Evans Ch7 Notes (Draft)

章俊彦
PB13001112
zhangjy9610@gmail.com.

*注意:

（1）7.0节在课本5.10节，结论比证明重要114514倍。范数换成绝对值后所有结论都是显然的。

（2）普通班进度是到本讲义7.3或7.4节结束。

（3）7.3节证明全部建议跳过，但须记住双曲方程正则性比抛物方程差。

（4）7.1节Galerkin方法极其重要

（5）本讲义跳过抛物Harnack不等式

（6）粘性法对学椭圆方程/几何分析的同学很重要。

(7) 粘性法对学PDE的同学都很很重要

Ch7 发展方程弱解理论
抛物

§7.0 预备知识

I. 以Banach空间为值域的函数.

设 $f:[0,T]\to X$, $T>0$, X是Banach空间(赋予范数 $\|\cdot\|$).

Def: (1) (简单函数) $s:[0,T]\to X$ 称作简单函数, 若 s 有形式

$$s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i \qquad 0\le t\le T$$

其中$\{E_i\}$是$[0,T]$的Lebesgue可测子集, $u_i\in X$

(2) (强可测) $f:[0,T]\to X$ 称作强可测, 若存在简单函数列 $s_k:[0,T]\to X$, 使得 $s_k(t)\to f(t)$ a.e. $t\in[0,T]$.

(3) (弱可测) $f:[0,T]\to X$ 称作弱可测, 若 $\forall\, u^*\in X^*$, 映射

$$[0,T]\to\mathbb{R},\quad t\mapsto\langle u^*, f(t)\rangle$$

是Lebesgue可测的

(4) 称 $f:[0,T]\to X$ 的取值是几乎可分的, 若存在Lebesgue零测集 $N\subset[0,T]$, 使得 $\{f(t)\mid t\in[0,T]-N\}$ 可分 (具有可数稠子集).

Thm 7.0.1 (Pettis 引理). $f:[0,T]\to X$ 强可测 $\Longleftrightarrow$ f 弱可测且取值几乎可分.

Proof 见 Yosida 的泛函分析

$\square$

Def（定义积分）

(1) $s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)\,u_i$ 是简单函数，则 $\int_0^T s(t)\,dt := \sum_{i=1}^{m} m(E_i)\cdot u_i$

(2) 对强可测函数 $f:[0,T]\to X$，称 f 可和 (summable)（可以理解为实变中的"可积"），是指 $\exists\{s_k\}_1^{\infty}$ simple. s.t.

$$\int_0^T \|s_k(t)-f(t)\|\,dt \to 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

(3) 若 f 可和，则 $\int_0^T f(t)\,dt := \lim_{k\to\infty}\int_0^T s_k(t)\,dt$

□

Thm 7.0.2 (Bochner).

$f:[0,T]\to X$ 强可测，则 f 可和 $\Longleftrightarrow$ $t\mapsto\|f(t)\|$ 可和.

along. $\left\|\int_0^T f(t)\,dt\right\| \le \int_0^T \|f(t)\|\,dt$.

$$\left\langle u^*, \int_0^T f(t)\,dt\right\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t)\rangle\,dt \quad \forall u^*\in X^*$$

□

II. 时空 Sobolev 空间

Def: (1) $L^p([0,T];X)=\left\{u:[0,T]\to X \text{ 强可测} \;\middle|\; \|u\|_{L^p([0,T];X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$

$1\le p<\infty$

$L^\infty([0,T];X)=\left\{\cdots\cdots \;\middle|\; \|u\|_{L^\infty([0,T];X)} := \operatorname{ess\,sup}_t \|u(t)\| < \infty\right\}$

$C([0,T];X)=\left\{u:[0,T]\to X \text{ 连续} \;\middle|\; \|u\|_{C([0,T];X)} := \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\| < \infty\right\}$

(2) $u\in L^1(0,T;X)$，称 $v\in L^1(0,T;X)$ 是 u 的弱导数，(记作 $u'=v$)，

若 $\int_0^T \phi'(t)u(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\,v(t)\,dt \qquad \forall \phi\in C_c^\infty(0,T)$

(3) $W^{1,p}(0,T;X)=\left\{ u\in L^p(0,T;X) \,\middle|\, u'\in L^p(0,T;X) \right\}$.

$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \Big\| \|u(t)\| + \|u'(t)\| \Big\|_{L^p_t}$

Thm 7.0.3 (抽象空间中的基本运算)

$u\in W^{1,p}(0,T;X)$. $1\le p\le\infty$ 则

(1). $u\in C([0,T];X)$ (modify 一个零测集后).

(2) $u(t) = u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$. $\quad 0\le s\le t\le T$

(3). $\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\| \le C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

证明：只用证(2)即可

将 u 延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R};X)$ 上. $u^\varepsilon=\eta_\varepsilon * u$.

η_ε: $\mathbb{R}$上的磨光子.

则 $(u^\varepsilon)'=\eta_\varepsilon * u'$ on $(\varepsilon, T-\varepsilon)$.

$\varepsilon\to0$ 时: $\quad u^\varepsilon\to u \quad$ in $L^p(0,T;X)$

$(u^\varepsilon)'\to u \quad$ in $L^p_{loc}(0,T;X)$.

由于 $u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(s)+\int_s^t u^{\varepsilon\prime}(\tau)\,ds$. $\qquad$ a.e. $0<s<t<T$

令 $\varepsilon\to0$. 由于 $t\mapsto\int_0^t u'(\tau)\,d\tau$ 连续 知:

$$u(t) = u(s)+\int_s^t u'(\tau)\,d\tau$$

□

Thm 7.0.4 (更多基本运算). $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

则 (1) $u \in C([0,T];L^2(U))$ (差一个零测集).

(2). $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ 绝对连续. 且 $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$

a.e. $0 \le t \le T$

(3). $\sup\limits_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right)$.

证明: (1) 将 u 延拓到 $[-\sigma, T+\sigma]$ 上. $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$.

则对 $\varepsilon, \delta > 0$

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon - u^\delta, u^\varepsilon - u^\delta\rangle_{L^2}$$

$$= 2\langle u^{\varepsilon\prime}(t) - u^{\delta\prime}(t), u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\rangle_{L^2}$$

积分,

$$\Rightarrow \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)\|_{L^2}^2$$

$$+ 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau) - u^{\delta\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

$\forall 0 \le s, t \le T$ 都对.

Fix $s \in (0,T)$: $u^\varepsilon(s) \to u(s)$ in $L^2(U)$.

$$\therefore \limsup_{\varepsilon,\delta\to 0} \sup_{0\le t\le T} \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 \underset{\text{Ot.}}{\le} \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \int_0^T \|u^{\varepsilon\prime}(\tau) - u^{\delta\prime}(\tau)\|_{H^{-1}(U)}^2$$

$$+ \|u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)} d\tau.$$

$\Rightarrow \{u^\varepsilon(t)\}$ 是 $C([0,T];L^2(U))$ 中 in Cauchy 列.

所以 $\exists v \in C([0,T];L^2(U))$. $u^\varepsilon(t) \to v$ in $C([0,T];L^2(U))$

又: $u^\varepsilon(t) \to u(t)$ a.e. t $\Rightarrow u = v$ a.e.

类似可得 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = \|u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon\prime}(\tau), u^\varepsilon(\tau)\rangle d\tau$.

令 $\varepsilon \to 0$. 由 $u = v$ a.e. 知

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u(s)\|_{L^2}^2 + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau.$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2}^2 \in AC[0,1]. \quad \frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = 2\langle u', u\rangle \qquad 0 \le s, t \le T$$

对上式积分 即有:

$$\cancel{\sup\|u\|} \; T\|u(t)\|_{L^2}^2 = \int_0^T \|u(s)\|_{L^2}^2 \, ds + CT\|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^2}^2 \lesssim_T \|u'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1})} + \|u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)}.$$

□

Thm 7.0.5 U 有界开. ∂U 光滑, $m \in \mathbb{N}$.

$u \in L^2(0,T; H^{m+2}(U))$, $u' \in L^2(0,T; H^m(U))$. 则有:

(1) $u \in C([0,T]; H^{m+1}(U))$. (modify 一个零测集后).

(2) $\sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \lesssim_{T,U,n} \|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2})} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m)}$.

证明: 我们只证 $m=0$ 的情形. 其余的, 只需考虑 u 的导数.

此时 $u \in L^2(0,T;H^2)$, $u' \in L^2(0,T;L^2)$.

将 u 延拓为 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 $L^2(0,T;H^2)$ 函数 $\bar u$. opt $\bar u \subset\subset V$.

$$\|\bar u\|_{H^2(V)} \le C\|u\|_{H^2(U)}$$

$$\frac{d}{dt}\|D\bar u\|_{L^2}^2 = 2\langle D\bar u, D\bar u'\rangle = -2\langle \bar u', \Delta \bar u\rangle$$

$$\le C\left(\|\bar u'\|_{L^2(V)}^2 + \|\bar u\|_{H^2(V)}^2\right)$$

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H^1(U)} \le C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}\right).$$

$$\Rightarrow u \in C([0,T];H^1(U))$$

□.

§7.1 二阶线性抛物方程弱解理论.

本节考虑的方程为

$$(*). \begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T. \\ u = 0. & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g. & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

$f: U_T\to\mathbb{R}$. $g: U\to\mathbb{R}$ 给定: $u: \overline{U_T}\to\mathbb{R}$ 是未知函数

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\partial_i u + c(x,t)u.$$

$$\text{or} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij}u + \text{- - - - - - - - . .}$$

L 一致抛物. $\{a^{ij}\}$ 实对称正定.

7.1.1 弱解定义:

设 $f\in L^2(U_T)$, $g\in L^2(U)$, $a^{ij}, b^i, c\in L^\infty(U_T)$.

Def: 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 是初边值问题(*)的弱解, 若成立: ① $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$ $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$.

② $u(0) = g$.

其中 $B[u,v;t]=\int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}v+cuv\,dx$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$, a.e. $t\in[0,T]$

注：① $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 不再表示内积，而是对偶空间 (H^{-1}) 的元素与原先空间 (H_0^1) 的元素之间的作用.

② 定义中的 $u(0)=g$ 是有意义的 因 Thm 7.0.3 表明 $u\in C([0,T];L^2)$

□

7.1.2. 解的存在唯一性 (Galerkin截断 ⇒ 能量估计 ⇒ Gronwall不等式).

$$(*)\begin{cases} u_t+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

Main steps:

① 构造逼近解序列 $\{u_m\}$，满足 $\begin{cases}\text{有限维截断而来.}\\ H_0^1 \text{ 的标准基测试, 满足弱解条件.}\\ \exists!\ \text{(由ODE知识)}\end{cases}$

② 能量估计：$\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 一致有界.
$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理，存在弱极限 u, v.
希望是解.

③ $u'=v$ a.e.

(u,u') 满足弱解定义.

Step 1：构造逼近解序列：

设 $\{w_k\} \subseteq C^\infty$ 是 $\begin{cases} L^2(U) \text{ 标正基} \\ H_0^1(U) \text{ 正交基} \end{cases}$.

Fix $m \in \mathbb{Z}_+$. ~~令 若将往~~ –

- 若 $u \in H_0^1$ 是弱解，则可以展开作 $u = \sum_{k=1}^\infty d^k(t) w_k$.

代入弱解定义即有： $\langle \sum_{k=1}^\infty d^{k'}(t) w_k, w_l \rangle + B[\sum_{k=1}^\infty d^k(t) w_k, w_l; t] = \langle f, w_l \rangle \quad \forall l$

$$\Rightarrow \quad d^{l'}(t) + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{e_{kl}(t)}_{\text{系数（常值）}} d^k(t) = f^l(t) := \langle f, w_l \rangle \quad \forall l. \quad \cancel{(\#)}$$

此时，令 $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 则 $d_m^{l'}(t) + \sum_{k=1}^m e_{kl} d_m^k(t) = f^l(t) \quad 1 \le k, l \le m$. $\cdots(\#)$

$f^l \in L^2([0,T])$.

$e^{kl} := B[w_k, w_l; t] = \int a^{ij} \partial_{x_i} w_k \partial_{x_j} w_l \, dx$

$\Rightarrow u \in H^1_{loc}[0,T] \subseteq C[0,T]$（作为 t 的函数）. $\in C^\infty$ ~~(作为)~~ $[0,T]$.

Claim: $u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m (g, w_k) w_k$.

$(\Leftrightarrow d_m^k(0) = (g, w_k))$

Claim 由 (#) 的存在唯一性 直接得证.

即存在绝对连续的 $\vec{d}_m(t) = (d_m^1(t), \ldots, d_m^m(t))$ 满足 $\begin{cases} (\#) \\ \text{claim.} \end{cases}$

a.e. $t \in [0,T]$.

#

Step 2：能量估计：

Thm 7.1.1：∃仅依赖于 U.T.L 的常数 $C>0$ s.t.

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_m(t)\|_{L^2(U)} + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$$
$$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}\right).$$

Proof: Fix $m \in \mathbb{Z}_+$

由 Step1: $\forall k \le m$. 有:

$$\langle u_m', w_k \rangle + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k).$$

两边乘以 $d^k(t)$, 对 k 求和有:

$$\underbrace{\langle u_m', u_m \rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2} + B[u_m; u_m; t] = (f, u_m).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \int_U \sum_{i,j} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m \, dx = (f, u_m) - \int \sum_i b^i (\partial_i u_m) \cdot u_m \, dx - \int c u_m^2 \, dx$$

L 一致椭圆

$\Rightarrow$ Hölder

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} \varepsilon \|Du_m\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\|u_m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 有:

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2}^2 + \theta \|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

Fact (Gronwall 不等式).

- η 非负. $\eta \in AC[0,T]$, 且对 a.e. t 有: $\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$. ϕ, ψ: L^1, 非负 on $[0,T]$

  则 $$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right). \quad 0 \le t \le T$$

在此: $\eta(t) = \|u_m(t)\|_{L^2(U)}^2$, ~~取~~ $\xi(t) = \|f\|_{L^2}^2$.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^2}^2 \le Ce^{Ct}\left(\|u_m(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{-cs}\eta(s)\,ds\right).$$

$$\le e^{CT}\left(\|g_m\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m(t)\|_{L^2}^2 \le C_T\left(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right) \qquad 0\le t\le T$$

下面再估计 $\|Du_m\|_{L^2}^2$

由：$\|Du_m\|_{L^2}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$.

对t积分：$\int_0^T \|Du_m(t)\|_{L^2}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

$$\le C_T\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

$$\|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \le C_T\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right).$$

下面再估计 $\|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$.

$u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) u_k \Rightarrow u_m' = \sum_{k=1}^m d_m^{k\prime}(t)\, u_k$.

先估计 $\|u_m'(t)\|_{H^{-1}}$

Fix $t\in[0,T]$.

$\forall v\in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)}\le 1$

前m个截断.

$$\langle u_m', v\rangle = \langle u_m'(t), v_m\rangle$$

$$= B[u_m, v_m; t] + (f, v_m).$$

$$\le \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|Dv_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|Du_m\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1} + \|f\|_{L^2}\underbrace{\|v_m\|_{L^2}}_{\le 1}.$$

因 $\|v\|_{H_0^1}\le 1$

对v取sup

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{H^{-1}}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

$$\Rightarrow \|u_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 = \int_0^T \|u_m'(t)\|_{H^{-1}}^2\,dt \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^2}^2\right)$$

Step 3: 弱解存在性.

Thm 7.1.2: (*) 弱解存在.

pf: 由 Thm 7.1.1 有: $\{u_m\}$ 在 $L^2(0,T;H_0^1)$ 中一致有界
$\{u_m'\}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1})$

由 Banach-Alaoglu 定理及习题5,6 结论有

Ex5: $\left.\begin{array}{ll} u_k \rightharpoonup u & \text{in } L^2(0,T;H_0^1) \\ u_k' \rightharpoonup v & \text{in } L^2(0,T;H^{-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow v = u'$

Ex6: $\left.\begin{array}{l} H \text{ Hilbert.} \\ u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;H). \\ \text{且 } \| \|u_k(t)\| \|_{L^\infty_t} \le C \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow \| \|u(t)\| \|_{L^\infty} \le C$

有: $\exists$ 子列 $u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$.
$u_{m_l}' \rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$.

如今我们待证的是:

(i): $\langle u', v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1$

(ii): $u(0) = g$.

Claim: $\forall v \in L^2(0,T;H_0^1(U))$. $\int_0^T \langle u', v\rangle + B[u,v;t]\, dt = \int_0^T (f,v)\, dt$.

check: 设 $v \in C_c^1(0,T;H_0^1(U))$. $v = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k$. $d^k \in C^\infty$ $1 \le k \le N$.

取 $m \ge N$. 对 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$.

两边乘以 d^k ~~再积分~~ 再对k求和有

$$\langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = (f, v).$$

积分: $\int_0^T \langle u_m', v\rangle + B[u_m, v; t] = \int_0^T (f,v)\, dt$.

取 $m=m_l$. 令 $l\to\infty$. 由弱收敛的结果有:

$$\int_0^T \langle u',v\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\,dt. \quad \forall v\in L^2(0,T;H_0^1)$$

由 $C_c^1 \overset{dense}{\subset} L^2$.

<u>claim holds.</u>

~~这样: $\langle u'$~~

下证: $\forall v\in H_0^1(U)$. a.e. $t\in[0,T]$ 成立. $\langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$

为此. $\forall v\in H_0^1(U)$. $\eta(t)\in C^\infty[0,T]$. 则 $\eta v\in L^2(0,T;H_0^1(U))$.

$$\int_0^T \langle u',\eta v\rangle + B[u,\eta v;t]\,dt = \int_0^T (f,\eta v)\,dt.$$

$\forall\eta$

$$\Leftrightarrow \int_0^T \eta(t)\cdot\left(\langle u',v\rangle + B[u,v;t] - (f,v)\right)dt = 0$$

$$\Rightarrow \langle u',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v) \quad \text{a.e. } t\in[0,T] \text{ 成立}. \ \forall v\in H_0^1(U).$$

这样 (i) 成立. $\xRightarrow{\text{Thm 7.0.4}} u\in C([0,T];H_0^1)$

再证 (ii). $u(0)=g$.

取 $v\in C^1([0,T];H_0^1)$, $v(T)=0$. 则.

$$\int_0^T (\langle u',v\rangle + B[u,v;t])\,dt = \int_0^T (f,v)\,dt.$$

$$\int_0^T \langle u_m',v\rangle\,dt \overset{\text{分部积分}}{=} \langle u_m(t),v(t)\rangle - \langle u_m(0),v(0)\rangle - \int_0^T \underbrace{\cancel{\langle u_m, v'\rangle}}_{\langle v', u_m\rangle,\ v'\in H^{-1},\ u_m\in H_0^1}\,dt.$$

取 $m=m_l$. $l\to\infty$ 代入有: $\quad u_{m_l}(0)=g_{m_l}\xrightarrow[l]{} g$ in H_0^1

$$\int_0^T -\langle v',u\rangle + B[u,v;t]\,dt = \int_0^T \langle f,v\rangle\,dt + (g,v(0)).$$

由 $v(0)$ 任意. 同(1) 有 $u(0)=g$.

\# 12

Step 4: 唯一性

Thm 7.1.3: (*)弱解唯一.

证: 只用证 $f=g=0$ 时, 只有零解 (因方程是线性的)

取弱解定义中 $v=u$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + B[u,u;t] = \langle u', u\rangle + B[u,u;t] = 0$$

$$\text{而 } B[u,u;t] = \int \sum a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u + \sum b^i u\,\partial_i u + cu^2\,dx$$

$$\overset{\text{同Step2}}{\geq} \theta\|Du\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|Du\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)\|u\|_{L^2}^2.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 \leq -\frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^2}^2 \leq C\|u(t)\|_{L^2}^2.$$

由 Gronwall 不等式 及 $u(0)=0$ 知 $\left.\begin{array}{l}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 0 \\ u\in C([0,T];H_0^1)\end{array}\right\} u\equiv 0.$ ⊠

□

7.1.3 正则性.

对(*) $\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u(0)=g & \text{on } \partial U \end{cases}$

在下定正则性的结论之前, 我们先要通过一些形式推导来预测最终的结论.

对热方程: $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times[0,T] \\ u(0)=g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(u_t-\Delta u)^2\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u\cdot u_t + (\Delta u)^2\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\nabla u_t\cdot\nabla u + (\Delta u)^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int|Du|^2\,dx + \int u_t^2 + \int|\Delta u|^2 = \int f^2\,dx.$$

对t积分可得:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2+|\Delta u|^2\,dx\,dt$$

$$\le \int|\nabla u(0)|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dx\,dt$$

$$\lesssim \int|\nabla g|^2\,dx+\int_0^T\int|f|^2\,dx\,dt$$

所以，对弱解，我们预测：$g\in H_0^1$, $f\in L_t^2L_x^2$ $\Rightarrow$ $u\in L_t^2H_0^1$, $u'\in L_t^2H_x^{-1}$

$$\Longrightarrow u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$$

$$\uparrow\quad u'\in L^2(0,T;L^2)$$

观察上面的式子表示什么存在！

进一步地，~~若g 再对~~ 令 $\tilde{u}=u_t$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{u}_t-\Delta\tilde{u}=\tilde{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \tilde{u}=\tilde{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad \begin{aligned}\tilde{f}&=\partial_t f\\ \tilde{g}&=f(\cdot,0)+\Delta g\\ &=\partial_t u(\cdot,0)\end{aligned}$$

两边乘 $\tilde{u}$:

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{u}\,\partial_t\tilde{u}}-\underbrace{\tilde{u}\,\Delta\tilde{u}}=\tilde{f}\,\tilde{u}$$

积 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2$ 　分部积分后会变成 $\int|\nabla\tilde{u}|^2$

对t积分，x积分

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^T\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2\,dt+\int_0^T\int|\nabla u_t|^2\,dx\,dt\lesssim\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx)$$

~~又: $\sup_{0\le}$~~

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2\,dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_t|^2\,dx\,dt$$

$$\le C\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f_t^2\,dx\,dt+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla^2 g|^2+f(\cdot,0)^2\,dx\Big)$$

但 $\sup_{0\le t\le T}\|f(\cdot,t)\|_{L^2}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}+\|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}$ $\Leftarrow$ (Thm 7.0.3).

又: $-\Delta u = f - \partial_t u$

所以 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 u|^2 \, dx \le C \int f^2 + |\partial_t u|^2 \, dx$ (椭圆正则性).

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |\nabla^2 u|^2 \, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2 \, dx\,dt$$

$$\le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 g|^2 \, dx \right)$$

□.

由此，我们可以预测.

$$g \in H^2,\quad f' \in L^2(0,T;L^2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u \in L^\infty_t H^2_x \\ u' \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_0 \\ u'' \in L^2(0,T;H^{-1}) \end{array}\right\} \text{观察上次的结论}$$

关于热方程，本身具有更好的光滑效应.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u_0 = g \in L^2 \end{cases}$$

这个把L2换成Lp也是对的(1<p<∞)

由Fourier变换有: $\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{g}(\xi)$.

$$\Rightarrow \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \| \langle \xi \rangle^s \hat{u}(t,\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$(\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}})$

$$= \| \underbrace{(e^{-t|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s)}_{\text{有界Fourier乘子}} \hat{g} \|_{L^2}$$

Mikhlin-Hörmander乘子定理

$$\lesssim \|g\|_{L^2}. \qquad \forall s>0$$

对齐次热方程. $g \in L^2 \Rightarrow u \in C^\infty$

□.

Thm 7.1.4 (抛物方程正则性定理).

(1) 设 $g\in H_0^1(U)$, $f\in L^2(0,T;L^2(U))$. 设 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

是 $(*)\begin{cases}\partial_t u+Lu=f & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u=g & \text{on } U\times\{t=0\}\end{cases}$

那么有: $u\in L^2(0,T;H^2)\cap L^\infty(0,T;H_0^1)$. $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$

$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|g\|_{H_0^1}\right)$.

(2) 若 $g\in H^2(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$.

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2)$. $u'\in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H_0^1)$.

$u''\in L^2(0,T;H^{-1})$.

且

$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}+\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}$

$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right)$.

证明: (1) 类似之前的证明可得. $\forall m\in\mathbb{Z}_+$.

(1.1) 逼近解 u_m' 满足.

$$(u_m',u_m')+\underbrace{B[u_m,u_m';t]}_{\shortparallel}=(f,u_m').$$

$$\int_U\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m'\,dx+\int_U\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u_m u_m'+cu_mu_m'\,dx.$$

而 $\int\sum_{ij}a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m'\,dx=\int\frac{d}{dt}\left(\sum a^{ij}\partial_i u_m\partial_j u_m\right)-\underbrace{\sum a^{ij}\partial_i u_m'\partial_j u_m}_{左}\,dx.$

从而 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|_{H_0^1}\right)$

(2).

由 $(u_m', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ $\quad 1\leq k\leq m$

$\Downarrow$ 对t求导

$(u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

$\Downarrow$ 乘以 $d_m^{k\prime}(t)$，对k求和.

$\forall m\in \mathbb{Z}_+$. $\quad (u_m'', u_m') + B[u_m', u_m'; t] = (f', u_m')$.

$\Downarrow$ 令 $\tilde{u}_m = u_m'$ $\quad$ 则 $\tilde{u}_m(0) = u_m'(0) = -Lu_m(0) + f(0)$.

$(\tilde{u}_m', \tilde{u}_m) + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t] = (f', \tilde{u}_m)$.

2.1

由 Thm 7.1.1 (能量估计). 有:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\tilde{u}_m(t)\|_{L^2}^2 + \|\tilde{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)}$$

$$\leq C\left(\|f'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|\tilde{u}_m(0)\|^2_{L^2}\right).$$

$$\leq C\left(\|f'\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_m(0)\|^2_{H^2} + \|f(0)\|^2_{L^2}\right).$$

$$\leq C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \underline{\|\cancel{g}\ u_m(0)\|^2_{H^2}}\right)$$

✓

如何用g的H^2控制这项?

~~$u_m(0) = g_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U})$.~~

~~其中 取 为~~

设 $-\Delta$ 在 $H_0^1(U)$ 中有特征函数系 $\{w_k\}\subset C^\infty(\bar{U})$. $\quad \Delta u_m = 0$ on ∂U.

~~$\|u_m(0)\|^2_{H^2(U)}$~~ $\quad u_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in C^\infty(\bar{U})$.

$$\int \Delta u_m(0)\Delta u_m(0) \overset{\text{分部积分}}{=} \int |D^2 u_m|^2 dx - \sum_{i,j}\int n_i \partial_i u_m \partial_j^2 u_m + n_j \partial_i u_m \partial_i\partial_j u_m \, dS.$$

$$\Rightarrow \int \sum_{ij} a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m' \, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \underbrace{\int \sum a^{ij} \partial_i u_m \partial_j u_m \, dx}_{\substack{\| \\ A[u_m]}}.$$

因此:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} A[u_m] = (f, u_m') - \sum_i \int b^i \partial_i u_m u_m' \, dx - \int c u_m u_m'$$

$$\leq C\left(\|f\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|Du_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2} + \|u_m\|_{L^2}\|u_m'\|_{L^2}\right).$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|u_m'\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 有:

$$\|u_m'\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} A[u_m] \leq C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{H_0^1}^2\right).$$

积分可得. $\forall t \in [0,T]$.

$$\int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \underbrace{A[u_m]}_{\geq \theta \|Du_m\|^2} \leq C\left(\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 dt + A[u_m(0)]\right).$$

$$\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|u_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|Du_m(0)\|_{L^2}^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|Du_m(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau.$$

用Thm 7.1.1 $\|g\|_{L^2}^2 + \|Dg\|_{L^2}^2$

$$\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \cancel{\|u_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|Du_m(0)\|^2_{L^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^T \|u_m'(t)\|_{L^2}^2 \, dt + \sup_{0\leq t\leq T} \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2$$

$$\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H_0^1(U)}\right).$$

令 $m\to\infty$ 即得 $\|u'\|_{L^2(0,T;L^2)}$ 的估计 ← 用到了习题6.

(取收敛子列) $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

(1.2)

余下要估计 $\|u\|_{L^2(0,T;H^2)}$.

由于 $(u',v) + B[u,v;t] = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

$B[u,v;t] = (f-u',v) \quad \forall v\in H_0^1(U) \quad$ a.e. $t\in[0,T]$

由椭圆方程正则性结论. $\|u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_2 + \|u'\|_{L^2})$ a.e. $0\leq t\leq T$

但：

$$0 \le \|D_\nu w_k\|^2_{L^2(\partial U)} \overset{\text{Ch5. Ex. 9}}{\le} C\|w_k\|_{L^2(\partial U)} \|D^2 w_k\|_{L^2(\partial U)} = 0$$

这步是错误的！！！

$\Rightarrow \int_{\partial U}$ 项消失.

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|\Delta \tilde{u}_m(0)\|^2_{L^2}$$

$$= C(\Delta \tilde{u}_m(0), \Delta \tilde{u}_m(0))$$

$$\overset{\text{两次分部积分}}{=} C(g_m, \Delta^2 \tilde{u}_m(0))$$

$$\underset{(u_m(0), w_k)=(g, w_k)}{=} C(g, \Delta^2 \tilde{u}_m(0))$$

$$= C(\Delta g, \Delta \tilde{u}_m(0))$$

$$\le C\|\Delta g\|_{L^2} \|\Delta \tilde{u}_m(0)\|_{L^2}$$

$$\overset{\text{Young}}{\le} C(\|g\|^2_{H^2} + \tfrac{1}{2}\|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2}).$$

注：这步的证明实际上利用的是椭圆正则性定理。根据条件，我们可以将 $\mathbf{u_m(t,x)}$ 写成 $\sum \mathbf{d_m^k(t) w_k(x)}$，令 $t=0$. 那么 $\Delta u_m(0)=\sum d_m^k(0)\lambda_k w_k(x)$，边值为0.根据椭圆正则性定理，有：$\|u_m(0)\|^2_{H^2} \leqslant \|u_m(0)\|^2_{L^2}+\|\Delta u_m(0)\|^2_{L^2}$. 代入表达式，并利用 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\ldots$ 可以得到想要的式子。

$$\Rightarrow \|\tilde{u}_m(0)\|^2_{H^2} \le C\|g\|^2_{H^2}$$

这样：$$\sup_{0\le t\le T} \|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|u_m'\|^2_{H_0^1}\, dt \le C\left(\|f\|^2_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{H^2}\right).$$

~~从而 得证毕.~~

$$\overset{m=m_l\to\infty}{\Longrightarrow} \|u'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|g\|_{H^2}\right)$$

(2-2) 下面再估计 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}$.

靠 Fact (习题9). $\exists \beta>0, \gamma\ge 0$ s.t. $\beta\|u\|^2_{H^2} \le (Lu, -\Delta u) + \gamma\|u\|^2_{L^2}$.

如今：$B[u_m, w_k] = (f - u_m', w_k)$. $1\le k\le m$.

乘以 $d_m^k \lambda_k$，求和. 有：$B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m', -\Delta u_m)$.

$$\| \quad (Lu_m, -\Delta u_m).$$

$$\Rightarrow \beta\|u_m\|^2_{H^2} \underset{\text{Fact}}{\le} (Lu_m, -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|^2_{L^2}$$

$$= (f - u_m', -\Delta u_m) + \gamma\|u_m\|^2_{L^2}$$

$$\leq \|f\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \|u_m'\|_{L^2}\|\Delta u_m\|_{L^2} + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\|\Delta u_m\|_{L^2}^2}_{\|D^2 u_m\|_{L^2}^2 \leq \|u_m\|_{H^2}^2} + C(\varepsilon)\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2\right) + \gamma\|u_m\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\beta}{2}$. 有:

$$\|u_m\|_{H^2}^2 \leq C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

不可能 $=\infty$ (椭圆正则性保证).

对 t 积分.

$$\Rightarrow \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq C\Big(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\Big)$$

$$\overset{H^1 \hookrightarrow L^\infty\ (dim=1)}{\leq} C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)} + \|u_m'\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\right)$$

~~对t积~~

$$\overset{(1.1)+(2.1)}{\leq} C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right).$$

$m = m_l \to \infty$ 即得 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq C(\ -\ -\ -\ -\ .\ )$

回顾 6

(2.3) 系下估计 $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, 不对之证明 u_m'' 有界.

Fix any $v \in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. $\quad (u_m'', w_k) + B[u_m', w_k; t] = (f', w_k)$

$$\|u_m''\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle u_m'', v\rangle|.$$

$$\cancel{= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \left|\langle f' - B[u_m', v; t], v\rangle\right|}$$

$v = v^1 + v^2 \in \mathrm{Span}\{w_1 \dots w_m\} \oplus \mathrm{Span}\{w_{m+1}, \dots\}$.

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \left|\langle f', v^1\rangle - B[u_m', v^1; t]\right|$$

$$\le \sup_{\|w\|_{H_0^1}\le 1}\left(\|f'\|_{L^2}\|v^1\|_{L^2}+\|u_m'\|_{H_0^1}\|v^1\|_{H_0^1}\right)$$

$$\le \cancel{\sup}\ \|f'\|_{L^2}+\|u_m'\|_{H_0^1}$$

再用 (2.1) 有:

$$\|u_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C\left(\|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|u_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1)}\right)$$

$$\le C\left(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right).$$

由引理5, 令 $m=m_l\to\infty$ 有

$$\|u''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C\left(\|f\|_{H_0^1(0,T;L^2)}+\|g\|_{H^2}\right)$$

□

更高正则性可由归纳法得出, 此处不再证明:

Thm 7.1.5 (高阶正则性)

设 $g\in H^{2m+1}(U)$, $\dfrac{d^kf}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))$.

$g_0=g\in H_0^1(U)$. $g_1=f(0)-Lg_0\in H_0^1(U),\ \ldots,\ g_m=\dfrac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}-Lg_{m-1}\in H_0^1(U)$.

则 $\dfrac{d^ku}{dt^k}\in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))$ $\quad 0\le k\le m+1$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^ku}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^kf}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))}+\|g\|_{H^{2m+1}(U)}\right).$$

□

Thm 7.1.6：

$g\in C^\infty(\bar U)$. $f\in C^\infty(\bar U_T)$. 且 $\forall m\in \mathbb{Z}_+$. $\begin{cases} g_0 = g \in H_0^1(U) \\ g_m = \dfrac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}} - g_{m-1} \in H_0^1(U) \end{cases}$

则初边值问题(*)有唯一解 $u\in C^\infty(\bar U_T)$

□.

§7.2. 极大值原理.

本节将跳过 Harnack 不等式. 令 $Lu = -\sum_{i,j} a^{ij} u_{x_ix_j} + \sum b^i u_{x_i} + cu$.

7.2.1 弱极大值原理.

Thm 7.2.1 $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar U_T)$. $c=0$ in U_T. $\Gamma_T = \bar U_T - U_T$.

(1) 若 $u_t+Lu\le 0$. in U_T. 则 $\max\limits_{\bar U_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$.

(2) 若 $u_t+Lu\ge 0$ in U_T 则 $\min\limits_{\bar U_T} u = \min\limits_{\Gamma_T} u$.

证明: 只证(1).

先设 $u_t+Lu<0$ in U_T.

设 $(x_0,t_0)\in \bar U_T$. $u(x_0,t_0)=\max\limits_{\bar U_T} u$.

· 若 $0<t_0<T$. 则 $(x_0,t_0)\in U_T$ 内部

$\Rightarrow \partial_t u(x_0,t_0)=0$

又 $Lu\ge 0$ at (x_0,t_0). (这与课本6.4节 Thm 1 中证明类似)

$\Rightarrow \partial_t u+Lu\ge 0$. 与假设矛盾.

· 若 $t_0=T$. 则 $u_t\ge 0$ at (x_0,t_0) (因 u 在 (x_0,t_0) 达最大值).

同样有 $Lu\ge 0$. 推出矛盾.

一般情况. 即 $u_t+Lu\le 0$ 令 $u^\varepsilon(x,t)=u(x,t)-\varepsilon t$. $\varepsilon>0$.

则 $u_t^\varepsilon + Lu^\varepsilon = u_t+Lu-\varepsilon<0$ in U_T

$\Rightarrow \max\limits_{\bar U_T} u^\varepsilon = \max\limits_{\Gamma_T} u^\varepsilon$. $\varepsilon\to 0$ 即得结论

□.

对 $c\geq 0$，我们也有类似的结论

Thm 7.2.2：（弱极大值原理 $c\geq 0$）$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$ $\quad c\geq 0$ in U_T

(1). 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T 则 $\max\limits_{\bar{U}_T} u\leq \max\limits_{\Gamma_T} u^+$.

(2) 若 $\partial_t u+Lu\geq 0$ in U_T，则 $\min\limits_{\bar{U}_T} u\geq -\max\limits_{\Gamma_T} u^-$

(3) $=0$ 则 $\max\limits_{\bar{U}_T}|u| = \max\limits_{\Gamma_T}|u|$

□.

Thm 7.2.3：Harnack 不等式

$u\in C_1^2(U_T)$ 满足 $u_t+Lu=0$ in U_T. $u\geq 0$ in U_T.

$V\subset\subset U$ 连通，则 $\forall\ 0<t_1<t_2\leq T$，$\exists C>0$ s.t. $\sup\limits_V u(\cdot,t_1)\leq C\inf\limits_V u(\cdot,t_2)$

□.

7.2.2. 强极大值原理.

设 $t_0\in[0,T]$，$U_{t_0}=U\times[0,t_0]$.

Thm 7.2.4（强极大值原理）$u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c=0$ in U_T. U 是连通集.

(1) 若 $\partial_t u+Lu\leq 0$ in U_T. u 在 ~~点~~ $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的最大值，

则 u 是 U_{t_0} 上的常值函数.

(2). - - . $\geq$ - - - - - - . . - - - - . 最小值

以上. 假设 L 的系数是光滑的

证明：只证 (1). 设 $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. v 满足

$$\begin{cases}\partial_t v+Lv=0 & \text{on } W_T\\ v=u & \text{on } \bar{W}_T-W_T=:\Delta_T\end{cases}$$

由弱极大值原理. $u\leq v$. 令 $M=\max\limits_{\bar{U}_T} u$. ~~$u\leq v\leq M=$~~

则 $v=M$ at ~~t_0~~ (x_0,t_0).

$\tilde{v}:=M-v$. 则 $c=0\Rightarrow \begin{cases}\partial_t\tilde{v}+L\tilde{v}=0\\ \tilde{v}\geq 0\end{cases}$ in W_T.

任取 $V\subset\subset W$. $x_0\in V$. V 连通. $0<t<t_0$

由 Harnack 不等式. $\max\limits_V\tilde{v}(\cdot,t)\leq C\inf\limits_V\tilde{v}(\cdot,t_0)\leq\tilde{v}(x_0,t_0)=0$

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ on $V\times\{t\}$. $\forall\, t\in(0,t_0)$.

$\forall V\subset\subset W$.

$\Rightarrow \tilde{v}=0$ in W_{t_0}

$\Rightarrow v=M$ in W_{t_0}, $v=u$ on Δ_T $\Rightarrow u=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$, $\forall W\subset\subset U$ $\Rightarrow u=M$ on U_{T_0}

□.

Thm 7.2.5 ($c\geq 0$ 的强极大值原理). $u\in C_1^2(U_T)\cap C(\bar{U}_T)$. $c\geq 0$ in U_T.
U连通

(1) 若 $u_t+Lu\leq 0$ in U_T, u 在 $(x_0,t_0)\in U_T$ 处达到在 $\bar{U}_T$ 中的(非负)最大值. 则 u 在 U_{t_0} 中是常数.

(2). ≥ 0 (非正)最小值.

只证(1).

Proof. $M:=\max\limits_{\bar{U}_T} u\geq 0$.

$u_t+Lu\leq 0$ in U_T.

若 $M=0$. 则由Thm 7.2.4即可.

若 $M>0$. 同7.2.4.选取. $W\subset\subset U$. $x_0\in W$. $K:=L-c\,Id$.

$$\begin{cases} v_t+Kv=0 & \text{in } W_T \\ v=u^+ & \text{on } \Delta_T \end{cases}.$$

$0\leq v\leq M$

on $\{u\geq 0\}$. 有 $u_t+Ku\leq -cu\leq 0$.

那么由弱极大值原理. $u-v\leq 0$

$\Rightarrow v=M$ at (t_0,x_0)

同7.2.4

令 $\tilde{v}=M-v$ 则 $\partial_t\tilde{v}+K\tilde{v}=0$ 且 $\tilde{v}\geq 0$ in W_T

任取 $V\subset\subset W$ $x_0\in V$. V连通. $0<t<t_0$. 由Harnack不等式知

$v=u^+=M$ on $\partial W\times[0,t_0]$. 又 $M>0$. 故 $u\equiv M$ on $\partial W\times[0,t_0]$ □

§7.3 二阶双曲方程的弱解理论

$U_T := U\times(0,T]$，$T>0$. $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集.

考虑初边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u=g,\ \partial_t u = h & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

$f: U_T\to\mathbb{R}$. $g, h: U\to\mathbb{R}$ 给定.

$u: \overline{U_T}\to\mathbb{R}$ 未知.

· $Lu := -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}(a^{ij}(x,t)\,\partial_{x_i}u) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t)\,\partial_{x_i}u + c(x,t)\,u$.

· L 满足 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$. $\forall (x,t)\in U_T$. $\xi\in\mathbb{R}^n$. for some $\theta>0$.

则称 ∂_t^2+L 为一致双曲的.

· $a^{ij}=\delta_{ij}$. $b^i=c=0$. $L=-\Delta$. 则化为波方程 $\Box u=0$，$\Box=\partial_t^2-\Delta$.

7.3.1 弱解定义

设 $\begin{cases} a^{ij}, b^i, c\in C^1(\overline{U_T}). \quad a^{ij}=a^{ji} \\ f\in L^2(U_T) \\ g\in H_0^1(U),\ h\in L^2(U). \end{cases}$

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j} a^{ij}(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\,\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot,t)\,\partial_{x_i}u\cdot v + c(\cdot,t)uv\,dx.$$

$\forall u,v\in H_0^1(U)$，$0\leq t\leq T$.

<u>Definition</u> 称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$ (且 $u'\in L^2(0,T;L^2(U))$，$u''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$) 是 (*) 的弱解，若：① $\langle u'',v\rangle + B[u,v;t] = (f,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

② $u(0)=g$. $u'(0)=h$.

<u>Rmk</u>：事实上 $u\in C([0,T];L^2(U))$，$u'\in C([0,T];H^{-1}(U))$. 所以谈论逐点值是有意义的.

为何如此定义？

· 形式推导：分部积分即有

$$(u'',v) + B[u,v;t] = (f,v) \qquad 0\le t\le T \qquad v\in H_0^1(U)$$

⇒ u_{tt} 可以表示为 $u_{tt} = \underbrace{g^0}_{f-\sum b^i\partial_i u - cu} + \sum_{j=1}^n \partial_j g^j$，$g^j = \sum_i a^{ij}\partial_i u$.

⇒ 应该使 u 满足 $u''\in H^{-1}(U)$ （a.e. $t\in[0,T]$）

□

7.3.2 弱解存在唯一性（Galerkin逼近）.

$$(*)\begin{cases} \partial_t^2 u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ \partial_t u = h \quad u = g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$

与7.1类似，选取 $-\Delta$ 的（适当选）特征函数 $\{w_k\}$ 作为 $\begin{cases} L^2(U)\text{ 的标准正交基} \\ H_0^1(U)\text{ 的正交基} \end{cases}$.

Fix $m\in\mathbb{Z}_+$. 取 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t)\, w_k$.

问：如何选取 d_m^k 满足需求？

希望：

$$(\#)\begin{cases} d_m^k(0) = (g, w_k) \\ d_m^{k\prime}(0) = (h, w_k) \\ (u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k) \qquad 0\le t\le T \quad 1\le k\le m \end{cases}$$

（因 $g = \sum (g,w_k) w_k$，$h = \sum (h, w_k) w_k$）

Step 1：构造逼近解序列

Thm 7.3.1（逼近解序列的构造）.

$\forall m\in\mathbb{Z}_+$，存在唯一具有形式 $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$ 的函数 u_m，使(#)三式成立.

注意到

$$B_1 = \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j} \, dx$$

$$= \int_U \sum_{i,j} \partial_t \left(a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j}\right) dx - \int_U \sum_{i,j} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$- \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u'_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx - \frac{1}{2} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j} \, dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u_{m x_j}(t) \, dx - C \|u_m\|^2_{H_0^1}$$

$$|B_2| \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} C \left(\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m'\|^2_{L^2(U)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx \right)$$

$$\leq C \left(\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(U)} \right)$$

$$\underset{L\text{一致椭圆}}{\leq} C \left(\|u_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \int_U \sum_{i,j} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx + \|f\|^2_{L^2(U)} \right)$$

令 $\eta(t) = \|u_m'(t)\|^2_{L^2} + \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i}(t) u_{m x_j}(t) \, dx$

$\xi(t) = \|f(t)\|^2_{L^2}$

$$\Rightarrow \eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

Proof: 设 $u_m(t)=\sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\, w_k$.

则 $(u_m'',\, w_k) = d_m^{k''}(t)$.

$$B[u_m, w_k; t] = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{B[w_k, w_l; t]}_{\substack{\| \\ e^{kl}(t)}}$$

$f^k(t) := (f(t), w_k)$.

则 (#) $\Longleftrightarrow$
$$\begin{cases} d_m^{k''}(t) + \sum_{k=1}^{m} e^{kl}(t)\, d_m^l(t) = f^k(t). \\ d_m^k(0) = (g, w_k). \\ d_m^{k'}(0) = (h, w_k) \end{cases}$$

由ODE存在唯一性定理即得 $\square$.

~~7.3.2 能量估计~~

Step 2: 证明逼近解序列一致有界.

Thm 7.3.2 (能量估计) $\exists C = C(U, T, L) > 0$ s.t.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(U)} + \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}\right) + \|u_m''(t)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}$$
$$\le C\left(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} + \|h\|_{L^2(U)}\right) \qquad \forall m\in\mathbb{Z}_+.$$

Proof: (#) 中两边乘以 $d_m^{k'}(t)$, 对 k 求和可得:

$$\underbrace{(u_m'',\, u_m')}_{\substack{\| \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2_{L^2}}} + B[u_m, u_m'; t] = (f, u_m'). \qquad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

$$B[u_m, u_m'; t] = \underbrace{\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{m x_i} u'_{m x_j}\, dx}_{B_1} + \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^{n} b^i u_{m x_i} u_m' + c u_m u_m'\, dx}_{B_2}$$

由 Gronwall 不等式

$$\eta(t) \le e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)\,ds\right) \qquad 0 \le t \le T$$

$$\eta(0) = \|u_m'(0)\|_2^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m_{x_i}}(0)\, u_{m_{x_j}}(0)\, dx.$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$= C\left(\|h\|_{L^2}^2 + \|g\|_{H_0^1(U)}^2\right)$$

$$\Longrightarrow \|u_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\, u_{m_{x_i}}(t)\, u_{m_{x_j}}(t)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|h\|_{L^2(U)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2\right)$$

L-一致椭圆

$$\Longrightarrow \sup_{0\le t\le T}\left(\cancel{\|u_m(t)\|_{H_0}^2} \;\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \|u_m'(t)\|_{L^2}^2\right) \le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_2^2 + \|f\|_{L_t^2 L_x^2}^2\right)$$

再估计 $\|u_m''\|_{L_t^2 H_x^{-1}}$.

Fix $v \in H_0^1(U)$. $\|v\|_{H_0^1(U)} \le 1$ $\qquad v = \underset{\operatorname{Span}\{w_k\}_1^m}{\underset{\cap}{v^1}} + v^2 \in \left(\operatorname{Span}\{w_k\}_1^m\right)^\perp$

$$\langle u_m'', v\rangle = (u_m'', v)$$

$$= (u_m'', v_1) + \underset{0}{\underset{\parallel}{(u_m'', v_2)}}$$

$$= (f, v_1) - B[u_m, v^1; t].$$

$$|\langle u_m'', v\rangle| \le C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u_m(t)\|_{H_0^1(U)}\right)$$

$$\Rightarrow \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\right)$$

对 t 积分

$$\int_0^T \|u_m''\|_{H^{-1}(U)}^2\, dt \le C\int_0^T \|f\|_{L^2}^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1}^2\, dt.$$

$$\le C\left(\|g\|_{H_0^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L_t^2 L_x^2}^2\right)$$

Step3: 解的存在唯一性 (Banach Alaoglu).

Thm 7.3.3 (*) ∃! weak sol.

Pf: 由 7.3.2 及习题 5 知.

$\exists$ 子列 $\{u_{m_l}\}$ $\quad u \in L^2(0,T;H_0^1)$ $\quad u' \in L_t^2 L_x^2$. $\quad u'' \in L_t^2 H_x^{-1}$.

s.t. $u_{m_l} \rightharpoonup u$ in $L_t^2 H_{0x}^1$

$u_{m_l}' \rightharpoonup u'$ in $L_t^2 L_x^2$

$u_{m_l}'' \rightharpoonup u''$ in $L_t^2 H_x^{-1}$.

取 $v = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k$. $\quad d^k \in C^\infty$ $\quad$ 设 $m \ge N$.

在 $(u_m'', w_k) + B[u_m, w_k; t] = (f, w_k)$ 两边乘以 $d^k(t)$. 对k求和.

对t积分有

$$\int_0^T \langle u_m'', v\rangle + B[u_m, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt.$$

$m = m_l$. $\quad l \to \infty$

$$\Rightarrow \int_0^T \langle u'', \vec v\rangle + B[u, \vec v; t]\, dt = \int_0^T (f, \vec v)\, dt. \quad \forall \vec v \in L^2(0,T;H_0^1)$$

因 $\left\{\sum_{k=1}^N d^k(t) w_k\right\}_{N=1}^\infty$ dense ~~in~~

$\vec v = v\,\tilde v$, $\quad v \in H_0^1 \cap C_c^\infty$, $\quad \tilde v \in L^2(0,T)$

$$\Rightarrow \langle u'', v\rangle + B[u, v; t] = (f, v). \quad \forall v \in H_0^1(U) \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

$\{ u \in C([0,T]; L^2)$, $\quad u' \in C([0,T]; H^{-1})$.

如今还需验证 $u(0) = g$ $\quad u'(0) = h$.

$\forall v \in C^2([0,T]; H_0^1)$. $\quad v(T) = v_0'(T) = 0$. $\quad$ 对t分部积分2次有:

$$\int_0^T \langle v'', u\rangle + B[u, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt - (u(0), v'(0)) + \langle u'(0), v(0)\rangle.$$

同样 $\int_0^T \langle v'', u_{m_l}\rangle + B[u_{m_l}, v; t]\, dt = \int_0^T (f, v)\, dt - (u_{m_l}(0), v'(0)) + \langle u_{m_l}'(0), v'(0)\rangle$

$l \to \infty$ 即得.

下面证明唯一性：

$$\begin{cases}\partial_t^2 u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u|_{\partial U} = 0 & \forall t\in[0,T] \\ u(0)=0,\ \partial_t u(0)=0 & \end{cases}$$ 只有零解.

Fix $s\in[0,T]$ $\quad v(t) := \int_t^s u(\tau)\,d\tau \cdot \chi_{\{s\geq t\leq T\}}(t)$

则 $\forall t\in[0,T]$, $v(t)\in H_0^1(U)$ 进而由弱解定义知.

$$\int_0^s \langle u'', v\rangle + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

由 $u'(0)=v(s)=0$. 分部积分有.

$$\int_0^s -(u',v') + B[u,v;t]\,dt = 0.$$

$$\overset{v'=-u}{\Longrightarrow}\quad \int_0^s \langle u', u\rangle - B[v', v;t]\,dt = 0.$$

· $\langle u',u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2.$

而 $B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot v + cv\cdot v\,dx.$

$$\frac{d}{dt}B[v,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t\partial_i v\partial_j v + \boxed{2a^{ij}\partial_i v_t\partial_j v} + \sum_{i=1}^n b^i_t\partial_i v\cdot v + \boxed{2b^i\partial_i v_t\cdot v} + c_t v\cdot v + \boxed{2cv_t\, v}\,dx$$

$+\, b^i\partial_i v\cdot v_t$ ~~$b^i\partial_i v\cdot v_t$~~ $-1\, b^i\partial_i v_t\cdot v$

$= 2B[v',v;t]$

~~这一行~~ $\Rightarrow\ +\int_U\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t\,\partial_i(v)\,\partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i_t\,\partial_i(v)\cdot v + c_t\cdot(v)\cdot v\right)dx$

最后一项分部积分

$$+\int_U\left(\sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\cdot(\underset{u\ (因\ -v'=u)}{\underbrace{-v_t}}) - \sum_{i=1}^n b^i\,\partial_i u\cdot v\right)dx$$

~~分部积分~~

$$=2B[v',v;t] + D[v,v;t] - \int_U\sum_{i=1}^n b^i\partial_i v\,u\,dx \qquad \cancel{\int_U\sum_{i=1}^n b^i_{x_i} v_t u}$$

$$-\int_U \sum_{i=1}^n\left(b^i_{x_i}\,u\cdot v + b^i u\cdot v_{x_i}\right)dx \qquad \cancel{\int_U\sum_{i=1}^n b^i v_t u_{x_i}}$$

$$=2B[v',v;t] + C[u,v;t] + D[v,v;t].$$

其中 $C[u,v;t] := -\int_U \sum_{i=1}^n b^i \partial_i v \cdot u + \frac{1}{2} b^i_{x_i} uv\,dx$

$D[u,v;t] := \frac{1}{2}\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}_t u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i_t u_{x_i} v + c_t uv\,dx$. $\quad \forall u,v\in H_0^1(U)$

$$\Rightarrow \int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} B[v,v;t]\right) dt$$

$$= -\int_0^s C[u,v;t] + D[v,v;t]\,dt.$$

左边 $= \frac{1}{2}\|u(s)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} B[v(0),v(0);t]}_{\gtrsim \|v(0)\|_{H_0^1}}$

$$\Rightarrow \|u(s)\|_{L^2}^2 + \|v(0)\|_{H_0^1(U)}^2$$

$$\le C\left(\int_0^s \|v\|^2_{H_0^1(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)} + \|v(0)\|^2_{L^2(U)}\right)$$

令 $w(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau$. 则 $\underline{v(t)=w(s)-w(t)}$ $\quad \forall\, 0\le t\le T$.

从而

$$\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|w(s)\|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\le C\left(\int_0^s \|w(t)-w(s)\|^2_{H_0^1(U)} + \|u(t)\|^2_{L^2(U)}\,dt + \|w(s)\|^2_{L^2(U)}\right)$$

$$\le C\int_0^s 2\|w(t)\|^2_{H_0^1} + \underbrace{2\|w(s)\|^2_{H_0^1}}_{\text{拿出去}}\,dt + \|u(t)\|^2_{L^2}\,dt + \|w(s)\|^2_{L^2}$$

$\|w(s)\|_{L^2}\le \int_0^s \|u(t)\|_{L^2}$

$$\le 2sC\|w(s)\|^2_{H_0^1} + C\int_0^s \|w\|^2_{H_0^1(U)} + \|u\|^2_{L^2}\,dt.$$

$$\Rightarrow \|u(s)\|^2_{L^2} + (1-2sC)\|w(s)\|^2_{H_0^1} \le C\int_0^s \|w\|^2_{H_0^1} + \|u\|^2_{L^2}\,dt$$

选 T_1，使 $1-2T_1C_0 \ge \frac{1}{2}$ 则 $s\in[0,T_1]$ 时，

$\|u(s)\|^2_{L^2} + \|w(s)\|^2_{H_0^1} \le C\int_0^s \|u(t)\|^2_{L^2} + \|w(t)\|^2_{H_0^1}\,dt$. 由Gronwall不等式

有 $u\equiv 0$ in $[0,T_1]$. 再在 $[T_1,2T_1]$, $[2T_1,3T_1]$…… 以此类推即可 □

7.3.3. 正则性.

与抛物方程类似，我们先对最简单的双曲方程(波方程)进行形式推导，来预测正则性结果.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g,\ u_t = h & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

u 是光滑解.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 + u_t^2\, dx\right) = 2\int_{\mathbb{R}^n} Du \cdot Du_t + u_t u_{tt}\, dx$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=} 2\int u_t \cdot (u_{tt} - \Delta u)\, dx$$

$$= 2\int u_t \cdot f\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx$$

~~由 Gronwall 不等式知.~~

~~对 t 积分. (∀0≤t≤T).~~

$$\leq 1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |Du|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2.$$

$$\cancel{\int_0^t \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2(t)\, dx\, d\tau - \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2(0)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |Du(0)|^2 dx}$$

$$\cancel{\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx\, d\tau + \int}$$

令 $\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2(t) + |Du(t)|^2\, dx$. $\psi(t) = \int f^2(t)\, dx$. 则 $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$

$\phi(t) = 1$.

则由 Gronwall 不等式知.

$$\eta(t) \leq C(t)\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right)$$

对 t 取 sup.

$$\Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T} \int |Du(t)|^2 + |u_t(t)|^2\, dx \leq C_T\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} h^2\, dx\right)$$

从而 对波方程

$$\|u\|_{L^\infty_t H^1_0} + \|u_t\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim_T \|f\|_{L^2_t L^2_x} + \|g\|_{H^1_0} + \|h\|_{L^2}.$$

再考虑更高正则性：

令 $\tilde{u} = u_t$. 则 $\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u}(0) = \tilde{g} := h \\ \partial_t \tilde{u}(0) = \tilde{h} := u_{tt}(\cdot,0) = f(\cdot,0) + \Delta g \end{cases}$

$\cancel{\Rightarrow \exists u_t}$

则由之前的形式推导，有：

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx \le C\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 + f(\cdot,0)^2 \, dx\right)$$

因：$\sup_{0\le t\le T} \|f(\cdot,t)\|_{L^2} \le C\left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))}\right)$

由Sobolev嵌入.

又：$-\Delta u = f - u_{tt} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_{tt}^2 \, dx \quad \forall 0 \le t \le T$

平方，对x积分，
左边分部积分2次.

$$\Rightarrow \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx + |Du_t|^2 + u_{tt}^2 \, dx$$
$$\le C_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + f_t^2 \, dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + |Dh|^2 \, dx.$$

□

从而 ~~$g \in H^2$~~

$$\|u(t)\|_{L^\infty_t H^2_x} + \|u'(t)\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|u'\|_{L^2_t H^1_{x}}$$
$$+ \|u''\|_{L^2_t H^{-1}_x} \lesssim \|f\|_{H^1_t L^2_x} + \|g\|_{H^2}.$$

下面证明双曲方程的正则性定理，要注意我们的 $\{w_k\}$ 是 Ch6.7 中构造的 $-\Delta$ 的特征函数系，是 L^2 的标准正交基，H_0^1 的正交基.

Thm 7.3.4：

(1). 设 $g\in H_0^1(U)$，$f\in L_t^2L_x^2([0,T]\times U)$，设 $u\in L^2(0,T;H_0^1)$，$u'\in L^2(0,T;H^{-1})$

是双曲方程
$$\begin{cases} \partial_{tt}u+Lu=f & \text{in } U_T \\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ \left.\begin{aligned} u&=g \\ u_t&=h\end{aligned}\right\} & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}$$
的弱解.

则：$u\in \cancel{L^2(0,T;H^2(U))\cap} L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u'\in L^\infty(0,T;L^2(U))$

且 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))}+\|u'(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))}$

$\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2(U)}\right)$.

(2). 若还有：$g\in H^2(U)$. $h\in H_0^1(U)$. $f'\in L^2(0,T;L^2(U))$

则 $u\in L^\infty(0,T;H^2(U))$. $u'\in L^\infty(0,T;H_0^1(U))$

$u''\in L^\infty(0,T;L^2(U))$. $u'''\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$

且 $\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}+\|u''(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$

$+\|u'''\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C\left(\|f\|_{H_t^1L_x^2}+\|g\|_{H^2}+\|h\|_{H^1}\right)$.

证明：在 Thm 7.3.2 中，已证明：

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m(t)\|_{H_0^1}+\|u_m'(t)\|_{L^2}\right)\le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)}+\|h\|_{L^2}\right)$$

令 $m=m_l\to\infty$. 由 $u_{m_l}\rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;H_0^1)$

$u_{m_l}'\rightharpoonup u'$ in $L^2(0,T;H^{-1})$

知，(1)成立.

(2) 令 $\widetilde{u_m} = u_m'$.

则 ~~由弱解之定义有~~ 由逼近解的构造有

$$(\widetilde{u_m}'', w_k) + B[\widetilde{u_m}, w_k] = (f', w_k) \qquad 1 \le k \le m.$$

两边乘 $d_m^{k\,\prime\prime}$ 对 k 从 1 到 m 求和. 因 $\widetilde{u_m}' = u_m'' = \sum d_m^{k\,\prime\prime} w_k$.

$$\Longrightarrow (\widetilde{u_m}'', \widetilde{u_m}') + B[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}'] = (f', \widetilde{u_m}')$$

与 Thm 7.7.2 类似.

令 $A[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx. \quad u, v \in H_0^1(U)$.

则有 $\frac{d}{dt}\left(\|\widetilde{u_m}'\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}]\right) \le C\left(\|\widetilde{u_m}'\|_{L^2}^2 + A[\widetilde{u_m}, \widetilde{u_m}] + \|f'\|_{L^2}^2\right)$. $\cdots(*)$

下面先估计 (2) 中除了 u''' 的项.

由于 $B[u_m, w_k] = (f - u_m'', w_k)$.

两边乘 $\lambda_k d_m^k(t)$

$$\Rightarrow B[u_m, \lambda_k u_m] = (f - u_m'', \lambda_k u_m)$$

$$\overset{\text{对k求和}}{\Longrightarrow} \quad \cancel{-\Delta w_k = \lambda_k w_k} \quad B[u_m, -\Delta u_m] = (f - u_m'', -\Delta u_m)$$

$$= (Lu_m, -\Delta u_m).$$

由习题 7.9 知

$\exists \beta > 0, \gamma \ge 0$, s.t. $\forall u \in H^2 \cap H_0^1$ 有:

$$\beta \|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \|u_m\|_{H^2(U)}^2 \le C\left((Lu_m, -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2\right)$$

$$= C\, B[u_m, -\Delta u_m] + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$= C(f - u_m'', -\Delta u_m) + \|u_m\|_{L^2}^2$$

$$\le C\left(\|f\|_2^2 + \|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m\|_{L^2}^2\right).$$

这里. 对 $u_m'' \Delta u_m$ 先用 Hölder 变成 $\|u_m''\|_2 \|\Delta u_m\|_2$. 再用 Young. $\le \varepsilon \|\Delta u_m\|_2^2 + C(\varepsilon)\|u_m''\|_2^2$

ε 充分小, 移去左边吸收.

又: $\tilde{u}_m = u_m'$.

对(*)再用 Gronwall 有:

$$\cancel{\|u_m''\|_{L^2}^2 + \|u_m'\|_{H^1}^2 \le C\|f'\|_{H_t L_x^2}^2 + [illegible]\|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_m''\|_{L^2(U)}^2 + \|u_m'(t)\|_{H^1(U)}^2$$

$$\le C_T\big(\underbrace{\|u_m''(0)\|_{L^2}^2}_{f(\cdot,0)+\Delta g} + \|u_m'(0)\|_{H^1(U)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2)}\big)$$

$$\le C_T\big(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2 + \|f\|_{H^1(0,T;L^2)}\big)$$

Sobolev嵌入 $d=1,\ H^1 \hookrightarrow L^\infty$

$$\le C_T\big(\|f\|_{H^1(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^1}^2\big).$$

u''' 估计与抛物方程 u'' 类似, 略去

□

Rmk: 波方程的正则性到不了抛物方程那么高 (只有 $L_t^\infty H_0^1$, 没有 $L_t^2 H_x^2$)

这是因为, 抛物正则性证明过程中, 在证得 $u\in L_t^\infty H_0^1$, $u'\in L_t^2 L_x^2$ 后,

可以利用 $(u',v)+B[u,v]=(f,v)$ $\quad \forall v\in H_0^1(U)$ a.e. $t\in[0,T]$

$\Rightarrow B[u,v]=(\underbrace{f-u'}_{\in L^2(U)},v)$ a.e. $t\in[0,T]$ $\quad$ 再用椭圆方程正则性定理得 $u\in L_x^2$.

但双曲方程的推导中不能证得 $u''\in L_t^2L_x^2$, 只有 $L_t^2 H_x^{-1}$.

从而 $B[u,v]=(f-u'',v)$ 中, $f-u''\in H^{-1}$, 不在 L^2 中.

不能证得 $u''\in L_t^2L_x^2$ 的原因在于:

· 抛物方程中证明 $u_m'\in L_t^2L_x^2$ 时, 用 $\underbrace{(u_m',u_m')}_{\text{这直接是 } u_m' \text{ 的} L^2 \text{范数}}+B[u_m,u_m']=(f,u_m')$.

而在双曲方程中, 只有 $\underbrace{(\tilde{u}_m'',\tilde{u}_m')}_{\text{只是 } \frac{d}{dt}\|u_m'\|_{L^2}^2}+B[\tilde{u}_m,\tilde{u}_m']=(f',u_m')$.

导致后面用 Gronwall不等式时出不来 $\|u_m''\|_{L^2L^2}$, 只有 u_m' 的估计.

□

事实上, 波方程、Schrödinger 方程等色散方程, 其正则性和光滑性都比抛物方程差很多. 色散方程常讨论的都是低正则性问题, 但抛物方程并不如此.

本节最后，我们不加证明地~~叙~~叙述高阶正则性的结果.

Thm 7.3.5:

(1) 设 $g\in H^{m+1}(U)$. $h\in H^{m}(U)$. $\frac{d^k f}{dt^k}\in L_t^2 H_x^{m-k}$.

且 $g_0:=g\in H_0^1$ & $h_1:=h\in H_0^1$

$$\begin{cases} g_{2l}:=\frac{d^{2l-2}f(\cdot,0)}{dt^{2l-2}}-Lg_{2l-2}\in H_0^1 & \text{if } m=2l. \\ h_{2l+1}:=\frac{d^{2l+1}}{dt^{2l+1}}f(\cdot,0)-Lh_{2l-1}\in H_0^1 & \text{if } m=2l+1 \end{cases}$$

成立，则

$$\frac{d^k u}{dt^k}\in L^\infty(0,T;H^{m+1-k}(U)).\quad 0\le k\le m+1.$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{L^\infty H^{m+1-k}(U_T)}\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k f}{dt^k}\right\|_{L_t^2H_x^{m-k}}+\|g\|_{H^{m+1}(U)}+\|h\|_{H^m(U)}\right)$$

(2). $g.h\in C^\infty(\bar U)$. $f\in C^\infty(\overline{U_T})$. 上述条件对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都满足.

则 $\exists!$ $u\in C^\infty(\overline{U_T})$ 成为原方程的解.

$\square$

~~7.3.4: 引~~

7.3.4: 二元 PDE 的约化.

考虑: $\sum_{i,j=1}^{2}a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^{2}b^i\partial_i u+cu=0.$ $\qquad a^{ij}=a^{ji}.$ $(x_1,x_2)\in U\subset\mathbb{R}^2.$

问: 上述方程能否通过变量替换, 化成常见形式?

设: $y=\Phi(x)$ i.e. $y_1=\phi^1(x_1,x_2)$ $\qquad u(x)=v(\phi(x))$

$y_2=\phi^2(x_1,x_2).$ $\qquad v(y)=u(\chi(y))$. $\chi:=\Phi^{-1}$.

从而 $\partial_{x_i}u=\sum_{k=1}^{2}\partial_{y_k}v\,\partial_{x_i}\Phi^k$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l+\sum_{k=1}^{2}\partial_{y_k}v\cdot\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi^k.$$

代入(*)，有：

$$(*)=\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{y_k}\partial_{y_l}v\cdot\partial_{x_i}\phi^k\partial_{x_j}\phi^l \quad + 一堆一阶项、零阶项.$$

$$=\sum_{i,j=1}\sum_{k,l=1}^{2}\widetilde{a_{kl}}\cdot\partial_{y_k}\partial_{y_l}v+\cdots,\quad \widetilde{a_{kl}}=\sum_{i,j=1}^{2}a^{ij}\phi^k_{x_i}\phi^l_{x_j} \qquad \cdots(\#).$$

对(#)，为了使它的形式尽可能简洁，我们需要选取合适的 Φ.

＊例如，若我们希望 $\widetilde{a}^{11}=\widetilde{a}^{22}=0$.

则这要求 ~~$0=a^{11}(\partial_{x_1}v)^2$~~

$$0=a^{11}(\partial_{x_1}\phi^1)^2+2a^{12}\partial_{x_1}\phi^1\partial_{x_2}\phi^1+a^{22}(\partial_{x_2}\phi^1)^2$$

$$0=a^{11}(\partial_{x_1}\phi^2)^2+2a^{12}\partial_{x_1}\phi^2\partial_{x_2}\phi^2+a^{22}(\partial_{x_2}\phi^2)^2$$

即 ϕ^1,ϕ^2 是方程：

$$a^{11}(\partial_{x_1}u)^2+2a^{12}\partial_{x_1}u\,\partial_{x_2}u+a^{22}(\partial_{x_2}u)^2=0 \quad \text{in } U \qquad \cdots(**).$$

的解

- 再假设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，且 $\det A=a^{11}a^{22}-(a^{12})^2<0$. 此时我们称.

(*)是双曲的。据此条件，我们对(**)作分解如下。

$$a^{11}\cdot(**)=\left(a^{11}\partial_{x_1}u+\left(\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}+a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right)\cdot\left(a^{11}\partial_{x_1}u+\left(-\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}+a^{12}\right)\partial_{x_2}u\right) \qquad \cdots(***)$$

$$=0.$$

⇒ (***) 是如下2个方程之乘积：

(#1) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u+\left(a^{12}+\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u=0$

(#2) $\quad a^{11}\partial_{x_1}u+\left(a^{12}-\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\right)\partial_{x_2}u=0.$

如今：设 ϕ^1 为(#1)的解，且 $D\phi^1\neq 0$，则 ϕ^1 沿直线 $\dot{x}=\begin{cases}\dot{x}^1=a^{11}\\ \dot{x}^2=a^{12}+\sqrt{(a^{12})^2-a^{11}a^{22}}\end{cases}$ 为 const.

设 ϕ^2 为(#2)的解，且 $D\phi^2\neq 0$，则 ϕ^2 沿直线 $\dot{x}=\begin{cases}\dot{x}^1=a^{11}\\ \dot{x}^2=a^{12}-\sqrt{\cdots}\end{cases}$ 为 const.

这称作(*)的"特征线".

此时 $\tilde{a}^{12} = \sum_{i,j=1}^{2} a^{ij} \partial_{x_i}\varphi^1 \partial_{x_j}\varphi^2 \neq 0$ in U

从而 (*) 化为

$\partial_{y_1 y_2} v + \cdots = 0$ ← 一阶项. 零阶项　　这称作 (*) 的第一典则形式.

若又令 $z_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$　$z_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$\Rightarrow$ $\partial_{z_1}^2 w_1 - \partial_{z_2}^2 w_2 + \cdots = 0.$　这称作第二典则形式.

§7.4: 有限传播速度

7.4.1: 预备知识 I: 余面积公式及其推论
(coarea)

Def (Jacobian of a Lipschitzian map).

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为Lipschitz映射, $Df(x)=\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f^1 & \cdots & \partial_{x_n}f^1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_{x_1}f^m & \cdots & \partial_{x_n}f^m\end{pmatrix}$, 若 f 在 x 处可微.

对 $\mathcal{L}^n$-a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. 定义 f 的 Jacobian 为

$$Jf(x):=[\![Df(x)]\!]$$

其中, 对线性映射 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. $[\![L]\!]:=\begin{cases}\sqrt{\det(L^*\circ L)} & n\le m\\ \sqrt{\det(L\circ L^*)} & n\ge m\end{cases}$

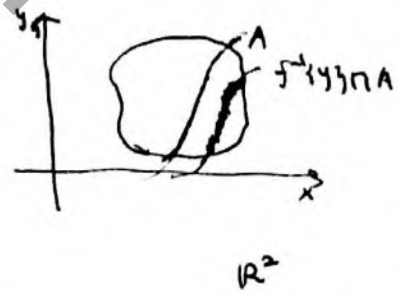
~~Thm 7.4~~

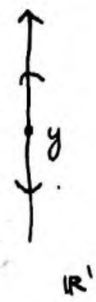
Lemma 7.4.1 (余面积公式). $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是Lipschitz映射. $n\ge m$. 则 $\forall\mathcal{L}^n$-可测集 $A\subseteq\mathbb{R}^n$. 有: $\int_A Jf\,dx=\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^{n-m}(A\cap f^{-1}\{y\})\,dy$.

证明见 L.C. Evans, R.F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Version. CRC Press. 2015. □

Rmk: ① 当 f 是线性映射时. lem 7.4.1 可以看作"斜着的" Fubini Thm.

② 一般地. 可以看作"弯曲的 Fubini 定理".





Jf 之积分 $=$ 由弯曲切片的示性函数对 $\mathcal{H}^{n-m}$ 求积分, 再将切片积分.

③ 若令 $A=\{Jf=0\}$ 则 $\mathcal{H}^{n-m}(\{Jf=0\}\cap f^{-1}\{y\})=0$. $\mathcal{L}^m$-a.e. $y\in\mathbb{R}^m$

这与Sard定理 ($f\in C^k$, 则对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y\in\mathbb{R}^m$ 有 $\{Jf=0\}\cap f^{-1}\{y\}=\emptyset$). 类似

得到 $\mathcal{H}^{n-m}$ 零测. f 只需 Lip 即可.

Corollary 7.4.1 (水平集的积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz. $n \geq m$. 则 $\forall$ $\mathcal{L}^n$-可积的 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

有:

(1) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ $\mathcal{H}^{n-m}$-可积 对 $\mathcal{L}^m$-a.e. $y \in \mathbb{R}^m$ 成立.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$

Rmk: $\forall y \in \mathbb{R}^m$. $f^{-1}\{y\}$闭 从而 $\mathcal{H}^{n-m}$-可测. 因此 (2) 是合法的.

~~证明~~

首先有以下引理.

lemma 7.4.2: $f: X \to [0, \infty]$ 为μ-可测函数 则 $\exists$ μ-可测集 $\{A_i\}_1^\infty \subseteq X$.

s.t. $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

Pf: 令 $A_1 = \{ x \in X \mid f(x) \geq 1 \}$.

$A_k = \left\{ x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$.

从而 $f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$.

又: 若 $f(x) = \infty$ 则 $\forall k$. $x \in A_k$

若 $0 \leq f(x) < \infty$. 则 对无穷多个 n. $x \notin A_n$.

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k} \leq \frac{1}{n}$. #.

回到 cor 7.4.1: 不妨设 $g \geq 0$. 则 由 lem 7.4.2 有: $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$ for some $\mathcal{L}^n$-可测集 $\{A_k\}_1^\infty$

则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, dx \overset{\text{MCT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{A_k} Jf \, dx$

$\displaystyle\overset{\text{coarea formula}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$

$\displaystyle\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$.

$\displaystyle= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy$.

□

lem 7.4.3 (水平集积分).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lip.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |Df|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f=t\})\,dt$

(2). 若 $\operatorname{ess\,inf} |Df| > 0$. 且 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-可积 则

$$\int_{\{f>t\}} g\,dx = \int_t^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds.$$

特别地: $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{\{f>t\}} g\,dx = -\int_{\{f=t\}} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1}$. $\mathcal{L}^1$-a.e. $t \in \mathbb{R}$.

Pf: (1) 在 Coarea formula 中. 令 $m=1$. 并注意 $Jf = |Df|$.

(2)(3): $E_t := \{f>t\}$

由上一引理知

$$\int_{E_t} g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_t} \frac{g}{|\nabla f|} Jf\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|} \chi_{E_t}\,d\mathcal{H}^{n-1}\,ds.$$

$$= \int_t^\infty \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|\nabla f|}\,d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds$$

□

7.4.2：双曲方程的有限传播速度

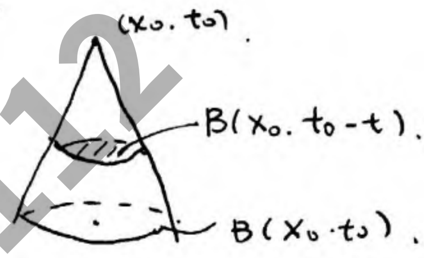
· 波动方程的有限传播速度

设 $u\in C^2$ solves $\partial_t^2 u-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

Fix $x_0\in\mathbb{R}^n$, $t_0>0$.

定义以 (x_0,t_0) 为顶点的"倒向光锥"

$$K(x_0,t_0):=\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0,\ |x-x_0|\le t_0-t\}$$



Thm 7.4.1（波方程的有限传播速度）.

$u=u_t=0$ on $B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$

则 $u=0$ on $K(x_0,t_0)$.

Rmk：这说明：$B(x_0,t_0)$ 之外的扰动，对光锥内的解没有影响.

Pf：$E(t):=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u(x,t))^2+|\nabla u(x,t)|^2\,dx$, $0\le t\le t_0$.

$$E'(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\cdot\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla u_t\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS$$

分部积分

$$=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\underbrace{(\partial_t^2 u-\Delta u)}_{0}\,dx+\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot\partial_t u\,dS$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2\,dS$$

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}\partial_t u-\frac{1}{2}(\partial_t u)^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dS$$

$$\le\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{(\frac{\partial u}{\partial n})^2+(\partial_t u)^2}{2}-\frac{(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2}{2}\,dS\le 0$$

$\Rightarrow 0\le E(t)\le E(0)=0$

□

· 双曲方程的有限传播速度

仍然先看波方程:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty). \qquad \cdots(*)$$

我们考虑方程的"振荡解"

Fix $\varepsilon>0$. 希望找形如 $u^\varepsilon(x,t) = e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}} a^\varepsilon(x,t)$. $x\in\mathbb{R}^n$ $t\geq 0$. $\cdots(\#)$

其中. p^ε 是相函数. 实值函数 $a^\varepsilon(x,t)$ 是振幅. 形如(#)的解称作 "geometric optics ansatz".

波方程的振荡解, 可以理解为 研究相函数在 $\varepsilon\to 0$ 时对应的PDE.

下面是具体的形式推导.

(#)代入(*).

$$0=\partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i\partial_t^2 p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon - a^\varepsilon\left(\frac{\partial_t p^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{2i\partial_t p^\varepsilon \partial_t a^\varepsilon}{\varepsilon} + \partial_t^2 a^\varepsilon\right)$$
$$- e^{\frac{ip^\varepsilon(x,t)}{\varepsilon}}\left(\frac{i\Delta p^\varepsilon}{\varepsilon}a^\varepsilon - \frac{|\nabla p^\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}a^\varepsilon + 2i\frac{\nabla p^\varepsilon\cdot\nabla a^\varepsilon}{\varepsilon} + \Delta a^\varepsilon\right)$$

可约去 $e^{i\frac{p^\varepsilon}{\varepsilon}}$, 取实部

$$\Longrightarrow \quad a^\varepsilon\left((\partial_t p^\varepsilon)^2 - |\nabla p^\varepsilon|^2\right) = \varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\varepsilon - \Delta a^\varepsilon\right)$$

$\varepsilon\to 0$ 时 假设有 $p^\varepsilon\to p$
$a^\varepsilon \to a \neq 0$

则

$$\Longrightarrow \quad p_t \pm |\nabla p| = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \qquad \cdots(**)$$

(**)可以视作 $\varepsilon\to 0$ 时. (#)在(**)确定的特征线附近高度聚集.

对一般的二阶双曲方程 $\partial_t^2 u - \sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l} u = 0$. in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$
$a^{lk}=a^{kl}$. $\cdots(***)$

我们仍希望寻找形式(#)的解.

$$\partial_{x_k} u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k} a^\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \partial_{x_kx_l}u^\varepsilon = e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_l}p^\varepsilon\right)\left(\frac{i}{\varepsilon}\partial_{x_k}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k}a^\varepsilon\right)$$
$$+ e^{\frac{ip^\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{i}{\varepsilon}\left(\partial_{x_kx_l}p^\varepsilon\cdot a^\varepsilon + \partial_{x_k}p^\varepsilon\partial_{x_l}a^\varepsilon\right) + \partial_{x_kx_l}a^\varepsilon\right)$$

约去 $e^{\frac{ip^\ell}{\varepsilon}}$ 取实部有

$$a^2\left((\partial_t p^\ell)^2-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k p^\ell\partial_l p^\ell\right)=\varepsilon^2\left(\partial_t^2 a^\ell-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l a^\ell\right)$$

$$\Rightarrow\quad p_t\pm\left(\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k p\,\partial_l p\right)^{\frac12}=0\qquad\text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

#.

下面考虑 (***) $\partial_t u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的光滑解.

$$Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u.$$

Fix $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，我们对此方程，希望找到类似于"波方程的"光锥" C. 其顶点为 (x_0,t_0). s.t. 只要 $u=\partial_t u=0$ on $C_0:=C\cap\{t=0\}$

就有：$u\equiv0$ in C.

由上面对振荡解的讨论，我们可以猜测所求的区域 C 是形如 $\{p=0\}$ 这样的水平集. p 是 Hamilton-Jacobi 方程 $p_t-\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}p_{x_i}p_{x_j}\right)^{\frac12}=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解.

分离变量 $p(x,t)=q(x)+t-t_0$.

q 满足 $\begin{cases}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}q_{x_i}q_{x_j}=1\\ q>0\quad \text{in } \mathbb{R}^n-\{x_0\}.\\ q(x_0)=0\end{cases}$ $\quad(\Rightarrow \nabla q\neq0 \text{ in } \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\})$

* $\boxed{\text{例如. } L=-\Delta \text{ 时. } q(x)=|x-x_0|.}$

于是我们所求的"光锥"定为.

$$K:=\{(x,t)\mid p(x,t)<0\}=\{(x,t)\mid q(x)<t_0-t\}.$$

$\forall t>0$. 令 $K_t=\{x\mid q(x)<t_0-t\}$ = K 在 t 时刻的横截面

($\Rightarrow \partial K_t\in C^\infty$ 且 ∂^{n-1}-可测)

下面证明对称双曲方程的有限传播速度.

Thm 7.4.2 设 $u\in C^\infty$ 是 $\partial_t^2 u+Lu=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的解 若 $u=\partial_t u=0$ on K_0.

则 $u=0$ in K.

Rmk: 从而: 若 $u(0)=g$, $\partial_t u(0)=h$. 则 $u(x_0,t_0)$ 仅与 g,h 在 K_0 中的取值有关

Pf: 令 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\,dx$.

$$E'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{K_t}(\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\,dx\right).$$

余面积公式 cor 7.4.2

$$=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u_t\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial K_t}\left((\partial_t u)^2+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\,\partial_j u\right)\frac{1}{|\nabla\varphi|}\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$=: I_1-I_2.$$

对 I_1: 第二项分部积分可得:

$$I_1=\int_{K_t}\partial_t u\,\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\partial_t u\cdot\partial_j(a^{ij}\partial_i u)\,dx.$$

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\cdot u_t\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\vec{n}$ 为 ∂K_t 的单位外法向

$$=\int_{K_t}\partial_t u\cdot\left(\underbrace{\partial_t^2 u-\sum_{i,j=1}^n\left(\partial_j a^{ij}\partial_i u+a^{ij}\partial_i\partial_j u\right)}_{\text{加起来为0}}\right)dx.$$

$$+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$=-\int_{K_t}\partial_t u\cdot\sum_{i,j=1}^n\partial_j a^{ij}\cdot\partial_i u\,dx+\int_{\partial K_t}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\cdot n^j\,\partial_t u\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

那么

$$|A| \le \left|\iint_{K_t} \partial_t u \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \cdot \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \cdot n^j\right| \cdot |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} \left(\sum a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum a^{ij} n^i n^j\right)^{\frac{1}{2}} |u_t| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

这里用到了：$A=(a^{ij})$ 为实对称阵，a^{ij}非负，则

$$\left|\sum_{ij} a^{ij} x_i y_j\right| \le \left(\sum_{ij} a^{ij} x_i x_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{ij} a^{ij} y_i y_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

∂K_t 上，$q = t_0 - t$，$n = \nabla q / |\nabla q|$

则 $\sum_{i,j} a^{ij} n^i n^j = \sum_{i,j}^{n} \frac{a^{ij} q_{x_i} q_{x_j}}{|\nabla q|^2} = \frac{1}{|\nabla q|^2}$

$$= \left|\int_{K_t} \partial_t u \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j a^{ij} \partial_i u \, dx\right| + \int_{\partial K_t} |u_t| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Cauchy-Schwartz (第一项).

$$\le \int_{K_t} u_t^2 + C \int_{K_t} \frac{\cancel{a^{ij} \partial_i u \partial_j u}}{|\nabla u|^2} \, dx + \int_{\partial K_t} \frac{|u_t|}{|\nabla q|} \left(\sum_{ij} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}$$

L 椭有界

$$\le C \left(\int_{K_t} u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) dx + \int_{\partial K_t} \cdots\cdots$$

Cauchy-Schwartz.

$$\le C E(t) + \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} \left((\partial_t u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_i u \partial_j u\right) \frac{1}{|\nabla q|} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$= C E(t) + B$$

Gronwall不等式

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{E}(t) = A - B \le C E(t) \\ E(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow E(t) \equiv 0 \quad 0 \le t \le t_0. \Longrightarrow u \equiv 0 \quad \text{in } K.$$

□.

§7.5：一阶双曲方程组

7.5.1：消失粘性法：

考虑：
$$\begin{cases}\partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_j \vec{u} = \vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \vec{u}(0) = \vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}\end{cases} \quad \cdots (*)$$

$\vec{u} = (u^1, \ldots, u^m) : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ 为未知函数.

$B_j : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to M^{m\times m}$ ~~为矩阵~~ $j=1,2,\ldots,n$.

$\vec{f} : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$, } 给定.

$\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{B}(x,t;y) := \sum_{j=1}^{n} y_j B_j(x,t) \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\geq 0.$$

Def (1) 若 $B(x,t;y)$ ($m\times m$ 方阵) $\forall x.y\in\mathbb{R}^n$. $t\geq 0$. ~~可对角化~~. 则 称 $(*)$ 是双曲的.

若 $\forall x.y.t$. $B(x.t;y)$ 有 m 个实特征值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m$.

这说明. $(*)$ 是双曲的. 且对应特征向量构成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基

(2). 称 $(*)$ 是对称双曲方程组，若 $B_j(x,t)$ 是对称阵.

称 $(*)$ 是严格双曲的. 若 $\forall x.y\in\mathbb{R}^n$. $y\neq 0$. $\forall t\geq 0$. $B(x.t;y)$ 有 m 个不同的 实特征值 $\lambda_1(x.t;y) < \cdots < \lambda_m(x.t;y)$.

Motivation：11 波方程的行波解 (travelling wave).

设 $f=0$. $B_j(x,t;y)$ 是常系数矩阵. 则

$$\sum_{j=1}^{n} y_j B_j = B(y) \text{ 仅与 } y \text{ 有关}.$$

寻求 $(*)$ 的行波解，即希望 $\vec{u}$ 有形式 $\vec{u}(x,t) = \vec{v}(y\cdot x - \sigma t)$. $x\in\mathbb{R}^n$. $t\geq 0$

上式代入 $(*)$. $\Rightarrow$ $\left(-\sigma I + \sum_{j=1}^{n} y_j B_j\right)\vec{v}' = 0$.

$\Rightarrow$ $\vec{v}'$ 是 $B(y)$ 关于特征值 σ 的特征向量.

双曲条件 (*) 有 m 个不同的行波解 ($\forall$方向 y)，它们应为 $(y\cdot x-\lambda_k(y)t)\vec{r}_k(y)$

其中 $\lambda_1(y)\le\cdots\le\lambda_m(y)$ 是 $B(y)$ 的特征值，$\{\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_m\}$ 是对应特征向量。

$|y|=1$ 时，特征值即为波速。

□

下面我们引入所谓的"消失粘性法"来证明对称一阶双曲组初值问题的存在唯一性。

考虑

$$(*)\begin{cases}\partial_t\vec{u}+\sum_{j=1}^{n}B_j\partial_{x_j}\vec{u}=\vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ \vec{u}=\vec{g} & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}\qquad T>0.$$

并假设 (1): $B_j(x,t)$ 是对称阵。$\forall j$. $\forall x\in\mathbb{R}^n$. $t\in[0,T]$

(2) $B_j\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,T];\mathbb{M}^{m\times m})$.

$$\sup_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}\left(|B_j|,\ |\partial_x B_j|,\ |\partial_t B_j|,\ |\partial^2_{x,t}B_j|\right)<\infty.\quad\forall j.$$

(3) $\vec{g}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$

$\vec{f}\in H^1(\mathbb{R}^n\times(0,T)\to\mathbb{R}^m)$.

定义：(1) 双线性形式：$B[\vec{u},\vec{v};t]:=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}\left(B_j(\cdot,t)\partial_{x_j}\vec{u}\right)\cdot\vec{v}\,dx$

$\forall\, 0\le t\le T.\ \vec{u},\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$.

(2). 称 $\vec{u}\in L^2(0,T;H^1)$，$\vec{u}'\in L^2(0,T;L^2)$ 是 (*) 的弱解，若

(i). $(\vec{u}',\vec{v})+B[\vec{u},\vec{v};t]=(\vec{f},\vec{v})$. $\forall\vec{v}\in H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$. a.e. $t\in[0,T]$

(ii) $\vec{u}(0)=\vec{g}$.

消失粘性法的基本思路是，在原方程加入较小的(带ε)抛物项，

例如
$$(\#^\varepsilon)\begin{cases}\partial_t\vec{u}^\varepsilon-\varepsilon\Delta\vec{u}^\varepsilon+\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}\vec{u}^\varepsilon=\vec{f} & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ \vec{u}^\varepsilon(0)=\vec{g}^\varepsilon(x). & \text{in } \mathbb{R}^n\end{cases}$$
$0<\varepsilon\leq 1$. $\vec{g}^\varepsilon=\eta_\varepsilon*\vec{g}$

$(\#^\varepsilon)$ ~~模型~~ 被视为原方程的逼近，我们试图先用不动点方法证明$(\#^\varepsilon)$的解(视作原方程的逼近解)是有存在唯一性，再用~~去前~~能量估计与 Banach-Alaoglu 定理证明(*)方程的解的存在唯一性。

↑此时 取子列 $\varepsilon_k\to 0$ ↑所谓~~来会~~"粘性消失"。

Step 1：逼近解存在唯一性：

Thm Ⅹ.5.1：$\forall\varepsilon>0$. $(\#^\varepsilon)$存在唯一解 $\vec{u}^\varepsilon\in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))$

且 $\vec{u}^{\varepsilon\prime}\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))$.

<u>Proof</u>：我们采用压缩映射原理的方法。因此，我们要

① 构造~~#~~函数空间 X.

② 构造解映射 T：$u\mapsto Tu$. 使之成为 X 到自身的压缩映射

③ 利用压缩映射原理，得不动点，$\vec{u}$ 即为方程的局部解

④ 再设法变成整体 $(0,T]$ 上的解

(1.1) 为确定 X，我们先要对方程进行先验估计，即先大致判断 u 会落在什么空间中。

$(\#^\varepsilon)$中的难处主要是高阶项，因此，我们把低阶项 $\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon$ 挪到右边去，变成
$$\begin{cases}\partial_t\vec{u}^\varepsilon-\varepsilon\Delta\vec{u}^\varepsilon=\vec{f}-\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}\vec{u}^\varepsilon\\ \vec{u}^\varepsilon(0)=g.\end{cases}\quad\cdots(\#\#^\varepsilon)$$

这样就变成一个非齐次热方程。

我们先考虑一般的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \Delta u = f \\ u(0) = g. \end{cases}$$

由Du'Hamel原理：

$$u(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds.$$

其中 $e^{\varepsilon t\Delta} g(x) := \cancel{\int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}} \left(e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \hat{g}\right)^{\vee}$.

∧: Fourier 变换
∨: 反Fourier 变换.

- $\|e^{\varepsilon t\Delta} g\|_{H^s} = \| e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \cdot \hat{g}(\xi) \ \langle \xi\rangle^s \|_{L^2}$.

$$= \| e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle \xi\rangle^s \ \hat{g}(\xi) \|_{L^2}$$

$$\lesssim \| \langle \xi \rangle^s \ \hat{g}(\xi) \|_{L^2} = \|g\|_{H^s}.$$

又: $e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle \xi \rangle^s = e^{-\varepsilon t|\xi|^2} \langle (\varepsilon t)^{-\frac12} \underbrace{((\varepsilon t)^{\frac12} \xi)}_{\eta} \rangle^s$

$$= e^{-\eta^2} \langle (\varepsilon t)^{-\frac12} \eta \rangle^s.$$

$$\lesssim (\varepsilon t)^{-\frac{s}{2}}$$

原方程初值 $g \in H^1 \Rightarrow e^{\varepsilon t\Delta} g \in L_t^\infty H_x^1$

- 非齐次项估计：

$$\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(y,s)\, dy\, ds$$

$$\overset{\phi(t,x)\text{设作热方程基本解}}{=\!=} \int_0^t \phi(\cdot, \varepsilon(t-s)) * f(s)\, ds.$$

$\cancel{\Rightarrow \| \int_0^t e^{\varepsilon t}}$

$\Rightarrow$

广义Minkowski不等式

$$\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2_x} \le \int_0^t \left\| \cancel{e^{\varepsilon(t-s)}}\ \phi(\cdot,\varepsilon(t-s)) * f(s)\right\|_{L^2_x} ds.$$

$\|f*g\|_q \le \|f\|_p \|g\|_r$, $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$

卷积 Young不等式

$$\le \int_0^t \|\phi(\cdot,\varepsilon(t-s))\|_{L^1_x} \|f(s)\|_{L^2_x}\, ds.$$

$y=\frac{x}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}$. $\|\phi\|_{L^1_y}=const$.

$$\le C_\varepsilon \int_0^t \|f(s)\|_{L^2_x}\, ds$$

$$\le \begin{cases} CT\, \|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ C_\varepsilon \|1\|_{L^2_t} \|f\|_{L^2_t L^2_x} = C_\varepsilon T^{\frac12} \|f\|_{L^2_t L^2_x} \end{cases}$$

$$\nabla_x u^\varepsilon = \nabla_x \int_0^t \frac{1}{(4\pi\varepsilon(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4(t-s)\varepsilon}} f(x-y,s)\, dy\, ds$$

$$= \int_0^t \int \nabla_x \phi_\varepsilon(y,t-s)\, f(x-y,s)\, dy\, ds$$

可以直接算出 $\lesssim (\varepsilon(t-s))^{-\frac12}$. 有限的 → 类似于正态分布的一阶矩 $E|X|$.

$$\le \int_0^t \|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^1_x} \|f\|_{L^2} ds$$

同上 $\le C_\varepsilon \begin{cases} T\, \|f\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ T^{\frac12} \|f\|_{L^2_t \cancel{H^1_x} L^2_x} \end{cases}$

而原方程中 $f\in H^1_{t,x}$. t方向上 由 $H^1_t \hookrightarrow L^\infty_t$ 知 $f\in L^\infty_t \cancel{H^1_x} L^2_x$

$\underset{T<\infty}{\Rightarrow} f\in L^2_t \cancel{H^1_x} L^2_x$.

这样 我们 ~~证明了~~ 大致可以猜测 $X = L^\infty_t H^1_x$

(1.2) 令 $X = L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n))$ ~~我们证明也是~~

形式推导表明

$(\#\#^\varepsilon) \iff u^\varepsilon(t) = e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j u^\varepsilon_{x_j}(s)\right) ds$

令 $T: u \mapsto e^{\varepsilon t\Delta} g + \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\left(f(s) - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u(s)\right) ds.$

我们证明 T 是 $X \to X$ 的压缩映射.

· $\operatorname{Im} T \subseteq X$. 由先验估计 (1.1)

$$\|Tu\|_X \lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \|\nabla u\|_{L^\infty_t L^2_x}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^1} + C(\varepsilon) T^{\frac12} \left(\|f\|_{L^\infty_t H^1_x} + \|u\|_{L^\infty_t H^1_x}\right)$$

$$< \infty$$

· 再证 T 压缩: $\forall u, v \in X$

$$Tu - Tv = \sum_{j=1}^n \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta} B_j \partial_j (u-v)(s)\, ds,$$

$$\|Tu - Tv\|_{L^\infty_t H^1_x} \underset{\text{还用(1.1)}}{\leq} C(\varepsilon) T^{\frac12} \|u-v\|_{L^\infty_t H^1_x}$$

$$< \frac12 \|u-v\|_X \quad \text{provided choosing } C(\varepsilon) T^{\frac12} < \frac12$$

$\Rightarrow \exists T_1$ s.t. $[0,T_1]$上

$T: L^\infty_t H^1_x \to L^\infty_t H^1_x$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$ 是压缩映射

$\therefore$ $\mathbb{R}^n \times [0,T_1]$上 $(\#\#^\varepsilon)$ 有唯一解 u^ε. 再在 $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, … 依此类推即可

(1.3) 再证 $u^\varepsilon \in L^2(0,T;H^3)$. $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

实际上: 令 $\tilde{f} = f - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a.e. $0 \le t \le T$.

由抛物正则性定理 $u^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^2)$, $u^{\varepsilon\prime} \in L^2(0,T;H^1)$.

这样 $\sum B_j \partial_{x_j} u \in L^\infty(0,T;H^1)$.

$\Rightarrow \tilde{f} \in H^1$ a.e. $t \in [0,T]$

$\Rightarrow u^\varepsilon \in L^\infty_t H^3_x$. 证毕.

再用抛物正则性定理.

□

这样我们证明了(###$^\varepsilon$),即逼近解的存在唯一性 ($\forall \varepsilon$).

下面我们证明,逼近解序列在某些自反空间中一致有界. 再用 Banach-Alaoglu 定理,得子列 $u^{\varepsilon_k} \to u$. as $k \to \infty$ ($\varepsilon_k \to 0$). 从而证明解的存在唯一性. 该套路我们已经反复用过.

Step 2: 能量估计:

Thm 7.5.2: $\exists\, C>0$ s.t. $\forall\, 0<\varepsilon\le 1$.

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|u^{\varepsilon\prime}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}\right)$$

$$\le C\left(\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))} + \|f'\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m))}\right)$$

证明: 先算第一项, 拆成 $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$, $\|Du^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ 分别估计.

(2.1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2\right) = (u^\varepsilon, u^{\varepsilon\prime})$

$$= \left(u^\varepsilon, f - \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon \Delta u^\varepsilon\right).$$

$$|(u^\varepsilon, f)| \le \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2$$

$$|(u^\varepsilon, \varepsilon\Delta u^\varepsilon)| \xlongequal[\text{(先用}C_c^\infty\text{函数逼近)}]{\text{分部积分}} -\varepsilon\|Du^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le 0.$$

再算: $\left(u^\varepsilon, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)$.

先设 $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$.

$$\left(v, \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} v\right) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (B_j \partial_{x_j} \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx \quad \text{中}$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} B_j^{11} & \cdots & B_j^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_j^{m1} & \cdots & B_j^{mm} \end{pmatrix}}_{\text{实对称阵}} \begin{pmatrix} \partial_{x_j} v_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_j} v_m \end{pmatrix} \right) \underset{\text{点乘}}{\cdot} (v_1, \dots, v_m)\, dx$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m B_j^{1i} \cdot \partial_{x_j} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m B_j^{mi} \cdot \partial_{x_j} v_i \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, v_m)\, dx.$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m B_j^{ki} \cdot (\partial_{x_j} v_i) \cdot v_k.$$

用了 B_j 实对称 $\to$ $$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\partial_{x_j}(B_j^{ki} v_i v_k) - \partial_{x_j} B_j^{ki} \cdot v_i v_k \right) dx.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}(B_j v \cdot v)\, dx - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx.$$

由于 v 紧支, 故: 上式第一项 $= 0$

上式绝对值 $\le \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_j} B_j \vec{v}) \cdot \vec{v}\, dx \right| \le C\|v\|_{L^2}^2$.

(28)

下面再估计 $v=u^{\varepsilon'}$ 的 L^2 范数.

(###$^\varepsilon$) 两边对 t 求导

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon\Delta v + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} v = f' - \sum_{j=1}^{n} \partial_t B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ v = f - \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} g^\varepsilon + \varepsilon\Delta g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

同上可得:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u^{\varepsilon'}(t)\|_{L^2}^2 \le C\Big(\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|f(0)\|_{L^2}^2 + \|f\|^2_{L^2_tH^1_x} + \|f'\|^2_{L^2_tL^2_x}\Big)$$

又由磨光与分部积分可得: $\|\Delta g^\varepsilon\|_{L^2}^2 \le \frac{C}{\varepsilon^2}\|\nabla g\|_{L^2}^2 \quad (g^\varepsilon = \eta_\varepsilon * g)$

又: $\|f(0)\|_{L^2}^2 \le C\big(\|f\|^2_{L^2_tL^2_x} + \|f'\|^2_{L^2_tL^2_x}\big)$.

则 $\sup_{0\le t\le T} \|u^{\varepsilon}(t)\|_{L^2}^2 \le C\big(\|g\|_{H^1} + \|f\|_{L^2_tH^1_x} + \|f'\|_{L^2_tL^2_x}\big)$.

□

Step 3: 存在唯一性

Thm 7.5.3:

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_{x_j} u = f & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T] \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{0\} \end{cases}$$

在之前~~的条件~~下,弱解 $\exists!$

Proof: 由 Thm 7.5.2 知 $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2_t H^1_x$ 一致有界

$\{u^{\varepsilon'}\}_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2_t L^2_x$ 一致有界

由 Banach-Alaoglu 定理, $\exists$ 弱(*)收敛子列:

$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2_t H^1_x$

$u^{\varepsilon_k'} \rightharpoonup u' \quad \text{in } L^2_t L^2_x$

再由C_c^∞函数逼近H^1函数 $(H_0^s(\mathbb{R}^d)=H^s(\mathbb{R}^d))$.

则
$$\left|\left(u^\varepsilon \cdot \sum_{j=1}^n B_j \partial_{x_j} u^\varepsilon\right)\right| \le C\|u^\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}.$$

这样: $$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon\|^2_{L^2} \le C\left(\|u^\varepsilon\|^2_{L^2}+\|f\|^2_{L^2}\right).$$

再由Gronwall不等式即得:
$$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)} \le C\left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)}+\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\right)$$
$$(\text{因 } \|g^\varepsilon\|_{L^2}\le\|g\|_{L^2})$$

(2.2): $\cancel{\frac{d}{dt}}$ 下面估计 $\|Du^\varepsilon\|_{L^2}$.

Fix $k\in\{1,2,\dots,n\}$. $v^k:=\partial_{x_k}u^\varepsilon$.

对(##)两边对x_k求导,有:
$$\begin{cases}\partial_t v^k-\varepsilon\Delta v^k+\sum_{j=1}^n B_j\partial_{x_j}v^k=\partial_{x_k}f-\sum_{j=1}^n\partial_{x_k}B_j\partial_{x_j}u^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,T]\\ v^k=\partial_{x_k}g^\varepsilon & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}.$$

同(2.1)可得:
$$\frac{d}{dt}\|v^k\|^2_{L^2}\le C\left(\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}+\|\nabla f\|^2_{L^2}\right).$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}\le \text{右}.$$

再由Gronwall不等式即有,
$$\sup_{0\le t\le T}\|Du^\varepsilon\|^2_{L^2}\le C\left(\|\nabla g\|^2_{L^2}+\|f\|^2_{L^2}\right).$$

于是 $$\sup_{0\le t\le T}\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1}\le C\left(\|g\|_{H^1}+\|f\|_{L^2_t H^1_x}\right)$$

由弱解定义. $\forall v\in C^1([0,T];H^1)$

$$\int_0^T (u^{\varepsilon\prime},v)+\varepsilon Du^\varepsilon : Dv + B[u^\varepsilon,v;t]\,dt=\int_0^T (f,v)\,dt. \quad \cdots(\#)$$

取 $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$ (as $k\to\infty$)

由弱收敛 $\Longrightarrow$ $\int_0^T (u',v)+B[u,v;t]dt=\int_0^T (f,v)\,dt.$ $\forall v\in C^1([0,T];H^1)$ $\cdots(\#\#)$

$\Longrightarrow (u',v)+B[u,v;t]=(f,v).$ $\forall v\in H^1$ $(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m)$ a.e. $t\in[0,T]$

设 $V(T)=0$.

则 $(\#)\xrightarrow{\text{分部积分}}$ $\int_0^T (-u^{\varepsilon},v')+\varepsilon Du^\varepsilon : Dv+B[u^\varepsilon,v;t]\,dt$

$$=\int_0^T (f,v)\,dt+(g^\varepsilon,v(0))$$

$\varepsilon=\varepsilon_k\to 0.$

$$\Rightarrow \int_0^T (-u,v')+B[u,v;t]=\int_0^T (f,v)\,dt+(g,v(0))$$

~~分部积分~~ $\cancel{\Longrightarrow \int_0^T (-u,v')}$

又对 $(\#\#)$ 分部积分

$$\Rightarrow -\int_0^T (u,v')+B[u,v;t]=\int_0^T (f,v)\,dt+(u(0),v(0))$$

$\Rightarrow u(0)=g$ ，存在性证毕

再证唯一性. 只用考虑 (*) 在 $f=g=0$ 时是否只有 $u=0$

令 $v=u\Rightarrow \forall$ a.e. $0\le t\le T$ $(u',u)+B[u,u;t]=0.$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \le -B[u,u;t]\le C\|u(t)\|_{L^2}^2.$

再由 Gronwall 不等式即得

$\square$

§ 7.6 半群方法 ~~与 Schrödinger 半群的 Strichartz 估计~~

7.6.1：预备知识

设 X 是实 Banach 空间，(可能无界的) 线性算子 $A: D(A) \underset{\text{子空间}}{\subseteq} X \to X$.

考虑：(*) $\begin{cases} u'(t) = Au(t) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

key point ① A 满足什么条件时，ODE(*) 有唯一解 u？($\forall$ initial data $u_0 \in X$)

② 许多 PDE 可以抽象为 (*) 的形式

Def (算子半群) 设 $u(t) := S(t)u_0$. $(t \geq 0)$

(1) 称 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是：$X \to X$ 是算子半群，若
一族有界线性算子

① $S(0)u_0 = u_0$ $\quad \forall u_0 \in X$

② $\forall t, s \geq 0$, $u_0 \in X$ $\quad S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0$

③ $t \longmapsto S(t)u_0$ 是 $[0, +\infty) \to X$ 的连续映射 ($\forall u_0 \in X$)

(2) 称 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 为压缩半群，若 $\forall t \geq 0$ $\|S(t)\| \leq 1$.

□

压缩半群可以用来描述 (*) 生成的 flow
在 X 上

Def (无穷小生成元，infinitesimal generator) 设 $\{S(t)\}$ 是压缩半群.

令 $D(A) := \left\{ u \in X \,\middle|\, \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)u - u}{t} \text{ 在 } X \text{ 中存在} \right\}$

$$Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \qquad \forall u \in D(A)$$

则称 $A: D(A) \to X$ 是半群 $S(t)$ 的无穷小生成元.

□

Thm X.6.1:（微分性质）设 $u\in D(A)$ 则

(1) $\forall t\geq 0.\quad S(t)u \in D(A)$

(2) $AS(t)u = S(t)Au.\quad \forall t\geq 0.$

(3). $t \longmapsto S(t)u\quad \forall t>0$ 是可微的.

(4) $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u.\quad \forall t>0.$

Proof: ~~设 (1) 是之~~

(1)(2): 设 $u\in D(A)$.

$$\text{则} \lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)\left(S(t)u\right)-S(t)u}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0^+}\frac{S(t+s)u-S(t)u}{s}$$

$$=S(t)\lim_{s\to 0^+}\frac{S(s)u-u}{s}=S(t)Au.\ \exists$$

$$\Rightarrow S(t)u\in D(A)$$

$$A(S(t)u)=S(t)Au.$$

(3) claim: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(t)u-S(t-h)u}{h}=S(t)Au.$

$$\frac{S(t)u-S(t-h)u}{h}-S(t)Au.$$

$$=S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right)-S(t)Au.$$

$$=S(t-h)\Big(\underbrace{\frac{S(h)u-u}{h}-Au}_{\substack{A\text{的定义}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0\\ 0}}\Big)+\underbrace{\left(S(t-h)-S(t)\right)}_{\substack{\text{连续性}\ \downarrow\ \text{as } h\to 0\\ 0}}Au.$$

$\to 0$ as $h\to 0$.

(4): 由(3)易知

$$\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h} \longrightarrow S(t)Au \quad \text{as } h\to 0^+.$$

$\square$

Thm 7.6.2

(1) $D(A) \underset{dense}{\subset} X$.

(2) A是闭算子，即 满足 $\forall u_n\in D(A)$ $\left.\begin{matrix} u_n\to u \\ Au_n\to v \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ~~$Au=v$~~ $u\in D(A)$ 且 $Au=v$.

证明：(1) Fix $u\in X$. $u^t := \int_0^t S(s)u\,ds$. 则 $\frac{u^t}{t}\to u$ in X as $t\to 0^+$.
(由连续性).

只用证 $u^t\in D(A)$ 即可. $(\forall t>0)$

$$\forall h>0. \quad \frac{S(h)u^t-u^t}{h} = \frac{1}{h}(S(h)u^t-u^t)$$
$$=\frac{1}{h}\left(S(h)\int_0^t S(s)u\,ds - \int_0^t S(s)u\,ds\right)$$
$$=\frac{1}{h}\int_0^t (S(s+h)-S(s))\,u\,ds.$$
$$=\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}-\int_0^h\right)S(s)u\,ds.$$
$$\xrightarrow{h\to 0^+} S(t)u-u.$$

$\Rightarrow u^t\in D(A)$.

$Au^t = S(t)u-u$.

$\Rightarrow D(A)\overset{dense}{\subset} X$.

(2). 为证A闭 设 $u_k\in D(A)$. $u_k\to u$ in X

$Au_k\to v$ in X.

要证：$u\in D(A)$ $v=Au$.

$$\overset{7.6.1}{\Longrightarrow} S(t)u_k-u_k = \int_0^t S(s)Au_k\,ds$$
$$\overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} S(t)u-u = \int_0^t S(s)v\,ds.$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,ds = v. \Rightarrow \begin{matrix} u\in D(A) \\ v=Au \end{matrix}$$

$\square$

设 $A: D(A) \longrightarrow X$ 为闭算子

Def: (1) (预解集 Resolvent set) $\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid A - \eta I$ 1-1 & 满射$\}$.

(2) $\lambda \in \rho(A)$. 则定义对应的预解算子 $R_\lambda: X \longrightarrow X$ 为.

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

~~Fact~~

Recall: 闭图像定理: 闭线性算子是有界的.

$\Longrightarrow$ $R_\lambda: X \to D(A) \subseteq X$. 是有界线性算子

进一步地: $A R_\lambda u = R_\lambda A u$.

Thm 7.6.3

(1). 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$. 则 $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$.

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

(2) 若 $\lambda > 0$ 则 $\lambda \in \rho(A)$.

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt \quad \forall u \in X$$ (R_λ 为 $S(t)$ 的 Laplace 变换).

$$\Rightarrow \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Pf. (1) Trivial.

(2) $\lambda > 0$. $\|S(t)\| \leq 1$. 故 (2) 中积分式有定义.

$$\tilde{R}_\lambda u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt.$$

$\forall h > 0, u \in X$.

$$\frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}(S(t+h)u - S(t)u)\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u \, dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}\right) S(t) u \, dt$$

$$= -e^{-\lambda h} \cdot \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u \, dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u.$$

$$\longrightarrow -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u. \quad \Rightarrow A\tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u \quad \forall u \in X$$

claim: $A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$

若 claim 成立. 则

$\forall u\in D(A)$. $A\tilde{R_\lambda}u = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt = \tilde{R_\lambda}Au.$$

$\Rightarrow \tilde{R_\lambda}(\lambda I - A)u = u.$

又: $\lambda I - A$ 1-1 & onto.

$\Rightarrow \lambda\in\rho(A)$. $\tilde{R_\lambda} = R_\lambda$.

余下只用证 claim.

先证明: 对 $\int_0^M$. A 可与之换序:

$\forall M\in\mathbb{R}_+$. 将 $[0,M]$ 作分割:

$$[0,M] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left[\frac{j}{2^k}M, \frac{j+1}{2^k}M\right]$$

由 $I_k(t) := \sum_{j=1}^{k} e^{-\lambda t_j}S(t_j)u\cdot\chi_{t\in[t_{j-1},t_j]} \rightrightarrows e^{-\lambda t}S(t)u$ as $k\to\infty$

simple functions

及 A 闭 知:

$$A\int_0^M e^{-\lambda t}S(t)u\,dt = A\left(\lim_{k\to\infty}\int_0^M I_k(t)\,dt\right)$$

$$\overset{A\text{闭}}{=} \lim_{k\to\infty} A\int_0^M I_k(t)\,dt.$$

$$\overset{I_k\text{ simple}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_0^M AI_k(t)\,dt$$

$$\overset{A\text{闭}}{\underset{MCT}{=}} \int_0^M \lim_{k\to\infty}AI_k(t)\,dt$$

$$= \int_0^M Ae^{-\lambda t}S(t)u\,dt \overset{A\text{ linear}}{=} \int_0^M e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt$$

又: $e^{-\lambda t}$ rapidly decays; $\|S(t)\| \le 1$. A 闭

$$\Rightarrow \int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u\,dt \xrightarrow[\exists]{M\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u\,dt.$$

$$\Rightarrow A\left(\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) u\,dt\right) \xrightarrow{M\to\infty} A\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) u\,dt\right)$$

therefore "||" holds.

|| 刚刚已证.

$$\int_0^M e^{-\lambda t} AS(t) u\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} AS(t) u\,dt.$$

|| ||

$$\int_0^M e^{-\lambda t} S(t) Au\,dt \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) Au\,dt$$

□.

下面来对压缩半群的生成元进行刻画.

Thm 7.5.4 (Hille-Yosida).

A为X上稠定的闭算子. 则 A是压缩半群$S(t)$的生成元 $\Longleftrightarrow$

$\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$. $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$. $\forall \lambda > 0$.

Pf: $\Rightarrow$ By thm 7.6.3

$\Leftarrow$ 设A闭、稠定, $\mathbb{R}_+ \subseteq \rho(A)$.

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$

下面构造A生成的压缩半群.

直接构造是困难的, 因此我们先找一族有界算子 (便于计算).

先求A_λ的生成~~元~~半群, 再令$\lambda\to\infty$来证明.

令 $A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda$. $(\lambda>0)$.

这称作 A的正则化逼近

Claim: $\cancel{A_\lambda} \; A_\lambda u \longrightarrow Au$.

若 claim 对. 则令. $S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda}$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)\| \le e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k} t^k}{k!}\|R_\lambda\|^k$$

$\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda}$ $\rightarrow \le e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1 \Rightarrow \{S_\lambda(t)\}$ 是压缩半群

S_λ 生成元: A_λ. $D(A_\lambda)=X$. 此为易见.

直接算

由于 A_λ 是 R_λ 的"多项式". 故由 R_λ. R_μ 可交换 $\Longrightarrow A_\lambda$. A_μ 可交换.

$\Rightarrow \cancel{A_\lambda S_\mu}\; A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu$. $\forall t>0$.

$$\Rightarrow S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u\right)ds$$

$$= \int_0^t S_\mu(t-s).S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u)\, ds$$

$$\Rightarrow \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \le t\,\underbrace{\|A_\lambda u - A_\mu u\|}_{\text{同}} \to 0 \quad \text{as } \lambda.\mu\to\infty$$

因 $A_\lambda u \to Au$. as $\lambda\to\infty$ (by claim)

故 $\{A_\lambda u\}_{\lambda>0}$ Cauchy.

$\Rightarrow \{S_\lambda(t)u\}_{\lambda>0}$ 是柯西列: $\forall t\ge 0$. $u\in D(A)$.

$\therefore \exists\, S(t)u := \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$.

又: $\left.\begin{array}{l}\|S_\lambda\|\le 1\\ A \text{ 稠定}\end{array}\right\}$ BLT Thm $\Rightarrow \forall u\in X$ $\quad S(t)u \overset{\exists}{=} \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u$.

$\forall t$. $\forall$ $I\subset\subset[0,\infty)$.

且 $S(t)$ 是压缩半群

下面证明 A是$\{S(t)\}$的无穷小生成元:

设 B为生成元.

则: $Bu = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)u-u}{t}$ $\quad \forall u\in D(A)$.

而 $S_\lambda(t)u-u = \int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda u \, ds$.

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \le \|S_\lambda(s)\|\cdot\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s)-S(s))Au\| \to 0. \quad \uparrow \lambda\to\infty$$

$\forall u\in D(A)$.

故. 令 $\lambda\to\infty$ 由DCT.

$S(t)u-u = \int_0^t S(s)Au\,ds$. $\quad \forall u\in D(A)$

$$\Rightarrow \begin{cases} D(A)\subseteq D(B). \\ \underset{\displaystyle Au.}{\underset{\|}{\lim\limits_{t\to 0^+}}} \dfrac{S(t)u-u}{t} \overset{\text{定}}{=\!=} Bu. \end{cases} \quad \forall u\in D(A).$$

又若 $\lambda>0$. $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$.

则 $X=(\lambda I-A)D(A) = (\lambda I-B)D(A)$.

$\Rightarrow (\lambda I-B)\big|_{D(A)}$ 1-1 & onto $\Rightarrow D(A)=D(B)$.

$\Rightarrow A=B$

$\Rightarrow A$为$\{S(t)\}_{t\ge 0}$的生成元.

最后我们只需证claim: $\forall u\in D(A)$ $A_\lambda u\to Au$. as $\lambda\to\infty$

$A_\lambda u = -\lambda u + \lambda^2 R_\lambda u. = \lambda(\lambda R_\lambda u - u)$.

$= \lambda(AR_\lambda u) = \lambda(R_\lambda Au)$.

$\|\lambda R_\lambda u - u\| \le \|R_\lambda\|\cdot\|Au\| \le \frac{1}{\lambda}\|Au\| \to 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda R_\lambda u \to u \quad \text{as } \lambda\to\infty \quad \forall u\in D(A). \\ \qquad A\text{稠密} \\ \qquad \|\lambda R_\lambda\|\le 1. \end{array}\right\} \Rightarrow \forall u\in X.\ \lambda R_\lambda u\to u$$

$\Rightarrow \cancel{A_\lambda u} \cancel{\Rightarrow \lambda R_\lambda Au}$

$\underset{\displaystyle \lambda R_\lambda Au}{\underset{\|}{A_\lambda u}} \to Au.$ □

7.6.2 二阶方程中的应用

I. 考虑抛物方程

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g & \text{on } U\times\{0\} \end{cases}$$

L的系数与t无关 $\partial U \in C^\infty$

取 $X = L^2(U)$. $D(A) = H_0^1 \cap H^2$ $Au := -Lu$.

则 A 为 X上的 无界算子.

Thm 7.5.5: A生成了L^2上的一个 γ-压缩半群

即 Hille-Yosida 的条件换为 $(\gamma,\infty)\subset\rho(A)$, $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda>\gamma$.

Pf: $D(A) \overset{\text{dense}}{\subset} L^2$. ✓

再证: A是闭算子. + 预解式估计 + $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$

① A闭? 设 $u_k \in D(A)$. $u_k \to u$, $Au_k \to f$ in $L^2(U)$.

由正则性定理:

$$\|u_k-u_l\|_{H^2} \le C\left(\|Au_k - Au_l\|_{L^2} + \|u_k-u_l\|_{L^2}\right)$$

$\Rightarrow u_k \to u$ in H^2.
$\Rightarrow u \in D(A)$.
$\Rightarrow Au_k \to Au$ (因 $A=-L$).
$\Rightarrow f = Au$. ✓

② $(\gamma,\infty)\subset\rho(A)$? $\forall \lambda \ge \gamma$.

$$\begin{cases} (L+\lambda I)u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

在H_0^1中∃! weak sol (given $f\in L^2$).

$\xrightarrow{\text{正则性Thm}}$ ~~Au=Au=f~~ $u\in H^2\cap H_0^1 \Rightarrow u \in D(A)$.

$\Rightarrow$: $\lambda u - Au = f$. $\therefore (\lambda I - A): D(A)\to X$. 1-1 & onto ($\forall\lambda\ge\gamma$).

$\Rightarrow [\gamma,\infty)\subset\rho(A)$

(3): $\|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\quad \lambda>\gamma$.

Consider $B[u,v]+\lambda(u,v)=(f,v)$. $\quad \forall v\in H_0^1(U)$. $\quad \cdots(\#)$.

由 能量估计 (in Lax-Milgram).

$\exists \beta>0,\ \gamma\ge 0$ 使 $\forall u\in H_0^1$

$$\beta\|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]+\gamma\|u\|_{L^2}^2$$

~~$\forall\lambda>\gamma$~~

$$\cancel{\Rightarrow (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}}$$

(#)中. 令 $v=u$.

$$B[u,u]+\lambda(u,u)=(f,u) \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.$$

$$\ge (\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2}^2$$

又因 $u=R_\lambda f$

故 $\|R_\lambda f\|_2 \le \frac{1}{\lambda-\gamma}\|f\|_2$ $\quad \forall f\in L^2$ $\Rightarrow \|R_\lambda\| \le \frac{1}{\lambda-\gamma}$ $\forall \lambda>\gamma$. □

Rmk: 半群方法提供了形如(*)方程构造解的途径. 但 a^{ij}, b^i, c 要与 t 无关.

II 对双曲方程

$$(**)\begin{cases}\partial_t^2 u+Lu=0 & \text{in } U_T\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u(0)=g \quad \partial_t u(0)=h. & \text{in } U.\end{cases}$$

$L=-\sum_{i,j}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)+cu$. $\quad c\ge 0.\quad a^{ij}=a^{ji}$.

令 $v=\partial_t u$

$$\rightarrow \begin{cases}\partial_t v=-Lu & \text{in } U_T.\\ u=0 & \text{on } \partial U\times[0,T]\\ u(0)=g & \text{in } U.\\ v(0)=h\end{cases}$$

如何选择 A?

- $\exists \beta > 0$ $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u]$ $\forall u \in H_0^1$

- Take $X = H_0^1 \times L^2$

$$\|(u,v)\|_X := \sqrt{B[u,u] + \|v\|_2^2}$$

$$D(A) = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$$

$$A(u,v) := (v, -Lu)$$

类似可证 A 满足 Hille-Yosida Thm

故有

Thm X.6.6:

如上算子 A 生成了 $H_0^1 \times L^2$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}$

□

X.6.3: 实例:

设 Φ 是热方程的基本解, 即 $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$\forall t > 0$ 令

$$[S(t)g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, g(y)\, dy. \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$S(0)g = g$.

则: $\{S(t)\}_{t \ge 0}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

不是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的压缩半群

~~Check~~:

· $S(t)$ 是 L^2 上的压缩半群

· $\|S(t)g\|_{L^2} = \|\Phi * g\|_{L^2}$

$$\le \|\Phi\|_{L^1}\|g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \Rightarrow \|S(t)\| \le 1.$$

~~$t \mapsto S(t)$~~

· $\widehat{S(t+s)g} = \cancel{\widehat{\Phi(x-y)}}\ \cancel{\Phi(x-y,t+s)}\ \widehat{\ \ g}\ (\xi).$

$$\widehat{\Phi}(\xi, t+s)\,\hat{g}(\xi).$$

$$= \hat{\Phi}(\xi, t)\,\hat{\Phi}(\xi, s)\,\hat{g}(\xi) = \widehat{S(t)S(s)g}$$

· $t \mapsto S(t)g$ 连续性:

$$\|S(t+h)g - S(t)g\|_{L^2} \le \|S(h)g - g\|_{L^2}.$$

$$= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, h)\, g(y)\, dy - g(x)\right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, h)\,(g(y) - g(x))\, dy\right\|_{L^2_x}.$$

$$= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, h)\,(g(x-y) - g(x))\, dy\right\|_{L^2_x}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, h) \cdot \|g(x-y) - g(x)\|_{L^2_x}\, dy.$$

$\downarrow_0$ (平移连续性).

$$\xrightarrow{DCT} 0.$$

✓

· $S(t)$ 不是 L^∞ 上的压缩半群，因在 $t=0$ 处不连续

令. ~~$g(x,y) = \chi_{\{x>0,\ y>0\}}$~~ $g(x) = \chi_{\{x>0\}}$. $g(0)=0$

$$(S(t)g)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, dy. \qquad (S(t)g)(0) = \frac{1}{2} \quad \forall t>0$$

$$\Rightarrow \|S(t)g - g\|_{L^\infty} \ge \frac{1}{2}$$

□

热方程 C^∞ 正则性

Lemma 7.6.7 设 X 上有以 A 为无穷小生成元的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

归纳定义 $D(A^k) := \{u \in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u \in D(A)\}$ $(k \geq 2)$

证明：若 $\exists k$. $u \in D(A^k)$. 则 $\forall t \geq 0$ $S(t)u \in D(A^k)$

Pf: $\forall j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. 要证: $A^j S(t) u \in D(A)$.

i.e. $\displaystyle \lim_{s \to 0^+} \frac{S(s) A^j S(t) u - A^j S(t) u}{s}$ $\exists$

$$\frac{S(s) A^j S(t) u - A^j S(t) u}{s} = \frac{S(s) S(t) A^j u - S(t) A^j u}{s} = \frac{S(t+s)(A^j u) - S(t)(A^j u)}{s}$$

归纳假设 $A^j u \in D(A)$ $\implies$ exists (以及 $S(0) = Id$). □

Prop 7.6.8: $X = L^2$. 若 u 是 $\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \partial U \times [0,T] \\ u(0) = g & \text{on } U \times \{t=0\} \end{cases}$ 的

半群解. ($g \in C_c^\infty(U)$) 则 $u(\cdot, t) \in C^\infty(U)$, $\forall 0 \leq t \leq T$.

Pf: ~~$\forall k \in \mathbb{N}$ 注意到~~

半群解: $u(x,t) = e^{t\Delta} g =: S(t) g$.

由: $\forall k \in \mathbb{N}$. $D(\Delta^k) = H_0^{2k}$ (Take $A = \Delta$).

由 lem 7.6.7 知 $\forall t \geq 0$. $u(\cdot, t) = S(t) g \in H_0^{2k}(U)$. $\forall k$

$\implies u \in C^\infty$

□

§7.7 常系数线性发展方程的Fourier方法: Strichartz估计

7.7.1: Schrödinger 方程的Strichartz估计(非端点).

考虑 (*) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0) = g & \text{on } \{0\} \times \mathbb{R}^d. \end{cases}$

若 u, f, g 均是Schwartz函数, 则由Fourier变换法可得: ($f=0$)

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}(\xi).$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{g}\right)^\vee$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}} g(y)\,dy =: e^{it\Delta} g.$$

$f \neq 0$ 时. 由Du'Hamel原理

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{it\Delta} g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds.$$

若 f 是非线性函数 $f(x,u)$. 则原方程化作积分方程

即 $u(t,x) = e^{it\Delta} g - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x,u,s)\,ds.$

因此, 要对Schrödinger方程的解进行估计, 尤其是需要对半线性、非线性 Schrödinger 方程的适定性/长时间行为进行研究时, 我们应分别搞清楚 $\begin{cases} e^{it\Delta} g \text{ 项} \\ \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds \text{ 项} \end{cases}$ 的 $L_t^q L_x^r$ 范数的估计, 此为Schrödinger方程最基本的时空估计.

在叙述结果之前, 我们先证明一个简单的衰减估计.

Lemma 7.7.1 (Schrödinger 方程衰减估计).

$\forall$ ~~$2\le q$~~ $\forall r\in[2,+\infty]$ $\quad \|e^{it\Delta}g\|_{L^r_x} \lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^{r'}_x}$

Proof: 由$\{e^{it\Delta}\}$是酉算子知. $e^{it\Delta}: L^2 \longrightarrow L^2$ with bdd $=1$.

又: $$e^{it\Delta}g(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{(4\pi^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x-y|^2}{t}} g(y)\,dy.$$

$$|e^{it\Delta}g(x)| \lesssim t^{-\frac{d}{2}}\|g\|_{L^1}.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\Delta}g\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}}\|g\|_{L^1}$$

故: $e^{it\Delta}: L^1 \to L^\infty$ with bdd $\lesssim t^{-\frac{d}{2}}$.

由 Riesz-Thorin 插值. 有 $\forall r\ge 2$

$$\|e^{it\Delta}g\|_{L^r} \lesssim t^{-d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|g\|_{L^{r'}}.$$

$\square$

下设 $d\in\mathbb{Z}_+$. $2^*=\frac{2d}{d-2}$. $(q,r)\neq(2,2^*)$.

我们证明所谓"非端点" Strichartz 估计.

Thm 7.7.2 (Strichartz).

设 q,r 满足 $\frac{2}{q}+\frac{d}{r}=\frac{d}{2}$ (称作"容许对", admissible pair)

$(q,r,d)\neq(2,\infty,2)$. $\quad (q,r)\neq(2,2^*)$.

则: (1) $\left\|\int_{\mathbb{R}}^{t} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^2_x} \lesssim \|f\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}$.

(2) $\|e^{it\Delta}f\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|f\|_{L^2}$.

(3) $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L^q_t L^r_x} \lesssim \|f\|_{L^{\tilde{q}'}_t L^{\tilde{r}'}_x}$.

(q,r), $(\tilde{q},\tilde{r})$ 是任何上述容许对.

"$'$" 代表 dual index.

在证明之前我们不加证明地给出如下引理，该引理将 $\int_0^t$ 的估计化作 $\int_{\mathbb{R}}$ 的估计.

Lemma 7.7.2 (Christ-Kiselev 引理).

设 Y, Z 是 Banach 空间. $K(t,s)$ 是取值于 $\mathcal{L}(Y,Z)$ 的连续函数.

$-\infty\le a\le b\le+\infty$. $Tf(t)=\int_a^b K(t,s)f(s)\,ds$.

设 $\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)}\le C\|f\|_{L^p((a,b);Y)}$.

令 $Wf(t)=\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds$ 则 $1\le p<q\le\infty$ 时

$$\|Tf\|_{L^q((a,b);Z)}\le\frac{2^{-2(\frac1p-\frac1q)}\cdot 2C}{1-2^{-(\frac1p-\frac1q)}}\|f\|_{L^p((a,b);Y)}$$

令 $a=-\infty$. $b=+\infty$

$K(t-s)=e^{it\Delta}$

$Z=L^r$. $Y=L^{r'}$ 即可.

□.

Proof of Thm 7.7.1:

~~先证明 $\tilde q=q$. $r=\tilde r$ 的情形~~

(1) $\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{i(t-s)\Delta}f(s)\,ds\right\|_{L_t^qL_x^r}$.

广义Minkowski

$$\le\left\|\int_{\mathbb{R}}\|e^{i(t-s)\Delta}f(s)\|_{L^r}ds\right\|_{L_t^q}$$

衰减估计

$$\lesssim\left\|\int_{\mathbb{R}}|t-s|^{-d(\frac12-\frac1p)}\|f(s)\|_{L^{r'}}ds\right\|_{L_t^q}$$

$$=\left\||\cdot|^{-\underbrace{d(\frac12-\frac1r)}_{\sigma}}*\|f(\cdot)\|_{L^{r'}}\right\|_{L_t^q}$$

Hardy-Littlewood-Sobolev不等式 $\||\cdot|^{-\sigma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}$, $0<\sigma<d$. $\frac1q+1=\frac1r+\frac\sigma d$

$$\lesssim\|f\|_{L_t^\lambda L_x^{r'}}$$ 而 $\begin{cases}\frac\sigma d+\frac1\lambda=1+\frac1q\\ \sigma=d(\frac12-\frac1r)\end{cases}\Rightarrow\lambda=q'$

一般地：

(1)： $\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds \right\|^2_{L^2_x}$

$= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s) ds \right\|^2_{L_x}$

$= \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(t)\, dt \right\rangle$

$= \iint_{\mathbb{R}\cdot\mathbb{R}} \langle e^{-is\Delta} f(s), e^{-it\Delta} f(t) \rangle_x \, ds\, dt.$

$= \int_{\mathbb{R}} \left\langle f(s), \overline{\int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt} \right\rangle_x ds.$

Mixed-Norm Hölder $\leq \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{r'}} \left\| \int e^{i(s-t)\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_t^{q} L_x^{r}}$

(3) 在 $q=\tilde{q}$, $r=\tilde{r}$ 时的情形

$\lesssim \|f\|^2_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}$

(2). $\|e^{it\Delta} f\|_{L_t^q L_x^r (I\times\mathbb{R}^d)}$.

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (e^{it\Delta} g)(t,x)\, \overline{h(t,x)}\, dx\, dt \right|.$

$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \langle e^{it\Delta} g, h \rangle_x \, dt \right|.$

$= \sup_h \left| \langle g, \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)} \rangle_x \right|$

$\leq \sup_h \|g\|_{L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h \right\|_{L^2}.$

(2)(1)

$\lesssim \sup_h \|g\|_{L^2} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq \|g\|_{L^2}.$

(3) $\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\right\|_{L_t^q L_x^r}$

$$\leq \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} f(s)\, ds\, h(t,x)\, dx\, dt \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \underline{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle e^{i(t-s)\Delta}} f(s), h(t) \rangle_x\, dt\, ds \right|.$$

$$= \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left| \left\langle \int_{\mathbb{R}} e^{is\Delta} f(s)\, ds, \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} h(t)\, dt \right\rangle_x \right|.$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} f(s)\, ds \right\|_{L_x^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} f(t)\, dt \right\|_{L_x^2}.$$

$$\overset{(2)}{\lesssim} \sup_{\|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq 1} \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \|h\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}}.$$

$\square$.

借此，我们证明半线性次临界 Schrödinger 方程，

其 H^1 强解的 Local-Wellposedness.

又.又Ω: Local well-posedness of subcritical NLS ~~semil~~. in $d \geq 3$.

~~·何为 subcritical?~~

~~Endpoint case: $2 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$.~~

~~在证明中有一步要求: $\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + 1$:~~

Consider (NLS) $\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R}^d \times I. \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) & ~~\text{in } H^s(\mathbb{R}^d)~~ \end{cases}$

那么：

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0 - i\underset{H^1}{\int_0^t} e^{i(t-s)\Delta}(|u|^{p-1}u)(s)\,ds \quad \cdots (*)$$

Thm 7.7.2: (LWP for subcritical NLS in $d\geq 3$).

$0<p-1<\frac{4}{d-2}$ 时，NLS在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中局部适定，即解 $\exists, !$，对初值连续依赖.

证明之前，我们不加证明地给出要用的引理：

Lemma 7.7.3:

$f(u)=|u|^{p-1}u$. 则 $|f(u)-f(v)| \lesssim_p |u-v|(|u|^{p-1}+|v|^{p-1})$.

$|\nabla f(u)| \lesssim |u|^{p-1}|\nabla u|$

In fact, this can be derived by the local Lipschitzian property of f. $\square$

Lemma 7.7.4:

X, Y 是 Banach 空间，X 自反，$X \hookrightarrow Y$. ~~其中~~ $1<p, q\leq\infty$

· f_n 在 $L^p(I,Y)$ 中一致有界

· $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ in Y for a.e. $t\in I$.

则 $f\in L^p(I,X)$，$\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p}$. $\square$

Proof of Thm 7.7.2:

Step 1: 局部存在性：

Fix $M, T>0$, (q,r) 是容许对.

令 $X = \left\{ u\in L^\infty((-T,T);H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^q W_x^{1,r} \;\middle|\; \begin{array}{l} \|u\|_{L^\infty((-T,T);H^1)} \leq M \\ \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \leq M \end{array} \right\}$

$d(u,v) = \|u-v\|_{L_t^q L_x^2} + \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$

希望 (X,d) 是完备的度量空间

这只用证 (X,d) 闭 $L_t^q L_x^r$

设 $\{u_n\} \subset X$ $\quad u_n \to u$ in $L_t^q L_x^r$ $\quad u \overset{?}{\in} X$

注意 u_n bdd in $L_t^q W_x^{1,r} \cap L_t^{\infty} H_x^1$

$H^1 \hookrightarrow L^r$ $\quad \|u_n(t)\|_{L^r} \le C\|u_n(t)\|_{H^1} \lesssim 1$ a.e.

$\Rightarrow \exists$ 弱收敛子列 $u_n \rightharpoonup v$ in L^r

$\cancel{\nabla u_n \rightharpoonup}$

$\Rightarrow u = v$ in $L_t^q L_x^r$

再用 Lem 7.7.4 即可.

下面用压缩映射原理证明 Step 1:

令 $J: u \longmapsto e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds$.

要证: 对 $J:(X,d) \to (X,d)$ 是压缩映射

$$\cancel{\|Ju - Jv\|_{L_t^\infty L_x^2} = \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(f(u)(s) - f(v)(s)\right)ds\right\|_{L_t^\infty L_x^2}}$$

$$\cancel{\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|f(u) - f(v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}}$$

$$\cancel{\overset{\text{lemma}}{\lesssim} C\left\|\left(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right)(u-v)\right\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}}$$

先证 $J(X) \subset X$

$\forall u \in X$

$$\|Ju\|_{L_t^q W_x^{1,r}} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{L_t^q W_x^{1,r}} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds\right\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} C\|u_0\|_{H^1} + C\|\langle\nabla\rangle f(u)\|_{L_t^{\tilde{q}'} L_x^{\tilde{r}'}} \qquad \langle\nabla\rangle = (1+|\nabla|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\||u|^{p-1}\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{q'} L_x^{\tilde{r}'}}$$

Hölder

$$\le C\|u_0\|_{H^1} + C\left\| \|u\|_{L^r}^{p-1} \|\langle\nabla\rangle u\|_{L^r} \right\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$$

则相当要求:

$$\frac{1}{r'} = \frac{p-1}{r} + \frac{1}{r}$$

$$\overset{\shortparallel}{1-\frac{1}{r}} \Rightarrow r = p+1.$$

下面希望 $H^1 \hookrightarrow L^r$ 则由Sobolev嵌入定理知:

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \Longleftrightarrow r \leq \frac{2d}{d-2}$$

$$\Longleftrightarrow p-1 \leq \frac{4}{d-2} \quad \text{临界指标}$$

只考虑 $p-1 < \frac{4}{d-2}$,否则要涉及endpoint Strichartz估计.

接着.上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + C\left\| 1 \cdot \|u\|_{H_x^1}^{p-1} \|u\|_{W_x^{1,r}} \right\|_{L_t^{q'}(-T,T)}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\|u_0\|_{H^1} + \|1\|_{L_t^{(1-\frac{2}{q})^{-1}}} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \|u\|_{L_t^q W_x^{1,r}}$$

$$\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\infty} + \left(1-\frac{2}{q}\right)$$

$r < \frac{2d}{d-2}$ 时. $1 - \frac{2}{q} > 0$ (subcritical)

上式 $\leq C\|u_0\|_{H^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} M^p$.

Take $M = 2C\|u_0\|_{H^1}$.

$CT^{1-\frac{2}{q}} M^p < \frac{M}{4}$ 时.

上式 $\leq \frac{3}{4} M$. ~~∞~~

对 $L_t^\infty H_x^1$ 类似. $\Rightarrow T(X) \subseteq X$.

再证T压缩: $\|Tu - Tv\|_{L_t^\infty L_x^2} \overset{\text{Strichartz}}{\lesssim} \|f(u) - f(v)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$

$$\lesssim \left\| (|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) |u-v| \right\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\overset{\text{同上}}{\leq} CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \right) \|u-v\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\leq CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot 2M^{p-1} \cdot d(u,v).$$

换成 $L_t^q L_x^r$ 也对

取 $CT^{1-\frac{2}{q}} M^{p-1} \ll 1$. 再用压缩映像原理即有 $L_t^q L_x^r \cap L_t^\infty L_x^2$

的 local existence

下证 H^1 中 $\exists !$ 仍对.

$p \le 2$ 要用别的方法, 我们在此略去.

$\| Ju - Jv \|_{L_t^\infty H_x^1}$ ~~中~~要估计

$$\lesssim \| \langle \nabla \rangle (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) \|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \quad (p > 2)$$

$$\overset{\text{同上}}{\lesssim} \cancel{CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\| \langle \nabla \rangle u \|_{L_t^q L_x^r} + \| \langle \nabla \rangle v \|_{L_t^q L_x^r} \right) \left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1} \right)} \|u - v\|_{L_t^\infty H_x^1}$$

$$+ CT^{1-\frac{2}{q}} \| \langle \nabla \rangle (u - v) \|_{L_t^q L_x^r} \cdot \left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \right).$$

$$\lesssim \underbrace{CT^{\frac{1}{4}} M^2 d(u, v)}_{\text{取} \alpha < \frac{1}{2}} \quad \text{即可.}$$

Step 2: ~~local~~ 对初值连续依赖:

设 $u_{0,n} \to u_0$ in H^1. u_n, u 是以 $u_{0,n}$, u_0 为初值的解.

则 $u_n \to u$ in $C_t^0 H_x^1$

→ 因 u 的表达式自动保证连续性 (程 5 A.C.).

$$u - u_n = e^{it\Delta}(u_0 - u_{0,n}) - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left(f(u) - f(u_n) \right)(s)\, ds.$$

$$\|u - u_n\|_{L_t^q L_x^r} \overset{\text{Strichartz}}{\le} C \|u_0 - u_{0,n}\|_{L^2} + C \| f(u) - f(u_n) \|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$$

$$\le C \|u_0 - u_{0,n}\|_{L_x^2} + CT^{1-\frac{2}{q}} \left(\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} + \|u_n\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1} \right) \|u - u_n\|_{L_t^q L_x^r}$$

$$\le C \|u_0 - u_{0,n}\|_{H_x^1} + CT^{1-\frac{2}{q}} \cdot C(\|u_0\|_{H^1}) \cdot \|u_n - u\|_{L_t^q L_x^r}$$

取 T 充分小 即 $CT^{1-\frac{2}{q}}C(\|u_0\|_{H^1})<\frac{1}{2}$ 即可.

$L_t^\infty L_x^2$ 也对　下估计 H^1 norm.

$$\nabla u_n - \nabla u = e^{it\Delta}(\nabla u_{n,0} - \nabla u_0) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\nabla(f(u)-f(u_n))\,ds$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L_t^q L_x^r} &\lesssim \|\nabla u_{n,0} - \nabla u_0\|_{L^2} \\
&\quad + C\|\nabla(f(u)) - \nabla f(u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \\
&\lesssim C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1} \\
&\quad + C\,\||u|^{p-1}\nabla(u-u_n)\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \\
&\quad + C\,\|(|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1})\nabla u_n\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} C\|u_{0,n} - u_0\|_{H^1} \\
&\quad + C\|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^{p-1}\,\|\nabla u - \nabla u_n\|_{L_t^q L_x^r}\, T^{1-\frac{2}{q}} \\
&\quad + \|(\underbrace{|u|^{p-1} - |u_n|^{p-1}}_{\lesssim |u_n-u|^{p-1}})\nabla u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}
\end{aligned}$$

$p>2$. 用中值 Thm.　$1<p\le 2$　$|x|^{p-1}$ Hölder 连续.

$\lesssim |u_n - u|^{p-1}$.

$\to 0$　as $n\to\infty$　（T 充分小）.

这样 ~~local wellp~~
局部适定性完成证明.

□

Remark.

$$\text{(NLS)}\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu |u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R},\ \mu=\pm1 \\ u(0)=u_0 & \text{in } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

~~Stchr~~ (1) 半线性 Schrödinger 的 Well-posedness 与 p. d. μ 均有关.

我们在 Step 1 中某步用 Hölder 时出现了 $p-1<\frac{4}{d-2}$!

① 此为"能量次临界 NLS.

$d\geq 3$. 次临界 NLS. 有 H^1 Global well-posedness.

$d\leq 2$. 需另外做. 因 Strichartz 估计不一定对.
(主要在 endpoint case).

问: 如何 local $\longrightarrow$ global?

Answer: 利用守恒律.

$$E_0(u)=\|u\|_2^2.$$
$$E_1(u)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{2\mu}{p+1}|u|^{p+1}\,dx.$$

② Energy-critical?

利用 Keel-Tao 端点 Strichartz 估计. 例如 $d=3$. $p=5$.
有 $L_t^\infty H_x^1\cap L_t^{10}W_x^{1,\frac{30}{13}}$
适定. $\begin{cases}\text{小初值}\Rightarrow \text{global}\\ \text{大初值}\Rightarrow \text{local}.\end{cases}$

③ 超临界: 未知.

(2) 关于 Strichartz 估计.

端点情形: 见: ($d\geq3$, $d\leq 2$ 只对径向函数对. 否则有反例).

Marcus Keel, Terence Tao: Endpoint Strichartz Estimates, American Journal of Mathematics, 1998.

这要用到双端点, 三端点插值. 故不作介绍.

(3) 事实上, 不只有 Schrödinger 方程有 Strichartz 估计.

对其它常见的色散方程 (KdV. Airy. Wave) 也有结论.

这都是抽象 Strichartz 估计~~的~~与插值空间的推论.

□

Thm 7.7.3 (抽象 Strichartz 估计)

设 $U(t): L^2 \to L^2_x$ 是一族单参数的有界线性算子. X 自反 Banach.
一致有界的

$S(\mathbb{R}^d)$ 在 X. X^* 中稠密.

假设: $\|U(t)U^*(t')f\|_{X^*} \lesssim |t-t'|^{-\gamma}\|f\|_X$.

$$\|U(t)f\|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(X^*)} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

$$\left\|\int_R U^*(t)\Phi(t,\cdot)\,dt\right\|_{L^2} \lesssim \|\Phi\|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}X}.$$

证明与 Schrödinger 方程的完全类似. ($U(t)=e^{it\Delta}$)

实际上. 这用到的最核心的想法是.

* 设 H Hilbert. Y 自反.

T: H→Y bdd. $T^*: Y^* \to H$.

若 T 自伴. 则 $\|TT^*\|_{Y^*\to Y} = \|T\|^2_{H\to Y}$

而在 Strichartz 估计中. TT^* 远比 T 容易估计.

□

Corollary: 波方程 Strichartz 估计

取 $\gamma=(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. . $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. $s=\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$. $0<\gamma<1$.

则 $$\|W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_{x,2}^{-s,p}} + \|\partial_t W(t)f\|_{L_t^{\frac{2}{\gamma}}\dot{B}_2^{-s-1,p}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}_2^{s,2}} + \|g\|_{\dot{B}_2^{-1,2}}.$$

其中. $\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}} := \left\|2^{ks}\|P_kf\|_{L^p}\right\|_{\ell_k^q}$ (P_k 为 Littlewood-Paley 投影).

$W(t)f = \dfrac{\sin(t\sqrt{-\Delta})f}{\sqrt{-\Delta}}$. i.e. $\widehat{W(t)f} = \dfrac{\sin(t|\xi|)f}{t|\xi|}$.

$\partial_t W(t)f = \cos(t\sqrt{-\Delta})f$.

Proof:

$$\partial_t W(t) \cdot P_k f = \cos(t\sqrt{-\Delta})\, P_k f = \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} + e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{2} P_k f.$$

而 $e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f := \left(e^{it|\xi|} \cdot \widehat{P_k f} \right)^{\vee}$

$\widehat{P_k f} = \varphi(\frac{\xi}{2^k}) \hat{f}(\xi)$. φ 为 支于 $\{\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$ 的 C_c^∞-bump

$$= \int e^{it|\xi|} e^{ix\xi} \varphi(\frac{\xi}{2^k}) \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$\overset{\eta = 2^{-k}\xi}{=} \int e^{i2^k t|\eta|} e^{i2^k x\eta} \varphi_0(\eta) \hat{f}(2^k\eta)\, 2^{kd}\, d\eta$$

$$= \int e^{i2^k t|\eta|} e^{i2^k x\eta}\, \widehat{P_0 f(2^k \cdot)}\, d\eta.$$

$$\Rightarrow \|e^{it\sqrt{-\Delta}} P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_{L^1}.$$

对 $W(t)f$ 项:

$$\left\| \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty_x} = \frac{1}{2} \left\| \frac{e^{it\sqrt{-\Delta}} - e^{-it\sqrt{-\Delta}}}{\sqrt{-\Delta}} P_k g \right\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \frac{P_k}{\sqrt{-\Delta}} g \right\|_{L^1}.$$

故: $\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}k} \cdot t^{-\frac{d-1}{2}} \|P_k f\|_{L^1}$. $\approx 2^k \|P_k g\|_{L^1}$.

$$\| \cdots\cdots \|_{L^2} \lesssim \|P_k f\|_{L^2}.$$

By Riesz-Thorin Interpolation:

$$\|\cos(t\sqrt{-\Delta}) P_k f\|_{L^p} \lesssim 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\theta)} \|P_k f\|_{L^{p'}}$$

$(2 < p < \frac{2d}{d-2})$ 按要求插值, $\theta = \frac{2}{p}$: $\overset{}{=}\, 2^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})k}\, t^{-\frac{d-1}{2}(1-\frac{2}{p})} \|P_k f\|_{L^{p'}}$

$\Rightarrow$

$$2^{-\frac{d+1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})k}\|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L^p}$$

$$\lesssim \underset{\substack{\uparrow \\ s(t)\lambda.}}{2^{-sk}}\ t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|P_k f\|_{L^{p'}}$$

乘以 2^{sk}. 取 l_k^2.

$$\Rightarrow \left\| \|\cos(t\sqrt{-\Delta})P_k f\|_{L_x^2} 2^{ks}\right\|_{l_k^2} =: \cancel{\|P_k f\|}\ \|\cos(t\sqrt{-\Delta})\|_{\dot B^{s,p}_2}.$$

$\downarrow$

$$\lesssim t^{-(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{\dot B^{-s,p'}_2}.$$

在抽象 Strichartz 中. 对应. $X^* = \dot B^{s,p}_2$. $\quad \nu = (d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

$\square$.

Rmk: 发展方程的调和分析(Fourier)方法

好处: 方便处理导数. 与精细正则性, 便于构造函数空间.

有众多分析工具可用.

注意 此时不应将导数视作 ~~微~~差商的极限.

而应视作 $|\nabla|^s f = (|\xi|^s \hat f(\xi))^\vee$.

即在频率空间中视作个前面乘以一个多项式乘子.

这样即可刻画分数阶导数.

坏处: 变系数难做, 涉及2个函数~~积~~求积的估计

Other Methods: $\begin{cases} \text{Paraproduct.} \\ \text{Conservation law (例如 Morawetz 估计)} \\ \text{变分或其它方法.} \end{cases}$