

偏微分方程(II)课程讲义勘误-02

章俊彦*

勘误时间：2026年4月3日 勘误版本：20260316

- 第42页问题2.2.2的命题第二行 $\mathbf{x} \in U$ 打成了 $x\pi U$.
- 第43页定义2.3.1漏了“为”字。
- 第52-53页习题2.4.1增加 λ_k 的min-max刻画。
- 第53页问题2.4.1(3)应该是 $\phi \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon)$.
- 调换了2.6.3和2.6.4节的顺序，因为证明Harnack不等式不需要强极值原理。
- 2.6节多个 U 打成了 Ω .
- 原第68页Harnack不等式章节中“从而可以用习题2.6.3的方法来完成证明，这些步骤是完全不依赖平均值原理的。”这句话中的“习题2.6.3”改为“定理2.6.4”，现在在第66页第6行。
- 第82页问题2.7.1重新设计（原题有误）。
- 第86页习题2.8.1(1)的常数应该是 $1 + (d/2)$ 而不是2，(2)中“ Q 使得该不等式取等号”改成已知条件（证明比较困难，暂不作要求）。
- 第86页习题2.8.2要证的式子最后一项应该除以2.
- 第86页问题2.8.1(2)再假设 $\mu = 3$.
- 第87页(3.0.4)中的 a^{ij} 应该同时依赖 (t, \mathbf{x}) .
- 第93页分离变量法把热方程的计算写成波动方程了，现已改回热方程。
- 第95-96页(3.2.12)-(3.2.13)左边第二项漏了 $d\tau$.
- 第96-97页定理3.2.3的证明过程中，第三行第一句话删掉，(3.2.18)下方应该用命题3.1.4（而不是3.1.3）得到 $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$.
- 第98页习题3.2.1最后一行去掉 $t > 0$.
- 第99页(3.3.3)最后一项应该是 $\int_{\mathbb{R}^d}$ 而不是 \int_U ，(3.3.5)左边应该是 $\sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t u(t, \cdot)\|_{L^2(U)}^2$.
- 第102页第8行应该是 $\mathbf{h} := \mathbf{f} - \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$.
- 第104页(3.3.17)右边范数记号打错。
- 第105页问题3.3.2的提示中的“问题??”是指“问题3.3.1”。
- 第125页“断言”上方的倒数第三行最后一个积分式应该是 $C \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$.
- 第133页定理5.2.8叙述里面的 ϕ 应该改成 f . 推论5.2.9里面的条件应该改成 $s \geq 1$ ，否则 $\langle \xi' \rangle^{s-1} \partial_d f(\xi', x_d)$ 未必是函数，证明过程中应该是假设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d)$.

*中国科学技术大学数学科学学院. Email: yx3x@ustc.edu.cn

- 第137-138页问题5.2.8(2)中 $\widehat{d\sigma_t}(\xi)$ 的表达式应该乘以 $(2\pi)^{-3/2}$, 问题5.2.9中的 E_d 表达式应该乘以 $(2\pi)^{-d/2}$.
- 第147页(6.0.1)方程应该改为 $i\partial_t u + \Delta u = \mu|u|^{p-1}u$, 同理能量守恒中的 $\pm \frac{1}{p+1}$ 改为 $\frac{\mu}{p+1}$.
- 第149页第6行补充说明 $\theta = (2/p) - 1 \in [0, 1]$.
- 第156页(6.2.2)前后文字叙述有所修改。
- 第159页习题6.2.1能量守恒的 \mp 改成+.
- 第159页习题6.2.2(2)的 u 改为 φ , (4)改成对任意正整数 $k > d/2$ 都有 $\|f\|_{L^\infty} \lesssim t^{-d/2}(\|f\|_{L^2} + \|J(t)^k f\|_{L^2})$.
- 第159页习题6.2.3的拟共形能量定义错误, 应为

$$E_{\text{pc}}[u](t) := \frac{1}{2}\|J(t)u\|_{L^2}^2 + \frac{4\mu t^2}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \quad p = 1 + (4/d).$$

- 第159页习题6.2.4应该是 $\mu = -1$, $S(t, \mathbf{x})$ 的指数部分第一项漏掉负号。题干改为 $T = 0$ 的情况。
- 第160页问题6.2.2方程漏了负号, (2)的结论应该是 $4E[v](s) = E_{\text{pc}}[v](-1/s)$.
- 第170-171页定理7.2.2的证明漏算了 ∂_t 落在 g^{ij} 的项 (但是不影响结论)。
- 第176页(7.3.6)左边漏了平方。
- 第185页最后一行应该是 $2\partial_t \partial_s U = 2(\partial_s U)^2$, 之前版本多了负号。
- 第186页注记7.3.7第三点叙述不对, 注记7.3.8–7.3.10均已重新叙述。
- 原第190页交换子估计不是用Kato–Ponce交换子估计, 而是直接展开。
- 原第191页问题7.3.1的光滑化初值应该是 $(u_0^\epsilon, u_1^\epsilon)$, 该题(3)的问法应该修改。
- 原第194页命题7.4.3证明不对, 在写出反证法假设后应该用命题7.4.2说明 $H^5 \times H^4$ 范数被控制, 再用定理7.3.5说明经典解可以延拓。否则只证明了 $H^1 \times L^2$ 解的爆破准则。
- 原第200页的Bootstrap假设取 $M = 2$, 然后第二步“更强的界”和最后一行的 M 改成 $3/2$ 。
- 原第202页问题7.4.2(2),(4)的题干修改。