Ch 6 二阶线性椭圆方程

§6.1 弱解的定义

本章只考虑如下 Dirichlet 问题 $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 开，
$u: \overline{U} \to \mathbb{R}^n$，
$f: U \to \mathbb{R}$ 给定。

其中 L 具有两种形式之一：

① $Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i(x)\partial_i u + c(x)u$ （散度形式）

② $Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^n b^i(x)\partial_i u + cu$ （非散度形式）

Rmk：若 $a^{ij} \in C^1$，则 ①又可以写成②

②'：$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\partial_i\partial_j u + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x)\partial_i u + c(x)u$，$\tilde{b}^i = b^i - \sum_{j=1}^n \partial_j a^{ij}$

事实上，散度形式常用于研究弱解的存在性，唯一性，正则性

非散度形式常用于研究极大值原理

下设 $a^{ij} = a^{ji}$

Def：称微分算子 L（如上）是一致椭圆的，若 $\exists \theta > 0$ s.t. $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

成立：$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ a.e. $x \in U$. 该条件称作一致椭圆条件

从而，一致椭圆算子 L 的最高次系数矩阵 $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ 特征值 $\geq \theta$.（实对称）

例如 $a^{ij} = \delta_{ij}$，$b^i = c = 0 \Rightarrow L = -\Delta$.

下设 $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$，$f \in L^2(U)$.

Def：(1) 双线性形式 $B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u \cdot v + cuv \, dx$

$\forall u, v \in H_0^1(U)$.

(2). 称 $u \in H_0^1(U)$ 是 (*) $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解，若 $\forall v \in H_0^1(U)$.

成立 $B[u,v] = (f,v)_{L^2}$，该式称作 (*) 的变分形式.

更一般地，考虑

(#) $\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ L 为①的形式 $f^i \in L^2(U)$.

令 $f = f^0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f^i \in H^{-1}(U) = (H_0^1(U))^*$.

则：称 $u \in H_0^1(U)$ 是 (*) 的弱解，指的是 $B[u,v] = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(U)$.

$f = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i \partial_i v$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $H^{-1}(U)$ 与 $H_0^1(U)$ 的作用

Rmk：(1) 上述定义事实上都可直接由分布理论的角度来理解，

即在 $\mathcal{D}'$ 中，$Lu = f \iff \forall \varphi \in C_c^\infty$，$\langle Lu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$，再写成作用

积分的形式，并注意到 C_c^∞ dense in H_0^1 即可.

(2) 同理，$\partial U \in C^1$ 时，我们可以定义 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = g & \text{in } \partial U \end{cases}$ 的弱解，

实际上，我们只须设 $w \in H^1(U)$，$Tr\, w = g$. $\tilde{u} = u - w$ 即可

□

§ 6.2 Lax-Milgram 定理及椭圆方程弱解存在定理

Thm 6.2.1：设 H 是 Hilbert 空间，$B: H \times H \to \mathbb{R}$ 是双线性映射.

且 $\exists \alpha, \beta > 0$，使 ① $|B[u,v]| \le \alpha \|u\| \cdot \|v\|$ (Boundedness) $\forall u, v \in H$.

② $|B[u,u]| \ge \beta \|u\|^2$ (Coercivity) $\forall u \in H$.
强制性

则，任给定 H 上的有界线性泛函 $f: H \to \mathbb{R}$，都存在唯一 $u \in H$. 使 $B[u,v] = \langle f, v\rangle$. $\forall v \in H$.

Proof：Step 1：Riesz 表示定理：

Fix $u \in H$，则 $v \mapsto B[u,v]$ 是 H 上的有界线性泛函，于是由 Riesz 表示定理，

存在唯一 $w \in H$. s.t. $B[u,v] = \langle w, v\rangle \quad \forall v \in H$.

下面希望，令 $A: u \mapsto w$，去证明 $\begin{cases} A: H \to H \text{ 是有界线性算子.} \\ A \text{ 是一一映射.} \\ \mathrm{Im}\,A \text{ 闭 } H, \quad 0 = (\mathrm{Im}A)^\perp. \end{cases}$

Step 2：$A: H \to H$ 有界线性.

线性显见，因为 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. $u_1, u_2 \in H$.

$$\begin{aligned} \langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v\rangle &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &= \lambda_1 \langle Au_1, v\rangle + \lambda_2 \langle Au_2, v\rangle = \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ 线性

有界：$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = B[u, Au] \underset{\uparrow}{\leq} \alpha \|u\| \cdot \|Au\|$

$B[\cdot,\cdot]$ 有界性条件①

$\Rightarrow \|A\| \leq \alpha$.

Step 3：A 是 1-1 的，且 Im A 闭

$\forall w \in \overline{\mathrm{Im}\, A}$，取 $v_n \in H$. s.t. $w = \lim\limits_{n\to\infty} A v_n$ in H.

由 Coercivity ②：$\forall n, p \in \mathbb{Z}_+$.

$$\beta \| v_{n+p} - v_n \|^2 \leq \left| B[v_{n+p} - v_n, v_{n+p} - v_n] \right|$$
$$= \left| \langle v_{n+p} - v_n, A(v_{n+p} - v_n) \rangle \right|$$
$$\leq \| v_{n+p} - v_n \| \cdot \| A v_{n+p} - A v_n \|$$

$$\Rightarrow \| v_{n+p} - v_n \| \leq \frac{1}{\beta} \| A v_{n+p} - A v_n \| \to 0. \quad \text{as } n \to \infty.$$

$\Rightarrow \{v_n\}$ 为 H 中的柯西列. $\exists v^* \in H$. $v_n \to v^*$ in H.

由 A 连续 (Step 2)，有 $w = A v^* \in \mathrm{Im}\, A \Rightarrow \mathrm{Im}\, A$ 闭

Step 4：$(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \{0\}$；设 $w \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp$. 则 $\langle Av, w \rangle = 0$

$\Rightarrow B[v, w] = 0$

令 $v = w$ 有 $\beta \|w\|^2 \leq 0 \Rightarrow w = 0$

因此，A 是一个 $H \to H$ 的有界线性满射.

再由 Riesz 表示定理，$\forall v \in H$. $\exists !\, w \in H$. $\langle f, v \rangle = (w, v)$

由 Step 2-4 知 $Au = w$ $(\exists u \in H)$

$$\Rightarrow B[u, v] = (Au, v) = \langle w, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad v \in H.$$

Step 5：唯一性　若 $\tilde{u}$ 也满足. 则 $B[u - \tilde{u}, v] = 0 \quad \forall v \in H.$

取 $v = u - \tilde{u}$ 即有 $u = \tilde{u}$.

$\square$

Thm 6.2.2 (能量估计). $\exists\, \alpha, \beta > 0$, $\gamma \geq 0$ s.t.

① $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$

② $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$. $\quad \forall u, v \in H_0^1(U)$.

Proof: 直接计算即可

$$|B[u,v]| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_U |Du|\cdot|Dv|\,dx + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du|\cdot|v|\,dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u|\cdot|v|\,dx.$$

$$\leq C\left(\|Du\|_2 \|Dv\|_2 + \|Du\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2\right)$$

$$\leq C\left(\|u\|_2 + \|Du\|_2\right)\left(\|v\|_2 \|Dv\|_2\right)$$

$$\leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}. \qquad \text{for some } \alpha > 0.$$

$$B[u,u] = \int_U \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j u}_{} + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u\, u + c u^2 \,dx.$$

$$\geq \theta \int |Du|^2 - \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty \int_U |Du|\cdot|u|\,dx - \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2\,dx.$$

Hölder
$$\geq \theta \int |Du|^2 - C_1 \|Du\|_2 \cdot \|u\|_2 - C_2 \|u\|_2^2.$$

Young
$$\geq \theta \int |Du|^2 - C_1 \varepsilon \|Du\|_2^2 - C_1 \cdot \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_2^2 - C_2 \|u\|_2^2.$$

$$\Rightarrow \quad (\theta - C_1 \varepsilon) \|Du\|_2^2 \leq B[u,u] + \left(C_1 \frac{1}{4\varepsilon} + C_2\right) \|u\|_2^2.$$

取 $C_1 \varepsilon = \frac{\theta}{2}$ 即有: $\frac{\theta}{2} \|Du\|_2^2 \leq B[u,u] + C_3 \|u\|_2^2$

两边加上 $\frac{\theta}{2} \|u\|_2^2$ 即可

注意到，若 $\gamma>0$，则 $B[\cdot,\cdot]$ 并不符合 Lax-Milgram 定理的条件。因此，在叙述解的存在性定理时，应作出修正。

Thm 6.2.3（第一存在定理）

$\exists\gamma\geq 0$ s.t. $\forall\mu\geq\gamma$，$\forall f\in L^2(U)$，~~使得~~都有：$(**)\begin{cases} Lu+\mu u=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

存在唯一的弱解 $u\in H_0^1(U)$。

Proof：取 6.2.2 中的 γ，令设 $\mu\geq\gamma$，$B_\mu[u,v]:=B[u,v]+\mu(u,v)$，$\forall u,v\in H_0^1(U)$

$$L_\mu u:=Lu+\mu u$$

则 $\begin{cases} L_\mu \text{ 是~~一致~~一致椭圆的} \\ B_\mu[\cdot,\cdot] \text{ 满足 Lax-Milgram Thm 的条件} \end{cases}$

Fix $f\in L^2(U)$，$\langle f,v\rangle:=(f,v)_{L^2}$，则 $v\mapsto(f,v)$ 是 $H_0^1(U)$ 上的有界线性泛函（算子范数为 $\|f\|_{L^2}$）。

由 Lax-Milgram 定理，$\exists!\, u\in H_0^1(U)$

$$B_\mu[u,v]=\langle f,v\rangle \quad v\in H_0^1(U). \quad u \text{ 即为 } (**) \text{ 的弱解}$$

$\square$

Rmk：$H_0^1\longrightarrow H^{-1}$.

类似地，我们可证明，$\forall f^i\in L^2(U)$ $(0\leq i\leq n)$，

$\exists!$ 弱解 u of $\begin{cases} Lu+\mu u=f^0-\sum_1^n\partial_i f^i & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

$\square$

§6.3 Fredholm 二择一与弱解存在性.

本节只讨论 Hilbert 空间的结果, 一般 Banach 空间的 Fredholm 理论, 参见

Haim Brezis: Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs, chapter 6.

or 张恭庆上册 Ch 4.1 – 4.3.

6.3.1: 紧算子:

设 X、Y 是实 Banach 空间, 称 $K: X \to Y$ (有界线性算子) 是紧算子, 若 K 将 X 中任何有界集 B, 映成 Y 中的列紧集 $K(B)$.

不难证明, "这样的算子" 对任何 X 中的有界序列 $\{u_n\}$, $\{Ku_n\}$ 在 Y 中有子列 $\{Ku_{n_j}\}$ 收敛.

~~Thm~~ Prop 6.3.1 (紧算子的基本性质).

(1). 若 $x_n \rightharpoonup x$ in X, 则 $Kx_n \to Kx$ in Y.

(2). 若 $K_1: X \to Y$, $K_2: Y \to Z$ 有一个是紧算子, 另一个是有界线性算子, 则 $K_2 \circ K_1: X \to Z$ 是紧算子

(3). 若 H 是 Hilbert 空间, $K: H \to H$ 是紧算子, 则 $K^*: H \to H$ 也是紧算子.

Proof: (1) $x_n \rightharpoonup x$ in X. 要证: $Kx_n \to Kx =: y$ in Y.

反证: 若不然, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 正整数列 $\{n_k\} \to \infty$ s.t. $\|Kx_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$

~~claim~~ : (~~Cor~~

Fact: (Corollary of Banach-Steinhaus Thm).

$x_n \rightharpoonup x$ 则 $\|x_n\|_X$ 有界

又因 K 紧, 故存在子列 $\{n_{k_j}\} \to \infty$ s.t. $Tx_{n_{k_j}} \to$ 某个 $z \in Y$

希望: $Kx_{n_{k_j}} \rightharpoonup y$ in Y. 从而 $y = z$. (因 $Kx_{n_{k_j}} \to z$, 强极限存在则必等于弱极限) $\Rightarrow Kx_{n_{k_j}} \to y$ 矛盾与 $\|Kx_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$ 矛盾!

check this: $\forall y^* \in Y^*$.

$$\langle y^*, Kx_{n_{k_j}} - y \rangle = \langle K^* y^*, x_{n_{k_j}} - x \rangle \xrightarrow{x_{n_{k_j}} \rightharpoonup x} 0 \checkmark$$

(1) 获证.

(2) 设 $X \xrightarrow{K_1} Y \xrightarrow{K_2} Z$

若 K_1 紧，则 X 中的有界序列 $\{u_n\}$ 在 Y 中有收敛子序列 $\{K_1 u_{n_k}\}$

又 K_2 连续，故 $\{(K_2 \circ K_1) u_{n_k}\}$ 在 Z 中收敛 $\Rightarrow$ $K_2 \circ K_1$ 紧.

K_2 紧，则类似

(3) 设 $\{u_n\}$ 是 H 中的有界列，由 H 自反，依据 Banach-Alaoglu 定理知，

存在弱收敛子列 $u_{n_j} \rightharpoonup u$ in H

要证：$K^* u_{n_j} \to K^* u$

<u>check</u>: $\|K^* u_{n_j} - K^* u\|^2 = \langle K^* u_{n_j} - K^* u, K^* u_{n_j} - K^* u \rangle$

$$= \langle K(\underbrace{K^* u_{n_j} - K^* u}), u_{n_j} - u \rangle$$

由 K^* 线性，$K^* u_{n_j} \rightharpoonup K^* u$

再由 K 紧，$KK^* u_{n_j} \to KK^* u$.

$\to 0$ as $j \to \infty$

Thm 6.3.2 (Fredholm Alternative).

$K: H \to H$ 紧 (H 为可分 Hilbert 空间)，则

(1) $\dim N(I-K) < +\infty$，其中 $N(I-K) = \{x \in H \mid (I-K)x = 0\}$

(2) $\mathrm{Im}(I-K)$ 闭

(3) $\mathrm{Im}(I-K) = N(I-K^*)^{\perp}$.

(4) $N(I-K) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(I-K) = 0$.

(5) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^*)^{\perp}$.

<u>Proof</u>: (1). 反设 $\dim N(I-K) = +\infty$ 则 $N(I-K)$ 中，可以找到标准正交集 $\{u_n\}_{n\geq1}^{+\infty}$

且 $Ku_n = u_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$

又：$m \neq n$ 时，$\|u_m - u_n\|^2 = \|u_m\|^2 - 2\underbrace{\langle u_m, u_n\rangle}_{0} + \|u_n\|^2 = 2$.

$\Rightarrow \|Ku_n - Ku_m\| = \sqrt{2}$, $\forall m \neq n$

这与 K 的紧性矛盾（因为 $\{u_n\}_1^{\infty}$ 一致有界，而 K 紧，则 $\{Ku_n\}$ 在 H 中有收敛子列，但上式表明这不可能）

(1) 得证

(2) 设 $\{v_k\}_1^\infty \subset \operatorname{Im}(I-K)$ $v_k \to v$ (均为非零元)

则 $\exists \{u_k\} \subseteq N(I-K)^\perp$ s.t. $u_k - Ku_k = v_k$.

希望：在H中，$u_k \to u$，且 $u-Ku = v \underset{\text{进而有}}{\in} \operatorname{Im}(I-K)$.

如此，我们 claim: $\exists \gamma>0$ s.t. $\|u-Ku\| \geq \gamma\|u\|$

若claim对，则 $\|v_m - v_n\| \geq \gamma\|u_m - u_n\|$ $\forall m,n$ ~~∈Z+~~

令 $m,n \to +\infty$ 即有我们想要的 $u_k \to u$，$u-Ku=v$ 进而 $\in \operatorname{Im}(I-K)$

而claim证明如下：

反证. 若claim不对，则 $\forall k\in\mathbb{Z}_+$ 存在 $u_k \in N(I-K)^\perp$
$$\begin{cases} \|u_k\| = 1, \\ \|u_k - Ku_k\| < \frac{1}{k} \end{cases}$$

$\Rightarrow u_k - Ku_k \to 0$

但 $\{u_k\}_1^\infty$ 在H中一致有界, H自反, 故由Banach-Alaoglu定理

存在子列 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in H.

由于K是紧算子，所以 $Ku_{k_j} \to Ku$ in H

又 $u_k - Ku_k \to 0$

故. $u_{k_j} \to Ku = u$. $\Rightarrow u \in N(I-K) \Rightarrow \forall j.\ \langle u_{k_j}, u\rangle = 0$

令 $j\to\infty$ 有 $u=0$. 而 $\|u_{k_j}\|=1$. 这不可能. claim成立.

于是(2)得证.

(3) 的成立只需注意到如下事实:

$\overline{\operatorname{Im} A} = N(A^*)^\perp$ $\forall$ 有界线性 $A: H\to H$.

再结合(2): $\operatorname{Im}(I-K)$ 闭即可.

(4) $\Rightarrow$: 先设 $N(I-K)=\{0\}$ 反设 $\operatorname{Im}(I-K) \subsetneq H$.

则 $H_1 = (I-K)(H) \subsetneq H$ 是H的真闭子空间(由(2))

$H_2 = (I-K)^2(H) \subsetneq H_1$ (因 $I-K$ 是单射, 这时 $N(I-K)=0$)

$\vdots$

$H_k = (I-K)^k(H) \subsetneq H_{k-1} \cdots\cdots \subsetneq H$ 是H的真闭子空间

$\forall k\in\mathbb{Z}_+$ 选取 $u_k \in H_k$, $\|u_k\|_H = 1$. $u_k \in H_{k+1}^\perp$

则 $\forall k>l$: $Ku_k - Ku_l = u_k - u_l + (Ku_k - u_k) - (Ku_l - u_l)$

$H_{k+1} \subsetneq H_k \subsetneq H_{l+1} \subsetneq H_l$. $\Rightarrow u_k, Ku_k - u_k, Ku_l - u_l \in H_{l+1}$.

但 $u_l \in H_{l+1}^\perp$, $\|u_l\|=1$

故. $\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$. $\forall k, l \geq 1$, $k \neq l$. 但因$\{u_k\}$有界，在H中必有收敛子列
弱
$\Rightarrow \{Ku_k\}$必有强收敛子列
↑
K紧
不可能有$\forall k, l \geq 1$, $k \neq l$
$\|Ku_k - Ku_l\| \geq 1$. 矛盾!

故 (4) $\Rightarrow$ 对.

$\Leftarrow$: 若 $H = \mathrm{Im}(I-K)$ 由(3): $N(I-K^*) = 0$.

由Prop (3)有K^*紧, 类似于$\Rightarrow$有 $\mathrm{Im}(I-K^*) = H$.

$\Rightarrow$ ~~但~~ $N(I-K) = R(I-K^*)^{\perp} = \{0\}$. $\Rightarrow$ (4)得证.

(5). 先证 $\dim N(I-K) \geq \dim \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$. 若这成立，则由于 $\mathrm{Im}(I-K^*)^{\perp} = N(I-K)$

有 $\dim N(I-K^*) \geq \dim \mathrm{Im}(I-K^*)^{\perp}$
$= \dim N(I-K)$

K与K^*换一下，又有反向不等式，进而(5)得证.

为此，我们用反证法：反设 $\dim N(I-K^*) < \dim \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$.

则$\exists$有界线性映射 $A: N(I-K) \to \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$. 1-1但不满.

延拓: $Au = 0$ $\forall u \in N(I-K)^{\perp}$.

从而A是H上的有穷秩算子，进而是紧算子.

$\Rightarrow K+A$ 紧.

Claim: $N(I-(K+A)) = 0$.

check: 若 $u \in N(I-(K+A))$, 则 $u - Ku = Au$
$\mathrm{Im}(I-K) \ni$ ~~$\in$~~ $\in \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$

$u \in N(I-K) \Rightarrow Au = 0$. $= 0$.

$\Rightarrow$ ~~$u \in N(I-K)$~~ $\Rightarrow u = 0$. (因A 1-1 在$N(I-K)$上.

~~对于(5)~~. 令$\tilde{K} = K+A$, 对$\tilde{K}$用(4)

得 $\mathrm{Im}(I-(K+A)) = H$. 但这不可能. 因为如果 $v \in \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$.
但$v \notin \mathrm{Im} A$.

则 $u - (Ku + Au) = v$ 无解
~~(因 $\mathrm{Im}(I-K^*)^{\perp} = N(I-K)$)~~

这表明 $v \notin \mathrm{Im}(I-(K+A))$. 矛盾!

□

下面来看，如何将 Fredholm 二择一用于证明第二存在定理.

Def：(1) L的伴随算子L^*定义如下：设 $b^i\in C^1(\bar{U})$.

$$L^*v := -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a^{ij}\partial_j v) - \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v + \left(c-\sum_{i=1}^n \partial_i b^i\right)v.$$

(2). 伴随双线性形式： $B^*: H_0^1(U)\times H_0^1(U)\longrightarrow \mathbb{R}$

$$B^*(v,u)\longmapsto B[u,v] \qquad \forall u,v\in H_0^1(U).$$

(3) 称 $v\in H_0^1(U)$ 是伴随方程 $\begin{cases} L^*v=f & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解，是指 $B^*[v,u]=(f,u)$ $\forall u\in H_0^1(U)$.

Rmk： L^*的定义是自然的，因为形式上来看：

$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle$ (伴随的定义)

$$\| $$

$$\sum_{i,j}\int_U a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v + \sum_i\int_U b^i\partial_i u\cdot v + \int_U cuv$$

$\|$ 分部积分，边界项 vanishing.

$$-\sum_{i,j}\int_U \partial_i(a^{ij}\partial_j v)\cdot u - \sum_i\int \partial_i(b^i v)\cdot u + \int_U cuv.$$

$$\|$$

$$\left\langle u, -\sum_{i,j}\partial_i(a^{ij}\partial_j v) - \sum_{i=1}^n b^i\partial_i v + \left(c-\sum_i\partial_i b^i\right)v\right\rangle.$$

$$\|$$

$\langle u, L^*v\rangle$.

由此，B^*的定义也是自然的.

□

Thm 6.3.3 (弱解第二存在性定理).

(1). 以下两条恰好成立一条.

(α): $\forall f\in L^2(U)$, ~~存在唯一~~ 方程 (*) $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 存在唯一的弱解 $u\in H_0^1(U)$.

(β): 对齐次方程(#) $\begin{cases} Lu=0 & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$, 存在~~唯一~~弱解 $u\neq 0$,

(2). 若 (β) 成立, 则 (#) 的弱解空间 $N\subset H_0^1(U)$ 是有穷维的, 且维数等于以下伴随方程的弱解空间 $N^*\subset H_0^1(U)$: $(\#)^*$: $\begin{cases} L^*v=0 & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$.

(3) (*) 有弱解 $\Longleftrightarrow$ $(f,v)=0$. $\forall v\in N^*$.

(α). (β)

<u>Proof</u>: 首先处理一些记号问题

在第一存在定理中. 取 $\mu=\nu$.

令双线性形式 $B_\nu[u,v]=B[u,v]+\nu(u,v)$.

$L_\nu u:=Lu+\nu u$

由第一存在定理, $\forall g\in L^2(U)$. $\exists!\, u\in H_0^1(U)$. s.t. $B_\nu[u,v]=\langle g,v\rangle$. $\forall v\in H_0^1(U)$.

在该式成立时, 我们记 $u=L_\nu^{-1}g$

Observation: $u\in H_0^1(U)$是 (*) 的弱解.

$\Longleftrightarrow \forall v\in H_0^1(U)$, $B_\nu[u,v]=\langle \nu u+f, v\rangle$ (两边都加上νu即可).

$\Longleftrightarrow$. $u=L_\nu^{-1}(\nu u+f)$. $\Longleftrightarrow u-\nu L_\nu^{-1}u=L_\nu^{-1}f$.

令. $Ku=\nu L_\nu^{-1}u$. $h=L_\nu^{-1}f$.

则$\Longleftrightarrow (I-K)u=h$.

希望证明: $K:L^2(U)\to L^2(U)$ 是紧算子.

若能证明 $K: L^2 \longrightarrow L^2$ 紧.

则由 Thm 6.3.2 (Fredholm 二择一) 知: 要么

(α') $\forall h \in L^2(U)$. $(I-K)u = h$ 有唯一解 $u \in L^2(U)$. (对应 $N(I-K)=0$ 的 case)

要么

(β') $u - Ku = 0$ 在 $L^2(U)$ 有非零解. (对应 $N(I-K) \neq 0$)

对 (α') case: $(\alpha') \Longleftrightarrow (*)$ 有唯一弱解 $u \in H_0^1(U)$.

又: ~~由~~ (α') 有解 $\Longleftrightarrow$ $\langle h, v \rangle = 0$ $\forall v$ satisfies $v - K^* v = 0$

而 $\langle h, v \rangle = \frac{1}{\gamma}\langle Kf, v \rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, K^* v \rangle = \frac{1}{\gamma}\langle f, v \rangle$. 故上式 $\Leftrightarrow$ $\langle f, v \rangle = 0$

$v = K^* v$.

对 (β') case: $\cancel{N(I-K) \neq 0 \Longleftrightarrow Im(I-K)=0}$

$\Downarrow$

$\cancel{N(I-K^*)^{\perp} = 0}$

$\Downarrow$

$N(I-K) \neq 0 \Rightarrow \dim N(I-K) = \dim N(I^* - K^*)^{\perp}$

即. $\dim N = \dim N^*$.

□

§6.4: 紧算子的谱(Hilbert空间)，解的第3存在定理。

本节证明如下定理:

Thm 6.4.1 (第3存在定理) 称

(1) 存在一个至多可数集 $\Sigma\subset\mathbb{R}$，使 $\begin{cases} Lu=\lambda u+f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 有唯一弱解 $\Longleftrightarrow \lambda\notin\Sigma$. 对每个给定的 $f\in L^2(U)$.

(2). 若 $|\Sigma|=+\infty$，则 $\Sigma=\{\lambda_k\}_1^\infty$ 是一列单不减且趋于 $+\infty$ 的序列.

□.

在此之前，我们证明紧算子的谱定理. (附录727页 Thm 6)

Def: 设 $A: X\to X$ 是有界线性算子. (X为 Banach 空间)

(1) A的预解集(resolvent set)为 $\rho(A)=\{\eta\in\mathbb{R} \mid A-\eta I$ 是一一映射且是满射$\}$.

(2). A的谱(spectrum). $\sigma(A)=\mathbb{R}-\rho(A)$

- $\eta\in\rho(A)$. 则由闭图像定理，$(A-\eta I)^{-1}: X\to X$. 是有界线性算子.

(3). 称 $\eta\in\sigma(A)$ 为 A的特征值，若 $N(A-\eta I)\neq\{0\}$，特征值全体记作 $\sigma_p(A)$，又称"点谱"

(4) 若 η 是特征值 $w\neq 0$. $Aw=\eta w$. 则称 w 是特征向量.

Thm 6.4.2 (紧算子的谱) 设 H为无穷维可分 Hilbert空间，$K: H\to H$ 紧算子.

则 (1) $0\in\sigma(K)$

(2) $\sigma(K)-\{0\}=\sigma_p(K)-\{0\}$

(3) $\sigma(K)-\{0\}$ 是有限集 或是一个趋于0 的序列.

Proof: (1) 反证: 若 $0\notin\sigma(K)$. 则 $K: H\to H$ 是双射. (注意$\sigma(K)$定义)

$Id=K\circ K^{-1}$. 是一个紧算子与连续线性算子的复合 从而也是紧算子.

但 Id_H 是紧算子 $\Longleftrightarrow \dim H<+\infty$ (否则，考虑 H中的单位球面B $Id(B)=B$. ~~但B~~ Id 紧则 B列紧 从而 $\dim H<+\infty$).

矛盾!

(2). 设 $\eta\neq 0$. $\eta\in\sigma(K)$. 反设 $N(K-\eta I)=\{0\}$.

由 Fredholm 二择一，有: $Im(K-\eta I)=H$. $\Rightarrow \eta\in\rho(K)$. 与 $\eta\in\sigma(K)$ 矛盾!

见用证

(3). 若 $\sigma(K)-\{0\}$ 不是有限集时，$\sigma(K)-\{0\}$ ~~由一列 $\eta_k \to \eta = 0$ 组成~~ 的凝聚点只有0

设 $\{\eta_k\}_1^\infty \subset \sigma(K)-\{0\}$ 互不相同. $\eta_k \to \eta$. 下证 $\eta = 0$.

· 由 $\eta_k \in \sigma_p(K)$. 则 $\exists w_k \neq 0$. $Kw_k = \eta_k w_k$.

设 $H_k = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$ 则 $H_k \subsetneq H_{k+1} \subsetneq \cdots$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

又注意到. $(K - \eta_k I) H_k \subseteq H_{k-1}$ $(k \geq 2)$.

对每个 k. 我们取 $u_k \in H_k \cap H_{k-1}^\perp$ $\|u_k\| = 1$.

$k > l$ 时. 因 $H_{l-1} \subsetneq H_l \subsetneq H_{k-1} \subsetneq H_k$. 因此.

$$\left\| \frac{Ku_k}{\eta_k} - \frac{Ku_l}{\eta_l} \right\| = \left\| \frac{\overset{\in H_{k-1}}{(Ku_k - \eta_k u_k)}}{\eta_k} - \frac{\overset{\in H_{k-1}}{(Ku_l - \eta_l u_l)}}{\eta_l} + \underset{H_k \cap H_{k-1}^\perp}{u_k} - \overset{H_{k-1}}{u_l} \right\| \geq 1.$$

若 $\eta \neq 0$. 则这与 K 的紧性矛盾，因 K 将有界集映成列紧集，但 $\{\frac{u_k}{\eta_k}\}_1^\infty$ 并不列紧 □

回到方程中. Thm 6.4.1 中所述的 Σ，称作 L 的谱.

Proof of 6.4.1:

$$(*)\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

由 Fredholm 二择一 "$N(I-K)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I-K) = H$" 知，给定 $f \in L^2(U)$ 时，$(*)$ 存在唯一弱解 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} Lu - \lambda u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

只有唯一弱解 $u = 0$.

现取 γ 为 Thm 6.2.2 (Lax-Milgram in H_0^1) 中的 $\gamma > 0$，且设 $\lambda > -\gamma$，

$\Leftrightarrow \forall \gamma > 0$ given.

$$(\#) \Leftrightarrow u = L_\gamma^{-1}(\lambda+\gamma)u = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma} Ku \quad \cdots (\#\#).$$

$Ku = \gamma L_\gamma^{-1} u$.

$$(\#). \begin{cases} Lu + \gamma u = (\lambda+\gamma) u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

只有唯一弱解 $u = 0$.

K 是紧算子: $L^2(U) \to L^2(U)$.

如今. 若 $u=0$ 是 $(\#\#)$ 唯一解. 则 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \notin$ ~~[illegible]~~ $\sigma_p(K)$ (否则 该方程有非零弱解).

Recall 特征值定义.

所以. $(*)$ 有唯一弱解 (given $f \in L^2(U)$).

$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \notin \sigma_p(K)$.

而 $\sigma_p(K)$ 要么是有限集，要么是可数以 0 为凝聚点.

因此. (*) 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ (given $f \in L^2(U)$). $\Leftrightarrow$ 除去全体可数个 λ_k. 且 $\lambda_k \to +\infty$. $\Rightarrow \lambda \to +\infty$.

(因 $\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ 可能 $\to 0$)

$\begin{cases} \cancel{\lambda \to \infty \,(\Leftrightarrow \lambda \to \pm\infty)} \\ \lambda > -\gamma. \end{cases}$

Thm 6.4.3. (逆算子有界性).

$\lambda \notin \Sigma$. 则 $\exists C > 0$ s.t. $\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$. 其中. $f \in L^2(U)$. $u \in H_0^1(U)$

是 $(*)\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的唯一弱解.

注：C 仅与 λ. U. L 的系数有关. $\lambda \to \lambda_k \in \sigma_p(L)$ 时 $C \to \pm\infty$.

<u>Proof</u>: 反证 则 $\exists \{f_k\} \subset L^2(U)$. $\{u_k\} \subset H_0^1(U)$ s.t.

$$\begin{cases} \begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k & \text{in } U \\ u_k = 0 & \text{on } \partial U \end{cases} \quad (\text{weakly}). \\ \\ \dfrac{\|u_k\|_{L^2}}{\|f_k\|_{L^2}} > k. \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

不妨 $\|u_k\|_{L^2} = 1$.

则 $f_k \to 0$ in $L^2(U)$.　　由 6.2 节能量估计. u_k 为 $H_0^1(U)$ 中的一致有界序列.

由 Banach-Alaoglu 定理. 存在子列 $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$.

又：$H_0^1(U) \hookrightarrow H^1(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)$. (U有界).

故 $u_{k_j} \to u$ in $L^2(U)$. (紧算子将弱收敛化成强收敛).

$\Rightarrow$. u 是 $\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解 $\longleftarrow$ Recall 弱解的定义 / 弱收敛

由 $\lambda \notin \Sigma$ 知. $u = 0$.

但 $u_{k_j} \to u$ in $L^2(U) \Rightarrow \|u\|_{L^2(U)} = 1$. 矛盾! □

§ 6.5 正则性：

设 L 是二阶椭圆算子，满足一致椭圆条件。

$Lu = f$ in U.

形式上看，u 被求了 2 阶导。如果 $f \in L^2(U)$，那么按理来说 $u \in H^2(U)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad H^0(U)$

我们之前的理论只能证明到 $u \in H_0^1(U)$，那么 u 是否真的能做到 $\in H^2(U)$ 呢？

本节 ~~回答~~ 给出了肯定的回答。

进一步，$f \in C^\infty$，是否有 $u \in C^\infty$？在我们没有建立起上面的结论时，是无法回答该问题的。（具体证明，见 Stein 泛函. Ch3. Thm 2.14，利用线性偏微分算子的 ~~fun~~ 基本解 (parametrix)。）

设 $Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$. 为散度形式。

$u \in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解。

Thm 6.5.1（内部 H^2 正则性）.

设 $a^{ij} \in C^1(U)$，$b^i, c \in L^\infty(U)$. $\quad 1 \le i, j \le n$. $\quad f \in L^2(U)$.

设 $u \in H^1(U)$ 是 $Lu = f$ in U 的弱解，则 $u \in H^2_{loc}(U)$.

且 ~~任取~~ $\forall$ 开 $V \subset\subset U$. $\quad \|u\|_{H^2(V)} \le C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$.

证明：~~由于~~ $u \in H^1(U)$ 为 $Lu = f$ 的弱解，则 $\forall v \in H_0^1(U)$.

$B[u, v] = (f, v)$.

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} \partial_i u \partial_j u \, dx = \int_U \tilde{f} v \, dx \quad , \tilde{f} = f - \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u - cu \quad \cdots (*).$$

*由于~~[illegible]~~目前我们不知道 $u\in H^2(V)$ $\forall V\subset\subset U$，所以不能对 u 求二阶弱导数．

为了证明 $u\in H^2(V)$，即 $D^2u\in L^2(V)$，我们考虑估计 Du 的差商，再由差商的性质．即得 $D^2u\in L^2(V)$. 在证明的过程中，会遇到分部积分，但任2个 Sobolev 函数并不一定可以分部积分（Recall：分部积分依赖于 Leibniz Rule，后者成立需要一个 C_c^∞，一个 $W^{k,p}$ 或两个都是 $W^{k,p}\cap L^\infty$）. 所以我们将会引入一些光滑的截断函数来避免该问题．

· Fix 开 $V\subset\subset U$．取开集 W．$V\subset\subset W\subset\subset U$．取 $\zeta\in C^\infty$

s.t. $\zeta\begin{cases}=1 & \text{on } V\\ =0 & \text{on } \mathbb{R}^n-W\\ 0\le\zeta\le 1.\end{cases}$

· 设 $|h|>0$ 充分小，$\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$．取 $B[u,v]=(f,v)$ 中的 v 为：

①：$v=-D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$．　　其中．$D_k^h u(x)=\dfrac{u(x+he_k)-u(x)}{h}$．

此时．(*)式左边．

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v\,dx.$$

$$=-\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij}\,\partial_i u\,\partial_j\left(D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right)dx.$$

差商的"分部积分"公式：
形式上的叫法

$$\int_U u\cdot D_k^h v=-\int_U D_k^h u\cdot v$$ （展开看．只是一个变量替换）

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U D_k^h(a^{ij}\partial_i u)\,\partial_j(\zeta^2 D_k^h u).$$ （$v^h(x):=v(x+he_k)$）

差商与求导可交换（自证）.

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}(D_k^h\partial_i u)\partial_j(\zeta^2\cdot D_k^h u)+(D_k^h a^{ij})\partial_i u\cdot\partial_j(\zeta^2 D_k^h u)\,dx.$$

拆括号 $$=\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}D_k^h\partial_i u\cdot\zeta^2 D_k^h\partial_j u$$

$$+\sum_{i,j=1}^n\int_U a^{ij,h}D_k^h\partial_i u\cdot D_k^h u\cdot 2\zeta\partial_j\zeta+(D_k^h a^{ij})\partial_i u\,D_k^h\partial_j u\,\zeta^2+(D_k^h a^{ij})\partial_i u\,D_k^h u\cdot 2\zeta\partial_j\zeta\,dx$$

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij,h}\, D_k^h \partial_i u \cdot D_k^h \partial_j u \cdot \zeta^2 dx$$

$$\underset{\uparrow}{\geq} \theta \int_U \zeta^2 \cdot |D_k^h Du|^2 dx$$

└ 一致椭圆

$$A_2 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij,h} (D_k^h \partial_i u)(D_k^h u)\, 2\zeta \partial_j \zeta + (D_k^h a^{ij}) \partial_i u \cdot (D_k^h \partial_j u) \zeta^2$$
$$+ (D_k^h a^{ij}) \partial_i u\, (D_k^h u)\, 2\zeta \partial_j \zeta \, dx$$

$$\leq C \int_U |\zeta|\, |D_k^h Du| \cdot |D_k^h u| + \zeta |D_k^h Du|\, |Du| \quad \longrightarrow \text{Hölder+Young (带}\varepsilon)$$
$$+ \zeta |D_k^h u| \cdot |Du|\, dx \longrightarrow \text{这项用 Hölder + Young}$$

$$\cancel{\leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon}}$$
$$\cancel{\varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 u\, dx}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C \left(\|\zeta D_k^h Du\|_{L^2} \|D_k^h u\|_{L^2} + \|D_k^h Du\|_{L^2} \|Du\|_{L^2} + \|D_k^h u\|_{L^2} \|Du\|_{L^2} \right)$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon \|\zeta D_k^h Du\|_{L^2}^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|D_k^h u\|_{L^2}^2$$
$$+ \varepsilon \|\zeta D_k^h Du\|_{L^2}^2 + \frac{C'}{\varepsilon} \|Du\|_{L^2}^2 + \|D_k^h u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2$$

$$\leq 2\varepsilon \|\zeta D_k^h Du\|_{L^2(W)}^2 + \frac{C}{\varepsilon} \left(\|D_k^h u\|_{L^2(W)}^2 + \|Du\|_{L^2(W)}^2 \right)$$

~~由~~ $\cancel{A = \sum_{i,j}^{n} \int a^{ij} \partial_i u \partial_j v = \int \tilde{f} v\, dx}$

$$\cancel{\overset{\shortparallel}{A_1 + A_2}}$$

$$\therefore A = A_1 + A_2 \underset{\uparrow}{\geq} \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx \quad \cdots (2)$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{4}$

再估计 $B=\int \tilde{f} v$.

$$|B| \le C\int_U (|f|+|Du|+|u|)|v|\,dx.$$

$$\le C\,\|f+Du+u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

$$\|v\|_{L^2}^2=\int_U |v|^2dx=\int_U |D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2dx$$
$$\le C\int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2dx$$
$$= C\int_W |\zeta^2 DD_k^h u|^2 + \cancel{2\zeta\cdots}\,|D\zeta^2|\cdot|D_k^h u|^2dx$$
$$\le C\int_U |Du|^2+\zeta^2|D_k^h Du|^2dx$$

$$|B| \overset{\text{Young不等式}}{\le} \varepsilon\|v\|_{L^2}^2+\frac{C}{\varepsilon}\|f+Du+u\|_{L^2}^2$$
$$\le \varepsilon\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx+\frac{C}{\varepsilon}\int_U |f|^2+u^2+|Du|^2dx.$$

令 $\varepsilon=\frac{\theta}{4}$ 有 $|B|\le \frac{\theta}{4}\int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx + C\int_U |f|^2+u^2+|Du|^2dx$ …③

~~综~~ 结合②③有

$$\int_V |D_k^h Du|^2dx \le \int_U \zeta^2|D_k^h Du|^2dx \le C\int_U f^2+u^2+|Du|^2dx.$$

$\Rightarrow Du\in H^1_{loc}(U)$, $\begin{cases} u\in H^2_{loc}(U). \\ \|u\|_{H^2(V)}\le C(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{H^1(U)}) \end{cases}$ … ④

下面希望④右边的 $\|u\|_{H^1(U)}$ 能被 $\|u\|_{L^2(U)}$ 替代

注意到. $V\subset\subset W\subset\subset U$ 则 $\|u\|_{H^2(V)}\le C(\|f\|_{L^2(W)}+\|u\|_{H^1(W)})$

再取 cut-off function ζ : $\begin{cases} =1 & \text{in } W \\ spt\,\zeta \subset U \\ 0 \le \zeta \le 1 \end{cases}$ $\in C^\infty$.

令(*)中. $v = \zeta^2 u$.

即 $\sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j(\zeta^2 u)\, dx = \int_U (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) \cdot \zeta^2 u \, dx$,

左边 $= \sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \cdot \zeta^2 \, dx + \int_U a^{ij} \partial_i u \cdot (2\zeta \partial_j \zeta) \cdot u \, dx$.

右边 $= \int \zeta^2 u \, (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu)\, dx$

$$\Rightarrow \sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u \, \partial_j u \cdot \zeta^2 \, dx.$$

$$= \int \zeta^2 u \, (f - \sum_i b^i \partial_i u - cu) - \sum_{ij} \int_U a^{ij} \partial_i u (2\zeta \partial_j \zeta) u \, dx \quad \cdots ⑤$$

⑤ 左边 $\ge \theta \int |\zeta|^2 |Du|^2 dx$.

右边 $\le C \int |u| \cdot |f| + |u| \cdot |Du| + |u|^2$

$$\le C \left(\|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|\zeta^2 Du\|_{L^2} \right) + C \|u\|_{L^2}^2$$

$$\le C \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right) + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\zeta^2 Du\|_{L^2}^2$$

取 $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$

有: $\int_U |\zeta|^2 |Du|^2 dx \le C \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right)$.

这样. 两边加上 $\int_U |\zeta|^2 |u|^2 dx$. 有 $\|u\|_{H^1(W)} \le C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right)$.

于是待证式成立.

$\square$

接下来我们利用归纳法证明更高的正则性结果

Thm 6.5.2：设 $m\in\mathbb{N}$，$a^{ij},b^i,c\in C^{m+1}(U)$，$f\in H^m(U)$，
$u\in H^1(U)$ 是 $Lu=f$ in U 的弱解，则 $u\in H^{m+2}_{loc}(U)$，

$$\left\{\forall V\subset\subset U,\quad \|u\|_{H^{m+2}(V)}\le C\left(\|f\|_{H^m(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)\right.$$

证明：对 m 归纳，$m=0$ 即是 Thm 6.5.1。

设对某个 $m\in\mathbb{Z}_+$ 成立，

对 $m+1$，假设变为 $a^{ij},b^i,c\in C^{m+2}(U)$，$f\in H^{m+1}(U)$，
u 为 $Lu=f$ in U 的 H^1 弱解。

由归纳假设知 $\left\{\begin{array}{l} u\in H^{m+2}_{loc}(U) \\ \forall W\subset\subset U\quad \|u\|_{H^{m+2}(W)}\le C\left(\|f\|_{H^m(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)\end{array}\right.$

Fix $V\subset\subset W\subset\subset U$，设 $|\alpha|=m+1$ 是任一多重指标，
$\tilde v\in C_c^\infty(W)$，$v:=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\tilde v$。

代入 $B[u,v]=(f,v)$，

有：$\displaystyle\sum_{i,j}\int a^{ij}\partial_i u\,(-1)^{|\alpha|}\partial_j(D^\alpha\tilde v)\,dx=(-1)^{|\alpha|}\int f D^\alpha\tilde v-\sum_i b^i\partial_i u\cdot D^\alpha\tilde v-cuD^\alpha\tilde v$

分部积分可得，

$B[\tilde u,\tilde v]=(\tilde f,\tilde v)$　　$\tilde u=D^\alpha u\in H^1(W)$

$$\tilde f=D^\alpha f-\sum_{\substack{\beta\ne\alpha\\ \beta\le\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\Big(-\sum_{i,j=1}^n\partial_j\big(D^{\alpha-\beta}a^{ij}D^\beta\partial_i u\big)+\sum_{i=1}^n D^{\alpha-\beta}b^i D^\beta\partial_i u+D^{\alpha-\beta}c\cdot D^\beta u\Big)$$

$\Downarrow$ $\tilde u$ 是

$L\tilde u=\tilde f$ 的弱解 (in W)

则 $\|\tilde u\|_{H^2(V)}\underset{\text{Thm 6.5.1}}{\le} C\left(\|\tilde f\|_{L^2(W)}+\|\tilde u\|_{L^2(W)}\right)$

$\le C\left(\|f\|_{H^{m+1}(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)$.

$\tilde u=D^\alpha u$，$|\alpha|=m+1$

$\Rightarrow$ $u\in H^{m+3}(V)$

$\|u\|_{H^{m+3}(V)}\lesssim\|f\|_{H^{m+1}(U)}+\|u\|_{L^2(U)}$

由Morrey嵌入知易有:

Thm 6.5.3: $a^{ij}, b^i, c\in C^\infty(U)$. $f\in C^\infty(U)$.
$u\in H^1(U)$为$Lu=f$ in U的弱解. 则 $u\in C^\infty(U)$.

□

下面讨论边界正则性，该相关结论证明的套路是，先证区域为 $B^\circ(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 时成立. 对一般的开区域U,通过"边界拉直"，化成 $\mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$，来得到结论. $U\to \mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 的映射是一个微分同胚，故直观上看结果应是正确的，但严格的证明却会陷入繁杂的计算中.

*证明建议跳过

Thm 6.5.4 (到边H^2正则性) 设$a^{ij}\in C^1(\bar U)$. $b^i, c\in L^\infty(U)$. $1\le i,j\le n$. $f\in L^2(U)$. 设$u\in H_0^1(U)$是方程
$$\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$$
的弱解, $\partial U\in C^2$. 则
$$\begin{cases} u\in H^2(U). \\ \|u\|_{H^2(U)}\le C\left(\|f\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(U)}\right)\end{cases}$$

证明: Claim $Lu=f$ a.e. in U.

claim的成立是显见的，因 $u\in H^2_{loc}(U)$ (by Thm 6.5.1), 及 $\forall v\in C_c^\infty(U)$ 有

$B[u,v]=(f,v)$. $\Rightarrow (Lu,v)=(f,v)$ $\forall v\in C_c^\infty(U)\Rightarrow Lu=f$ a.e.

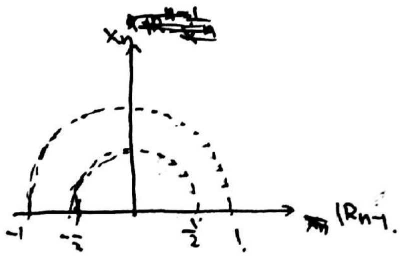
下面先证明 $U=B^\circ(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$ 的情况(边界拉直后).

Step 1: 设 $U=\mathring{B}(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$. $V=\mathring{B}(0,\frac12)\cap\mathbb{R}^n_+$.

选取 $\zeta\in C^\infty(U)$. s.t. $\zeta=1$ in $B(0,\frac12)$.

$0\le\zeta\le1$.

$\operatorname{Spt}\zeta\subseteq B(0,1)$.



u为弱解 $\Rightarrow \sum_{i,j}^n\int a^{ij}\partial_i u\,\partial_j v=\int\tilde f v$. $\tilde f=f-\sum_i b^i\partial_i u-cu$ $\forall v\in H_0^1(U)$

取 $v=-D_k^{-h}(\zeta^2D_k^h u)$ $1\le k\le n-1$. 类似于6.5.1 有

$$\int_V|D_k^hDu|^2\,dx\le C\int_U\left(|f|^2+|u|^2+|Du|^2\right)dx \qquad 1\le k\le n-1.$$

$$\Rightarrow \|\partial_i\partial_j u\|^2_{L^2(V)}\le C\left(\|f\|^2_{L^2(U)}+\|u\|^2_{L^2(U)}+\|Du\|^2_{L^2}\right) \quad \forall\, i+j<2n.$$

对 $u_{x_nx_n}$ 的估计:

由于 $\forall \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2$. 取 $\xi=e_n$ 有 $a^{nn}(x)\ge\theta$

$\therefore$ $\theta|\partial_n^2 u| \le |a^{nn}\partial_n^2 u|$

由于 $Lu=f$ a.e.

故 $a^{nn}\partial_n^2 u = -\sum_{i+j<2n} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i u + cu + f - \partial_n u\cdot \partial_n a^{nn}$.

$\Rightarrow |\partial_{nn}^2 u| \le$ 上面各项绝对值相加

$\Rightarrow \|\partial_n^2 u\|_{L^2}^2 \le C(\|f\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^1(U)}^2)$ ← Rmk: 这里应仿照 6.5.1最后一步 书上没说. 因为右边有 $\|Du\|_{L^2}^2$ 不能和左边的吸收掉!

$\Rightarrow \|u\|_{H^2(V)}^2 \le C(\|f\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2)$.

Step 2: 对一般的有界开集 $U\subset\mathbb{R}^n$, $\partial U\in C^2$. 设 $x^0\in\partial U$.

我们设 (可能需要坐标变换)

$$U\cap B(x^0,r)=\{x\in B(x^0,r) \mid x_n>\gamma(x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

$r>0$, $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ C^2.

坐标变换: $y=\Phi(x)$

$x=\Psi(y)$

选取 $s>0$ 足够小 s.t. $U'=B(0,s)\cap\{y_n>0\}\subseteq\Phi(U\cap B(x^0,r))$

$V':=B(0,\frac{s}{2})\cap\{y_n>0\}$.

令 $u'(y)=u(\Psi(y))$. ($\Leftrightarrow u(x)=u'(\Phi(x))$); (后面都会证 $|\det D\Phi|=1$, $|\det D\Psi|=1$).

由于 Φ, Ψ 是微分同胚 故. $u'\in H^1(U')$. $u'=0$ on $\partial U'\cap\{y_n=0\}$

(We omit the details)

下面 claim: u'是方程 $L'u'=f'$ in U' 的弱解, 其中

$f'(y)\stackrel{def}{=} f(\Psi(y))$.

(*) …… $L'u' := \cancel{-\sum_{k,l=1}^n \partial(\cdots u_{y_k})\partial_y} -\sum_{r,s=1}^n \partial_{y_s}(a'^{rs}\partial_{y_r}u') + \sum_{r=1}^n b'^r\partial_{y_r}u' + c(\Psi(y))u'(\Psi(y))$.

$\forall y\in U'$, $r,s\in\{1,2,\dots,n\}$.

证明 Claim 之前，我们解释一下为何要如此定义 L'，事实上，~~对于~~这是坐标变换的结果.

直接计算:

由于 $\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i u\, \partial_j v + \sum_{i=1}^n (b^i \partial_i u\, v + cuv)\, dx = (f, v) \quad \forall v\in H_0^1(U)$.

作变量代换 $x=\psi(y)$. $u'(y)=u(\psi(y))$. $v'(y)=v(\psi(y))$ 代入上式有:

$$第一项 = \sum_{i,j=1}^n \int_{U'} \sum_{r,s=1}^n a^{ij}(\underset{x}{\psi(y)}) \cdot \underbrace{\frac{\partial u'(y)}{\partial y_r}\frac{\partial \Phi^r}{\partial x_i}(\psi(y))}_{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ (\text{而 } u(x)=u'(\phi(x)),\ \psi(y)=x)} \cdot \frac{\partial v'(y)}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial \phi^s}{\partial x_j}(\psi(y))\, dy.$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a^{ij}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial u'}{\partial y^r}(y) \frac{\partial v'}{\partial y^s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\psi(y)) \cdot \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y)) \frac{\partial \phi^s}{\partial x^j}(\psi(y))\right)}_{a'^{rs}} \frac{\partial u'}{\partial y^r}(y) \frac{\partial v'}{\partial y^s}(y).$$

$$= \sum_{r,s=1}^n \int_{U'} a'^{rs}\, \partial_{y_r} u'\, \partial_{y_s} v'$$

$$同理，第二项 = \sum_{r=1}^n \int_{U'} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n b^i(\psi(y)) \frac{\partial \phi^r}{\partial x^i}(\psi(y))\right)}_{b'^r} \frac{\partial u'}{\partial y^r}\, v(\psi(y))\, dy.$$

$$= \sum_{r=1}^n \int_{U'} b'^r\, \cancel{v(\psi(y))}\, \partial_{y^r} u' \cdot v' \quad dy$$

为证明 claim，我们要证的是

① L' 是满足一致椭圆条件的.

② $u(x)=u'(\phi(x))$ $v(x)=v'(\phi(x))$，是否有 $B'[u',v'] = (f', v')_{L^2(U')}$？

其中 $B'[u',v'] = \int_{U'} \sum_{r,s} a'^{rs}\partial_{y_r}u'\partial_{y_s}v' + \sum_r b'^r \partial_{y_r} u' \cdot v' + c'u'v'\, dy$.

先证②：

直接计算.有：

$$B'[u',v'] = \cancel{\sum_{i,j=1}} \int_{U'} \sum_{r,s} a'^{rs} \frac{\partial u'}{\partial y^r}\frac{\partial v'}{\partial y^s} + \sum_{i=1}^n b'^r \frac{\partial u'}{\partial y^r} v' + c'u'v' \,) \, dy .$$

$$\overset{y=\phi(x)}{=} \sum_{r,s}\int_U a'^{rs} \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k}(x)\frac{\partial \psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \cdot \sum_{l=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_l}(x)\frac{\partial\psi^l}{\partial y^s}(\phi(x))\,dx .$$

$$+\sum_r \int_U b'^r \cancel{\partial u_i} \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k}(x)\frac{\partial\psi^k}{\partial y^r}(\phi(x))\,dx + \int_U cuv\,dx .$$

$$= \int_U \sum_{i,j=1}^n\sum_{r,s=1}^n\sum_{k,l=1}^n a^{ij}(x)\frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\phi^s}{\partial x^j}(x)\frac{\partial\psi^k}{\partial y_r}(\phi(x))\frac{\partial\psi^l}{\partial y_s}(\phi(x))\, \partial_{x_k}u\cdot\partial_{x_l}v\cdot dx .$$

$$+\int_U \sum_{i=1}^n\sum_{r=1}^n\sum_{k=1}^n b^i(x)\frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\psi^k}{\partial y^r}(\phi(x)) \quad + \int_U cuv\,dx .$$

~~代入 a'^{rs} b'^r 表达式~~

$$\overset{}{\underset{(\#)}{=}} \int \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{x_i}u\,\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^n b^i\partial_{x_i}u\cdot v + cuv\;dx$$

$$= B[u,v] = (f,v)_{L^2(U)} \quad = (f',v')_{L^2(U')} .$$

注：最后一个等号成立，是因为 $|\det D\phi| = |\det D\psi| = 1$（待证）.

(#)的check ~~进而~~：

~~再证①：$\forall y\in U'$, $\xi\in\mathbb{R}^n$~~

$$\phi^r(\psi(y)) = y^r$$

~~$\sum_{r,s=}$~~

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}(\psi(y))\frac{\partial\psi^i}{\partial y^s} = \frac{\partial y^r}{\partial y^s} = \delta_{rs} .$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}(x) . \frac{\partial\psi^k}{\partial y^s}(\phi(x)) = \delta_{rs}$$

同样 $\psi^k(\phi(x)) = x^k \Rightarrow \dfrac{\partial\psi^k}{\partial y^r}(\phi(x))\dfrac{\partial\phi^r}{\partial x^i} = \delta_{ki}$. #.

再证①：$\forall y\in U'$. $\xi\in\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{r,s=1}^n a'^{rs}\xi_r\xi_s . = \sum_{r,s=1}^n\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^s}{\partial x^j}\xi_r\xi_s .$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\Big(\sum_{r=1}^n \xi_r\frac{\partial\phi^r}{\partial x^i}\Big)\Big(\sum_{s=1}^n \xi_s\frac{\partial\phi^s}{\partial x^j}\Big)$$

$$\overset{\eta=\xi\cdot D\phi}{=} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\eta_i\eta_j \ge \theta|\eta|^2 \underset{|\det D\phi|=1}{=} \theta|\xi|^2 .$$

于是，由Step1：

$$\|u'\|_{H^2(U')} \le C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')})$$

$$\le C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$$

Φ，Ψ 很好的同胚。（写开，即是变量替换）~~需 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$~~

最后，只需证 $|\det D\Phi| = |\det D\Psi| = 1$。事实上此为显然。

~~因为在~~ 由附录 P711

$y_i = x_i =: \Phi^i(x)$，

$y_n = x_n - \gamma(x_1 \dots x_{n-1}) =: \Phi^n(x)$。

则 $D\Phi = \left\{\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}\right\}_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ -\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial \gamma}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\Phi = 1$。

对 Ψ，同理。

$\square$

Thm 6.5.5（高阶正则性）

(1) $m \in \mathbb{Z}_+$，$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar U)$，$f \in H^m(U)$。

$u \in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解。$\partial U \in C^{m+2}$。则

则 $\begin{cases} u \in H^{m+2}(U). \\ \|u\|_{H^{m+2}(U)} \le C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \end{cases}$

(2). $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar U)$，$f \in C^\infty(\bar U)$。

$u \in H_0^1(U)$ 为 $\begin{cases} Lu = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解。$\partial U \in C^\infty$

则 $u \in C^\infty(\bar U)$。

Omit the proof.

$\square$

§6.6. 经典解的极大值原理

本节考虑 $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^{n}b^i\partial_i u+cu$. $a^{ij}=a^{ji}$. L: 一致椭圆.

出发点：C^2函数 u 在 U 内部中的 x_0 点达最大. $\Rightarrow$ $Du(x_0)=0$. $D^2u(x_0)\le 0$.

弱极大值原理

Thm 6.6.1 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. $c=0$ in U.

(1). 若 $Lu\le 0$ in U, 则 $\max_{\bar U}u=\max_{\partial U}u$. ← 下解的极大值原理

(2) 若 $Lu\ge 0$ in U, 则 $\min_{\bar U}u=\min_{\partial U}u$. ← 上解的极小值原理

Proof: (1) 先设 $Lu<0$. 且. $\exists x_0\in U$. $u(x_0)=\max_{\bar U}u$

在 x_0 处有 $Du(x_0)=0$. $D^2u(x_0)\le 0$; at x_0.

为了导出矛盾 (因为要证的是 $x_0\in\partial U$). 我们应该设法证明 $Lu\ge 0$ ~~in~~ U.

为此，设法将 L "对角化"

若 $A=(a^{ij}(x_0))$ 为实对称正定方阵, 则存在 $O=(O_{ij})$ (正交方阵) s.t. $\begin{cases}OAO^T=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)\\ OO^T=I.\\ d_k>0.\end{cases}$

令 $y=x_0+O(x-x_0)$

$\Rightarrow x-x_0=O^T(y-x_0)$.

$\Rightarrow \partial_{x_i}u=\sum_{k=1}^{n}\partial_{y_k}u\cdot O_{ki}$.

$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^{n}\partial_{y_k}\partial_{y_l}u\cdot O_{ki}O_{lj}$

$\therefore$ 在 x_0 处 $\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u=\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{y_k}\partial_{y_l}u\ O_{ki}O_{lj}$.

$=\sum_{k=1}^{n}d_k\,\partial_{y_k}^2u\le 0$.

$D^2u(x_0)\le 0\Rightarrow \partial_{y_k}^2u\le 0$.

于是在 x_0 处

$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u+\sum_{i=1}^{n}b^i\partial_{x_i}u\ge 0$. (因 $Du(x_0)=0$)

这与 $Lu<0$ 矛盾. 因此 (1) 在 $Lu<0$ 时得证.

对一般情况(只有 $Lu\le 0$). 令 $u^{\varepsilon}(x)=u(x)+\varepsilon e^{\lambda x_1}$ $\quad x\in U$. $\quad \lambda>0$ 为待定常数, $\varepsilon>0$.

· $a^{ii}(x)\ge\theta$, 这由一致椭圆条件, 取 $\vec{\xi}=e_i$ 即得.

于是 $Lu^{\varepsilon}=\underbrace{Lu}_{\le 0}+\varepsilon L(e^{\lambda x_1})$ → 直接计算

$$\le \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a^{11}+\lambda b^1).$$

$$\le \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2\theta+\|\vec{b}\|_{L^\infty}\lambda)$$

<0 in U. $\qquad$ (只要 $\lambda^2\theta>\|\vec{b}\|_{L^\infty}$ 即可.

由之前 $Lu<0$ in case 知.

$\max\limits_{\bar{U}} u^{\varepsilon}=\max\limits_{\partial U} u^{\varepsilon}$. $\quad\varepsilon\to 0$. 由 $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ 知, $\max\limits_{\bar{U}} u=\max\limits_{\partial U} u$

(2). u 换成 $-u$ 即可. $\quad\square$

Thm 6.6.2 ($c\ge 0$ 的弱极大值原理).

设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$. $c\ge 0$ in U.

(1) 若 $Lu\le 0$ in U 则 $\max\limits_{\bar{U}} u\le\max\limits_{\partial U} u^+$

(2) ~~进一步地~~ 类似地, 若 $Lu\ge 0$ in U. 则 $\min\limits_{\bar{U}} u\ge-\max\limits_{\partial U} u^-$

(3) 于是. $Lu=0$ in U $\Rightarrow \max\limits_{\bar{U}}|u|=\max\limits_{\partial U}|u|$.

Proof: (1) 设 u 为下解 ($Lu\le 0$). $V:=\{x\in U\,|\,u(x)>0\}$. 则

$Ku:=Lu-cu\le -cu\le 0$ in V.

K 符合 Thm 6.6.1(1) 的条件. 故 $\max\limits_{\bar{V}} u=\max\limits_{\partial V} u=\max\limits_{\partial U} u^+$. (若 $V\ne\phi$).

若 $V=\phi$. 则结论平凡. $\qquad$ (2) (3) 同理 $\quad\square$.

强极大值原理.

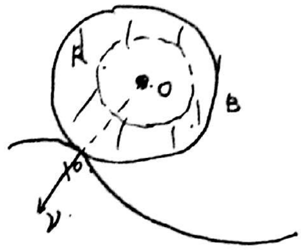
lemma (Hopf) $u\in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$. $c=0$ in U. $Lu\le 0$ in U. 且 $\exists x^0\in\partial U$ s.t. $u(x^0)>u(x)$ $\forall x\in U$.

再假设 U 的在 x^0 处满足"内球条件": $\exists$ 开球 $B\subset U$. $x^0\in\partial B$.

则

(1). $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)>0$. ν 为 B 在 x^0 处的外法向.

(2). 若 $c\geq 0$ in U. 则加上 $u(x^0)\geq 0$ 的条件. (1)仍对.



证明: 由. 我们只接证(2), 其证明过程中蕴含(1).

首先 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\geq 0$ 是易见的, 因为 $\forall x\in U$. $u(x^0)>u(x)$.

我们希望构造 $v(x)$ s.t. $\underset{(\varepsilon>0)}{u+\varepsilon v}$ 满足 $\frac{\partial}{\partial \nu}(u+\varepsilon v)(x^0)\geq 0$.

于是 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)\geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) >0$.

这需要: $\frac{\partial v}{\partial \nu}<0$ at x^0. 同时, 我们还需 $Lv\le 0$, $(u+\varepsilon v)(x_0)>(u+\varepsilon v)x$ $\forall x\in U$.

不妨 $B=B(0,r)$.

$$R:=B(0,r)-\mathring{B}(0,\tfrac{r}{2})$$

令 $v(x)=e^{-\lambda|x|^2}-e^{-\lambda r^2}$. 则 $\partial_i v=e^{-\lambda|x|^2}(-2\lambda x_i)$.

$$\partial_{ij}v=e^{-\lambda|x|^2}(4\lambda^2x_ix_j-2\lambda\delta_{ij}).$$

$$\Rightarrow Lv=-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(4\lambda^2x_ix_j-2\lambda\delta_{ij})e^{-\lambda|x|^2}+\sum_{i=1}^n b^i(-2\lambda x_i)e^{-\lambda|x|^2}$$

$$+c(e^{-\lambda|x|^2}-e^{-\lambda r^2})$$

其中 $A=(a^{ij})_{1\le i,j\le n}$

(一致椭圆) 用在这

$$\le e^{-\lambda|x|^2}\left(-\theta|x|^2\cdot 4\lambda^2+2\lambda\,\mathrm{Tr}A-2\lambda\sum_{i=1}^n b^ix_i+c\right)$$

$\frac{r}{2}\le|x|<r$.

$$\le e^{-\lambda(\frac{r}{2})^2}\left(-\theta\left(\tfrac{r}{2}\right)^2 4\lambda^2+2\lambda\,\mathrm{Tr}A+2\lambda|b|r+c.\right)\le 0$$

为得到上面的 ≤ 0, 只要 λ 充分大 (关于 λ 是二次函数. 二次项系数为负) 即可.

由于 $u(x^0)>u(x)$ $\forall x\in U$ $\therefore \exists\varepsilon>0$. s.t. $u(x^0)\geq u(x)+\varepsilon v(x)$. $\forall x\in\partial B(0,\frac{r}{2})$. (因 $v(x)$ 是一个有界函数)

且 $u(x^0)\geq u(x)+\varepsilon v(x)$. $x\in\partial B(0,r)$ (因 $v=0$ on $\partial B(0,r)$)

$$L(u+\varepsilon v-u(x^0))=\underbrace{Lu}_{\le 0}+\varepsilon\underbrace{Lv}_{\le 0}-Lu(x^0)=-Lu(x^0)=-cu(x^0)\le 0 \quad \text{in } R$$

$\Rightarrow$ 有 $\begin{cases} \\ u+\varepsilon v-u(x^0)\le 0 \quad \text{on } \partial R.\end{cases}$

由弱极大值原理，$u+\varepsilon v-u(x^0)\le 0$ in R.

又：$u(x^0)+\varepsilon v(x^0)-u(x^0)=0$

所以，$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0)\geq 0$ （因为向外走 $u+\varepsilon v-u(x^0)\nearrow$）

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(x^0)\underset{\uparrow}{=}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}v(x^0)=-\frac{\varepsilon}{r}Dv(x^0)\cdot x^0=2\lambda\varepsilon r e^{-\lambda r^2}>0$

径向函数在球面上的外法向导数＝径向导数

$\square$

Hopf 引理用于证明强极值原理

Thm 6.6.3（强极值原理） 设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ $C=0$ in U.

U连通有界开集.

(1) 若 $Lu\le 0$ in U. 且 $\max\limits_{\bar{U}} u$ 在 U 内达到. 则 $u=\text{const}$ in U.

(2). $Lu\geq 0$ . . . . $\min\limits_{\bar{U}} u$ . . . .

Proof：只证(1) 令 $M=\max\limits_{\bar{U}} u$. $C:=\{x\in U\mid u(x)=M\}$

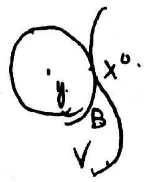
$V:=\{x\in U\mid u(x)<M\}$.

反证.

若 $\exists x$！$u(x)\neq M$. in U. 则 $V\neq\phi$.

choose $y\in V$. $\text{dist}(y,C)<\text{dist}(y,\partial U)$.

$B:=$ 以y为中心，含于V的最大的球.



则 $\exists x^0\in C$，$x^0\in\partial B$.

由于V满足内球条件. 由Hopf引理，$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)>0$. ~~但是~~

但 u 在 x^0 处达max.（因 $u(x^0)=M$） 故 $Du(x_0)=0$ $\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)=Du(x_0)\cdot\nu$

$=0$）.

矛盾！

$\square$

$C\geq 0$ 类似有.

Thm 6.6.4. $u\in C^2(U)\cap C(\bar{U})$. $C\geq 0$ in U. U 有界连通开

(1) 若$Lu\le 0$ in U. ~~则~~且 u在 $\bar{U}$ 内达非负最大值，则 $u=\text{const}$ in U

(2) ≥ 0 — — — — — 小 — — —

$\square$

Harnack 不等式

Thm 6.6.5. $u\geq 0$ 是 $Lu=0$ in U 的 C^2 解. $V\subset\subset U$ 是连通集 则 $\exists C>0$ s.t.
$\sup_V u \leq C \inf_V u$.

证明建议跳过
书上的公式（26）不等号反了

Rmk: (1) 此处只给出 $a^{ij}\in C^\infty$, $b^i=c=0$ 的证明

(2) 更一般的参见 韩青, 林芳华 的 椭圆方程讲义

或 Gilbarg, Trudinger 的二阶椭圆方程

(3). 更一般的证法. 会用到 John-Nirenberg 不等式 (调和分析).

Proof: 不妨 $u>0$ in U. 否则考虑 $u+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$).

令 $v=\log u$.

$Lu=0$ 即 $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j u=0$. 由 $u=e^v$ 知 $\partial_i u = e^v\partial_i v$

$\partial_i\partial_j u = \partial_i(e^v\partial_j v) = e^v\partial_i v\partial_j v + e^v\partial_i\partial_j v$.

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^n a^{ij}e^v(\partial_i\partial_j v + \partial_i v\partial_j v)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1} a^{ij}(\partial_i\partial_j v + \partial_i v\partial_j v)=0 \quad \text{in } U.$$

令 $w:=\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i v\partial_j v \underset{提}{=} -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_i\partial_j v$.

Claim: $-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^n b^k\partial_k w \leq -\frac{\theta^2}{2}|D^2 v|^2 + C|Dv|^2$.

其中 $b^k := -2\sum_{l=1}^n a^{kl}\partial_l v$ $\quad 1\leq k\leq n$.

先设 claim 正确.

令 $z=\zeta^4 w$, $\zeta\in C^\infty(U)$. $0\leq\zeta\leq 1$. $\zeta=0$ on ∂U, $=1$ in V.

希望借 z 来估计 $|Dv|$ 在每个 $V\subset\subset U$ 上一致有界. (球 → 半径为 r.)

这样. $\forall x_1,x_2\in V$ 有 $v(x_2)-v(x_1)\leq \sup_V|Dv|\,r \leq C$.

$\Rightarrow u(x_2)\leq u(x_1)e^C$.

对一般的 $V\subset\subset U$. 用球覆盖 $\bar V$ 紧即可, 就证到了 Harnack 不等式.

设 z 在 $x_0\in U$ 处达到最大值 则 $Dz(x_0)=0$ $\Rightarrow \forall k.\ \zeta^4\partial_k w + 4\zeta^3 w\,\partial_k\zeta=0$

$\Rightarrow \forall k.\ \zeta\partial_k w + 4\partial_k\zeta\, w=0$

~~在 x_0 处有~~:

$\partial_k z = \zeta^4\partial_k w + 4\zeta^3 w\,\partial_k\zeta$

$\partial_k\partial_l z = \zeta^4\partial_k\partial_l w + 4\zeta^3\partial_l\zeta\,\partial_k w + 12\zeta^2\partial_l\zeta\,\partial_k\zeta\, w + 4\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta\, w$
$+ 4\zeta^3\partial_k\zeta\,\partial_l w$

$\therefore$ $\cancel{-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l z + \sum_{k=1}^n b^k\partial_k z = \zeta^4\left(-\sum_{k,l=1}^n a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^n b^k\partial_k w\right)}$

$\cancel{+C\left(|\zeta^3|Dw| + \zeta^2|w|\right) + |Dv|\zeta^3 w}$

从而

$$-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l z + \sum_{k=1}^{n} b^k \partial_k z$$

$$= -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\Big(\zeta^4 \partial_k\partial_l w + \underbrace{4\zeta^3\partial_l\zeta\,\partial_k w}_{\text{一样的}} + 12\zeta^2\partial_l\zeta\,\partial_k\zeta\, w + 4\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta\, w + \underbrace{4\zeta^3\partial_k\zeta\,\partial_l w}_{\text{一样的}}\Big)$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b^k\big(\zeta^4\partial_k w + 4\zeta^3\partial_k\zeta\, w\big)$$

$$= \zeta^4\Big(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\Big)$$

$$-12\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\big(\zeta^2\partial_l\zeta\,\partial_k\zeta\big)\cdot w$$

$$-8\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\big(\zeta^3\partial_k\zeta\big)\partial_l w$$

$$-4\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta\, w + 4\sum_{k=1}^{n} b^k\zeta^3\partial_k\zeta\, w.$$

$|b^k| \le C|Dv|$

$$= \zeta^4\Big(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\Big) + O\big(\zeta^3|Dw| + \zeta^2|w|\big) + |Dv|\,\zeta^3 w.$$

而在 x_0 处由 z 达到 max. 故 $\partial_k z = 0$ at x_0.

$\{\partial_k\partial_l z\}$ 负定. 又因 $\{a^{kl}\}$ 正定.

$$\Rightarrow -\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l z \ge 0$$

$$\therefore\ 0 \le \zeta^4\Big(-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\Big) + C'\big(\zeta^3|Dw| + \zeta^2|w|\big) + |Dv|\,\zeta^3|w| \quad \cdots (*)$$

claim

$$\cancel{\le \zeta^4\Big(-\frac{\theta}{2}|D^2v|^2 + C|Dv|^2\Big) + C'\zeta^2|Dv|^2 + C'\zeta^4 w^2 + O\big(\zeta^3|Dw| + \zeta^2 w\big)}$$

$$\cancel{\Rightarrow C^0\zeta^4 w^2 \le \frac{\theta}{2}\zeta^4|D^2v|^2 \le C(\varepsilon)\zeta^2|Dv|^2 + \varepsilon\zeta^4 w^2 + C\big(\zeta^3|Dw|^2 + \zeta^2 w\big)}$$

~~因 $w = -\sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$~~ ~~上式~~

$$\cancel{C''\zeta^4 w^2 \le \frac{\theta}{2}\zeta^4|D^2v|^2}$$

~~$w = \sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$~~

~~上式~~

$$\cancel{\le C\zeta^4|Dv|^2 + C'\zeta^2|Dv|^2 + C'\zeta^4 w^2 + O\big(\zeta^3|Dw| + \zeta^2 w\big)}$$

将claim带入(*)有: $\qquad \zeta D v$

$$0 \le \zeta^4\left(-\frac{\theta^2}{2}|D^2v|^2 + C|Dv|^2\right) + C'\zeta^3|Dw| + C'\zeta^2 w + \underline{\underline{\zeta^3|Dv|w}} \quad \text{at } x_0.$$

$$\Rightarrow \frac{\theta^2}{2}\zeta^4|D^2v|^2 \le C\zeta^4|Dv|^2 + C'\zeta^3|Dw| + C'\zeta^2 w + \zeta^3|Dv|w \quad \text{at } x_0 \qquad \cdots(**)$$

$C''\zeta^4 w^2$ $\quad w=\sum a^{ij}\partial_i\partial_j v$

- $\zeta^3|Dv|w = (\zeta^2|Dv|)(\zeta)\cdot w$

$$\underset{\text{Young}}{\le} w\left(\varepsilon\zeta^4|Dv|^2\right) + w\cdot C(\varepsilon)\zeta^2$$

$$\underset{\theta|Dv|^2\le w}{\le} \frac{\varepsilon}{\theta}\zeta^4 w^2 + C(\varepsilon)w\zeta^2 \quad (w=\sum a^{ij}\partial_j v\partial_i v)$$

- 对 $\zeta^3|Dw|$ 项: 由 $\zeta\partial_k w + 4\partial_k\zeta\cdot w = 0$ 知. $|Dw|\le C|w|$

故. $\zeta^3|Dw| \lesssim \zeta^2|w|$.

- $\zeta^4|Dv|^2 \le \zeta^2|Dv|^2 \le \frac{\zeta^2}{\theta}w$.

∴ 代入(**)有

$$\zeta^4 w^2 \le C_1\varepsilon\zeta^4 w^2 + C_2\zeta^2 w.$$ 故取 ε 小使 $C_1\varepsilon < \frac{1}{2}$

有 $\zeta^4 w^2 \le C\zeta^2 w \quad \Rightarrow \quad z = \zeta^4 w \le C\zeta^2 \le C$. at x_0.

由于 z 在 x_0 处达到 max. $\qquad \underset{\theta|Dv|^2\le w=\zeta^4 w \text{ in } V}{\Rightarrow} |Dv|\le C \quad \text{in } V$.

$\zeta\equiv 1$ in V

这样我们在 claim 成立的情况下证明了结论.

下面证明 claim:

$$-\sum_{k=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w+\sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w\le -\frac{\theta^2}{2}|D^2v|^2+C|Dv|^2$$

直接计算. 由 $w=-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i v\partial_j v=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i v\partial_j v$

$$\cancel{\Rightarrow \partial_l w=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_l(a^{ij})\partial_i\partial_j v-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_l\partial_i\partial_j v}$$

$$\Rightarrow \partial_l w=\sum_{i,j=1}^{n}\partial_l a^{ij}(\partial_i v\partial_j v)+2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_l\partial_i v\,\partial_j v$$

$$\Rightarrow \partial_k\partial_l w=\boxed{\sum_{i,j=1}^{n}\partial_k\partial_l a^{ij}\partial_i v\partial_j v+2\sum_{i,j=1}^{n}\partial_l a^{ij}\partial_k\partial_i v\partial_j v+2\sum_{i,j=1}^{n}\partial_k a^{ij}\partial_l\partial_i v\partial_j v}\longrightarrow \text{记成 } R.$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_l\partial_i v\,\partial_k\partial_j v+2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v.$$

$$=2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\,\partial_j v+2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_k\partial_j v)$$
$$+R.$$

$$|R|\le C\left(|Dv|^2+|Dv||D^2v|\right)$$
$$\underset{\text{Young}}{\le} C(\varepsilon)|Dv|^2+\varepsilon|D^2v|^2.\qquad \forall\varepsilon>0.$$

从而. $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\partial_k\partial_l w=-R-2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\partial_j v+\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_k\partial_j v)\right)$

$$=-R-2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v)-2\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v\partial_j v\qquad\cdots(\#)$$

$$\cancel{\le -R-2\theta^2|D^2v|^2}$$

$$\cancel{= -R-2\theta\sum_{\substack{k,j=1\\ i,l=1}}^{2}}$$

$$\cancel{= -R-2\sum_{i,l=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n} a^{il}}$$

• $\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} a^{kl} \partial_j\partial_k v\, \partial_i\partial_l v \geq \theta^2 \sum_{i,j} |\partial_j\partial_i v|^2 = \theta^2 |D^2 v|^2$ (L-一致椭圆)

注意：这里实际上要用到$\{a^{ij}\}$是正定方阵，它能写成$P^T P$的形式，再用一致椭圆性。

• $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{kl} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_k\partial_i\partial_l v\, \partial_j v$

$$\cancel{= -\sum_{l=1}^{n} a^{kl} \sum_{i,j=1}^{n}} = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_j v \sum_{k=1,\,l=1}^{n} a^{lk}\partial_i\partial_k\partial_l v$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_j v \Big(\partial_i \underbrace{\Big(\sum_{k=1,\,l=1}^{n} a^{lk}\partial_k\partial_l v\Big)}_{w} - \sum_{k,l=1}^{n} \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v\Big)$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_j v \Big(\partial_i w - \sum_{k,l=1}^{n} \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{b^i}_{-2\sum_{j=1}^{n} a^{ij}\partial_j v} \partial_i w + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} a^{ij}\partial_i a^{lk}\, \partial_j v\, \partial_k\partial_l v$$

于是代入(#)，

有 $-\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk}\partial_k\partial_l w \leq -R - \theta^2 |D^2 v|^2 - \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i w - \sum_{i,j}\sum_{k,l} a^{ij}\partial_i a^{lk}\partial_j v\, \partial_k\partial_l v$

$$\Rightarrow -\sum_{k,l=1}^{n} a^{lk}\partial_k\partial_l w + \sum_{k=1}^{n} b^k\partial_k w \leq |R| - \theta^2 |D^2 v|^2 + \sum_{i,j}\sum_{k,l} |a^{ij}\partial_i a^{lk}\partial_j v\, \partial_k\partial_l v|$$

$$\leq |R| - \theta^2 |D^2 v|^2 + C\, \underbrace{|Dv|\,|D^2 v|}$$

$$\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon |D^2 v|^2 + C(\varepsilon)|Dv|^2 - \theta^2 |D^2 v|^2$$

$$\overset{\varepsilon\text{充分小}}{\leq} -\frac{\theta^2}{2}|D^2 v|^2 + C(\varepsilon)|Dv|^2$$

claim证毕！

□

预备知识：对称紧算子的谱与柯朗极大极小刻画

1. 对称算子. 设 H 是复 Hilbert 空间

<u>Def</u>：设 A 是~~H上的连续线性泛函~~ $H \to H$ 的有界线性算子，称 A 对称：若 $\forall x,y \in H$. $(Ax,y)=(x,Ay)$ $\forall x,y\in H$

易见. A 对称 $\Leftrightarrow A=A^*$

eg：设 $K\in L^\infty(U\times U)$ $K(x,y)=K(y,x)$

则 $A: u(x)\mapsto \int_\Omega K(x,y)u(y)\,d\mu(y)$. 是 $L^2(\Omega)$ 上的对称算子

□.

<u>Prop</u>：(1). A 对称 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in H$. $(Ax,x)\in\mathbb{R}$.

(2). A 对称 则 $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$. 且 $\|(\lambda I-A)^{-1}x\|\le\frac{\|x\|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$

($\forall x\in H$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$. $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$)

(3). 设 $H_1\subset H$ 是闭不变子空间. A 是 H 上的对称算子. 则 $A|_{H_1}$ 是 H_1 上的对称算子.

(4). 若 A 对称. $\lambda,\lambda'\in\sigma_p(A)$. $\lambda\neq\lambda'$. 则 $N(\lambda I-A)\perp N(\lambda' I-A)$.

(5) 若 A 对称. 则 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$.

<u>Proof</u>：(1). 令 $a(x,y)=(Ax,y)$. $\forall x,y\in H$.

则 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的共轭双线性泛函.

(Ax,x) 是由 a 诱导的二次型.

A 对称 $\Leftrightarrow$ $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$. $\forall x,y\in H$.

$\Rightarrow$ $(Ax,x)\subset\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$：若 $\underset{q(x)}{\underbrace{(Ax,x)}}\subset\mathbb{R}$. 则 $q(x+y)=\overline{q(x+y)}$.

$\Rightarrow$ $a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}+\overline{a(y,x)}$.

y 对换 iy $-a(x,y)+a(y,x)=\overline{a(x,y)}-\overline{a(y,x)}$. $\Rightarrow$ $a(x,y)=\overline{a(y,x)}$

共 同 36

(2) 若 A 对称 ~~要证 A的谱是实值~~

设 $\lambda=\mu+i\gamma$ $\quad \gamma\neq 0$. $\mu,\gamma\in\mathbb{R}$.

则 $\|(\lambda I-A)x\|^2=\|(\mu I-A)x\|^2+|\gamma|^2\|x\|^2$

$$\geq |\gamma|^2\|x\|^2 \quad \forall x\in H.$$

此外. $R(\lambda I-A)=H$.

这是因为 $R(\lambda I-A)^\perp=N(\bar\lambda I-A^*)=N(\bar\lambda I-A)$

$$\overset{\uparrow\text{紧有点谱}}{=} \cancel{N(\bar\lambda I-A)}\ 0 \quad (\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0)$$

~~为证~~ A 的谱是实值.

这因为. 设 $Ax=\lambda x$

$(Ax,x)=\lambda\|x\|^2$

$\|$

$(x,Ax)=\bar\lambda\|x\|^2 \Rightarrow \lambda=\bar\lambda$

进一步

我们令: $m=\inf\limits_{\substack{u\in H\\ \|u\|_H=1}}(Au,u)$

$M=\sup\limits_{\substack{u\in H\\ \|u\|_H=1}}(Su,u)$.

~~设 $\eta>M$ 时 $\forall x\in H$~~

$(\eta x-Ax,x)\geq(\eta-M)\|x\|^2 \quad \forall x\in H$.

故由Lax-Milgram 定理: $\eta I-A$ 1-1 + onto $\Rightarrow \eta\in\rho(A)$.

同理. $\eta<m$ 时. $\Rightarrow\eta\in\rho(A)$ 故 $\sigma(A)\subset[m,M]$ ※.

~~(更进一步的结论)~~

(3) ✓.

(4). 设 $x\in N(\lambda I-A)$. $x'=N(\lambda' I-A)$. $\lambda\neq\lambda'$.

则 $\lambda(x,x')=(Ax,x')=(x,Ax')=\lambda'(x,x')$

$\Rightarrow$ x ~~⊥ x'~~. $(x,x')=0$

(5). $C:=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$ $\quad C\leq\|A\|$ 易见. 为证 $\geq$:

注意到. $\mathrm{Re}(Ax,y)=\frac14\Big((A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\Big)$

$$\leq\frac{C}{4}\|x+y\|^2+\frac{C}{4}\|x-y\|^2\leq C. \quad (x,y\in H,\ \|x\|=\|y\|=1)$$

取 $\alpha\in\mathbb{C}$ $|\alpha|=1$.

s.t. $\alpha(Ax,y)=|(Ax,y)|$ $\Rightarrow |(Ax,y)|$

$=(Ax,\bar\alpha y)$

$\leq\mathrm{Re}(Ax,\bar\alpha y)\leq C.$ $\square$

· 在Hilbert空间上，紧对称算子的谱和算子结构在某种程度上可以与有穷维的实对称阵类比.

$\begin{cases} \text{正交变换对角化，对角元是特征值} \\ \text{二次型在 } \|x\|=1 \text{ 上的临界值} \end{cases}$

Thm 1：A是紧对称算子. 则 $\exists x_0 \in H$ $\|x_0\|=1$, s.t. $\begin{cases} |(Ax_0, x_0)| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \\ Ax_0 = \lambda x_0 \quad |\lambda| = |(Ax_0, x_0)| \end{cases}$

Proof：设 S_1 为H的单位球面

不妨设 $\sup\limits_{x\in S_1} |(Ax, x)| = \sup\limits_{x\in S_1} (Ax, x) =: \lambda$

令 $f(x) = (Ax, x) : S_1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

取 $\{x_n\} \subset S_1$. $f(x_n) \to \lambda$.

$\|x_n\|=1$. 故存在弱收敛子列（还记作 x_n）$x_n \rightharpoonup x_0$.

$\left.\begin{array}{l} \|x_0\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1. \\ A \text{ 紧} \end{array}\right\} \Rightarrow Ax_n \to Ax_0$

$\Rightarrow f(x_n) \to (Ax_0, x_0)$. as $n\to\infty$

$\Rightarrow (Ax_0, x_0) = \lambda$.

下证 $\|x_0\|=1$ 否则 $\|x_0\|<1$.

$(Ax_0, x_0) \le \|A\| \|x_0\|^2 = \lambda \|x_0\|^2 < \lambda$. 矛盾！

于是我们证明了. $\exists x_0 \in S_1$ s.t. $(Ax_0, x_0) = \sup\limits_{x\in S_1} (Ax, x) = \lambda$.

再证 $Ax_0 = \lambda x_0$. 设t充分小.

令 $$\varphi_y(t) = \frac{(A(x_0+ty), x_0+ty)}{(x_0+ty, x_0+ty)}$$

$t=0$ 时 $\varphi_y(t)$ 达 max $\Rightarrow \varphi_y'(0)=0$. 计算即为 $\mathrm{Re}(y, Ax_0 - \lambda x_0) = 0$ $\forall y \in H$

$\Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

· 设A是H上的紧对称算子, 由紧算子谱理论, $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$

若 $\{\lambda_n\}$ 中有无穷多个不同的. 则 $\lambda_n \to 0$.

如今. 我们证明了 $\lambda_n \in \mathbb{R}$. 此外. 我们证明"A可对角化"

Thm 2 (Hilbert-Schmidt). 若 A 是 H 上的对称紧算子，则有至多可数个非零的，只可能以 0 为聚点的实数 $\{\lambda_i\}$，它们是 A 的特征值，并对应于一组标准正交基 $\{e_i\}$

s.t. $\begin{cases} x=\sum_i (x,e_i)e_i \\ Ax=\sum_i \lambda_i (x,e_i)e_i \end{cases}$

Proof: $\forall \lambda\in\sigma_p(A)-\{0\}$ 设 $N(\lambda I-A)$ 的一组标正基为 $\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m_p(\lambda)=\dim N(\lambda I-A)<\infty}$

若 $0\in\sigma_p(A)$，则设 $N(A)$ 标正基为 $\{e_i^{(0)}\}$（可能不可列）

令 $\{e_i\}=\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma_p(A)-\{0\}}\{e_i^{(\lambda)}\}_{i=1}^{m(\lambda)}$

$\{e_i\}:=\begin{cases}\{e_i\} & 0\notin\sigma_p(A)\\ \{e_i\}\cup\{e_i^{(0)}\} & 0\in\sigma_p(A)\end{cases}$

$M=\mathrm{Span}\{e_i\}$，则在 M 上，题中表达式成立

下证 $\overline{M}=H$。反证 若 $M^\perp\neq\{0\}$ 设 $\tilde{A}=A|_{M^\perp}$

- $\tilde{A}$ 无特征值 $\Rightarrow \tilde{A}\neq 0$

但 $\|\tilde{A}\|=\sup\limits_{\substack{x\in M^\perp\\ \|x\|=1}}|(\tilde{A}x,x)|=0$. 矛盾

□

Rmk: (1) 特征值全体（的绝对值）可以写成递降序列 $|\lambda_1|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq|\lambda_{n+1}|\geq\cdots$

$\Rightarrow A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i\otimes e_i$.

Claim: $\|A-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\otimes e_i\|\leq|\lambda_{n+1}|\to 0$ as $n\to\infty$

~~事实上~~: check: $\forall x\in H$. $\|Ax-\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x,e_i)e_i\|$

$=\|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i\|$

$=\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i^2|(x,e_i)|^2\right)^{1/2}$

$\leq|\lambda_{n+1}|\cdot\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\right)^{1/2}\leq|\lambda_{n+1}|\cdot\|x\|$.

(2) 紧对称算子可对角化，其特征值具有极值性质

$|\lambda_n|=\sup\{|(Ax,x)| \mid x\perp \underbrace{\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}}_{\lambda_1\sim\lambda_{n-1}\text{的特征向量}},\ \|x\|=1\}$

$\lambda_1^+\geq\cdots\geq\cdots\geq 0$

$\geq\cdots\geq\lambda_2^-\geq\lambda_1^-$

Thm 3：极大极小刻画. 设 A是紧对称算子，对应有特征值 $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \cdots \geq 0 \geq \cdots \geq \lambda_2^- \geq \lambda_1^-$

则 $$\lambda_n^+ = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

E_{n-1}是H的任一 n-1维 闭线性子空间

$$\lambda_n^- = \sup_{E_{n-1}} \inf_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

pf:

只证第一条.

设 $x = \sum a_j^+ e_j^+ + \sum a_j^- e_j^-$.

则 $$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_j \lambda_j^+ |a_j^+|^2 + \sum_j \lambda_j^- |a_j^-|^2}{\sum_j |a_j^+|^2 + \sum_j |a_j^-|^2} \overset{\text{记}}{=\!=} M$$

令 $$\mu_n = \inf_{E_{n-1}} \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

① $\lambda_n^+ \leq \mu_n$：因为 $\forall E_{n-1}$. 在 $\mathrm{span}\{e_1^+ \cdots e_n^+\}$中. $\exists x_n \neq 0$ s.t. $x_n \perp E_{n-1}$.

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j^+ |a_j^+|^2}{\sum_{j=1}^n |a_j^+|^2} \geq \lambda_n^+.$$

② $\lambda_n^+ \geq \mu_n$：取 $E_{n-1} = \mathrm{Span}\{e_1^+, \ldots, e_{n-1}^+\}$. $\Rightarrow \lambda_n^+ = \sup_{\substack{x \in E_{n-1}^\perp \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$. $\geq \mu_n$.

该定理用于 作.13题（见张恭庆泛函4.4~4.5节）.

□

§6.7 椭圆算子特征值与特征函数

1、对称椭圆算子. $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$ $a^{ij}\in C^\infty(\bar{U})$.

L满足一致椭圆条件, $a^{ij}=a^{ji}$

U是连通集.

Thm6.7.1: (对称椭圆算子的特征值)

(1) L的特征值是实值的

(2) ~~若~~ L的特征值(可重复)可写作 $\Sigma=\{\lambda_k\}_1^\infty$. $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$, $\lambda_k\to+\infty$

(3) 存在$L^2(U)$的标准正交基$\{w_k\}_1^\infty$. 其中 $w_k\in H_0^1(U)$是L关于λ_k的特征函数.

$$\begin{cases}Lw_k=\lambda_k w_k & \text{in } U\\ w_k=0 & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

Rmk: 由正则性结论. $w_k\in C^\infty(U)$.

若 $\partial U\in C^\infty$. 则 $w_k\in C^\infty(\bar{U})$

Proof: 设 $S=L^{-1}: L^2(U)\to L^2(U)$ ~~紧~~ 紧线性算子.

Claim: S是对称算子.

Proof of the claim: 任选取 $f.g\in L^2(U)$.

$Sf=u$ $\Rightarrow u\in H_0^1(U)$为 $\begin{cases}Lu=f & \text{in } U\\ u=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解.

$Sg=v$ $\Rightarrow v\in H_0^1(U)$为 $\begin{cases}Lv=g & \text{in } U\\ v=0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解

$$\Rightarrow (Sf.g)=(u.g)=B[v,u]=B[u.v]=(f.v)=(f.Sg).\quad \forall f.g\in L^2(U).$$

又: $(Sf,f)=(u.f)=B[u.u]\ge 0$ $\forall f\in L^2(U)$.

所以, 由紧对称算子的谱理论, S的全体特征值为正实值
且特征函数构成$L^2(U)$的标准正交基

而对$\eta\ne0$. $Sw=\eta w \Leftrightarrow Lw=\lambda w$ $\lambda=\frac{1}{\eta}$

于是(1)-(3)成立

□

Def：称 Thm 1 中的 λ_1 为 L 的 主特征值 .

这个定理结论很重要!

Thm 6.7.2：（λ_1 的变分原理）.

(1) $\lambda_1 = \min\left\{ B[u,u] \,\middle|\, u\in H_0^1(U),\ \|u\|_{L^2(U)}=1 \right\}$

(2). 进一步地，(1) 中的 min 可以在 u 取 w_1 时达到. $w_1 \geq 0$ in U

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{in } U \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

(3). 若 u $\in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$，则 u 是 w_1 的倍数.

Rmk：(1) (3) 说明 λ_1 是单重特征值. $0<\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$

(2). Rayleigh 公式 · $\lambda_1 = \min\limits_{\substack{u\in H_0^1(U)\\ u\neq 0}} \dfrac{B[u,u]}{\|u\|^2_{L^2(U)}}$.

Proof：

(1). · Fact：$B[w_k,w_k] = \lambda_k \|w_k\|^2_{L^2} = \lambda_k$.

$B[w_k, w_l] = \lambda_k (w_k, w_l) = 0 \quad k\neq l$.

· 由 $\{w_k\}_1^\infty$ 是 $L^2(U)$ 的标正基. 于是 $\forall u\in H_0^1(U)$. $\|u\|_{L^2(U)}=1$.
u 可以写作 $u=\sum_{k=1}^\infty d_k w_k$. $\quad d_k = (u, w_k)_{L^2}$.
$\sum_{k=1}^\infty d_k^2 = 1$

· 由上：$\left\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_1^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交集，内积为 $B[\cdot,\cdot]$.

Claim：$\left\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_1^\infty$ 是 $H_0^1(U)$ 中的标准正交基.

这只需证：$B[w_k, u]=0 \ \forall k. \Rightarrow u\equiv 0$ 但此为显然.

Fix k 因 $B[w_k, u] = \sum_{j=1}^\infty B[w_k, d_j w_j] = d_k \lambda_k (w_k, w_k) = 0$.

$\Rightarrow d_k = 0$ ~~$\forall k$~~.

$\Rightarrow u=0$ #

从而

从而 $u=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ $\mu_k = B[u, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}] = d_k\sqrt{\lambda_k}$.

从而该级数绝对收敛 in $H_0^1(U)$.

$\Rightarrow$ $B[u,u]=\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1$. 等号成立 $\Leftrightarrow u=w_1$. 从而(1)成立.

(2). claim: 若 $u\in H_0^1(U)$. $\|u\|_{L^2(U)}=1$. 则 u 是 $\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解 $\Leftrightarrow$ $B[u,u]=\lambda_1$

$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 若 $B[u,u]=\lambda_1$. 令 $d_k=(u,w_k)$

我们有 $\lambda_1=\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \lambda$.

$\|$

$B[u,u]=\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2\lambda_k$. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_1)d_k^2=0$.

~~$\lambda_k>\lambda_1$ ($k\geq 2$)~~

$\Rightarrow$ $d_k=0$. (因 $\lambda_k>\lambda_1$, $\forall k\geq 2$).

因 λ_1 重数有限. 故. $u=\sum_{k=1}^{m}(u,w_k)w_k$. $m\in \mathbb{Z}_+$ 有限.

$Lw_k=\lambda_1 w_k$.

$\Rightarrow Lu=\sum_{k=1}^{m}(u,w_k)Lw_k=\lambda_1 u$. claim证毕.

#

下面证明: 若 $u\in H_0^1(U)$ 是 $\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解. 且 $u\neq 0$. 则

要么 $u>0$ in U 要么 $u<0$ in U.

为证该结论. 不妨设 $\|u\|_{L^2}=1$. 令 $\alpha=\int_U (u^+)^2dx$. $\beta=\int_U (u^-)^2dx$

$\alpha+\beta=1$.

由 $u^\pm\in H_0^1(U)$. $Du^+ \underset{\text{a.e.}}{=} Du\chi_{\{u\geq 0\}}$. $Du^- \underset{\text{a.e.}}{=} -Du\chi_{\{u\leq 0\}}$

故. $B[u^+,u^-]=0$

$\lambda_1=B[u,u]=B[u^+,u^+]+B[u^-,u^-]$

$\geq \lambda_1\|u^+\|_{L^2}^2+\lambda_1\|u^-\|_{L^2}^2=\lambda_1(\alpha+\beta)=\lambda_1$.

故 $\geq$ 是 $=$ $\Rightarrow$ $B[u^\pm,u^\pm]=\lambda_1\|u^\pm\|_{L^2}^2$.

$\Rightarrow \begin{cases} Lu^\pm=\lambda_1 u^\pm & \text{in } U \\ u^\pm=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ weakly.

又由 $a^{ij}\in C^\infty$ 内正则性定理，$u^+\in C^\infty(U)$.

$\Rightarrow$ $Lu^+=\lambda_1 u^+\geq 0$ in U

$\Rightarrow$ u^+是L的上解，又内U连通 故据强极值原理有

$u^+>0$ in U or $u^+=0$ in U.

#

对u^-也有此结论.

最后. 若u. $\tilde{u}$ 均是 $\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的非平凡弱解，

则 $\int_U \tilde{u}\, dx\neq 0$.

$\Rightarrow \exists \chi\in\mathbb{R}$ $\int_U u-\chi\tilde{u}\, dx=0$. 但 $u-\chi\tilde{u}$ 又是上述方程的弱解.

由上一结论知. $u=\chi\tilde{u}$ in U

于是入单 $\square$

2、非对称椭圆算子的特征值理论

设 $Lu=-\sum_{i,j}a^{ij}\partial_i\partial_j u+\sum_{i=1}^n b^i\partial_i u+cu$. $a^{ij}.\ b^i.\ c\in C^\infty(\bar{U})$

U有界连通集. $\partial U\in C^\infty$ $a^{ij}=a^{ji}$. $c\geq 0$ in U

这里L不再~~有散~~对于其形式自伴. 但仍有一些结论成立.

我们不再给出证明:

Thm 6.7.3. (1) $\exists L$的一个实特征值λ_1. 满足$\lambda_1=0$ on ∂U 且若$\lambda\in\mathbb{C}$ 是另一特征值. 必有$\mathrm{Re}\lambda\geq\lambda_1$.

(2). $\exists$对应于λ_1的特征函数w_1. $w_1\geq 0$ in U

(3). λ_1是单重特征值. 即 若u满足 $\begin{cases} Lu=\lambda_1 u & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的解. 则u为w_1的倍数

$\square$