Ch12 非线性波方程

§12.1 能量守恒与有限传播速度

本章考虑如下形式的波方程:

$$(*)\begin{cases}\partial_{tt}u-\Delta u+f(u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^d\times[0,\infty)\\ \cancel{u(0)=g,\quad \partial_t u(0)=h} & \cancel{\text{in } \mathbb{R}^d\times\{0\}}\end{cases}$$

f may be $f(u)$ or $f(Du,u_t,u)$.

令 $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi \quad x\in\mathbb{R}$.

则 $F(0)=0$. $F'(x)=f(x)$

Thm 12.1.1 (能量守恒)

设 u 为 $(*)$ 的光滑解. 且 $u(\cdot,t)$ 支集是紧的, 则 $E(t):=\int \frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)\,dx$ 是常数 (即与 t 无关)

证明: $\partial_t^2 u-\Delta u+f(u)=0$.

两边乘 u_t. 并对 x 积分有: $\int u_t(u_{tt}-\Delta u+f(u))\,dx=0$

第2项分部积分

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u_t^2\,dx+\int \nabla u_t\cdot\nabla u\,dx+\frac{d}{dt}\int F(u)=0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+F(u)dx\right)=0$$ 证毕! □

Thm 12.1.2 (有限传播速度).

固定 $x_0\in\mathbb{R}^d$, $t_0>0$. 定义 (x_0,t_0) 处的

倒向光锥 $K(x_0,t_0):=\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0.\ |x-x_0|\le t_0-t\}$

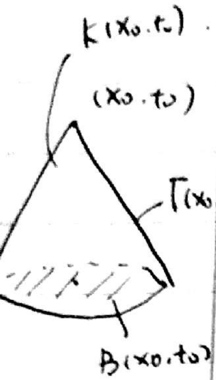
边界 $\Gamma(x_0,t_0):=\{(x,t)\mid 0\le t\le t_0,\ |x-x_0|=t_0-t\}$

设 u 为 $(*)$ 的光滑解. 则

(1) $\forall (x_0,t_0)\in\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(x_0,t_0)}\frac{1}{2}\left|\partial_t u\cdot\vec{n}-Du\right|^2+F(u)\,dS=e(0).$$

其中 $\vec{n}:=\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$. $e(t):=\int_{B(x_0,t_0-t)}\frac{1}{2}((\partial_t u)^2+|Du|^2)+F(u)\,dx \quad 0\le t\le t_0$



(2) 若 $F\geq 0$ 且在 $B(x_0,t_0)$ 中, $u(\cdot,0)=u_t(\cdot,0)=0$. 则 $u\equiv 0$ in $K(x_0,t_0)$.

其中 (1) 中的左边称作通过边界 $\Gamma(x_0,t_0)$ 的能量流 (Energy Flux).

<u>证明</u>: (1).

$$e(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)+F(u)\,dx.$$

$$\Rightarrow e'(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)}\partial_t u\cdot\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla u_t+f(u)\partial_t u\,dx$$

$$-\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)+F(u)\,dS$$

~~第2项~~ 第一个积分=0 (对第2项分部积分再代入方程) + 一个边界项.

$$=\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}_{=\nabla u\cdot\vec{n}}\cdot u_t-\frac{1}{2}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)-F(u)\,dS.$$

$$=-\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{1}{2}|u_t\vec{n}-\nabla u|^2+F(u)\,dS$$

从 0 到 t_0 积分: → 在将 $\int_0^{t_0}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}$ 换成 $\int_{\Gamma(x_0,t_0-t)}$ 时出现

$$\Rightarrow \underbrace{e(t_0)}_{=0}-e(0)=-\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\Gamma(x_0,t_0)}\frac{1}{2}|u_t\vec{n}-\nabla u|^2+F(u)\,dS.$$

(因积分区域是一个点)

$$\Rightarrow e(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(x_0,t_0)}\frac{1}{2}|u_t\vec{n}-\nabla u|^2+F(u)\,dS.$$

(2). 若 $u(0)=\partial_t u(0)=0$ on $B(x_0,t_0)$ $\Rightarrow F(0)=0$

$\Rightarrow e(0)=0$

又 $F\geq 0$ ∴ $e'(t)\leq 0$ $\Rightarrow e(t)\equiv 0$

$\Rightarrow \nabla u=0,\ u_t=0$ $\Rightarrow u=0$ in $K(x_0,t_0)$

□

上述讨论表明，对非线性项形如$f(u)$时，波方程有能量守恒．但对一般的拟线性波方程

(#): $\partial_t^2 u - \Delta u + f(\nabla u, u_t, u) = 0$ 而言，

能量守恒不再成立，但仍具有有限传播速度．

Thm 12.1.3 若 $\begin{cases} f(0,0,0)=0 \\ u(\cdot,0)=0=\partial_t u(\cdot,0) \quad \text{in } B(x_0,t_0) \end{cases}$ 且 u 为(#)的 C^∞ 解．

则 u 在 $K(x_0;t_0)$ 中恒为0．

证明：令 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\,dx \qquad 0\le t\le t_0$

$$\Rightarrow E'(t)=\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt}+\nabla u\cdot\nabla u_t+u\cdot u_t\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\,dS.$$

第一个积分第2项分部积分得

$$\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t(u_{tt}-\Delta u+u)\,dx$$

$$+\underbrace{\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}\frac{\partial u}{\partial n}u_t\,dS}_{\text{这项}\ \le\ \frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)}|\nabla u|^2+u_t^2\,dS}-\frac{1}{2}\int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\,dS$$

故上式后两项加起来 ≤ 0

$$\le \int_{B(x_0,t_0-t)} u_t\big(u-f(\nabla u,u_t,u)\big)\,dx.$$

由 $f(0,0,0)=0$． $u\in C^\infty$ 有 $|f(\nabla u,u_t,u)|\le C(|\nabla u|+|u_t|+|u|)$.

$$\Rightarrow E'(t)\le C\int_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\,dx = C\,E(t)$$

$E(0)=0$． 由 Gronwall 不等式 $\Rightarrow E(t)\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$ in $K(x_0,t_0)$

□

§12.2 拟线性方程解在Sobolev空间中的存在性.

考虑初值问题

$$(\#)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(\nabla u, u_t, u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,T] \\ u(0) = g \quad u_t(0) = h & \text{on } \mathbb{R}^d \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Thm 12.2.1.

$f(0,0,0)=0$. $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是Lipschitz连续的. 设初值 $g \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. 则 $\forall T>0$, $\exists !$ 解 $u \in L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}^d))$ with $u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^d))$ 满足IVP (#).

证明. 设齐次波方程 $(\square = \partial_t^2 - \Delta)$

$$\begin{cases} \square u = 0 \\ u(0) = g \quad u_t(0) = h \end{cases}$$ 的解为 $S(t)(g,h)$

则 $S(t)(g,h) = \cos(t\sqrt{-\Delta})\, g + \dfrac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\, h.$

i.e. $\hat{u}(\xi) = \cos(t|\xi|)\hat{g}(\xi) + \dfrac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{h}(\xi)$

再由Du'Hamel原理, 知原方程(#)的解为

$$u(x,t) = S(t)(g,h) - \int_0^t S(t-\tau)\big(0, f(u_t, \nabla u, u)\big)\, d\tau.$$

设 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. $\chi \begin{cases} \equiv 1 & \text{in } B(0,R) \\ \equiv 0 & \text{in } B(0,2R)^c. \end{cases}$ $0 \le \chi \le 1$

则 $\chi g \in H^1(\mathbb{R}^d)$. $\chi h \in L^2(\mathbb{R}^d)$

下面用压缩映射原理证明方程解存在唯一.

令 $X_T = \{u : \sup\limits_{0 \le t \le T} \|u\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2 \le 2\|g\|_{H^1}^2 + 2\|h\|_{L^2}^2\}$

$\Phi: u \longmapsto S(t)(g,h) - \int_0^t S(t-\tau)\big(0, f(u_t, \nabla u, u)\big)\, d\tau$

① $\Phi(X_T) \subseteq X_T$.

先估计齐次项 $S(t)(g,h)$

$\|S(t)(g,h)\|_{H^1 \times L^2}^2 = \cancel{\|u\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{L^2}^2}$ ↑有界乘子

Plancherel $\|\cos(t|\xi|)\langle\xi\rangle\hat{g}(\xi)\|_{L^2}^2 + \left\|\dfrac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{h}(\xi)\right\|_{L^2}^2$

$\le \|g\|_{H^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2$

又因 $\|\cos(t\sqrt{-\Delta})g\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2}$

所以有：$\|S(t)(g,h)\|_{H^1\times L^2} \le \|g\|_{H^1}+\|h\|_{L^2}$.

下面估计 非齐次项：

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t S(t-\tau)\,(0,\ f(u_t,\nabla u,u))\,d\tau\right\|_{H^1}$$

$$\overset{\text{由Minkowski}}{\le} \int_0^T \|S(t-\tau)(0,f(u_t,\nabla u,u))\|_{H^1\times L^2}\,d\tau.$$

$$\overset{\text{同上面齐次项估计}}{\le} \int_0^T \|0\|_{H^1}+\|f\|_{L^2}\,d\tau.$$

$$= \int_0^T \|f(u_t,\nabla u,u)\|_{L^2}\,d\tau$$

$$\underset{f(0,0,0)=0}{\overset{f\ \text{Lipschitz}}{\le}} \int_0^T \big\||u_t|+|\nabla u|+|u|\big\|_{L^2}\,d\tau.$$

$$\le CT\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_t\|_{L^2}+\|\nabla u\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\right)$$

$$\le CT\left(\|g\|_{H^1}+\|h\|_{L^2}\right)$$

∴ 取 $CT<1$ 即有 $\Phi(X_T)\subset X_T$.

② $\Phi: X_T\to X_T$ 是压缩映像.

设 $u,v\in X_T$.

$$\Phi(u)-\Phi(v)=\int_0^t S(t-\tau)\left(0,\ f(\nabla u,u_t,u)-f(\nabla v,v_t,v)\right)d\tau$$

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{H^1\times L^2} \underset{\text{同①证明}}{\le} \int_0^T \|f(\nabla u,u_t,u)-f(\nabla v,v_t,v)\|_{L^2}\,d\tau$$

$$\le \int_0^T \|\nabla u-\nabla v\|_{L^2}+\|u_t-v_t\|_{L^2}+\|u-v\|_{L^2}\,d\tau$$

$$\le CT\left(\sup_{0\le t\le T}\|u-v\|_{H^1}+\|u_t-v_t\|_{L^2}\right)$$

取 $CT<\frac{1}{2}$ 即知.

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{H^1\times L^2} \le \frac{1}{2}\|u-v\|_{H^1\times L^2}.$$

$\Phi: X_T\to X_T$ 是压缩映像. 由压缩映像原理知

$\exists!$ 不动点 u. $\Phi(u)=u$ $\Rightarrow$ 当 $T<\frac{1}{2C}$ 时，方程存在唯一解 u.

③ 最后我们要证 ~~∀T>0~~ 均 对一般的 $T>0$ 也有对应的唯一解.

~~不妨设 $T<1$. 设 $S=R-1$. 对 $B(0,S)\times[0,T]$ 内的解, 完全依赖于 $B(0,S+1)\subset\subset B(0,R)$ 中的初值 g, h.~~

~~当 $R'>R$ 时~~

$\forall \tilde{R}>R$ 我们仍可以构造 $B(0,\tilde{R})$ 上的解 $\tilde{u}$, 使 $\tilde{u}=u$ in $B(0,R)$.

这里由于波方程的有限传播速度这一性质. 由此性质就有

$B(0,R)\times[0,T]$ 内的解, 完全依赖于 $B(0,\tilde{R})$ 中的初值.

于是, $\forall\ \mathbb{R}^d$ ~~$\times[0,T]$~~ 的紧子集 K, 都存在 K 上的短时间解 u.

下面再通过将 $[0,T]$ (这个 $T<\frac{1}{2C}$) 上的解延拓到任一 $[0,T]$ 中.

这只要取 T 为初值 (因 $\|u\|_{H^1\times L^2}\le\|g\|_{H^1}+\|h\|_{L^2}$), 再将

方程往后演化 T 时间, 得 $[T,2T]$ 上的解. 此后不断重复即可.

可行性由 T 时刻 $\|u\|_{H^1\times L^2}\le\|g\|_{H^1}+\|h\|_{L^2}$ 保证. □

将 f 的 Lipschitz 条件去掉, 我们证明短时间的局部解存在.

Thm 12.2.2 设 $f:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 光滑, $f(0,0,0)=0$.

设 $g\in H^k(\mathbb{R}^d)$, $h\in H^{k-1}(\mathbb{R}^d)$ $\quad k>\frac{d}{2}+1$.

则 $\exists T>0$ s.t. IVP

$$(\#)\begin{cases}\Box u+f(\nabla u,u_t,u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^d\times(0,T]\\ u(0)=g,\ u_t(0)=h & \text{on } \mathbb{R}^d\times\{0\}\end{cases}$$

存在唯一解 $u\in L^\infty(0,T;H^k(\mathbb{R}^d))$, $u'\in L^\infty(0,T;H^{k-1}(\mathbb{R}^d))$

证明: 方程的解为:

$$u(t,x)=S(t)(g,h)-\int_0^t S(t-\tau)\,(0,f(\nabla u,u_t,u))\,d\tau.$$

其中 $S(t)(g,h)=\cos(t\sqrt{-\Delta})\,g+\dfrac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}\,h$.

令 $X_T=\left\{u:\operatorname{esssup}_{0\le t\le T}\left(\|u_t\|_{H^{k-1}}+\|u\|_{H^k}\right)\le 2\|g\|_{H^k}+2\|h\|_{H^{k-1}}\right\}$

$$\Phi: u\longmapsto S(t)(g,h)-\int_0^t S(t-\tau)\,(0,f(\nabla u,u_t,u))\,d\tau.$$

与12.2.1一样，我们证明 $\Phi: X_T \to X_T$ 是压缩映像

① $\Phi(X_T) \subseteq X_T$.

$\forall u \in X_T$

$\Phi(u) = S(t)(g,h) + \int_0^t S(t-\tau)(0, f)\,d\tau.$

$\|S(t)(g,h)\|_{H^k \times H^{k-1}} = \|\cos(t\sqrt{-\Delta})g\|_{H^k} + \|\frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}h\|_{H^{k-1}}.$

$= \|\cos(t|\xi|)\hat{g}\langle\xi\rangle^k\|_{L^2} + \|\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{h}\langle\xi\rangle^{k-1}\|_{L^2}$

此项系数与t有关.

所以考虑.

$|\xi| \geq 1$ 时. 上式 $\leq \|\langle\xi\rangle^k \hat{g}\|_{L^2} + \|1\langle\xi\rangle^{k-1}\hat{h}\|_{L^2}$

$= \|g\|_{H^k} + \|h\|_{H^{k-1}}$

$|\xi| < 1$ 时. 由于 $\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \leq t$. $\langle\xi\rangle^{k-1} \leq 1$

故 上式 $\leq t(\|g\|_{H^1} + \|h\|_{L^2})$.

于是: $\|S(t)(g,h)\|_{H^k \times H^{k-1}} \leq \|g\|_{H^k} + \|h\|_{H^{k-1}} + t(\|g\|_{H^1} + \|h\|_{L^2})$

$\leq C_T(\|g\|_{H^k} + \|h\|_{H^{k-1}})$

下面估计 $\|\int^t S(t-\tau)(0,f)\,d\tau\|_{H^{k-1}}$.

我们只考虑最高阶导数的情况，即 $\dot{H}^{k-1}$ 范数. 低阶是同理的.

$\|\int_0^t S(t,\tau)(0, f(u_t, \nabla u, u))\,d\tau\|_{\dot{H}^{k-1}}$

$\leq \int_0^T \|f(u_t, \nabla u, u)\|_{\dot{H}^{k-1}}\,d\tau = \int_0^T \|\nabla^{k-1} f(u_t, \nabla u, u)\|_{L^2}\,d\tau.$

$\nabla^{k-1} f(u_t, \nabla u, u) = \nabla^{k-2}(\nabla f(u_t, \nabla u, u))$

$= \nabla^{k-2}(f'(u_t, \nabla u, u) ; (\nabla u_t, \nabla^2 u, \nabla u))$

$\cancel{= \sum_\alpha C_\alpha f^{(|\alpha|)}(u_t, \nabla u, u)(\nabla^{k-\alpha_1} u_t, \nabla^{k-\alpha_2} u, \nabla^{k-\alpha_3} u)}$

$= \cdots$. 写开来是一些形如 $C_\alpha f^{(\alpha)} \partial^{\beta_1} u_t \partial^{\beta_2} u$ 的求和.

~~每一项~~ $\cancel{C_\alpha f^{(\alpha)} \partial^{\beta_1} u_t \partial^{\beta_2} u}$ ~~的~~ $\cancel{L^2}$ ~~norm~~ $\cancel{= \| C(\alpha, \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}) \| |\xi|^{\beta_1} \hat{u}_t \, |\xi|^{\beta_2} \hat{u} \|_{L^2}}$

$\cancel{\leq_{\beta_1+\beta_2 \leq k} \|\langle\xi\rangle^k}$

(不是很严格地).

每个 $\|C_\alpha f^{(\alpha)}\partial^{\beta_1}u_t\partial^{\beta_2}u\|_{L^2}$

$\le C(\alpha,\|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty})\cdot\|\partial^{\beta_1}u_t\,\partial^{\beta_2}u\|_{L^2}$ $(\beta_1+\beta_2\le k-1)$.

$= \underbrace{C(\alpha,\|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty})}_{=:\tilde C}\cdot\left\|\left(|\xi|^{\beta_1}\hat{u_t}\right)*\left(|\xi|^{\beta_2}\hat u\right)\right\|_{L^2}$.

$=\tilde C\left\|\int_{\mathbb R^d}\underbrace{|\eta|^{\beta_1}|\xi-\eta|^{\beta_2}}_{\lesssim|\xi|^{k-1}}\hat{u_t}(\eta)\,\hat u(\xi-\eta)\,d\eta\right\|_{L^2_\xi}$.

$\lesssim_{k,\alpha,\|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}}\left\|\int_{\mathbb R^d}|\xi|^{k-1}\hat u_t(\eta)\hat u(\xi-\eta)\,d\eta\right\|_{L^2_\xi}$

$\lesssim\left\||\xi|^{k-1}(\hat{u_t}*\widehat{\nabla u})(\xi)\right\|_{L^2}$.

$\lesssim\left\||\xi|^{k-1}\,\widehat{u_t\cdot\nabla u}\right\|_{L^2}$.

$=\|u_t\cdot\nabla u\|_{\dot H^{k-1}}$

$\overset{k>\frac d2+1}{\underset{H^k是代数}{\lesssim}}\|u_t\|_{H^{k-1}}\|u\|_{H^k}\lesssim\|u_t\|^2_{H^{k-1}}+\|u\|^2_{H^k}$

$\le\|g\|^2_{H^k}+\|h\|^2_{H^{k-1}}$.

于是: $\left\|\int_0^t S(t-\tau)(u_t,\nabla u,u)\,d\tau\right\|_{H^{k-1}}$

$\le C_1T\left(\|g\|^2_{H^k}+\|h\|^2_{H^{k-1}}\right)$.

$\Rightarrow\|\Phi(u)\|_{X_T}\le C'T\left(\|g\|^2_{H^k}+\|h\|^2_{H^{k-1}}\right)$

取 $T<\frac12$ 即可.

② 中是压缩映像, 这与①是同理的.

从而 中∃! 不动点 $u\in L^\infty_tH^k_x$ with $u_t\in L^\infty_tH^{k-1}_x$.

成为方程的解

□

§12.3 3D非线性波方程（散焦、次临界）

考虑：

$$(*)\begin{cases} \Box u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u=g \\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^3\times\{0\} \end{cases}$$

$1\le p<5$，$g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$.

定义其能量为 $E(t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+\frac{|u|^{p+1}}{p+1}\,dy$.

Thm 12.3.1: $1<p<5$ 时，$(*)$ 有整体光滑解

在证明该定理之前，我们先证明一个短时间存在性的判定方法.

Lemma 12.3.2

对方程(#)：$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+f(u)=0 & \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u(0)=g;\ u_t(0)=h. & g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3). \end{cases}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 光滑

(1) $\exists T>0$ 及唯一解 u，其在 $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ 上存在

(2). 若极大存在时间 $T^*<+\infty$，则 $\lim\limits_{t\nearrow T^*}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}=+\infty$

证明：(1) 由上一节 H^k 存在性即得

(2) 反证：设 $\exists M>0$ s.t. $\sup\limits_{0\le t\le T^*}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\le M<+\infty$

则该解 u 可以延拓到 $(0,T^*+\varepsilon)$ 上.

令 $f_1(x)=f(x)\chi_{\{|x|<\frac{3M}{2}\}}$，由 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\le M$ 知，

(#)的解正好是 $\begin{cases}\Box v+f_1(v)=0 & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ v(0)=g,\ v_t(0)=h & g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)\end{cases}$ 的解.

但 f_1 是 Lipschitz 连续. 下证 有 $u\in L^\infty((0,T^*);H^2)$
$u_t\in L^\infty((0,T^*);H^1)$

考虑：$0=\langle (u-v)_t,\ u_{tt}-\Delta u+f_1(u)-v_{tt}+\Delta v-f_1(v)\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u-v\|_2^2+\|(u-v)_t\|_{L^2}^2+\|\nabla u-\nabla v\|_{L^2}^2\right)$$

$$=-\langle (u-v)_t,\ f_1(u)-f_1(v)\rangle$$

f Lip locally $|u|\le M$

$$\le C\left(\|(u-v)_t\|_{L^2}^2+\|u-v\|_{L^2}^2\right)$$

由 Gronwall 不等式知.

在 $t=T^*$ 时 $\|u-v\|_{L^2}^2 + \|\nabla u-\nabla v\|_{L^2}^2 = 0$ (因二个方程初值相同)

所以 u 可以像 v 一样向前续.

□

下面证明 $1<p<5$ 时的光滑整体解存在性.

<u>证明</u>: 由引理知, $\exists T>0$, 使得 $(*)$ 的解 u 在 $\mathbb{R}^3\times(0,T)$ 中存在.

我们要证: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3\times(0,T))} \le C(T)$ 某个与 T 有关的常数.

由 $u(t,x) = S(t)(g,h) - \int_0^t S(t-\tau)(0,|u|^{p-1}u)\,d\tau$.

第一项是齐次方程的解, 由 $g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 及有限传播速度知.

$S(t)(g,h)$ 是 $\mathbb{R}^3\times[0,T]$ 上的有界光滑函数. 所以只用估计第2项

$$\int_0^t S(t-\tau)\,(0,|u|^{p-1}u)\,d\tau$$

Evans Ch2 Kirchoff公式

$$= \int_0^t \int_{S^2} (|u|^{p-1}u)(\tau, x-(t-\tau)\sigma)\,d\sigma\,(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{B(x,t)} \frac{1}{|x-y|}(|u|^{p-1}u)(y, t-|x-y|)\,dy$$

令 $u^*(y) = u(y, t-|y-x|)$

$$\Rightarrow \text{上式} = \int_{B(x,t)} \frac{|u^*|^{p-1}|u^*|}{|x-y|}(y, t-|x-y|)\,dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_{B(x,t)} \frac{|u^*|^2}{|x-y|^2}\,dy\right)^{\frac12}\left(\int_{B(x,t)} |u^*|^{2p-2}\,dy\right)^{\frac12} \quad \cdots (**)$$

第一个积分, 我们考虑使用 Hardy 不等式.

$$\int_{B(x,t)} \frac{|u^*|^2}{|y-x|^2}\,dy \le C\int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2 + \frac{|u^*|^2}{t^2}\,dy \quad \cdots ①$$

由 $u^*(y) = u(y, t-|y-x|)$ 知. $\nabla u^* = \nabla u - \underbrace{\nu}_{\nu=\frac{y-x}{|y-x|}}\cdot u_t$.

由 Thm 12.1.2 知

$$\int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2\,dy = \int_{B(x,t)} |\nabla u - \nu\cdot u_t|^2\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\int_{\Gamma(x,t)} |\nabla u - u_t\nu|^2\,dS \le E(u) \quad \cdots ②$$

又由 Poincaré 不等式 ($\|u-\langle u\rangle_{B(x,t)}\|_{L^p(B(x,r))} \lesssim r\cdot \frac{\|\nabla u\|_{L^p(B(x,r))}}{\cancel{\|u-\langle u\rangle\|}}$) 知。

$$\int_{B(x,t)} |u^* - \langle u^*\rangle_{x,r}|^2 dy \lesssim t^2 \int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2 dy$$

左边拆括号，移项有

$$\int_{B(x,t)} (u^*)^2 dy \le Ct^2 \int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2 dy + 2\int_{B(x,t)} u^* \langle u^*\rangle_{x,r} dy$$

$$- \int_{B(x,t)} \langle u^*\rangle_{x,r}^2 dy$$

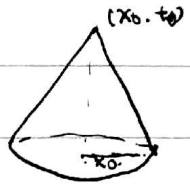
带 ε Young 不等式

$$\le Ct^2 \int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2 dy + \varepsilon \int_{B(x,t)} (u^*)^2 dy$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{B(x,t)} \langle u^*\rangle_{x,r}^2 dy - \int_{B(x,t)} \underbrace{\langle u^*\rangle_{x,r}^2}_{\text{与 } y \text{ 无关}} dy$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 有

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2}\int_{B(x,t)} (u^*)^2 dy \le C\left(\int_{B(x,t)} |\nabla u^*|^2 dy + t\,|\langle u^*\rangle_{x,t}|^2\right) \quad \cdots ③$$



下面估计 $|\langle u^*\rangle_{x,t}| = \left|\frac{1}{|B(x,t)|}\int_{B(x,t)} u\, dx\right|$

$$\lesssim \frac{1}{t^3} \int_{P(x,t)} |u|\, ds.$$

$$\lesssim \frac{1}{t^3}\left(\int_{K(x,t)} |u_t|\, dy\, ds + \int_{B(x,t)} |g|\, dy\right)$$

$$\lesssim \frac{1}{t^3}\left(\int_{K(x,t)} |u_t|^2 dy\, ds\right)^{\frac12} |K(x,t)|^{\frac12} + C\|g\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim \frac{E(0)^{\frac12}}{t^{\frac12}} + \|g\|_{L^\infty} \quad \cdots ④$$

由 ① ~ ④ 知：

$$|I(x,t)| \lesssim \left(\int_{B(x,t)} |u|^{2(p-1)} dy\right)^{\frac12}$$

(1°) $1 < p \le 4$ 时. $2(p-1) \le 6 = 2^*$. 由 Sobolev 嵌入定理

$$\|(u^*)^{p-1}\|_{L^2(B(x,t))} \lesssim \|u^*\|_{H^1(B(x,t))}^{p-1} \le C.$$

$$\Rightarrow |u(x,t)| \le C.$$

(2) $4<p<5$ 时. $2(p-1)=2(p-4)+2^*$

$$\Rightarrow |I(x,t)| \le C\left(\int_{B(0,t)} |u^*|^{2(p-1)}dy\right)^{\frac12}.$$

$$= C\left(\int_{B(0,t)} |u^*|^{2(p-4)}|u^*|^{2^*}dy\right)^{\frac12}$$

$$\le C\|u^*\|_{L^\infty}^{p-4}\left(\int_{B(0,t)} |u^*|^{2^*}dy\right)^{\frac12}$$

$$\le C\|u^*\|_{L^\infty}^{p-4}\|u^*\|_{H^1}$$

$$\lesssim \|u^*\|_{L^\infty}^{p-4}$$

$$\therefore |u(x,t)| \lesssim 1+\|u^*\|_{L^\infty}^{p-4} \lesssim \|u^*\|_{L^\infty}$$

□

§12.4: 能量临界 3D NLW.

考虑初值问题

$$(*)\quad\begin{cases}\Box u + u^5 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)\\ u=g,\ u_t=h & \text{on } \mathbb{R}^3\times\{t=0\}\end{cases}\qquad g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$$

能量 $E(t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac12(u_t^2+|\nabla u|^2)+\frac{u^6}{6}\,dy$.

首先是方程的线性估计:

Thm 12.4.1 设 v 是初值问题 $\begin{cases}\Box v=f & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)\\ v(0)=g,\ \partial_t v(0)=h & \text{on } \mathbb{R}^3\times\{t=0\}\end{cases}$

则 $\forall T>0$

$$\|v\|_{L_t^\infty L_x^6([0,T]\times\mathbb{R}^3)}+\|v\|_{L_t^4L_x^{12}} \lesssim_T \|g\|_{\dot H^1}+\|h\|_{L^2}+\|f\|_{L_t^1L_x^2}$$

证明见: Christopher D. Sogge, Hans Lindblad: On Existence and Scattering with Minimal Regularity for Semilinear Wave Equations, ~~1995~~. Journal of Functional Analysis, 1995. (定理 3.2).

□.

下面对非线性项 u^6 进行估计.

~~定义函数中(s)~~

给定 $(x_0,T)\in\mathbb{R}^3\times(0,\infty)$, $0<s<T$, 定义函数 $\phi(s)=\phi(s,x_0;T):=$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(x_0,t_0)\cap\{s\le t<T\}}\frac12|u_t\nu-\nabla u|^2+\frac{u^6}{6}\,dS$$ 为时间 $s\to T$ 内,流过 $\Gamma(x_0,t_0)$ 的能量.

Thm 12.4.2 设 u 为 $\Box u+u^5=0$ 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T)$ 的光滑解, 则

$$\int_{B(x_0,T-s)}u^6\,dx\le C\phi(s)^{\frac13}.\qquad\forall x_0\in\mathbb{R}^3,\ \forall s\in[0,T).$$

Rmk: 这表明 能量密度 $\frac12(u_t^2+|\nabla u|^2)+\frac{u^6}{6}$ 不可能在 (x_0,T) 附近凝聚.

证明: 不妨 $x_0=0$ $s=0$.

对 $\Box u+u^5=0$. 由Noether定理结论知.

~~乘~~ 方程~~两边~~乘以 $m:=(t-T)u_t+(x\cdot\nabla u)+u$

可得 $\partial_t p-\operatorname{div}\vec{q}=-\frac{u^6}{3}$ $\cdots$ ①

$p:=(t-T)\left(\frac{u_t^2+|\nabla u|^2}{2}+\frac{u^6}{6}\right)+(x\cdot\nabla u)u_t+uu_t$

$q=\left((t-T)u_t+(x\cdot\nabla u)+u\right)\nabla u+\left(\frac{u_t^2-|\nabla u|^2}{2}-\frac{u^6}{6}\right)x$

这个圆台有3部分边界.
$B(0,\tau)$ (顶)
$B(0,T)$ (底)
$\Gamma(0,T)\cap\{0\le t\le\tau\}$ (边上一圈)

① 两边 在 $K(0,T)\cap\{0\le t\le\tau\}$ 积分.

$$\int_{K(0,T)\cap\{0\le t\le\tau\}}\left(-\frac{u^6}{3}\right)dx\,dt=\int_{K(0,T)\cap\{0\le t\le\tau\}}\partial_t p-\nabla_x\cdot\vec{q}\ \underbrace{dx\,dt}_{\text{看成乘积测度}}.\cdots ②$$

$$\overset{\text{Gauss-Green公式}}{=}\underbrace{\int_{B(0,T-\tau)}p(\overset{\text{时刻}\tau}{\tau},\cdot)\,dx}_{\text{圆台的顶}}-\underbrace{\int_{B(0,T)}p(\overset{\text{时刻}0}{0},\cdot)\,dx}_{\text{底}}$$

~~分部积分~~

$$+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{换元换出来的 (倾角45°)}}\int_{\Gamma(0,T)\cap\{0\le t\le\tau\}}p-\vec{q}\cdot\vec{n}\ \underbrace{dS}_{\text{斜面的}dS,\text{ 所以会出}\sqrt2}\qquad \vec{n}=\frac{x}{|x|}$$

令 $t\to T$. 圆台顶端那项 $\longrightarrow 0$

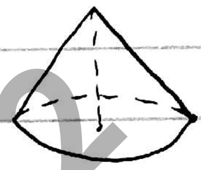
从而 $$0\ge-\int_{K(0,T)}\frac{u^6}{3}\,dx\,dt=\frac{1}{\sqrt2}\int_{\Gamma(0,T)}p-\vec{q}\cdot\vec{n}\,dS-\int_{B(0,T)}p(\cdot,0)\,dx$$
$$=:I_1-I_2\quad\cdots ①$$

(14)

全A

$\boxed{\text{Claim:}}$ $$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma(0,T)} (t-T) \left| u_r - u_t + \frac{u}{|x|} \right|^2 dS + \frac{1}{2} \int_{\partial B(0,T)} u^2(\cdot,0)\, dS$$

其中 $u_r = \frac{\nabla u \cdot x}{|x|}$.



先算 $p - \vec{q} \cdot \vec{\nu}$

$$= (t-T)\left(\frac{u_t^2 + |\nabla u|^2}{2} + \frac{u^6}{6}\right) + (x \cdot \nabla u)\, u_t + u u_t$$

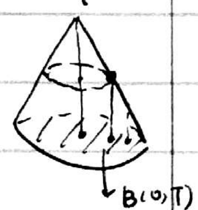
$$\cancel{百} - \left((t-T) u_t + (x \cdot \nabla u) + u\right) \frac{(\nabla u \cdot x)}{|x|} \cancel{+} \left(\frac{u_t^2 - |\nabla u|^2}{2} - \frac{u^6}{6}\right) \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{|x|}$$

$|x| = T - t$ on $\Gamma(0,T)$

$$= -\left(\cancel{\frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2}} + \cancel{\frac{u^6}{6}}\right)|x| + \cancel{(x \cdot \nabla u) u_t} (x \cdot \nabla u) u_t + u u_t$$

$$+ u_t (\nabla u \cdot x) + (\nabla u \cdot x)^2 + \frac{u}{|x|}(\nabla u \cdot x) - \frac{u_t^2 - \cancel{|\nabla u|^2}}{2} |x| + \cancel{\frac{u^6}{6}|x|}$$

$$= -|x| \left(|u_t|^2 - 2(\nabla u \cdot x) u_t + (\nabla u \cdot x)^2\right) + \cancel{u (\nabla u \cdot x)}\ u\left(u_t - \frac{(\nabla u \cdot x)}{|x|}\right).$$



$$= -|x| (u_t - u_r)^2 + u(u_t - u_r) \quad \text{on } \Gamma(0,T)$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma(0,T)} -|x|(u_t - u_r)^2 + u(u_t - u_r)\, dS \quad \cdots ③$$

令 $u^*(y) = u(y, T - |y|)$ 从 $\partial_y |y|$ 而来.

$$u_r^*(y) := \nabla u^* \cdot \frac{y}{|y|} = \nabla u \cdot \frac{y}{|y|} - \partial_t u \cdot \left(\frac{\vec{y}}{|y|} \cdot \frac{\vec{y}}{|y|}\right)$$

$$= \cancel{u_t - u_r}\ u_r - u_t.$$

所以 ③ $$= -\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{B(0,T)} |y| (u_r^*)^2 + u^* u_r^*\, dy.$$

$$= -\int_{B(0,T)} |y| \left((u_r^*)^2 + 2\frac{u^* u_r^*}{|y|} + \frac{(u^*)^2}{|y|^2}\right) dy + \int_{B(0,T)} \frac{(u^*)^2}{|y|} + u^* u_r^*\, dy$$

$\operatorname{div}\left(\frac{y}{|y|}\right) = \frac{2}{|y|}$ in $\mathbb{R}^3$

$$= -\int_{B(0,T)} |y| \left(u_r^* + \frac{u^*}{|y|}\right)^2 dy + \int_{B(0,T)} \frac{(u^*)^2}{|y|} + u^* u_r^*\, dy$$

$$= -\int_{B(0,T)} |y| \left(u_r^* + \frac{u^*}{|y|}\right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\partial B(0,T)} (u^*)^2 dS - \int_{B(0,T)} u^* u_r^*\, dy$$

$$+ \int_{B(0,T)} u^* u_r^*\, dy.$$

第2个积分第1项分部积分

$$= -\int_{B(0,T)} |y|\left(u_r^* + \frac{u^*}{|y|}\right)^2 dy + \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,T)} (u^*)^2\, dS.$$

$\partial B(0,T)$ ↳ 底面的边

换回x坐标. $$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(0,T)} (t-T)\left|u_r - u_t + \frac{u}{|x|}\right|^2 dS + \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,T)} u^2(\cdot,0)\, dS.$$

claim 1 获证. ∎

$\boxed{\text{Claim 2:}}$ $$I_2 = \int_{B(0,T)} p(\cdot,0)\,dx \le -T\int_{B(0,T)} \frac{u^6}{6}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,T)} u^2(\cdot,0)\,dS.$$

直接计算:

$$I_2 = \int_{B(0,T)} p(\cdot,0)\,dx = \int_{B(0,T)} (-T)\left(\frac{u_t+|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^6}{6}\right) + (x\cdot\nabla u + u)u_t\, dx.$$

· 当 $|x| \le T$ 有

$$|(x\cdot\nabla u + u)u_t| \le \frac{Tu_t^2}{2} + \frac{1}{2T}(\nabla u\cdot x + u)^2.$$

$$= \frac{Tu_t^2}{2} + \frac{|x|^2}{2T}\left(\frac{\nabla u\cdot x}{|x|} + \frac{u}{|x|}\right)^2.$$

$$\overset{|x|\le T}{\le} \frac{Tu_t^2}{2} + \frac{T}{2}\left(\frac{(\nabla u\cdot x)^2}{|x|^2} + \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{2(\nabla u\cdot x)u}{|x|^2}\right)$$

只动第一项 $$\le \frac{Tu_t^2}{2} + \frac{T}{2}\left(\nabla u\cdot\nabla u + \left(\frac{x}{|x|^2}\cdot\frac{x}{|x|^2}\right)u^2 + 2\left(\nabla u\cdot\frac{x}{|x|^2}\right)u\right)$$

配方 $$= \frac{Tu_t^2}{2} + \frac{T}{2}\left|\nabla u + \frac{x}{|x|^2}u\right|^2.$$

从而 $$I_2 \le -T\int_{B(0,T)} \frac{u^6}{6}\,dx + \frac{T}{2}\int_{B(0,T)} \left|\nabla u + \frac{x}{|x|^2}u\right|^2 + \cancel{\frac{Tu_t^2}{2T}} - (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx$$

$$= -T\int_{B(0,T)} \frac{u^6}{6}\,dx + \frac{T}{2}\int_{B(0,T)} \left|\nabla u + \frac{x}{|x|^2}u\right|^2 - |\nabla u|^2\, dx.$$

拆掉平方项, $|\nabla u|^2$消了
$$= -T\int_{B(0,T)} \frac{u^6}{6}\,dx + \frac{T}{2}\int_{B(0,T)} \frac{u^2}{|x|^2} + \frac{2}{|x|}uu_r\, dx.$$

~~这又变成了~~ 由于 $\mathrm{div}\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{1}{|x|^2}$ in $\mathbb{R}^3$, 我们又可以化成上面的计算. ⇒

类似，可得

$$I_2 \le -T\int_{B(0,T)} \frac{u^6}{6}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B(0,T)} u^2(\cdot,0)\,dS.$$ claim 2 获证

由这2个 claim 知：

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(0,T)} (t-T)\left|u_r - u_t + \frac{u}{|x|}\right|^2 dS + T\int_{B(0,T)}\frac{u^6}{6}\,dx$$

$$\overset{②式}{=} -\int_{K(0,T)}\frac{u^6}{3}\,dx \le 0$$

$$\Rightarrow T\int_{B(0,T)}\frac{u^6}{6}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(0,T)} (T-t)\left|u_r - u_t + \frac{u}{|x|}\right|^2 dS$$

$$\le \sqrt{2}\int_{\Gamma(0,T)} (T-t)\left(|u_r-u_t|^2 + \frac{u^2}{|x|^2}\right) dS$$ 放掉一个 x.

$$\le CT\underbrace{\phi(0)}_{\begin{subarray}{c}\| \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(0,T)}\frac{1}{2}|u_{t}r - \nabla u|^2 ds + \underbrace{\frac{u^6}{6}ds}_{\ge 0}\end{subarray}} + C\int_{\Gamma(0,T)}\frac{u^2}{|x|}\,dS$$

T-t 放缩而来.

因 $T-t \le |x|$

所以这项是硬塞加上去的.

Hölder

$$\le CT\phi(0) + C\underbrace{\left(\int_{\Gamma(0,T)} u^6\, ds\right)^{\frac13}}_{\lesssim\, \phi(0)}\underbrace{\left(\int_{\Gamma(0,T)} |x|^{-\frac32}\, ds\right)^{\frac23}}_{=\, CT^{3/2}}.$$

$$\Rightarrow \int_{B(0,T)} u^6\,dx \lesssim C\,\phi(0)^{\frac13}.$$

从而 $S=0$，得证，$S\ne 0$ 类似，omit.

□

下面可以证明3D能量临界NLW的解的存在性.

Thm 12.4.3

考虑方程 (*) $\begin{cases} \Box u + u^5 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty) \\ u(0)=g,\ \partial_t u(0)=h & \text{in } \mathbb{R}^3\times\{0\} \end{cases}$

设 $g,h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 则 (*) 存在唯一~~解~~整体光滑解

证明：设 $0<T<\infty$ 则 (*) 在 $\mathbb{R}^3\times[0,T)$ 上，存在紧支光滑解 u.

我们若能证明 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^3;[0,T))$，就可以由lem 12.3.2得出 u 在时间T之后的光滑延拓

~~Step 1:~~

Claim: $u\in L^4(0,T;L^{12}(\mathbb{R}^3))$.

若claim成立，我们证明 $u\in L_t^\infty L_x^\infty(\mathbb{R}^3\times[0,T))$.

由 $\Box u+u^5=0$ 知 $\Box(\nabla u)+5u^4(\nabla u)=0$

从而由Thm 12.4.1 知：$\forall \tau\in[0,T]$

$$\|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^6([0,\tau]\times\mathbb{R}^3)} \le C + C\int_0^\tau \|u^4\nabla u\|_{L^2}\,dt$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \quad \overset{\text{Hölder}}{\le} C+C\int_0^\tau \|u\|_{L^{12}}^4\|\nabla u\|_{L^6}\,dt$$

$$\le C+C\|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^6}\int_0^\tau\|u\|_{L^{12}}^4\,dt$$

$$\le C+\frac{1}{2}\sup_{0\le t\le\tau}\|\nabla u\|_{L^6}$$

这一步是让 $\tau>0$ 充分小，使 $\int_0^\tau \|u\|_{L^{12}}^4\,dt \le \delta := \frac{1}{2C}$ (由积分的绝对连续性)

由 $u\in L_t^4L_x^{12}$ 知，$\exists \tau=\frac{T}{m}>0$ (for some $m\in\mathbb{Z}_+$) s.t.

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\|u\|_{L^{12}}^4\,dt\le\delta \qquad 1\le k\le m-1.$$

从而在 $[0,\tau]$, $[\tau,2\tau]$, …, $[(m-1)\tau,T)$ 上不断重复，有

$$\|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^6([0,T)\times\mathbb{R}^3)}\le C.$$

由 u 紧支 知 $\|u\|_{L_t^\infty L_x^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)}\le C.$

下面证明 $u\in L_t^4L_x^{12}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$

证明的思路是：① $u\in L_t^4L_x^{12}([0,T),B(x_0,T-t))$

② $u\in L_t^4L_x^{12}([0,T),B(x_0,T-t+\delta))$ $\forall x_0\in\mathbb{R}^3\ \exists\delta>0$

若①②成立，则证明 $\forall x_0,\ \exists \delta=\delta(x_0)>0$ s.t. $u\in L_t^4 L_x^{12}([0,T)\times B(x_0,T-t+\delta))$

由于u紧支，故∃有限个 $\{x_k\}_{k=1}^N$ s.t. $\operatorname{spt} u(\cdot,T)\subset \bigcup_{k=1}^N B(x_k,\delta(x_k))$.

$\Rightarrow u\in L_t^4 L_x^{12}([0,T)\times\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ claim成立

再由之前的论证即得结论.

下面证明①,②

①: $\boxed{\text{Claim 1:}}$ $\forall x_0\in\mathbb{R}^3$, $\lim\limits_{s\to T}\int_{B(x_0,T-s)} u^6\,dx=0$

Pf:

由Thm 12.4.2知 $\int_{B(x_0,T-s)} u^6\,dx \le C\phi(s)^{\frac{1}{3}}$

其中 $\phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(x_0,t_0)\cap\{s\le t<T\}} \frac{1}{2}|\partial_t u\cdot\vec{y}-\nabla u|^2+\frac{u^6}{6}\,dS$

令 $e(t):=\int_{B(x_0,T-t)} \frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla u|^2)+\frac{u^6}{6}\,dx$

由 Thm 12.1.2知，$\phi(s)=e(s)-\lim\limits_{r\to 0} e(r)$.

由于 $t\mapsto e(t)$ 不增 知 $\lim\limits_{s\to T}\phi(s)=0 \Rightarrow \lim\limits_{s\to T}\int_{B(x_0,T-s)} u^6\,dx=0$.

claim 1 证毕.

~~Claim 2~~ ①要计算的是 $\|u\|_{L^4(s,\tau;\,L^{12}(B(x_0,T-t)))}$

由Thm 12.4.1知

$$\|u\|_{L^4(s,\tau;L^{12}(B(x_0,T-t)))}\le C+C\int_s^\tau \|u^5\|_{L^2(B(x_0,T-t))}\,dt \quad \forall s\le\tau<T$$

又: $\|u^5\|_{L^2}=\|u\|_{L^{10}}^5\le \|u\|_{L^6}\|u\|_{L^{12}}^4$

所以: 上式 $\le C+C\int_s^\tau \|u\|_{L^6(B(x_0,T-t))}\|u\|^4_{L^{12}(B(x_0,T-t))}\,dt$

$$\le C+C\sup_{s\le t\le T}\|u\|_{L^6(B(x_0,T-t))}\int_s^\tau \|u\|^4_{L^{12}(B(x_0,T-t))}\,dt$$

$\therefore\ \forall \varepsilon>0\ \exists\ S\in(0,T)$ s.t.

$$\|u\|_{L^4(S,\tau;L^{12}(B(x_0,T-t)))} \le C+\varepsilon\|u\|^4_{L^4(S,\tau;L^{12}(B(x_0,T-\tau)))}$$

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}(\tau)\le C_1+\varepsilon\tilde{\varphi}(\tau)^4 & S\le\tau<T.\\ \tilde{\varphi}(S)=0 & (\tilde{\varphi}(\tau)=\|u\|_{L^4(S,\tau;L^{12}(B(x_0,T-t)))})\end{cases}$$

ε充分小，有 $\varphi(\tau)\le 2C_1$. $S\le\tau<T$.

从而 $u\in L^4_tL^{12}_x([0,T)\times B(x_0,T-t))$，①成立

①成立了之后，同之前一样我们可以证明.

$$\sup_{0<t<T}\underset{\text{or } \|\partial_t u\|}{\|\nabla u\|}_{L^6(B(x_0,T-t))}\le C.$$

$$\overset{\text{Claim 1}}{\Longrightarrow}\quad \lim_{S\to T}\int_{B(x_0,T-S)}|\nabla u|^2+|u_t|^2\,dx=0.$$

下面再证②即可结束证明:

由上面证明知 $\lim_{S\to T}\int_{B(x_0,T-S)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^6\,dx = 0$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ S\in(0,T)$

$$\Rightarrow\int_{B(x_0,T-S)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^6\,dx\le\varepsilon.$$

$$\overset{\text{积分绝对连续性}}{\Rightarrow}\ \exists\,\delta>0\ \int_{B(x_0,T-S)} u_t^2+|\nabla u|^2+u^6\,dx\le 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow\sup_{S\le t<T}\int_{B(x_0,T-t+\delta)} u^6\,dx\le C_\varepsilon.$$

再同类①的方法可得 $u\in L^4_tL^{12}_x([0,T)\times B(x_0,T-t+\delta))$.

定理证毕.

□

从而我们证明了，$\mathbb{R}^3$中初值紧支光滑的能量临界波方程，存在光滑的整体解

下面将我们将证明一些解不存在的情况.

§12.5 解的不存在性

I. 初值能量为负:

考虑 (*)
$$\begin{cases} \Box u + f(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(0) = g,\ \partial_t u(0) = h & \text{on } \mathbb{R}^d \times \{0\} \qquad g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Thm 12.5.1 (初值负能量时，解不存在).

设 $\lambda > 2$ 是常数，且有 $z f(z) \le \lambda F(z)$, $z \in \mathbb{R}$.

再设 $E(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(|\nabla g|^2 + h^2) + F(g)\, dx < 0$

则 ~~由~~ (*) 不可能存在整体光滑解 ← 假设 u 是整体光滑解存在.

<u>证明</u>: 令 $I(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} u^2\, dx$

$$\Rightarrow I''(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 + u u_{tt}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 + u(\Delta u - f(u))\, dx$$

分部积分 u 紧支
$$\doteq \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 - |\nabla u|^2 - u f(u)\, dx$$

注意到，能量守恒表明: $E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\, dx \overset{\forall t>0}{=} E(0)$

从而:

$$I''(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 - |\nabla u|^2 - u f(u) + (2+4\alpha)\left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\right) dx$$

$$- (2+4\alpha) E(0)$$

$$= (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^d} u_t^2\, dx + 2\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left((2+4\alpha) F(u) - u f(u)\right) dx$$

$$- (2+4\alpha) E(0).$$

选取 $\alpha > 0$ s.t. $2 + 4\alpha = \lambda > 2$. 从而第3个积分 ≥ 0

$$\Rightarrow I''(t) \ge (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^d} u_t^2\, dx + 2\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx - \cancel{(2+4\alpha)}\, \lambda E(0).$$

$$\ge (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^d} u_t^2\, dx - \lambda E(0).$$

又注意到: $I'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot u_t \, dx$

$$\Rightarrow (1+\alpha)(I'(t))^2 \underset{\text{Hölder}}{\leq} (1+\alpha)\left(\int_{\mathbb{R}^d} u^2 \, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} u_t^2 \, dx\right)$$

$$\leq I(t) \cdot (I''(t) + \lambda E(0))$$

$$\overset{\beta = -\lambda E(0) > 0}{=\!=} I(t)(I''(t) - \beta).$$

令 $J = I^{-\alpha}$.

$$\Rightarrow J'' = \alpha(\alpha+1) I^{-(\alpha+2)}(I')^2 - \alpha I^{-(\alpha+1)} I''$$

$$\leq \cancel{\alpha(\alpha+1)}\alpha I^{-(\alpha+2)} I(I'' - \beta) - \alpha I^{-(\alpha+1)} I''$$

$$= \alpha I^{-(\alpha+2)}(I I'' - \beta I - I I'')$$

$$= -\alpha\beta I^{-(\alpha+1)}$$

$$= -\alpha\beta J^{1+\frac{1}{\alpha}} \leq 0 \Rightarrow J$$ 关于t是凹函数 ~~is concave~~ w.r.t.

设 $J'(t_0) < 0$ 则 $J(t) \leq J(t_0) + (t - t_0) J'(t_0)$ $t \geq 0$.

$\Rightarrow J(t) \leq 0$ as $t \to \infty$, 矛盾!

$\therefore J' \geq 0$ $\forall t$. 但 $J'' \leq -\alpha\beta J^{1+\frac{1}{\alpha}}(0) =: -\gamma < 0$

$\Rightarrow J'(t) \leq J'(0) - \gamma t < 0$ as $t \to \infty$. 又矛盾.

所以 (*) 没有整体光滑解.

$\square$.

2. 小初值光滑整体解的存在性

考虑 (*) $\begin{cases} \square u - |u|^p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty). \\ u(0) = g \quad u_t(0) = h & \text{on } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{cases}$

$g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. $\int_{\mathbb{R}^3} g \, dx > 0$. $\int_{\mathbb{R}^3} h \, dx > 0$.

$\mathrm{Spt}\, g \subset B(0,R)$

$\mathrm{Spt}\, h \subset B(0,R)$.

Thm 12.5.2: $1<p<1+\sqrt{2}$, g.h 如上. 则 (*) 没有光滑整体解.

<u>证明</u>: 假设光滑整体解存在.

由有限传~~播~~速度的结论. $\mathrm{spt}\,u(\cdot,t) \subseteq B(0,R+t)$

记 $I(t)=\int_{\mathbb{R}^3} u\,dx \Rightarrow I''=\int_{\mathbb{R}^3} u_{tt}\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,dx.$

$$= \int_{B(0,R+t)} u\,dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,R+t)} 1\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{|B(0,R+t)|^{1-\frac{1}{p}}}_{\sim (R+t)^{3(1-\frac{1}{p})}}$$

$$\Rightarrow I'' \ge c\, I^p (1+t)^{-3(p-1)} \quad \cdots ①$$

设 $v=S(t)(g,h)=\cos(t\sqrt{-\Delta})g+\frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}h.$

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+\int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^p\,d\tau.$$

Kirchhoff公式

$$= v(x,t)+\frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{|u|^p(y,t-|y-x|)}{|y-x|}\,dy$$

$$\ge v(x,t).$$

又: $\partial_t^2\int_{\mathbb{R}^3} v\,dx = \int_{\mathbb{R}^3}\partial_t^2 v\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}\Delta v\,dx = 0.$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} v\,dx = C_1+C_2t.$$

由于 d=3. 所以由 Huygens原理. $\mathrm{spt}\,v \subseteq \underbrace{B(0,t+R)\setminus \mathring{B}(0,t-R)}_{= A}$

$\mathcal{L}^3(A) \le C(1+t)^2$

$$\therefore C_1+C_2t=\int_A v\,dx \le \int_A u\,dx \overset{\text{Hölder}}{\le} C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}(1+t)^{2\frac{1}{p'}}$$

$$\Rightarrow I''=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \ge C(1+t)^{2-p}.$$ for some $C>0$

~~Since~~ 又 $I(0), I'(0)>0$. 故连续积分 2次有

$$I \gtrsim (1+t)^{4-p} \quad \cdots ②$$

但又由①：

$I'' \geq c I^p (1+t)^{-3(p-1)}$

$\quad \geq c\, I^{1+\varepsilon} (1+t)^{(4-p)(p-1-\varepsilon)} (1+t)^{-3(p-1)}$

$\quad = c\, I^{1+\varepsilon}(1+t)^{-\mu} \qquad \mu = (p-1)^2 + \varepsilon(4-p).$

由 $1<p<1+\sqrt{2}$ 知，我们让 ε 充分小，满足 $0<\mu<2$ 即可。

这么做是因为 $\mu=2$ 恰是一个导出矛盾的"临界值"。

$I'>0$ 故 $\underbrace{I''I'}_{=\frac{1}{2}((I')^2)'} \geq c\,\underbrace{I'I^{1+\varepsilon}(1+t)^{-\mu}}_{=\frac{1}{2+\varepsilon}\left[(I\cdot I^{1+\varepsilon}(1+t)^{-\mu})' - (1+\varepsilon) I^{1+\varepsilon} I'(1+t)^{-\mu} - I^{2+\varepsilon}(-\mu)(1+t)^{-\mu-1}\right]}$

$\Rightarrow I'I^{1+\varepsilon}(1+t)^{-\mu} \gtrsim (I^{2+\varepsilon}(1+t)^{-\mu})' + \underbrace{I^{2+\varepsilon}(1+t)^{-1-\mu}\mu}_{这项又\geq 0}$

$\Rightarrow$ ~~$I''I$~~ $((I')^2)' \gtrsim (I^{2+\varepsilon}(1+t)^{-\mu})'$

$\Rightarrow (I')^2(t) \geq (I')^2(0) + c\left(I^{2+\varepsilon}(1+t)^{-\mu} - I^{2+\varepsilon}(0)\right)$

但②表明 上式又 $\geq (I'(0))^2 + c\left(2I^{2+\varepsilon}(0) - I^{2+\varepsilon}(0)\right)$

↑ t 充分大，$I \gtrsim (1+t)^{4-p}$

$\geq c\, I^{2+\varepsilon}(1+t)^{-\mu} \qquad \forall t \geq t_0$ for some t_0

$\Rightarrow (I^{-\frac{\varepsilon}{2}})' = -\frac{\varepsilon}{2} I^{-\frac{\varepsilon}{2}-1} I'$

$\quad \leq -\frac{\varepsilon C}{2}(1+t)^{-\frac{\mu}{2}}$

$\Rightarrow 0 \leq I^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t) \leq I^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t_0) - \frac{c\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{(1+s)^{\mu/2}} \to -\infty$ as $t\to\infty$

(因 $\mu<2$)

这不可能，于是方程解不存在

□