{\frac{d}{2}}}\|u-\tilde{u}\|_{2^*}$

$$\lesssim_L\|u-\tilde{u}\|$$

$\Rightarrow I_2':H_0^1(U)\to H_0^1(U)$ 在有界集中 Lip

$\Rightarrow I_2\in C \overset{I_1\in C}{\Longrightarrow} I\in C$

章俊彦 PB13001112

$I_2'[u]=K[f(u)]$ 的证明是直接的计算.

首先 $\forall w\in H_0^1(U)$.

$$I_2[w]=\int_U F(u)\,dw=\int_U F(u+(w-u))\,dx$$
$$=\int_U F(u)+f(u)(w-u)\,dx+R$$
$$=I_2[u]+\int_U \nabla K[f(u)]\cdot\nabla(w-u)\,dx+R$$

而 $|R|\lesssim\int_U (1+|u|^{p-1}+|w-u|^{p-1})|w-u|^2\,dx$

$$\lesssim\int |w-u|^2+|w-u|^{p+1}\,dx$$
用Hölder
$$+\left(\int |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_U |w-u|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}}$$

$p+1<2^*$ 故由 Sobolev 嵌入定理, $R=o(\|w-u\|)$

$$\Rightarrow\ I_2[w]=I_2[u]+\big(\underbrace{Kf(u)}_{=I_2'[u]},\ (w-u)\big)_{H_0^1\text{内积}}+o(\|w-u\|)$$ ✓

这样 $I\in C$ 证毕

② 验证 Palais-Smale 条件

设 $\{u_k\}\subset H_0^1(U)$ $\{I[u_k]\}_1^\infty$ 有界

$I'[u_k]\to 0$ in $H_0^1(U)$.

之前已证 $u_k-K(f(u_k))\to 0$ in $H_0^1(U)$

故 $\forall\varepsilon>0$. 只要 k 充分大 便有.

$$|(I'[u_k],v)_{H_0^1}|=\left|\int_U \nabla u_k\nabla v-f(u_k)v\,dx\right|$$
$$\le\varepsilon\|v\|$$

令 $v=u_k$ 有 $\left|\int_U|\nabla u_k|^2-f(u_k)u_k\,dx\right|\le\varepsilon\|u_k\|$. $\forall\varepsilon>0$ 成立 k充分大

对$\varepsilon=1$ 有 $\int_U f(u_k)u_k\,dx \le \|u_k\|^2+\|u_k\|$ (k充分大).

由于$\{I[u_k]\}_1^\infty$是有界序列. 那么 $\frac{1}{2}\|u_k\|^2-\int_U F(u_k)dx \le C<\infty \quad \forall k$

$$\Rightarrow \|u_k\|^2 \le C+2\int_U F(u_k)\,dx$$

$$\le C+2r(\|u_k\|^2+\|u_k\|)$$

$2r<1 \Rightarrow \{u_k\}$ 其实在$H_0^1(U)$中也有界. 从而 ∃弱收敛子列 $u_{k_j} \to u\in H_0^1(U)$

由Sobolev嵌入定理知 $u_{k_j}\to u$ in $L^{p+1}(U)$. $(p+1<2^*)$

利用条件对f的增长控制 $\Rightarrow f(u_k)\to f(u)$ in $H^{-1}(U)$

$\overset{K\ \text{iso}}{\Longrightarrow} K(f(u_k))\to K(f(u))$ in $H_0^1(U)$.

而 $u_k-K(f(u_k))\to 0$ in $H_0^1(U)$ as $k\to\infty$

故 $u_{k_j}\to u$ in $H_0^1(U)$.

③ 再验证 山路定理的其它条件:

- $I[0]=0$.

· $\forall u\in H_0^1(U)$. $\|u\|=r>0$ 待定. 在这取.

则 $I[u]=I_1[u]-I_2[u]=\frac{r^2}{2}-I_2[u]$

$$I_2[u]=\int_U F(u)\,dx \underset{F(u)\lesssim|u|^{p+1}}{\lesssim} \int_U |u|^{p+1}dx.$$

$$\underset{p+1<2^*\ \text{Hölder不等式}}{\lesssim} \left(\int_U |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{p+1}{2^*}}.$$

$$\underset{\text{Sobolev嵌入定理}}{\lesssim} \|u\|_{H_0^1}^{p+1} \lesssim r^{p+1}.$$

$\Rightarrow \exists C>0$. $I[u]\ge\frac{r^2}{2}-Cr^{p+1}\ge\frac{r^2}{4}=a>0$ (r充分小) 因$p+1>2$

- Fix $u\in H$. $u\neq 0$. $v:=tu$. $t>0$ 待定. 要让 $\|v\|\ge r$. 但$I[v]=0$.

$$I[v]=I_1[tu]-I_2[tu]=t^2I_1[u]-\int_U F(tu)\,dx$$

$$\le t^2I_1[u]-at^{p+1}\int_U|u|^{p+1}dx$$

<0. 只要t充分大 (顺便$\|v\|>r$也做到了) 因$v:=tu$

至此我们验证了 I 满足山路引理的全部条件 $\Rightarrow \exists u\in H_0^1(U)$. $u\neq 0$.

s.t. $I'[u] = u - K[f(u)] = 0$

特别 $\forall v\in H_0^1(U)$. $\int_U \nabla u\cdot\nabla v = \int_U f(u)v\,dx$

$\Rightarrow u$ 为 $(*)$ 的弱解

□

§8.6 诺特定理 (Noether's thm) 与守恒律

本节讨论 (变分法) 能量泛函在区域变化/函数变换下的不变性，并且证明 Euler-Langrange 方程的解会自动满足一个散度形式的方程 (某种守恒律).

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，$w: U\to\mathbb{R}$，考虑能量泛函

$$I[w] := \int_U L(\nabla w, w, x)\,dx. \qquad L = L(p,z,x). \quad \cdots (*)$$

引入一些记号：

• 设 $\vec{x}$: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(x,\tau)\mapsto x(x,\tau)$ 是 C^∞ 向量场 $\quad x(x,0) = x.\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$.

~~For sma~~ 从而 $\vec{x}$ 是局部微分同胚. $\quad x\mapsto x(x,\tau)$ 称作区域变分

• 令 $v(x) := \partial_\tau x(x,\tau)\big|_{\tau=0}$.

$U(\tau) := x(U,\tau)$.

• 给定 $u: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ C^∞，设 $w: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 u 的一族变分.

$$\begin{cases} (x,\tau)\mapsto w(x,\tau) \\ w(x,0) = u(x) \end{cases}$$

令 $m(x) := \partial_\tau w(x,0)$.

m 称作"乘子".

□

如今，给定一个形如 $(*)$ 的能量泛函 $I[\cdot]$，我们问：是否存在某些区域变分/函数变分，使得 $I[\cdot]$ 是不变量

④

Def：称 I[·] 在区域变分 $\vec{x}$ 与函数变分 w 下是不变的，是指：

(#) $$\int_U L(\nabla_x w(x,\tau), w(x,\tau), x)\,dx = \int_{U(\tau)} L(\nabla_x u, u, x)\,dx.$$

$\forall |\tau|$ 充分小，$\forall$ 开集 $U\subset\mathbb{R}^n$.

Idea：给定了区域变分 $\vec{x}$ 和函数 u，如何寻找函数变分 w（形如 $u(x,\tau)$？）.

一般：变量替换，乘子.

下面证明诺特定理：

Thm 8.6.1：设 I[·] 如上，则：

(1) $$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(m\,\partial_{p_i}L(\nabla u,u,x) - L(\nabla u,u,x)v^i\right) = m\left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(L_{p_i}(\nabla u,u,x)) - \partial_z L(\nabla u,u,x)\right)$$

$\vec{v}=(v^1,\dots,v^n)$，m 如之前定义

$=\partial_\tau \vec{x}(x,0)$

(2) 特别地，若 u 为 I[·] 的临界点，i.e. $-\mathrm{div}(\nabla L_p)+L_z=0$ 则

$$\mathrm{div}(m\,\partial_p L(\nabla u,u,x) - L(\nabla u,u,x)v)=0.$$

所以可以看见，找一个合适的乘子尤为重要.

Proof：

(#)：$$\int_U L(\overset{p}{\nabla w(x,\tau)}, \overset{z}{w(x,\tau)}, \overset{x}{x})\,dx = \int_{\underset{=x(U,\tau)}{U(\tau)}} L(\nabla u, u, x)\,dx$$

两边对 τ 求导，令 $\tau=0$

$$\int_U \nabla_p L\cdot \partial_\tau w(x,0) + \partial_z L\cdot\partial_\tau w\,dx = \int_{\partial U} L\,\partial_\tau \vec{x}(x,0)\cdot\vec{n}\,dS.$$

$$\Rightarrow \int_U \nabla_p L\cdot\nabla m + \partial_z L\,m\,dx = \int_{\partial U} L\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS.$$

‖⇐ Gauss-Green 公式（分部积分）

$$\int_U (-\mathrm{div}\,\nabla_p L + L_z)\,m\,dx \cancel{=\int_{\partial U} -(m\nabla_p L + L\vec{v})\cdot\vec{v}\,dS}.$$

$$+\int_{\partial U} \nabla_p L\,m\,dS$$

$$\Rightarrow \int_U (-\mathrm{div}\,\nabla_p L + \partial_z L)\,m\,dx = \int_{\partial U}(-m\nabla_p L + L\vec{v})\cdot\vec{n}\,dS \underset{\text{由Green公式}}{=} \int_U \mathrm{div}(-m\nabla_p L + L\vec{v})\,dx$$

章俊彦 PB13001112

这对任何$\overset{\text{开子集}}{U}\subset\mathbb{R}^n$都对. $\Rightarrow$ $\operatorname{div}(m\nabla_p L - L\,v) = (-\operatorname{div}(\nabla_p L)+L_z)\,m.$

$\xRightarrow{\text{若 } u \text{ 为临界点, 则由 E-L 方程}}$ $\operatorname{div}(m\nabla_p L - L\vec{v}) = 0.$

$\square$

下面来看一些例子.

Example 1: (Lagrangian independent of x).

$L=L(p,z)$ 与 x 无关. 从而 $I[\cdot]$ 在平移不变.

具体地说, 选取 $k\in\{1,2,\dots,n\}$, $\vec{x}(x,\tau):=x+\tau e_k$ $\Rightarrow$ $\vec{v}=\partial_\tau \vec{x}(x,0)=e_k$

$w(x,\tau):=u(x+\tau e_k).$ $\quad m=\partial_\tau w(x,0)=\partial_{x_k}u.$

从而 若 u 为临界点 则

$$\operatorname{div}(\partial_{x_k}u\cdot\nabla_p L - L\,e_k)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\partial_{p_i}L\,\partial_{x_k}u - L\,\delta_{ik}) = 0.$$

$\square$

Example 2: (Scaling 不变性).

$I[w]=\int_U |\nabla w|^p\,dx$. 设 u 为极小化子, 那么其 Euler-Langrange 方程为

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0.$$

考虑变换: $x\mapsto\lambda x$. $\quad u\mapsto\lambda^{\frac{n-p}{p}}u(\lambda x)$. $\leftarrow$ 这个指标是待定系数凑出来的. $\lambda>0$

设 $\lambda=e^\tau$

$\vec{x}(x,\tau)=e^\tau x \qquad w(x,\tau)=e^{\tau\frac{n-p}{p}}\cdot u(e^\tau x).$

$v=\partial_\tau\vec{x}(x,\tau)|_{\tau=0}=x.$

$m=\partial_\tau w(x,\tau)|_{\tau=0}=\frac{n-p}{p}u+\nabla u\cdot x$

代入诺特定理:

$$\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\left(\left(\frac{n-p}{p}u+\nabla u\cdot x\right)p|\nabla u|^{p-2}\partial_{x_i}u - |\nabla u|^p x_i\right)=0.$$

关于 p-Laplace 方程, 我们会在 §9.4 中证明 $p>\frac{d+2}{d-2}$ 时, 没有非平凡解.

$\square$

下面看与时间变量有关的例子.

$P_{n+1} = \partial_t w$ $\quad z_i =$

$P_i = \partial_{x_i} w$

$L(p, z, x) = \frac{1}{2} p_{n+1}^2 - \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + F(z)$

Example 3 (NLW 的守恒律).

$$I[w] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} w_t^2 - \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 + F(w)\right) dx\, dt .$$

直接计算可得 Euler-Langrange 方程.

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 \qquad f = F'$$

(以后记 $\Box := \partial_t^2 - \Delta$).

定义: 区域变分 $\vec{x}(x, t, \tau) := (x, t+\tau)$

$$w(x, t, \tau) := u(x, t+\tau)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = e_{n+1}, \quad m = u_t .$$

代入诺特定理有

$$\cancel{\sum_{i=1}^n (u_t \cdot \partial_{x_i} u)} \ \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\partial_t u\, \partial_{x_i} u) + \partial_t\left(u_t^2 - \frac{1}{2}(u_t^2 - |\nabla u|^2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{e}(t) - \operatorname{div}_x(u_t \nabla u) = 0 \quad \text{其中 } e(t) = \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u)$$

为能量密度.

从而, 若 u 紧支, 则

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\, dx = 0 .$$

$\Rightarrow$ 能量守恒.

$\Box$

Example 4 (波方程的伸缩不变性).

$\Box u = \partial_t^2 u - \Delta u = 0$ 对应能量泛函 $I[w] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} w_t^2 - |\nabla w|^2\, dx\, dt$.

由 Example 2 知, I 在 scaling $\begin{aligned}(x, t) &\longmapsto (\lambda x, \lambda t) \\ u &\longmapsto \lambda^{\frac{n-1}{2}} u(\lambda x, \lambda t)\end{aligned}$ 下不变.

如之前一样, 令 $\lambda = e^\tau$, 定义: $x(x, t, \tau) := (e^\tau x, e^\tau t)$

$$w(x, t, \tau) := e^{\tau \cdot \frac{n-1}{2}} u(e^\tau x, e^\tau t)$$

$$\Rightarrow v = (x, t), \quad m = \partial_\tau w(x, \tau)\Big|_{\tau=0} = \left(\frac{n-1}{2} e^{\tau \frac{n-1}{2}} u(e^\tau x, e^\tau t) + e^{\tau \frac{n-1}{2}} (t u_t + x \cdot \nabla u)\right)$$

$$= \frac{n-1}{2} u + t u_t + x \cdot \nabla u .$$

PB1300112

代入诺特定理有:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\big(m\underbrace{L_{p_i}}_{=-2\partial_i u \text{ 或 } 2\partial_t u}(\nabla u,u,x)-L(\nabla u,u,x)v^i\big)_{x_i}$$

$$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{n-1}{2}u+tu_t+x\cdot\nabla u\right)\cdot(2\partial_{x_i}u)-(u_t^2-|\nabla u|^2)x^i\right)_{x_i} \leftarrow ①$$

$$+\partial_t\left(\left(\frac{n-1}{2}u+\underline{tu_t}+x\cdot\nabla u\right)\cdot(\underline{2\partial_t u})-(\underline{u_t^2-|\nabla u|^2})\,t\right) \leftarrow ②.$$

$$=-\operatorname{div}\left(\left(\frac{n-1}{2}u+tu_t+x\cdot\nabla u\right)(2\nabla u)+(u_t^2-|\nabla u|^2)x\right)$$

$$+\partial_t\left(\underline{t(\partial_t u)^2}+\underline{t|\nabla u|^2}+2(x\cdot\nabla u)(\partial_t u)+(n-1)u\,\partial_t u\right).$$

令 $p=\frac{t}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+t(x\cdot\nabla u)u_t+\frac{n-1}{2}uu_t.$

$\vec{q}=\left(tu_t+x\cdot\nabla u+\frac{n-1}{2}u\right)\nabla u+\frac{1}{2}(u_t^2-|\nabla u|^2)x.$

$\Rightarrow\ \partial_t p-\operatorname{div}\vec{q}=0$ 为波方程的scaling不变性.

□

Example 5 (波方程的共形能量).

考虑 $(x,t)\mapsto(\bar{x},\bar{t}):=\left(\frac{x}{|x|^2-t^2},\frac{t}{|x|^2-t^2}\right)$ $\quad |x|^2\neq t^2$ (称作 (x,t) 的双曲逆)

对应的变换记作 $Ku=\bar{u}$ (Kelvin变换).

定义为: $\bar{u}(x,t):=u(\bar{x},\bar{t})\,\left||\bar{x}|^2-\bar{t}^2\right|^{\frac{n-1}{2}}$.

$$=u\left(\frac{x}{|x|^2-t^2},\frac{t}{|x|^2-t^2}\right)\frac{1}{\left||x|^2-t^2\right|^{\frac{n-1}{2}}} \leftarrow \text{简单的}$$

习题12.9表明 $\Box u=0\Rightarrow\Box\bar{u}=0$ (暂时不证,直接计算可得).

下面希望找到合适的区域变分 $x(x,t,\tau)$ 与函数变分 $w(x,t,\tau)$,以导出某些守恒律.

设 $\vec{x}(x,t,\tau)=\gamma\big(x,\,t+\tau(|x|^2-t^2)\big)$,

$$\gamma:=\frac{|x|^2-t^2}{|x|^2-(t,\tau(|x|^2-t^2))^2}.$$

章俊彦 PB13001112

45

函数定义 $w(x,t,\tau) := \gamma^{\frac{n-1}{2}} u(\vec{X}(x,t,\tau))$

下面计算 $\vec{v}$ 与 m.

$\cancel{\vec{v}(x,t) = \partial_\tau \vec{X}(x,t,\tau)}\Big|_{\tau=0} = \partial_\tau\Big|_{\tau=0}\left(\dfrac{|x|^2-t^2}{|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2}\right)$.

$\cancel{= (|x|^2-t^2)\cdot\dfrac{-2(|x|^2-t^2)(t+t)}{\left(|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2\right)^2}}$

$$\vec{v}(x,t) = \partial_\tau\left(\frac{(|x|^2-t^2)x}{|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2},\ \frac{(|x|^2-t^2)(t+\tau(|x|^2-t^2))}{|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2}\right)\Bigg|_{\tau=0}$$

$$= \left(\underbrace{(|x|^2-t^2)}_{\text{和分母约掉了}}\cdot\frac{2(t+\tau)(|x|^2-t^2)x}{\left(|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2\right)^2}\Bigg|_{\tau=0},\ \frac{(|x|^2-t^2)\left(|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2\right)+(t+\tau(|x|^2-t^2))\,2(t+\tau)(|x|^2-t^2)}{\left(|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2\right)^2}\Bigg|_{\tau=0}\right)$$

$$= (2xt,\ |x|^2+t^2).$$

分子 $=(|x|^2-t^2)(|x|^2+t^2)$.

外面还有一个 $(|x|^2-t^2)$

分母 $=(|x|^2-t^2)^2$.

$m(x,t) = \partial_\tau w(x,t,\tau)\Big|_{\tau=0}$.

$$\partial_\tau w(x,t,\tau) = \frac{n-1}{2}\gamma^{\frac{n-3}{2}}\cdot(\partial_\tau\gamma)\cdot u(\vec{X}(x,t,\tau))$$

$$+\gamma^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\partial_t u\cdot\frac{\partial(\vec{X}(x,t,\tau)\text{的最后一个分量})}{\partial\tau} + \sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}u\cdot\frac{\partial(\vec{X}^i(x,t,\tau))}{\partial\tau}\right).$$

$\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial t}{\partial \tau}$

$u(X(x,t,\tau), y(x,t,\tau))$

$\tau=0$ 时 $\gamma=1$ $\quad\cancel{\partial_\tau\gamma|_{\tau=0}}$ 可以

$$\partial_\tau w(x,t,0) = \frac{n-1}{2}\partial_\tau\gamma\Big|_{\tau=0}u(\vec{X}(x,t,0)) + \partial_t u\frac{\partial(\vec{X}^{n+1}(x,t,\tau))}{\partial\tau}\Bigg|_{\tau=0} + \sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}u\frac{\partial(\vec{X}^i(x,t,\tau))}{\partial\tau}\Bigg|_{\tau=0}$$

$$\partial_\tau\gamma\Big|_{\tau=0} = \frac{(|x|^2-t^2)\,2(t+\tau)(|x|^2-t^2)}{\left(|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2\right)^2}\Bigg|_{\tau=0} = 2t. \qquad \gamma|_{\tau=0}=1$$

$\vec{X}(x,t,0)=(x,t)$

$u(\vec{X}(x,t,0)) = u(x,t)$.

$$\frac{\partial(\vec{X}^{n+1}(x,t,\tau))}{\partial\tau}\Bigg|_{\tau=0} = \partial_\tau\left(\frac{(t+\tau(|x|^2-t^2))(|x|^2-t^2)}{|x|^2-(t+\tau(|x|^2-t^2))^2}\right)\Bigg|_{\tau=0}$$

$$= (|x|^2+t^2)$$

章俊彦 PB13001112

$t \quad 2t$

$$\frac{\partial(\tilde{x}^i(x,t,\tau))}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x^i}{|x|^2-(t+\tau(|x|^2+t^2))^2}\right)\Big|_{\tau=0}$$

$$= 2x_i t.$$

$\Rightarrow m = (|x|^2+t^2)\partial_t u + 2t(x\cdot\nabla u) + (n-1)tu.$

到此,我们并没证明 解住这在如上变分下保持不变. 做出上述来子是为了将波方程化成一阶 ODE, 具体计算如下:

$\Box u = 0$. 两边乘以 m.

有 $0 = \left((|x|^2+t^2)\partial_t u + 2t(x\cdot\nabla u) + (n-1)tu\right)\left(\partial_t^2 u - \Delta u\right)$

$$= \underbrace{(|x|^2+t^2)(\partial_t u\cdot\partial_t^2 u)}_{①} - \underbrace{(|x|^2+t^2)(\partial_t u)\cdot\Delta u}_{②}$$

这项 $=(|x|^2+t^2)\frac{\partial_t((\partial_t u)^2)}{2}$

$\cancel{=(|x|^2+t^2)\frac{d}{2dt}}$

$$+\underbrace{2t(x\cdot\nabla u)\cdot\partial_t^2 u}_{③} - \underbrace{2t(x\cdot\nabla u)\Delta u}_{④} + \underbrace{(n-1)tu\cdot(\partial_t^2 u)}_{⑤} - \underbrace{(n-1)tu\Delta u}_{⑥}.$$

$\cancel{=\frac{1}{2}\partial_t(|x|}$

$① = \frac{1}{2}\partial_t\left((|x|^2+t^2)(\partial_t u)^2\right) - \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot(\partial_t u)^2$

$= \frac{1}{2}\partial_t\left((|x|^2+t^2)(\partial_t u)^2\right) - t(\partial_t u)^2.$

凑到这项上,凑出

$=\frac{1}{2}\partial_t\left((|x|^2+t^2)(u_t^2+|\nabla u|^2)\right)$

~~之注意:~~

$② = -(|x|^2+t^2)\cancel{\partial_t u\cdot\Delta u}\, u_t\cdot\Delta u$

$= (|x|^2+t^2)(u_t\cdot\Delta u + \nabla u_t\cdot\nabla u) + 2u_t(x\cdot\nabla u)$ 约掉

$(|x|^2+t^2)(\nabla u\cdot\nabla u_t)$

$-\partial_t(u_t^2+|\nabla u|^2)$

$-\left((|x|^2+t^2)(\nabla u_t\cdot\nabla u) + 2u_t(x\cdot\nabla u)\right)$

$= \mathrm{div}\left((|x|^2+t^2)(\nabla u)u_t\right) - \left((|x|^2+t^2)(\nabla u_t\cdot\nabla u) + 2u_t(x\cdot\nabla u)\right)$

$③ = 2\partial_t\left(t(x\cdot\nabla u)\partial_t u\right) - 2\left((x\cdot\nabla u)\partial_t u + t\partial_t u(x\cdot\nabla u_t)\right)$

$④ = 2t\,\mathrm{div}\left((x\cdot\nabla u)\nabla u\right) - 2t\left(\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u)\right)$

$\cancel{=2t\,\mathrm{div}((x\cdot\nabla u)\nabla u) - 2t\Delta u - 2t}\ 2t$

$⑤ = (n-1)\partial_t(tuu_t) - (n-1)\left(tu_t^2 + uu_t\right) = (n-1)\partial_t\left(tuu_t - \frac{u^2}{2}\right)$

$-(n-1)tu_t^2.$

$⑥ = (n-1)t\,\mathrm{div}(u(\nabla u)) - (n-1)t\,|\nabla u|^2.$

① −② +③ −④ +⑤ −⑥ 得

$$0=\partial_t\left(\frac{1}{2}(|x|^2+t^2)(u_t^2+|\nabla u|^2)+2tu_t(x\cdot\nabla u)+(n-1)tuu_t-\frac{n-1}{2}u^2\right)$$

$$+\mathrm{div}\left(\left((|x|^2+t^2)u_t+2t(x\cdot\nabla u)+(n-1)tu\right)\nabla u\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\cancel{t(\partial_t u)^2}+\cancel{2u_t(x\cdot\nabla u)}-\cancel{2u_t(x\cdot\nabla u)}+2tu_t(x\cdot\nabla u_t)\\&+2t(\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u))-(n-2)tu_t^2+t(n-2)|\nabla u|^2\end{aligned}\right\}\ I$$

~~而注意到~~

~~而注意到~~:

$\cancel{I = n|\nabla u|^2 - nu_t^2}$

$I = nt(|\nabla u|^2-u_t^2)\cancel{+2tu_t(x\cdot\nabla u_t)+2t(\nabla u\cdot}$

$\cancel{+x\cdot(2tu_t\cdot\nabla u_t)}$

$\cancel{+2t(\nabla u\cdot(n\nabla u+x\Delta u))-2t|\nabla u|^2}$

$\cancel{t(\underbrace{(\nabla\cdot x)}_{=n}(|\nabla u|^2-u_t^2)+x\cdot\nabla(u_t^2-}$

而 $-\mathrm{div}(t(u_t^2-|\nabla u|^2)x)$

$$=t\nabla\cdot(x(|\nabla u|^2-u_t^2))=t(\nabla\cdot x)(|\nabla u|^2-u_t^2)+tx\cdot\nabla(|\nabla u|^2-u_t^2)$$

$$\cancel{=t(\nabla\cdot x)(|\nabla u|^2-u_t^2)+tx\cdot(2(\nabla u)\Delta u-2(\nabla u_t)u_t)}$$

$$=tn(|\nabla u|^2-u_t^2)\cancel{+2t\Delta u}-2t(x\cdot\nabla u_t)u_t+tx\cdot\nabla\left(\sum_{j=1}^n(\partial_{x_j}u)^2\right)$$

$$=tn(|\nabla u|^2-u_t^2)-2t(x\cdot\nabla u_t)u_t+t\underline{\sum_{i=1}^n x_i\cdot\sum_{j=1}^n 2\partial_i\partial_j u\cdot\partial_j u}$$

$$=2\sum_{j=1}^n\partial_j u\sum_{i=1}^n x_i\partial_j\partial_i u=2(\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u))$$

$= I$

~~故 ①−②+③−④+⑤−⑥~~ $\cancel{\Rightarrow 0=\partial_t}$

曹俊彦 PB13001112

于是 ① $-$② $+$③ $-$④ $+$⑤ $-$⑥

$\Rightarrow$

$0 = \partial_t e - \mathrm{div}\,\vec{r}$ $\longrightarrow$ 称为 Morawetz 恒等式.

其中 $e = \frac{1}{2}(|x|^2+t^2)(u_t^2+|\nabla u|^2) + 2t(x\cdot\nabla u)u_t$

$$+ (n-1)tuu_t - \frac{n-1}{2}u^2.$$

$$\vec{r} = \Big(\big((|x|^2+t^2)u_t + 2(x\cdot\nabla u)t + (n-1)tu\big)\nabla u + t(u_t^2-|\nabla u|^2)x$$

$\square$

在 §9.4 中，我们利用单调性与 Morawetz 恒等式证明:

$$\int_{B(0,R)\setminus O} u_t^2+|\nabla u|^2 \,dx \lesssim \frac{1}{t^2}.$$

O 为 0 处的一个有界&边界光滑的星形域.

说明 波方程的解会在"障碍" O 外衰减很快.（初值 C_c^∞）

↳ outside O.

$\square$

章俊彦 PB13001112