

# 偏微分方程讲义 (I): 古典偏微分方程

章俊彦

中国科学技术大学数学科学学院

Email: [yx3x@ustc.edu.cn](mailto:yx3x@ustc.edu.cn)

最后更新时间: 2025 年 11 月 20 日



# 前言

这份讲义是根据我在新加坡国立大学做博士后期间教本科偏微分方程课程 (MA4221) 的课堂笔记整理并稍加扩充而完成的, MA4221 这门课与中国科大的课程“微分方程 1”后半学期非常接近。在中国科大, 这是数学专业学生在大二上学期的必修课程; 而 MA4221 在新加坡国立大学是二年级或以上的本科生选修课, 学生需要具有数学分析的基础和一定的常微分方程知识, 但并不对学生的实变、泛函基础作要求。我在新加坡国立大学教课的内容大致涵盖了本讲义到第 5.2 节为止所有没打星号的内容, 并粗略介绍了第 2.6 节关于震荡积分的知识, 此外补充了少量变分法的基础知识 (第 6.1 节), 它告诉我们如何从最小作用量原理的角度推导出各类偏微分方程。

简要地说, 本讲义的内容可被视作“古典偏微分方程理论”的简介。传统教材往往按照方程种类划分章节: 一阶偏微分方程、位势方程、热传导方程、波动方程等。然而本讲义的章节划分则是基于求解方法的不同, 主要包括: 一阶偏微分方程 (特征线法)、全空间中的偏微分方程求解 (波方程的直接求解、傅立叶变换法)、一维边值问题的求解 (分离变量法)、极大值原理 (椭圆、抛物方程的逐点估计)、格林函数法 (一般区域边值问题解的表达式) 等。除此之外, 我们穿插介绍了傅立叶方法的更多应用 (震荡积分的基本估计)、 $(-\Delta)$  的主特征值变分原理 (分离变量法的数学原理)、变分法 (欧拉-拉格朗日方程) 和诺特定理的简单应用。本讲义的附录则记录了常用的微积分公式、傅立叶变换的基本性质以及二阶线性方程的分类与边值问题的定解。后续, 本讲义可能还会加入位势方程 Schauder 估计相关的内容。

第一部分是一阶偏微分方程的简介, 这里只介绍了最简单的特征线法以及线性方程边值问题的定解。关于一阶非线性方程, 本讲义基本只介绍了 Burgers 方程这个最简单的例子, 而像 Hamilton-Jacobi 方程、双曲守恒律方程等重要内容, 圈于课时不足以及基础知识的欠缺 (例如守恒律方程需要引入“弱解”的概念), 故无法在此课程中引入。

第二部分则介绍了全空间中波方程、热方程初值问题的解法。对于波方程, 我们可以利用分解一维波算子将一维波方程化成一阶方程组求解, 再利用球面平均法将奇数维问题化作一维问题求解, 最后用升维法求解偶数维的情况。而另一个更具普适性的方法, 则是用傅立叶变换求解欧氏空间中的线性偏微分方程的初值问题, 讲义中则以热方程、波方程和薛定谔方程作为例子讲解该方法。这部分中, 在求解方程的同时, 我们也介绍了方程的能量估计及其与傅立叶变换的关系, 这是研究非线性方程的重要方法。作为补充内容, 我们在第三章简要介绍“震荡积分”这一现代调和分析的重要研究对象, 而它的实例之一则是曲面测度的傅立叶变换, 后者又恰好对应线性色

散方程（波方程、薛定谔方程等）的解。

第三部分介绍了古典偏微分方程边值问题的分离变量法，并具体求解一维区间的波方程、热方程的显式表达式。在应用该方法时候，我们实际上用到了拉普拉斯算子的主特征值变分原理这一重要结论：拉普拉斯算子在有界区域内（带零边值条件的）的特征值非负，且特征函数构成  $L^2$  的一组标准正交基；特别地，当区域是一维有限区间时，这个结论就退化为傅立叶级数的  $L^2$  理论。

第四部分则着重介绍“极大值原理”这一重要的逐点估计方法，当然它只对椭圆（位势方程）和抛物型方程（热方程）成立，对波方程不可能建立类似的极大值原理。这一节着重介绍了调和函数的极大值原理及其应用（梯度估计、Harnack 不等式、主特征值变分原理的完整证明）。它们都基于调和函数的平均值原理，而它们分别给出了调和函数的逐点控制、振幅估计和增长速率。事实上，极大值原理提供了一个观点：不解方程仍然能控制解的逐点行为。作为补充，在第4.3节，我们也介绍了上述结论基于弱极值原理、不依赖平均值原理的证明。在这之后，我们介绍位势方程在全空间和一般有界区域内的求解方法，这部分非常依赖高维分部积分公式的运用。同时，有界区域内泊松方程的求解方法，即所谓的“格林函数法”，就是物理中“电像法”的数学刻画。

上述内容可视作古典偏微分方程基础理论，显式求解方程占了相当大的比重。然而显式求解一般的偏微分方程是几乎不可能的，解的存在性都未必能保证，因此人们需要更深刻的分析工具来研究偏微分方程。偏微分方程的后继学习也对实分析、泛函分析和调和分析（傅立叶分析）的知识储备有一定需求，具体则取决于方程的类型和具体考虑的问题。

最后我要感谢我在新加坡国立大学做博后期间选修我教的 MA4221 这门课的学生，他们为我初次教学提出了很多宝贵的意见和建议。我尤其要感谢如下同学（按姓氏英文首字母排序）：陈俊康 (CHAN Choon Kong)、陈一铭、严翼勋 (EOM Ikhoon)、冯清扬、符保罗 (Jordan FOO Bao Luo)、符筱樱 (Yuuka FOO Xiao Ying)、李惟轩 (LEE Wei Xuan)、戚馥麟、舒骆安迪、陈智恒 (TAN Tze Heng)、叶添笑。他们在学习过程中帮助我修正了很多原始讲稿中的谬误。同时还要感谢中国科学技术大学的赵立丰教授，王鼎涵、于俊骜、尹宇辰三位同学和这门课的助教周蒂、张源意、涂远鹏同学，以及感谢我的同门师兄香港中文大学的罗辰昀教授，他们结合自己的教学或学习经历对这门课的设计和教学提出了自己的见解。

章俊彦

2025 年 10 月 3 日

# 目录

<b>第零章 引言</b>	<b>1</b>
0.1 偏微分方程的基本术语 . . . . .	1
0.2 常见例子 . . . . .	2
0.3 偏微分方程的“适定性” . . . . .	3
<b>第一章 一阶偏微分方程简介</b>	<b>5</b>
1.1 特征线法 . . . . .	6
1.1.1 常系数情况 . . . . .	6
1.1.2 变系数情况 . . . . .	7
1.1.3 非线性方程的求解实例: Burgers 方程 . . . . .	9
1.2 一维边值问题的定解 . . . . .	10
1.3 *一阶非线性偏微分方程的一般理论 . . . . .	13
1.3.1 特征线方程组 . . . . .	13
1.3.2 若干实例 . . . . .	15
1.3.3 边值问题的局部存在性定理 . . . . .	17
1.4 *一维守恒律方程的激波解 . . . . .	25
1.4.1 积分解和 Rankine-Hugoniot 条件 . . . . .	25
1.4.2 激波解、熵条件 . . . . .	28
1.4.3 *弱解唯一性定理 . . . . .	31
<b>第二章 全空间中的波动方程和热方程</b>	<b>33</b>
2.1 一维波动方程 . . . . .	33
2.1.1 一维波动方程的导出: 弦振动方程 . . . . .	33
2.1.2 分解引理 . . . . .	34
2.1.3 $\mathbb{R}$ 上的一维波动方程: D'Alembert 公式 . . . . .	36
2.1.4 一维波动方程的有限传播速度 . . . . .	39
2.1.5 半直线上的波动方程 . . . . .	43

2.2 高维波动方程 . . . . .	46
2.2.1 径向解与球面平均 . . . . .	46
2.2.2 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中的波动方程求解 . . . . .	49
2.2.3 波动方程的衰减速率 . . . . .	52
2.3 能量法: 波方程的有限传播速度 . . . . .	55
2.3.1 依赖区域、影响区域、决定区域 . . . . .	56
2.3.2 能量估计 . . . . .	59
2.4 傅立叶变换求解热方程 . . . . .	65
2.4.1 傅立叶变换法求解欧氏空间热方程 . . . . .	66
2.4.2 热核与解的性质 . . . . .	69
2.4.3 热方程的其它性质: 衰减速率、倒向唯一性 . . . . .	71
2.5 波动方程的傅立叶方法 . . . . .	77
2.5.1 方程的求解 . . . . .	78
2.5.2 能量均分原理 . . . . .	80
2.6 * 震荡积分简介 . . . . .	82
2.6.1 震荡积分的衰减估计、固相法 . . . . .	83
2.6.2 曲面测度的傅立叶变换 . . . . .	86
<b>第三章 一维边值问题的分离变量法</b>	<b>91</b>
3.1 波方程的分离变量法 . . . . .	91
3.1.1 Dirichlet 边值条件 . . . . .	92
3.1.2 两个例子: 驻波、共振 . . . . .	98
3.1.3 Neumann 边界条件 . . . . .	101
3.2 热方程的分离变量法 . . . . .	103
3.2.1 Dirichlet 边界条件 . . . . .	103
3.2.2 Neumann 边界条件 . . . . .	105
3.3 求解特殊区域内的调和函数 . . . . .	107
3.3.1 圆盘内的调和函数求解 . . . . .	107
3.3.2 泊松公式和非切向极限 . . . . .	109
3.3.3 径向调和函数的求解 . . . . .	112
3.4 分离变量法的数学原理: 特征函数系的完备正交性 . . . . .	114
3.4.1 一维特征值问题: Sturm-Liouville 理论 . . . . .	114
3.4.2 $(-\Delta)$ 的主特征值变分原理: 分离变量法的根基 . . . . .	119

<b>第四章 极大值原理</b>	<b>127</b>
4.1 热方程的极大值原理 . . . . .	127
4.1.1 热方程的弱极大值原理 . . . . .	127
4.1.2 热方程初边值问题的点态估计 . . . . .	131
4.2 调和函数的基本性质 . . . . .	137
4.2.1 调和函数的平均值原理 . . . . .	137
4.2.2 强极值原理和 Hopf 引理 . . . . .	139
4.2.3 Harnack 不等式 . . . . .	142
4.2.4 梯度估计和 Liouville 定理 . . . . .	143
4.2.5 * 光滑性和实解析性 . . . . .	146
4.2.6 调和函数的可去奇点 . . . . .	147
4.3 椭圆算子的极大值原理与 Harnack 不等式 . . . . .	151
4.3.1 极值原理和 Hopf 引理 . . . . .	152
4.3.2 *Harnack 不等式: 对数梯度估计 . . . . .	156
<b>第五章 位势方程的求解与 Schauder 估计</b>	<b>163</b>
5.1 欧氏空间情况的求解 . . . . .	163
5.2 边值问题的格林函数方法 . . . . .	167
5.2.1 格林函数的形式推导 . . . . .	168
5.2.2 格林函数的对称性 . . . . .	170
5.2.3 两个实例计算 . . . . .	171
5.3 * 位势方程解的 $C^{2,\alpha}$ 估计 (TBA) . . . . .	177
5.4 * 边值问题解的 Schauder 估计 (TBA) . . . . .	177
5.5 *Dirichlet 边值问题解的存在性 (TBA) . . . . .	178
<b>第六章 * 变分法简介</b>	<b>179</b>
6.1 一阶变分: 欧拉-拉格朗日方程 (最小作用量原理) . . . . .	179
6.1.1 若干实例: 各种基本方程的导出 . . . . .	180
6.1.2 二阶变分: 凸性假设 . . . . .	183
6.2 变分不等式: 椭圆自由边界问题 . . . . .	186
6.3 诺特定理 . . . . .	189
6.3.1 定理的叙述与证明 . . . . .	189
6.3.2 几个实例 . . . . .	190

<b>附录 A 常用记号</b>	<b>195</b>
A.1 常用符号 . . . . .	195
A.2 函数相关的记号 . . . . .	195
A.3 求导相关的记号 . . . . .	196
A.4 函数空间的记号 . . . . .	198
<b>附录 B 多变量微积分的常用公式</b>	<b>199</b>
B.1 分部积分公式 . . . . .	199
B.2 积分的极坐标表示、移动区域上的积分 . . . . .	200
B.3 卷积与光滑化 . . . . .	201
<b>附录 C 傅立叶级数与傅立叶变换</b>	<b>205</b>
C.1 傅立叶变换 . . . . .	205
C.2 傅立叶级数 . . . . .	213
C.2.1 $C^1$ 函数傅立叶级数的逐点收敛 . . . . .	214
C.2.2 Cesàro 平均收敛 . . . . .	218
C.2.3 傅立叶级数的 $L^2$ 理论 . . . . .	221
<b>附录 D 二阶线性偏微分方程的分类</b>	<b>229</b>
D.1 分类方法 . . . . .	229
D.2 具有非负特征的二阶偏微分方程 . . . . .	230
D.2.1 问题的提出 . . . . .	230
D.2.2 Fichera 定理与例子 . . . . .	231

# 第零章 引言

与其它很多纯数学中的分支完全不同，微分方程这个学科的研究对象往往直接来源于现实中的物理模型以及几何学中需要定量分析的问题。以物理问题为例，大到黑洞的形成、洋流的运动、云朵的形成，小到微观粒子的碰撞，它们的行为都可以被不同类型的偏微分方程（组）在各种给定条件下定量刻画，而偏微分方程这门学科的目的之一就是对这些现象进行严格的数学分析。

## 0.1 偏微分方程的基本术语

本课程中我们记空间维数为  $d$ . 并假设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是一个开集。

**定义 0.1.1** ( $k$  阶偏微分方程). 设  $k$  是正整数。我们称如下表达式是一个  $k$  阶偏微分方程

$$F(\partial^k u(\mathbf{x}), \partial^{k-1} u(\mathbf{x}), \dots, \partial u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (*)$$

其中

$$F : (\mathbb{R}^d)^k \times (\mathbb{R}^d)^{k-1} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

是给定的函数， $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是 未知函数.

部分情况下我们假设  $\Omega$  是单连通集（即任意闭曲线可以形变收缩成一个点）以简化不必要的技术困难。

接下来我们介绍与“线性”相关的术语。对一阶导数  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , 我们常常简记为  $\partial_{x_i}$  或者  $\partial_i$ . 设  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  是多重指标，我们记  $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$  以及  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

**定义 0.1.2** (偏微分方程的线性与非线性). 我们称

- $(*)$  是线性 (linear) 的，是指它具有形式

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

其中  $a_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ) 和  $f(\mathbf{x})$  是给定的（与  $u$  无关）。若  $f \equiv 0$ , 则称它是齐次 (homogeneous)

线性方程, 否则称之为非齐次 (non-homogeneous) 线性方程.

- (\*) 是半线性 (semilinear) 的, 是指它关于最高阶项是线性的, 即具有形式

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u + b(\partial^{k-1} u, \dots, \partial u, u, \mathbf{x}) = 0.$$

- (\*) 是拟线性 (quasilinear) 的, 是指它最高阶项的系数只依赖  $u$  和  $u$  的更低阶导数, 即具有形式

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\partial^{k-1} u, \dots, \partial u, u, \mathbf{x}) \partial^\alpha u + b(\partial^{k-1} u, \dots, \partial u, u, \mathbf{x}) = 0.$$

- (\*) 是完全非线性 (fully nonlinear) 的, 是指它关于最高阶导数仍是非线性的。

## 0.2 常见例子

本节我们介绍若干常见的偏微分方程。记  $\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_d)$  是梯度算子,  $\Delta := \partial_1^2 + \dots + \partial_d^2 = \nabla \cdot \nabla$  是 Laplace 算子。

### 常见的线性偏微分方程

本课程中, 我们主要学习如下几类线性偏微分方程的显式求解与基本性质分析。

- (传输方程)  $\partial_t u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f$ , (波动方程)  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$ .
- (Laplace 方程)  $\Delta u = 0$ , (Poisson 方程)  $-\Delta u = f$ ,
- (Helmholtz 方程)  $-\Delta u = \lambda u$ .
- (热传导方程)  $\partial_t u - k \Delta u = f$ , (Schrödinger 方程)  $i \partial_t u + \Delta u = f$ .

除此之外, 还有一些其它常见的线性偏微分方程, 例如

- (Klein-Gordon 方程)  $\partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0$ , ( $m \in \mathbb{R}$ ).
- (阻尼波方程)  $\partial_t^2 u + \lambda \partial_t u - \Delta u = 0$  ( $\lambda > 0$ ).
- (Fokker-Planck 方程)  $\partial_t u - \sum_{i,j=1}^d \partial_i \partial_j (a^{ij} u) - \nabla \cdot (\mathbf{b} u) = 0$ .
- (Airy 方程)  $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$ .
- (线性弹性方程)  $\partial_t^2 \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .
- (Maxwell 方程组)

$$\partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad \partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

下面再列出一些常见的非线性偏微分方程 (组)

- 半线性方程: 把上面的  $f$  换做  $f(u)$ , 例如多项式非线性  $f(u) = cu^p, c|u|^{p-1}u, p \neq 1$ .
- (Burgers 方程)  $\partial_t u + u(\partial_x u) = \nu \partial_x^2 u (\nu \geq 0)$ .  
 (一维守恒律方程)  $\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0$ , 其中  $\mathbf{F}$  为向量值函数.  
 (守恒律方程组)  $\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , 其中  $\mathbf{u}, \mathbf{F}$  为向量值函数.
- (KdV 方程)  $\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0$ .
- (Hamilton-Jacobi 方程)  $\partial_t u + H(\nabla u, \mathbf{x}) = 0$ .
- (多孔介质方程)  $\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad u \geq 0, \gamma > 1$ .
- (极小曲面方程)  $\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$ .
- (Monge-Ampère 方程)  $\det \nabla^2 u - K(\mathbf{x})(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{d+2}{2}} = 0$ .
- (不可压缩欧拉方程组 ( $\nu = 0$ ) 和 Navier-Stokes 方程组 ( $\nu > 0$ ))

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}.$$

### 0.3 偏微分方程的“适定性”

给定一个 PDE 问题, 我们主要关注它的适定性 (well-posedness), 即:

- (1) 方程的解存在;
- (2) 方程的解唯一;
- (3) 方程的解连续依赖问题给定的初/边值。

最后一个条件对于物理应用问题尤为重要: 当偏微分方程问题的给定条件发生微小变化时, 我们希望 (唯一的) 解也仅发生微小变化。另一方面, 对于许多问题来说, 我们并不期待解的唯一性。在这些情况下, 我们则需要对解进行分类并进行更细致的刻画。不难认为, 在 (1)-(3) 的意义上“求解”偏微分方程是可取的。但请注意, 我们仍然没有严格定义“解”的含义。例如, 我们是否应该要求“解”必须是实解析的, 或者至少是无限可微的? 这或许是可取的, 但往往要求过高了。更明智的做法是要求阶为  $k$  的偏微分方程的解至少  $k$  阶连续可微。这样, 至少偏微分方程表达式中的每一项都逐点可定义且连续。我们可将具有光滑性的解称为偏微分方程的古典解: 这无疑是最显而易见的解的概念。因此, 在古典意义上求解偏微分方程, 是指尽可能写出满足上述 (1)-(3) 的古典解公式, 或者至少证明这样的解存在, 并推导出它的各种性质。这也是这门课的主要任务。

然而, 我们并非在所有情况下都能求得古典解的存在性。以第 1.4 节的守恒律方程  $\partial_t u + \partial_x(F(u)) = 0$  为例, 即便初值的有界的光滑函数, 我们也很容易构造出在有限时间就爆破的解。解发生爆破时产生激波, 即方程的解沿着某条曲线出现某些间断。所以, 如果要对该类方程求得整体解 (即对

所有时间  $t$  都存在的解), 我们就不得不“弱化”解的定义, 退而求其次考虑所谓的“弱解”。换言之, 特定方程的结构可能会迫使我们放弃直接寻找光滑的经典解。相反, 我们仍然希望在满足适定性条件 (1)-(3) 的同时, 在更广的范围内寻求解的存在性。事实上, 即使对于那些最终能够证明古典解存在性的偏微分方程, 我们往往也需要一开始先求得“弱解”的存在性, 然后再借助实分析、泛函分析的工具证明这个弱解实际上是所需要的古典解。也就是说, 更合理的方法是将存在性问题和光滑性(或正则性)问题分开考虑。而这些主要是“微分方程 2”这门本研贯通课程讨论的内容, 往往需要在 Sobolev 空间中讨论。

对发展方程(即含有时间变量的方程)而言, 我们往往只能先求得解的局部适定性 (local well-posedness), 即在一个较短的、依赖于初值的时间区间  $[0, T]$  内的适定性。在此基础上, 我们可以探索解的长时间存在性和具体的长时间行为, 而这类问题是没有普适性的方法的, 这是因为不同的偏微分方程对应的物理或者几何背景完全不同, 其解的演化机制也完全不同。一般来说, 若要求得长时间存在性, 则需要先结合局部适定性的证明来得到一个“爆破准则”或者“解的延拓准则 (continuation criterion)”, 即证明“若某某量在  $T_0$  时刻仍然保持有界, 则方程的解在  $T_0$  时刻就可以继续延伸下去”之类的论断。这个论断里面的“某某量”, 往往来源于方程自身的守恒量或是一些重要的物理量。需注意, 并不是所有的方程都能求得解的整体适定性 (global well-posedness, 即对任意时间都适定) 或是长时间适定性, 有时候我们需要在方程的一个特解(往往是某些特殊的稳态解)附近作扰动才能求得在该特解附近的稳定性, 具体还可以分成轨道稳定性 (orbital/structural stability) 和渐近稳定性 (asymptotic stability) 等等类型。反过来, 我们也可以证明一些方程解的有限时间爆破, 甚至人为构造出具有特定形式的爆破解, 并研究其具体形态。

# 第一章 一阶偏微分方程简介

一阶偏微分方程一般具有  $F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0$  的形式, 其中  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  是未知函数,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是一个开集,  $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  是给定的函数. 特别地, 传输方程 (**transport equation**), 即形如  $\partial_t u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f$  的方程, 是最简单的一类一阶偏微分方程, 这里  $t$  代表时间变量,  $\mathbf{x}$  代表空间变量. 本章我们主要讲授如何利用特征线法求解传输方程, 它在后续章节求解波动方程时还会用到. 进一步地, 我们还可以用特征线法求解一类最简单的非线性一阶方程——**Burgers 方程**. 本章末节简要介绍了以 Burgers 方程为例的一维守恒律方程解的存在性和唯一性问题.

在进入正文之前, 我们先简要介绍传输方程的推导. 不妨设空间维数  $d = 1$ , 我们考虑物质在一维管道内的传输, 例如河流中的污染物、路上的车辆等等. 设在  $t$  时刻,  $x$  位置处该物质的密度为  $u(t, x)$ , 其运输速度为  $c(t, x)$ , 并假设总质量既不增加也不减少. 现在来计算  $u(t, x)$  的演化方程. 考虑一个小区间  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  内的物质运输, 在  $t$  时刻, 该区间内物质总量为

$$m(t) := \int_a^b u(t, x) dx.$$

对时间变量求导, 得到

$$\frac{d}{dt} m(t) = \int_a^b \partial_t u(t, x) dx.$$

另一方面, 在一个很短的时间段  $[t, t + dt]$  内, 端点  $x = b$  处输出了质量为  $u(t, b)c(t, b)dt$  的物质, 而在端点  $x = a$  处输入了质量为  $u(t, a)c(t, a)dt$  的物质. 据微积分基本定理得到

$$\frac{d}{dt} m(t) = -u(t, b)c(t, b) + u(t, a)c(t, a) = -\int_a^b \partial_x(u(t, x)c(t, x)) dx.$$

结合  $m'(t)$  的两个表达式, 得到

$$\int_a^b \partial_t u + \partial_x(c(t, x)u(t, x)) dx = 0 \quad [a, b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \partial_t u + \partial_x(cu) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 1.1 特征线法

本节讲述如何利用特征线法显式求解传输方程  $\partial_t u + \mathbf{c}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla u = f(t, \mathbf{x})$ .

### 1.1.1 常系数情况

我们首先考虑常系数的情况, 即  $\mathbf{c}(t, \mathbf{x})$  为常值向量  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ . 先考虑如下齐次方程

$$\partial_t u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = 0 \quad t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.1.1)$$

不难看出, 方程(1.1.1)表明  $u$  的某个方向导数恒为零. 事实上, 我们可以将方程写作  $(1, \mathbf{c}) \cdot \nabla_{t, \mathbf{x}} u = 0$  的形式, 其中  $\nabla_{t, \mathbf{x}} = (\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$ . 这样, 令

$$z(\tau) := u(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c}) \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

据链式法则有

$$\frac{dz}{d\tau} = \partial_t u(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c}) + \sum_{i=1}^d c_i \partial_{x_i} u(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c}) = 0.$$

这说明, 沿着任一平行于  $(1, \mathbf{c}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  方向的直线,  $z(\cdot)$  作为变量  $\tau$  的函数是常值. 因此, 现在就只需要计算  $u$  在每条这样的直线 (又称“特征线”) 上的取值即可.

据上述讨论, 我们可以求解如下初值问题

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = 0 & (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & t = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

特别地, 我们已经证明了对固定的  $(t, \mathbf{x})$  有  $u(t, \mathbf{x}) = u(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c})$  对任意  $\tau \in \mathbb{R}$  成立, 即  $u$  沿着任一平行于  $(1, \mathbf{c}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  方向的直线是常值. 现在令  $\tau = -t$  并代入初值得到

$$u(t, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) \quad \forall t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

注意: 这里得到的解未必是  $C^1$  的, 除非我们假设初值  $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ .

接下来我们求解非齐次传输方程. 设  $f(t, \mathbf{x})$  是给定的连续函数, 考虑如下方程

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{c} \cdot \nabla u = f(t, \mathbf{x}) & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

此时函数  $z(\tau) := u(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c})$  (即为  $u$  沿着特征线的取值) 不再是常数, 而是满足如下常微分方程

$$\frac{dz}{d\tau} = f(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c}),$$

两边对  $\tau$  变量从  $-t$  到  $0$  积分, 得到

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= z(0) = z(-t) + \int_{-t}^0 z'(\tau) d\tau = g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_{-t}^0 f(t + \tau, \mathbf{x} + \tau\mathbf{c}) d\tau \\ &= g(\mathbf{x} - t\mathbf{c}) + \int_0^t f(\tau, \mathbf{x} + (\tau - t)\mathbf{c}) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

这个结论会在求解一维波动方程时用到.

当非齐次项  $f$  包含未知函数  $u$  时, 我们可以采用类似的方法求解. 但此时, 解未必是整体存在的 (即不一定对全体  $t \in \mathbb{R}$  都有定义), 而且我们未必能求出解的显式表达式.

**例 1.1.1.** 设  $b, c \in \mathbb{R}$  是给定的常数, 求解如下方程

$$\begin{cases} \partial_t u + b\partial_x u + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = g(x) & \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

**解.** 第一步, 我们仍然是计算特征线的方程. 由于  $b \in \mathbb{R}$  是常值, 我们仿照之前的讨论可以算得特征线即为  $x = tb + k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). 也就是说, 对任意给定的  $k \in \mathbb{R}$ , 如上传输方程在直线  $x = tb + k$  上会变成一个常微分方程: 令  $z(t) = u(t, tb + k)$ , 则有

$$\frac{dz}{dt} = -cz \Rightarrow z(t) = z(0)e^{-ct} = u(t, tb + k).$$

现在我们代入  $k = x - tb$  将参数  $k$  消去, 并代入初值可得

$$u(t, x) = g(x - tb)e^{-ct}.$$

特别地, 若  $c > 0$ , 则 “ $+cu$ ” 这一项被称作传输方程中的阻尼 (damping) 项, 此时方程的解关于时间变量是指数衰减的.  $\square$

### 1.1.2 变系数情况

若传输方程中的  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, \mathbf{x})$  项不是常数, 我们则需寻找向量  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , 使得  $\mathbf{v} \cdot \nabla_{t, \mathbf{x}} u = f$ . 这个  $\mathbf{v}$  一旦找到, 那剩下要做的无非就是沿着  $\mathbf{v}$  方向积分来求解方程. 本节我们只考虑  $d = 1$  的情况, 方程为  $\partial_t u + c(t, x)\partial_x u = f$ .

**定义 1.1.1** (一维传输方程的特征曲线 (characteristic curve)). 对传输方程  $\partial_t u + c(t, x) \partial_x u = f$ , 常微分方程  $\frac{dx}{dt} = c(t, x)$  解对应的积分曲线被称作该传输方程途径  $(t, x)$  的特征曲线.

显见, 上述常微分方程的积分曲线在  $(t, x)$ -平面中未必是一条直线. 对变系数传输方程, 即使给定初值, 我们也不一定能通过特征线法求得  $u(t, x)$  在全体  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  处的取值, 且看下例.

**例 1.1.2.** 计算方程  $u_t + 2tx^2u_x = 0$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  的解.

**解.** 第一步仍然是计算特征线的方程, 据定义, 我们求解如下常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

对给定的  $C \in \mathbb{R}$ , 令  $z(t) = u(t, -\frac{1}{t^2 + C})$ , 则有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( z \left( t, -\frac{1}{t^2 + C} \right) \right) = (\partial_t u(t, x) + 2tx^2 u_x) \Big|_{x=-\frac{1}{t^2+C}} = 0,$$

其表明在曲线  $(t, -\frac{1}{t^2+C})$  上, 恒有  $z(t) = F(C)$ , 其中  $F \in C^1(\mathbb{R})$  是任意的. 现在我们将  $C = -t^2 - \frac{1}{x}$  代入, 消去参数  $C$ , 得到

$$u(t, x) = F(-t^2 - \frac{1}{x}) = G(t^2 + \frac{1}{x}),$$

其中  $F, G$  是任意的  $C^1(\mathbb{R})$  函数.

为了确定  $F$ (或  $G$ ) 的具体形式, 我们需要给定额外的条件. 然而我们发现, 即便给定  $u$  在初始时刻  $\{t = 0\}$  或其它任何时刻  $\{t = T\}$  的取值, 我们仍然无法确定  $u(t, x)$  在全体  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  处的取值. 例如, 考虑  $C = \pm 1$ , 若我们给定  $u$  在  $t = T$  时刻的取值, 则不论  $T$  为何值, 我们都无法计算  $u(t, x)$  在  $x = -\frac{1}{t^2-1}$  上的取值, 这是因为  $\{t = T\}$  至多只与积分曲线  $x = -\frac{1}{t^2-1}$  的某一支相交。

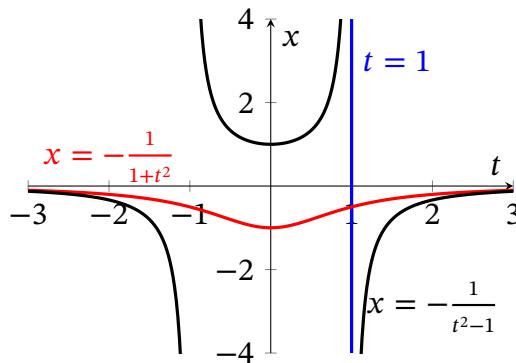


图 1.1: 积分曲线和初值的图像: 初值给定在  $\{t = 1\}$ , 积分曲线为  $x = -\frac{1}{1+t^2}$  和  $x = -\frac{1}{t^2-1}$ .

换言之, 若要确定  $u(t, x)$  在全体  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  处的取值, 则必须要在一条与全体特征线都相交的曲线上给定  $u$  的取值.  $\square$

### 1.1.3 非线性方程的求解实例: Burgers 方程

我们在本节的末尾介绍一个最简单的一阶非线性偏微分方程的例子——Burgers 方程. 考虑无粘 (inviscid) Burgers 方程的初值问题, 其中  $\varphi \in C(\mathbb{R})$ .

$$u_t + uu_x = 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.6)$$

无粘 Burgers 方程本身是模拟冲击波传播和反射的守恒律方程, 接下来我们会看到即使初值是光滑函数, 无粘 Burgers 方程的解也会在有限时间内发生爆破.

首先我们计算特征线满足常微分方程  $\frac{dx}{dt} = u(t, x(t))$ . 所以沿着特征曲线, 我们可以将无粘 Burgers 方程改写作  $\frac{d}{dt}(u(t, x(t))) = 0$ , 从而  $u(t, x(t)) = u(0, x(0)) = \varphi(x(0))$ . 将该结果代入  $\frac{dx}{dt} = u(t, x(t))$ , 我们有

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^t \varphi(x(0)) d\tau = t\varphi(x(0)).$$

所以  $x(0) = x(t) - ut$ , 进而 Burgers 方程的解可由如下隐式方程给出

$$u(t, x) = \varphi(x(t) - ut). \quad (1.1.7)$$

注意, 如上解存在的前提是不同的特征线彼此不相交. 换言之, 如果解的特征线相交, 则会产生激波 (shock wave)<sup>1</sup>, 进而 Burgers 方程的经典解无法整体存在 (即不可能对任意  $t \in \mathbb{R}$  都存在), 而特征线是否相交则取决于初值  $\varphi$  的选取, 且看下例.

记由  $x_1(0) = x_1(t) - u(t, x_1(t))t$  和  $x_2(0) = x_2(t) - u(t, x_2(t))t$  给出的特征线分别为  $C_{x_1}$  和  $C_{x_2}$ . 可见,  $C_{x_i}$  是  $\mathbb{R}^2$  上斜率为  $1/\varphi(x_i(0))$  的直线, 在该直线上  $u$  恒为常值  $\varphi(x_i(0))$ . 所以如果我们假设  $x_1(0) < x_2(0)$  且  $\varphi$  是单调递减函数, 那么我们就发现两条特征线在  $(X, T) \in \mathbb{R}^2$  处相交, 如下图

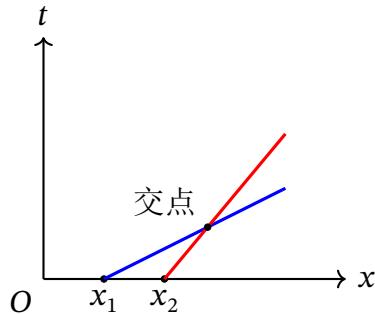


图 1.2: Burgers 方程不同特征线在有限时间内相交的实例

<sup>1</sup>这里的“特征线相交”是激波解的直观定义. 双曲守恒律方程的间断解并非只有激波这一种, 具体的严格定义请参考 Evans [3] 第 3.4 节和第 11 章.

我们甚至可以解得特征线相交的时间为

$$T = -\frac{x_1(0) - x_2(0)}{\varphi(x_1(0)) - \varphi(x_2(0))}.$$

例如  $\varphi(x) = -x$  时, 我们有  $u = ut - x$ , 进而解的表达式为  $u = \frac{x}{t-1}$ , 其右端在  $t \rightarrow 1^-$  时发生爆破。

读者也许会进一步发问: 爆破发生之后, 解会以怎样的形式存在? 回答这个问题, 我们需要严格引进激波和弱解的概念, 我们留到第1.4节来讨论.

## 习题 1.1

**习题 1.1.1.** 传输方程  $(1+t^2)\partial_t u + \partial_x u = 0$  的特征线方程是什么? 计算其表达式, 并在  $xOt$  平面作图.

**习题 1.1.2.** 解方程  $x\partial_t u + t\partial_x u = 0$  ( $t, x \in \mathbb{R}$ ),  $u(0, x) = e^{-x^2}$ . 并说明  $tOx$  平面上哪些部分的解由该初值唯一确定?

**习题 1.1.3.** 考虑方程  $3u_y + u_{xy} = 0$ .

(1) 计算方程的通解. (提示: 令  $v = \partial_y u$ .)

(2) 若假设  $u(x, 0) = e^{-3x}$ ,  $u_y(x, 0) = 0$ , 方程的解是否存在? 是否唯一?

**习题 1.1.4.** 对无粘 Burgers 方程(1.1.6), 证明:  $\int_{\mathbb{R}} u \, dx$  和  $\int_{\mathbb{R}} u^2 \, dx$  都是关于时间  $t$  的守恒量.

**习题 1.1.5.** 对无粘 Burgers 方程(1.1.6), 若初值  $\varphi \in C^1$  满足  $\varphi' \geq -C$  对某个常数  $C > 0$  恒成立. 证明: 方程(1.1.6)在区域  $[0, 1/C] \times \mathbb{R}$  有  $C^1$  解, 并满足对任意的  $t \in [0, 1/C]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  都有

$$\partial_x u(t, x) \geq \frac{1}{t - C^{-1}}$$

恒成立.

提示: 考虑  $v = \partial_x u$  满足的方程, 并计算沿着  $u$  的特征线上  $v$  的方程会变成一个怎样的常微分方程。

## 1.2 一维边值问题的定解

之前我们求解了  $\mathbb{R}^d$  中的传输方程, 现在问: 如果  $\mathbf{x}$  取值的区域带边界, 情况会如何? 一个最直接的问题就是, 除了初值条件之外, 是否还要在区域边界给定边界条件? 如果需要, 那么需要给定几个边界条件, 怎样的边界条件? 在求解之前, 搞清楚这些问题是非常必要的, 否则方程的解会超定或不能唯一确定. 一般来说, 这个问题的答案很复杂. 本节我们以半直线上的初边值问题这个最简单的情况为例, 讨论如何定解传输方程的边值问题.

设时间变量  $t > 0$ , 空间变量  $x \in \mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  是给定的常数. 考虑如下方程

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{on } \{t = 0\} \times (-\infty, 0), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中初值  $u_0 \in C^1(-\infty, 0]$  给定.

如果我们考虑  $\mathbb{R}$  上这个方程的求解, 我们很容易计算出解的表达式为  $u(t, x) = u_0(x - \lambda t)$ . 但如果考虑负半轴  $\mathbb{R}_-$  上的传输方程, 就必须注意到  $u_0$  只在负半轴  $x < 0$  上有定义. 当  $\lambda \geq 0$  时, 我们总有  $x - \lambda t < 0$ , 所以表达式  $u(t, x) = u_0(x - \lambda t)$  仍然对全体  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$  都成立. 也就是说, 当  $\lambda \geq 0$  时, 我们不需要在  $\{x = 0\}$  上设定额外的边界条件就能定解这个方程.

但若  $\lambda < 0$ , 我们发现表达式  $u(t, x) = u_0(x - \lambda t)$  只能给出方程在区域  $\{t > 0, x < 0 | t \leq x/\lambda\}$  中的解. 以  $\lambda = -1/2$  为例, 我们作图如下, 其中方程在区域  $\{t > -2x\}$  内的解仍然是未知的.

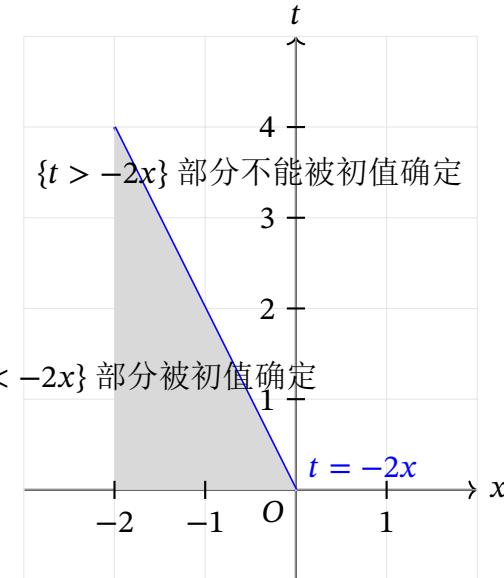


图 1.3: 特征线  $t = -2x$  的图像和初值能唯一确定解的区域

现在我们假设  $\lambda < 0$  来求解方程(1.2.1), 此时我们需要加上一个边界条件, 方程如下

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0 & (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, 0), \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{on } \{t = 0\} \times (-\infty, 0), \\ u(t, 0) = g(t) & \text{on } (0, \infty) \times \{x = 0\} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

其中  $g \in C^1([0, \infty))$  是给定的函数.

我们现在已经在区域  $\{t < x/\lambda\}$  上求得解为  $u(t, x) = u_0(x - \lambda t)$ , 那么它仍然需要满足边界

条件  $u(t, 0) = g(t)$ . 故在该表达式中令  $x = 0$ , 我们得到  $u_0(-\lambda t) = g(t)$  对任意  $t > 0$  都成立, 即对任意  $x < 0$  都有  $u_0(x) = g(-x/\lambda)$ . 所以, 在区域  $\{t > 0, x < 0 | t > x/\lambda\}$  中, 方程的解应当为  $u(t, x) = g(t - \frac{x}{\lambda})$ .

现在我们可以得到结论: 当  $\lambda < 0$  时, 传输方程初边值问题(1.2.2)的解为

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - \lambda t) & t \leq \frac{x}{\lambda}, \\ g(t - \frac{x}{\lambda}) & t > \frac{x}{\lambda}. \end{cases}$$

然而, 我们还需要对该解进行进一步分析, 这是因为经典解要求  $u(t, x) \in C^1_{t,x}([0, \infty) \times (-\infty, 0])$  (否则方程未必能在区域内逐点成立), 而我们上面得到的表达式给出的解是由  $u_0(x - \lambda t)$  和  $g(t - \frac{x}{\lambda})$  拼接起来的, 我们尚不明确它在交界线  $\{x = \lambda t\}$  上是否保持  $C^1$  可微性. 由特征线本身的性质, 我们只需要搞清楚解在角点  $(t, x) = (0, 0)$  处是否具有  $C^1$  连续可微性即可. (思考为什么?)

- 函数  $u$  的连续性: 令  $t = x = 0$ , 我们得到  $g(0) = u_0(0)$ .
- 一阶导数的连续性: 利用方程本身, 我们得到

$$\lim_{t,x \rightarrow 0} (\partial_t u + \lambda \partial_x u) = 0 \Rightarrow g'(0) + \lambda u'_0(0) = 0.$$

换言之, 当初值  $u_0$  和边值  $g$  满足条件  $g(0) = u_0(0)$  和  $g'(0) + \lambda u'_0(0) = 0$  时, 方可证得  $u(t, x) \in C^1_{t,x}([0, \infty) \times (-\infty, 0])$ . 这两个条件被称作初值满足的相容性条件 (compatibility conditions).

关于一阶偏微分方程的一般理论和边值问题存在性理论, 我们将在第1.3节来讨论.

## 习题 1.2

**习题 1.2.1.** 设正整数  $N \geq 2$ . 令  $U(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))^\top$  是由  $N$  个未知函数组成的向量,  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是  $N \times N$  的常系数、实对称方阵. 现在考虑如下由  $N$  个传输方程组成的方程组

$$\begin{cases} U_t + AU_x = 0 & t > 0, x < 0; \\ U(0, x) = F(x) & t = 0, x < 0, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x))^\top$  是给定的向量值函数, 其中  $F_i \in C^1(-\infty, 0]$ .

- (1) 若  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , 其中  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m < 0 < \lambda_{m+1} \leq \dots \leq \lambda_N$ . 问: 对哪些  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 我们需要对  $u_i(t, 0)$  加边界条件?
- (2) 对一般的常系数实对称方阵  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , 方程组(1.2.3)需要加多少个边界条件, 才能使得  $U(t, x)$  的取值在整个区域  $\{t > 0\} \times \{x < 0\}$  上被唯一确定?

## 1.3 \*一阶非线性偏微分方程的一般理论

设  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  是未知函数, 其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是一个开集,  $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  是给定的.

**记号 1.3.1.** 对  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 记  $F = F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = F(p_1, \dots, p_d, z, x_1, \dots, x_d)$ . 这里的  $\mathbf{p}$  在实际用的时候往往取成标量函数  $u$  的梯度  $\nabla u(\mathbf{x})$ ,  $z$  往往取成标量函数  $u$  本身. 我们假设  $F$  关于其各个分量都是光滑的, 并记

$$\nabla_{\mathbf{p}} F = (\partial_{p_1} F, \dots, \partial_{p_d} F), \quad \nabla_z F = \partial_z F, \quad \nabla_{\mathbf{x}} F = (\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_d} F).$$

今考虑在  $\Omega$  内求解一阶非线性偏微分方程  $F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0$ . 若  $\Omega$  带边界, 则考虑在边界的子集  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$  上设置边界条件  $u = g$ , 其中  $g$  是给定的函数.

一阶非线性偏微分方程(组)在物理中经常出现, 尤其是在连续介质力学(以流体力学方程为主的各类守恒律方程)和光学(描述波前的运动)中有非常多的实际模型都由一阶偏微分方程组刻画. 本节主要讨论局部解的存在性理论, 所用方法即为之前章节提到的特征线法. 需注意, 一阶方程未必能直接求得整体解(即对全体  $t \in \mathbb{R}$  都存在的解), 之前我们算过的 Burgers 方程就是一个很好的例子.

### 1.3.1 特征线方程组

考虑一阶偏微分方程

$$F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1.3.1}$$

并在  $\Gamma \subseteq \partial U$  设定了边界条件  $u = g$ . 此处我们假设  $F, g$  都是给定的光滑函数.

我们现在希望将前两节讨论的特殊情况的特征线法推广到这个一般的方程. 特征线法的基本想法很直观: 现在我们已经知道了  $u$  的一部分边值是  $g$ , 那么对区域内部的点  $\mathbf{x}$ , 我们希望找到一条合适的曲线将  $\mathbf{x} \in \Omega$  和边界上一点  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$  连接起来, 使得我们能够较为方便地计算  $u$  沿着该曲线的取值.

我们假设这条“合适的曲线”是参数曲线  $\mathbf{x}(s) := (x^1(s), \dots, x^d(s))$ , 其中参数  $s$  属于某个开区间  $I$ . 设  $u \in C^2$  是(1.3.1)的一个解, 令

$$z(s) := u(\mathbf{x}(s)), \quad \mathbf{p}(s) := \nabla u(\mathbf{x}(s)), \text{ 即 } p^i(s) = \partial_{x_i} u(\mathbf{x}(s)), 1 \leq i \leq d.$$

也就是说  $z(\cdot)$  给出了  $u$  沿着参数曲线的取值, 而  $\mathbf{p}(\cdot)$  给出的是  $\nabla u$  沿着参数曲线的取值. 现在就需

要选取合适的  $\mathbf{x}$  进而方便我们作计算了. 为此, 对  $p^i$  满足的方程求导, 得到

$$\frac{dp^i}{ds}(s) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(\mathbf{x}(s)) \frac{dx^j}{ds}(s),$$

然而这个表达式出现了  $u$  的二阶导数, 并不是很好用. 另一方面, 我们可以在方程(1.3.1)两边对  $x_i$  求导, 得到

$$\sum_{j=1}^d \partial_{p_j} F(\nabla u, u, \mathbf{x}) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \partial_z F(\nabla u, u, \mathbf{x}) \partial_{x_i} u + \partial_{x_i} F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.3.2)$$

该式中, 如果我们进一步假设 (记  $\dot{\cdot} = \frac{d}{ds}$ )

$$\dot{x}^j(s) = \partial_{p_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)), \quad 1 \leq j \leq d, \quad (1.3.3)$$

则在  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  处, 我们有

$$\sum_{j=1}^d \partial_{p_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(\mathbf{x}(s)) + \partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) p^i(s) + \partial_{x_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0.$$

而  $p^i(s) = \partial_{x_i} u(\mathbf{x}(s))$ , 对  $s$  求导得到  $\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} u \dot{x}^j(s)$ , 进而联立上面两个式子得到

$$\dot{p}^i(s) = -\partial_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) p^i(s) - \partial_{x_i} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0.$$

我们再对  $z(s) = u(\mathbf{x}(s))$  求导得

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u(\mathbf{x}(s)) \dot{x}^j(s) = \sum_{j=1}^d p^j(s) \partial_{p_j} F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)).$$

**定义 1.3.1** (特征方程). 我们称如下方程组为(1.3.1)的特征方程

$$\dot{\mathbf{p}}(s) = -\nabla_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - \nabla_z F(\mathbf{p}(s)), \quad (1.3.4)$$

$$\dot{z}(s) = \nabla_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s), \quad (1.3.5)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \nabla_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)). \quad (1.3.6)$$

进一步地, 对任意  $s \in I$ , 成立  $F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \equiv 0$ .

**定义 1.3.2** (特征曲线). 我们称(1.3.4)-(1.3.6)给出的  $\mathbf{p}, z, \mathbf{x}$  为方程(1.3.1)的特征. 其中  $\mathbf{x}(\cdot)$  被称作投影特征 (projected characteristics), 即为轨迹  $(\mathbf{p}(\cdot), z(\cdot), \mathbf{x}(\cdot)) \subset \mathbb{R}^{2d+1}$  在  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  上的投影.

至此, 我们实际上证明了

**定理 1.3.1** (特征方程组的结构). 设  $u \in C^2(\Omega)$  是方程(1.3.1)在  $\Omega$  中的解, 并假设  $\mathbf{x}(\cdot)$  满足方程(1.3.6), 其中  $\mathbf{p}(\cdot) = \nabla u(\mathbf{x}(\cdot)), z(\cdot) = u(\mathbf{x}(\cdot))$ . 则对任意满足  $\mathbf{x}(s) \in \Omega$  的参变量  $s$ , 都有  $\mathbf{p}(\cdot)$  满足方程(1.3.4),  $z(\cdot)$  满足方程(1.3.5).

接下来我们需要对常微分方程组(1.3.4)-(1.3.6)加上适当的初边值条件, 使得如上定理可以用于求解一阶偏微分方程(1.3.1).

### 1.3.2 若干实例

在定解上述特征方程组之前, 我们先看一些简单的例子, 分别对应  $F$  是线性、拟线性和完全非线性函数的情况.

#### $F$ 是线性函数

此时我们假设方程为  $F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega$ . 则对应的  $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{p} + c(\mathbf{x})z$ , 进而  $\nabla_{\mathbf{p}} F = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ . 该情况下, 方程(1.3.6)写作  $\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s))$ , 它是一个关于  $\mathbf{x}(\cdot)$  的自治常微分方程组. 而方程(1.3.5)可以写作  $\dot{z}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s)$ , 代入  $F$  的表达式可得  $\dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s))z(s)$ , 它关于  $z(\cdot)$  是线性方程. 所以该情况下, 特征线的只需要  $\mathbf{x}$  和  $z$  的方程就能刻画了, 不需要解出  $\mathbf{p}(s)$ .

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)), \quad \dot{z}(s) = -c(\mathbf{x}(s))z(s). \quad (1.3.7)$$

**例 1.3.1.** 考虑方程

$$x\partial_y u - y\partial_x u = u \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \Gamma. \quad (1.3.8)$$

其中  $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  是第一象限,  $\Gamma = \mathbb{R}_+ \times \{y = 0\}$  是  $x$  正半轴.

**解.** 该例对应上面提到的线性方程的特殊情况:  $\mathbf{b} = (-y, x), c = -1$ . 从而特征线方程为

$$\dot{x}^1 = -x^2, \quad \dot{x}^2 = x^1, \quad \dot{z} = z.$$

直接求解可得

$$x^1(s) = x^0 \cos s, \quad x^2(s) = x^0 \sin s, \quad z(s) = z^0 e^s = g(x^0) e^s,$$

其中  $x^0 \geq 0, 0 \leq s \leq \pi/2$ . 我们现在选取  $s > 0, x^0 > 0$  使得  $(x, y) = (x^1(s), x^2(s)) = (x^0 \cos s, x^0 \sin s)$ , 从而  $x^0 = \sqrt{x^2 + y^2}, s = \arctan(y/x)$ . 因此解得

$$u(\mathbf{x}) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = g(x^0)e^s = g(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan(y/x)}.$$

□

$F$  是拟线性函数

此时方程形式为

$$F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(x, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0.$$

函数  $F(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, z) \cdot \mathbf{p} + c(\mathbf{x}, z)$ , 从而  $\nabla_p F = \mathbf{b}(\mathbf{x}, z)$ , 这样的话  $\mathbf{x}(\cdot)$  和  $z(\cdot)$  满足的方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)), \quad \dot{z}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s), z(s)) \cdot \mathbf{p}(s) = -c(\mathbf{x}(s), z(s)). \quad (1.3.9)$$

拟线性方程的最经典实例即为 Burgers 方程 ( $\mathbf{x} = (t, x)$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = (1, u)$ ,  $c = 0$ ), 之前我们已经算过它的不同特征线可能会相交, 从而解未必整体存在. 这里我们计算另一个例子

**例 1.3.2.** 考虑方程

$$\partial_x u + \partial_y u = u^2 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \Gamma,$$

其中  $\Omega = \{y > 0\}$  是上半平面,  $\Gamma = \{y = 0\}$  是  $x$  轴.

解. 此时我们有  $\mathbf{b} = (1, 1)$ ,  $c = -z^2$ , 进而特征线应该满足方程

$$\dot{x}^1 = 1, \quad \dot{x}^2 = 1, \quad \dot{z} = z^2.$$

直接计算可得

$$x^1(s) = x^0 + s, \quad x^2(s) = s, \quad z(s) = \frac{z^0}{1 - sz^0} = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)},$$

其中  $x^0 \in \mathbb{R}, s \geq 0$ .

今固定  $(x, y) \in \Omega$ , 我们选取  $s > 0, x^0 \in \mathbb{R}$  使得  $(x, y)$  落在某条特征线上, 即  $(x, y) = (x^1(s), x^2(s)) = (x^0 + s, s)$ . 解得  $x^0 = x - y$ ,  $s = y$ , 这样得到

$$u(\mathbf{x}) = u(x^1(s), x^2(s)) = z(s) = \frac{g(x^0)}{1 - sg(x^0)} = \frac{g(x - y)}{1 - yg(x - y)}.$$

如果我们能保证  $1 - yg(x - y)$  一直非零, 那么该解在整个上半平面都存在. □

### $F$ 是完全非线性函数

该情况下, 我们必须完整地求解特征方程组(1.3.4)-(1.3.6). 由于  $F$  的形式没有一个统一的表达式, 我们无法写出一般形式的特征方程组, 此处仅以一个例子稍加说明.

**例 1.3.3.** 考虑 Hamilton-Jacobi 方程  $\partial_t u + H(\mathbf{x}, \nabla u) = 0$ . 此时根据(1.3.4)-(1.3.6), 我们可以得到

$$\dot{x}^j = \partial_{p_j} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \dot{p}^j = -\partial_{x_j} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

这些方程在经典力学中被称作 **Hamilton 方程**.

**推导过程.** 令  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}, p_{d+1})$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$ ,  $G(\mathbf{q}, z, \mathbf{y}) := p_{d+1} + H(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ . 从而可以计算得

$$\nabla_{\mathbf{q}} G = (\nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), 1), \quad \nabla_{\mathbf{y}} G = (\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{p}, \mathbf{x}), 0), \quad \nabla_t G = 0.$$

这样, (1.3.6)就变成下式

$$\dot{x}^i(s) = \partial_{p_i} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad 1 \leq i \leq d, \quad \dot{x}^{d+1}(s) = 1.$$

(1.3.4)就变成下式

$$\dot{p}^i(s) = \partial_{x_i} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad 1 \leq i \leq d, \quad \dot{x}^{d+1}(s) = 0.$$

(1.3.5)变为

$$\dot{z}(s) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s) - H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)).$$

□

**注记 1.3.1.** 本例的结果同样可以用变分法推导出来, 见习题6.1.6-6.1.7.

### 1.3.3 边值问题的局部存在性定理

本节我们考虑求解边值问题

$$F(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \Gamma. \quad (1.3.10)$$

其中  $F, g$  是光滑函数,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是开集,  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ . 为了简化证明步骤, 省去不必要的麻烦, 我们直接假设  $\Omega$  为上半空间  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Gamma \subseteq \{x_d = 0\}$  是一个开子集, 并记  $\Gamma$  内的点为  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ . 对一般的具有  $C^1$  边界的区域  $\Omega$ , 我们可以对其边界作局部拉直, 见 Evans [3] 第 3.2.3 节.

要求解如上边值问题, 我们仍需考虑所有满足  $\mathbf{x}(0) \in \Gamma$  的全体特征  $(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))$ . 那么首要问题就是: 我们给定的初始条件  $\mathbf{x}^0 := \mathbf{x}(0), z^0 := z(0), \mathbf{p}^0 := \mathbf{p}(0)$  应当满足怎样的相容性条件, 才

能使得对应的方程(1.3.10)有解?

**定义 1.3.3** (可容许边值 (Admissible boundary data)). 我们称  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  是可容许的 (admissible), 是指  $\mathbf{x}^0 = (\mathbf{y}^0, 0) \in \Gamma$  且  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  满足如下相容性条件:

$$z^0 = g(\mathbf{y}^0), \quad \mathbf{p}_j^0 = \partial_j g(\mathbf{y}^0), \quad F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq d - 1. \quad (1.3.11)$$

换言之, 如上条件保证了边值条件求切向导数后仍可保持, 方程限制在边界上也要成立。

**注记 1.3.2.** 需注意的是,  $z^0$  确实是由边界条件和我们选取的  $\mathbf{x}^0$  唯一确定的, 但是  $\mathbf{p}^0$  的存在性和唯一性都不能保证。

接下来我们问: 给定可容许边值  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$ , 它作一个小扰动之后是否还是可容许边值? 即对很靠近  $\mathbf{y}^0$  的点  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1}$ , 我们希望求解常微分方程组(1.3.4)-(1.3.6), 其初始条件为

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(\mathbf{y}), \quad z(0) = g(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}. \quad (1.3.12)$$

那么我们就需要找到函数  $\mathbf{q} = (q_1(\mathbf{y}), \dots, q_d(\mathbf{y}))$  使得对任意充分靠近  $\mathbf{y}^0$  的  $\mathbf{y} \in \Gamma$  都有

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}^0) = \mathbf{p}^0, \quad q_j(\mathbf{y}) = \partial_j g(\mathbf{y}), \quad F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad 1 \leq j \leq d - 1. \quad (1.3.13)$$

事实上, 我们可以证明, 若可容许边值是非特征的 (non-characteristic), 则满足(1.3.13)的  $\mathbf{q}$  是唯一的。

**引理 1.3.2.** 若可容许边值  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  满足条件

$$\partial_{p_d} F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \neq 0, \quad (1.3.14)$$

则对任意充分靠近  $\mathbf{y}^0$  的  $\mathbf{y} \in \Gamma$ , 方程(1.3.13)的解  $\mathbf{q}(\cdot)$  存在且唯一。满足条件(1.3.14)的边值被称作是**非特征的**。

**证明.** 由于  $g$  是给定的, 所以它的切向导数  $\partial_j g(\mathbf{y}) =: q_j(\mathbf{y}) (1 \leq j \leq d - 1)$  也已经给定, 我们只需找到  $q_d(\mathbf{y})$  使得  $\mathbf{q}(\mathbf{y}) = (q_1(\mathbf{y}), \dots, q_d(\mathbf{y}))$  满足方程  $F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$  即可。由于  $F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) = 0$  和(1.3.14)成立, 那么  $q_d(\mathbf{y})$  的存在唯一性可由隐映射定理直接给出。

**定理 (隐映射定理).** 设开集  $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  满足条件

- $\mathbf{F} \in C^1(D);$
- 存在一点  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D$ , 使得  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ ;
- 行列式  $\det[\frac{\partial F^i}{\partial y_j}](\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$ ,

则存在  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  的一个邻域  $G \times H$ , 使得

- 对任意  $\mathbf{x} \in G$ , 方程  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  在  $H$  中有唯一解, 记作  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ;
- $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ ;
- $\mathbf{f} \in C^1(G)$ ;
- 当  $\mathbf{x} \in G$  时, 有 Jacobi 矩阵之间的关系  $J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -(J_y \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{-1} J_x \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

□

**注记 1.3.3.** 当边界  $\Gamma$  在  $\mathbf{x}^0$  附近不平坦时, 如上非特征条件应为  $\nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \cdot N(\mathbf{x}^0) \neq 0$ , 其中  $N(\mathbf{x}^0)$  是  $\mathbf{x}^0 \in \partial U$  处的单位外法向量.

现在我们可以开始证明边值问题(1.3.10)解在给定点  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma \subseteq \partial \Omega$  附近的局部存在性了. 我们仍然假设  $\Gamma \subseteq \partial \Omega$  在  $\mathbf{x}^0$  处是平坦的, 且位于超平面  $\{x_d = 0\}$  内; 并假设  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  是可容许边值, 并满足非特征条件(1.3.14). 据引理1.3.2知, 存在函数  $\mathbf{q}(\cdot)$  使得  $\mathbf{q}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{p}^0$ , 且对任意充分靠近  $\mathbf{y}^0$  的  $\mathbf{y} \in \Gamma$ ,  $(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y})$  都是可容许边值.

要使得常微分方程组(1.3.4)-(1.3.6)(初始条件由  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  给定)有唯一解  $(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{x}(\mathbf{y}, s))$ , 最重要的一步是对映射  $(y_1, \dots, y_{d-1}, s) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$  (在  $\mathbf{x}^0$  的一个小邻域内) 求逆, 相当于给定区域内部的点, 反过来寻找该点所在特征线在边界上的起点  $\mathbf{y}$  以及该点在特征线上对应的参数  $s$ , 这可以用逆映射定理证明.

**定理 (局部逆映射定理).** 设开集  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 满足:

- $f \in C^1(D)$ ;
- 有  $\mathbf{x}_0 \in D$ , 使得  $\det J_f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

记  $y_0 = f(\mathbf{x}_0)$ , 那么存在  $\mathbf{x}_0$  的一个邻域  $U$  和  $\mathbf{y}_0$  的一个邻域  $V$ , 使得:

- $f(U) = V$ , 且  $f$  在  $U$  上是单射;
- 记  $\mathbf{g}$  是  $f$  在  $U$  上的逆映射,  $\mathbf{g} \in C^1(V)$ ;
- 当  $\mathbf{y} \in V$  时,

$$J\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (Jf(\mathbf{x}))^{-1},$$

其中  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ .

**引理 1.3.3 (局部可逆性).** 设  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  满足非特征边界条件(1.3.14). 则存在包含 0 的开区间  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  中的邻域  $W$ , 以及  $\mathbf{x}^0$  在  $\mathbb{R}^d$  中的邻域  $V$ , 使得对任意  $\mathbf{x} \in V$ , 存在唯一的  $s \in I$ ,  $\mathbf{y} \in W$  使得  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)$ . 映射  $\mathbf{x} \mapsto (s, \mathbf{y})$  是  $C^2$  的.

该引理表明, 若  $(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$  满足非特征边界条件(1.3.14), 则对  $\Omega$  内部充分靠近  $\mathbf{x}^0$  的点  $\mathbf{x}$ , 都可以找到一条从边界点  $\mathbf{y} \in \Gamma$  (同样也充分靠近  $\mathbf{x}^0$ ) 出发的特征线  $\mathbf{x}$ , 使得该特征线上参数为  $s$  的点恰好就是  $\mathbf{x}$  (即  $\mathbf{x}$  必定落在某条从  $\mathbf{x}^0$  附近的一个边界点出发的特征线上).

**证明.** 我们现在已经有了  $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) = \mathbf{x}^0$ . 据逆映射定理, 若我们能证明  $\det \nabla_{\mathbf{y}, s} \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) \neq 0$ , 则直接就

能得到想要的结论。接下来计算这个行列式，现在我们已经有  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, 0) = (\mathbf{y}, 0)$  对任意  $\mathbf{y} \in \Gamma$  都成立，所以对  $1 \leq i \leq d - 1$ ,  $\mathbf{x}$  的第  $i$  分量  $x^i(\mathbf{y}, s)$  满足

$$\partial_{y_i} x^j(\mathbf{x}^0, 0) = \begin{cases} \delta_{ij} & 1 \leq j \leq d - 1 \\ 0 & j = d \end{cases}.$$

而方程(1.3.6)表明  $\partial_s x^j(\mathbf{x}^0, 0) = \partial_{p_j} F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0)$ . 所以直接计算可得

$$\nabla \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \partial_{p_1} F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \\ \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \partial_{p_d} F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^0) \end{bmatrix}.$$

可见，非特征边界条件保证了如上方阵是非奇异的。  $\square$

据此，我们证明了对任意  $\mathbf{x} \in V$ , 方程  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)$  有局部唯一解  $yy = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ ,  $s = s(\mathbf{x})$ . 接下来我们对  $\mathbf{x} \in V$  以及满足该方程的  $\mathbf{y}, s$  定义

$$u(\mathbf{x}) := z(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) := \mathbf{p}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})). \quad (1.3.15)$$

现在可以证明局部存在性定理

**定理 1.3.4** (局部存在性定理). 由(1.3.15)给出的函数  $u \in C^2$  是方程

$$F(\nabla u(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in V), \quad u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Gamma \cap V)$$

的解。

**证明.** 首先，我们固定  $\mathbf{x}^0$  附近的一个点  $\mathbf{y} \in \Gamma$ , 然后可以求解出  $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(s) = z(\mathbf{y}, s), \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)$ . 首先证明：若  $\mathbf{y} \in \Gamma$  充分靠近  $\mathbf{x}^0$ , 则有

$$f(\mathbf{y}, s) := F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, s), z(\mathbf{y}, s), \mathbf{x}(\mathbf{y}, s)) = 0, \quad s \in I. \quad (1.3.16)$$

事实上，注意到边值的相容性条件 (引理1.3.2) 已经表明

$$f(\mathbf{y}, 0) = F(\mathbf{p}(\mathbf{y}, 0), z(\mathbf{y}, 0), \mathbf{x}(\mathbf{y}, 0)) = F(\mathbf{q}(\mathbf{y}), g(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0.$$

所以现在只要证明  $\partial_s f \equiv 0$  即可. 对  $s$  求导可得

$$\begin{aligned}\partial_s f(\mathbf{y}, s) &= \sum_{j=1}^d \partial_{p_j} F \dot{p}^j + \partial_z F \dot{z} + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \dot{x}^j \\ &= \sum_{j=1}^d \partial_{p_j} (-\partial_{x_j} F - \partial_z F p^j) + \partial_z F \sum_{j=1}^d \partial_{p_j} F p^j + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F \partial_{\partial_j} F = 0.\end{aligned}$$

所以这就表明  $f(\mathbf{y}, s) = 0$  对任意  $s \in I$  成立.

至此, 我们结合引理1.3.3可得  $F(\mathbf{p}(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$  对任意  $\mathbf{x} \in V$  成立. 接下来就只要证明  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$  对任意  $\mathbf{x} \in V$  成立. 为此, 我们先证明

$$\partial_s z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^d p^j(\mathbf{y}, s) \partial_s x^j(\mathbf{y}, s), \quad (1.3.17)$$

$$\partial_{y_i} z(\mathbf{y}, s) = \sum_{j=1}^d p^j(\mathbf{y}, s) \partial_{y_i} x^j(\mathbf{y}, s), \quad 1 \leq i \leq d-1. \quad (1.3.18)$$

第一个恒等式可以直接联立(1.3.5)-(1.3.6)算得. 对第二个恒等式, 固定  $\mathbf{y} \in \Gamma$ ,  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ , 并记

$$r^i(s) := \partial_{y_i} z(\mathbf{y}, s) - \sum_{j=1}^d p^j(\mathbf{y}, s) \partial_{y_i} x^j(\mathbf{y}, s).$$

首先注意到, 边值的相容性条件表明

$$r^i(0) = \partial_{y_i} z(\mathbf{y}, 0) - \sum_{j=1}^d p^j(\mathbf{y}, 0) \partial_{y_i} x^j(\mathbf{y}, 0) = \partial_{y_i} z(\mathbf{y}, 0) - \sum_{j=1}^d p^j(\mathbf{y}, 0) \delta_{ij} = 0.$$

接下来我们断言

$$\dot{r}^i(s) = \partial_z F \left( \sum_{j=1}^d p^j \partial_{y_i} x^j - \partial_{y_i} z \right) = -\partial_z F r^i(s). \quad (1.3.19)$$

若能证得该式, 则结合  $r^i(0) = 0$  可以直接解得  $r^i(s) \equiv 0$  (用 Grönwall 不等式也可以), 进而得到想要的恒等式.

$r^i$  满足的常微分方程可以通过直接求导计算出来. 在  $r^i(s)$  的表达式中对  $s$  求导得

$$\dot{r}^i(s) = \partial_{y_i} \partial_s z - \sum_{j=1}^d \partial_s p^j \partial_{y_i} x^j + p^j \partial_s \partial_{y_i} x^j.$$

另一方面, 我们在  $\partial_s z$  的表达式中对  $y_i$  求导得

$$\partial_s \partial_{y_i} z = \sum_{j=1}^d \partial_{y_i} p^j \partial_s x^j + p^j \partial_s \partial_{y_i} x^j.$$

二者联立, 再用(1.3.4), 得到

$$\dot{r}^i(s) = \sum_{j=1}^d \partial_{y_i} p^j \partial_s x^j - \partial_s p^j \partial_{y_i} x^j = \sum_{j=1}^d \partial_{y_i} p^j \partial_{p_j} F + (\partial_{x_j} F + \partial_z F p^j) \partial_{y_i} x^j. \quad (1.3.20)$$

接下来需要处理右边前两项, 这可以通过在  $f(\mathbf{y}, s) = 0$  中对  $y_i$  求导得到

$$\sum_{j=1}^d \partial_{p_j} F \partial_{y_i} p^j + \partial_z F \partial_{y_i} z + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F \partial_{y_i} x^j = 0.$$

代入前面  $\dot{r}^i(s)$  的表达式即可.

现在我们结合(1.3.17)-(1.3.18)证明  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x})$ . 在(1.3.15)中  $u$  的表达式里对  $x_j$  求导

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} u &= \partial_s z \partial_{x_j} s + \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{y_i} \partial_{x_j} y^i \\ &= \sum_{k=1}^d p^k \partial_s x^k \partial_{x_j} s + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{k=1}^d p^k \partial_{y_i} x^k \partial_{x_j} y^i \\ &= \sum_{k=1}^d p^k \left( \partial_s x^k \partial_{x_j} s + \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{y_i} x^k \partial_{x_j} y^i \right) = \sum_{k=1}^d p^k \partial_{x_j} x^k = p^j. \end{aligned}$$

□

接下来我们看一些局部存在性定理的应用实例.

**例 1.3.4** ( $F$  为线性函数). 考虑线性问题

$$\mathbf{b} \cdot \nabla u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \Gamma.$$

它对应的投影特征线满足常微分方程组

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s)).$$

讨论. 现在有以下三种情况

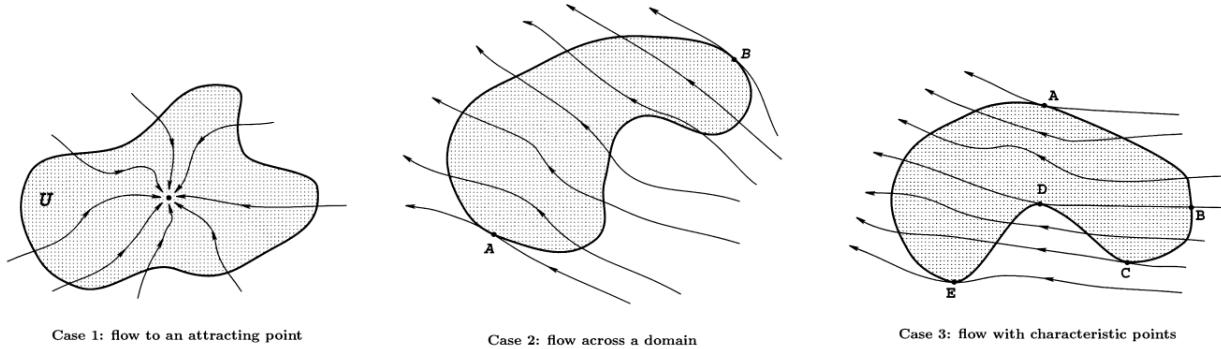


图 1.4: 三种不同情况的特征线

- (1) 如上方第一张图片所示. 设  $\mathbf{b}$  在  $\Omega$  内部只在一个点处为零 (不妨设为原点), 并假设在边界  $\Gamma = \partial\Omega$  上有  $\mathbf{b} \cdot N < 0$ . 显见, 给定  $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ , 局部存在性定理表明在  $\Gamma$  附近有唯一的解  $u$ , 且  $u(\mathbf{x}(s)) = u(\mathbf{x}(0)) = g(\mathbf{x}^0)$ . 然而这个解不可能光滑地延拓为方程在整个区域  $\Omega$  中的解 (除非  $g$  本身是常值函数), 这是因为方程解的取值在各条特征线上都保持不变.
- (2) 如上方第二张图片所示. 设上述常微分方程解的每条积分曲线都只进入  $\Omega$  一次 (除了在两个特征点  $A, B$  处外), 并在某处穿过集合  $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot N(\mathbf{x}) < 0\}$ , 走出  $\Omega$  一次. 该情况下可以得到方程的光滑解.
- (3) 如上方第三张图片所示. 我们确实可以沿着各条特征曲线将  $u$  设置为常值, 但是这样构造的解  $u$  可能是不连续的, 除非假设  $g(B) = g(D)$ . 需注意, 该情况下在  $D$  点是不成立非特征条件的, 所以该点处的局部存在性也不成立.

□

**例 1.3.5** (守恒律方程的特征线). 考虑拟线性守恒律方程

$$G(\nabla u, \partial_t u, u, \mathbf{x}, t) := \partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{F}(u)) = 0 \text{ in } \Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad u = g \text{ on } \Gamma := \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d. \quad (1.3.21)$$

其中  $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  是光滑的向量值函数.

讨论. 令  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}, p_{d+1})$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, t)$ , 则  $G(\mathbf{q}, z, \mathbf{y}) = p_{d+1} + \mathbf{F}'(z) \cdot \mathbf{p}$ , 进而

$$\nabla_{\mathbf{q}} G = (\mathbf{F}'(z), 1), \quad \nabla_{\mathbf{y}} G = 0, \quad \nabla_z G = \mathbf{F}''(z) \cdot \mathbf{p}.$$

显见, 在任意  $\mathbf{y}^0 = (\mathbf{x}^0, 0) \in \Gamma$  处, 非特征边界条件(1.3.14)都成立, 而  $\mathbf{x}$  的方程则可以写作

$$\dot{x}^i(s) = F^{i'}(z(s)) \quad (1 \leq i \leq d), \quad \dot{x}^{d+1}(s) = 1.$$

解得  $x^{d+1}(s) = s$ , 这说明我们可以将参数  $s$  和时间变量  $t$  等同起来. 此外, 我们还有  $\dot{z}(s) = 0$ , 从而  $z(s) = z^0 = g(\mathbf{x}^0)$ , 进而解出  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{F}'(g(\mathbf{x}^0))s + \mathbf{x}^0$ . 这说明投影特征线  $\mathbf{y}(s) = (\mathbf{x}(s), s) = (\mathbf{F}'(g(\mathbf{x}^0))s + \mathbf{x}^0, s)$  ( $s \geq 0$ ) 是直线, 沿着该直线  $u$  是常值.

**注记 1.3.4.** 然而, 如果我们选取另一个起点  $\mathbf{z}^0 \in \Gamma$ ,  $g(\mathbf{z}^0) \neq g(\mathbf{x}^0)$ , 则它们对应的投影特征线可能在某个时间  $t > 0$  相交. 因此守恒律方程(1.3.21)一般来说很难保证古典解有整体解的存在性. 若要寻求整体解, 则需要引进“弱解”的概念.

我们继续问: 能否显式求解守恒律方程? 事实上, 对一般的  $g, \mathbf{F}$ , 我们只能写出解满足的隐式方程. 据  $s = t$  知,

$$u(t, \mathbf{x}(t)) = z(t) = g(\mathbf{x}(t) - t\mathbf{F}'(\mathbf{z}^0)) = g(\mathbf{x}(t) - t\mathbf{F}'(u(t, \mathbf{x}(t)))) \Rightarrow u = g(\mathbf{x} - t\mathbf{F}'(u)).$$

据隐映射定理, 如果  $\mathbf{F}, g$  满足条件

$$1 + t\nabla g(\mathbf{x} - t\mathbf{F}'(u)) \cdot \mathbf{F}''(u) \neq 0,$$

则如上隐式方程确实可以确定一个局部解  $u(t, \mathbf{x})$ . 特别地, 若  $d = 1, \mathbf{F}(x) = x^2/2$ , 则如上隐式方程恰为 Burgers 方程(1.1.6)的解满足的方程.  $\square$

### 习题 1.3

**习题 1.3.1.** 用特征线法求解如下偏微分方程

- (1)  $x\partial_x u + y\partial_y u = 2u, u(x, 1) = g(x).$
- (2)  $x\partial_x u + 2y\partial_y u + \partial_z u = 3u, u(x, y, 0) = g(x, y).$
- (3)  $u\partial_x u + \partial_y u = 1, u(x, x) = x/2.$

**习题 1.3.2 (拉格朗日坐标系).** 给定光滑的向量场  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ , 令  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s, \mathbf{x}, t)$  是如下常微分方程组的解

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s)) \quad (s \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}.$$

- (1) 定义  $J(s, \mathbf{x}, t) := \det \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}(s, \mathbf{x}, t)$ . 证明:  $\partial_s J = \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}))J$ .
- (2) 证明:  $\rho(t, \mathbf{x}) := g(\mathbf{x}(0, \mathbf{x}, t))J(0, \mathbf{x}, t)$  满足连续性方程 (continuity equation)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad \rho = g \text{ on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d.$$

提示: 证明  $\partial_s(\rho(\mathbf{x}, s)J) = 0$ .

## 1.4 \*一维守恒律方程的激波解

在第1.1.3节和上一节的例1.3.5中,我们都提到守恒律方程的经典解未必整体存在. 尤其以 Burgers 方程为例, 我们甚至可以计算出解的爆破时间. 于是人们自然会追问: 在爆破时间处发生的奇性是什么? 在该时间之后, 方程的解能以什么形式继续存在并延续下去? 本节我们引进“激波”和“Rankine-Hugoniot 条件”这两个概念回答该问题. 由于本讲义没有覆盖 Hamilton-Jacobi 方程的内容, 因此我们并不讨论如何利用 Lax-Olešnik 公式显式计算守恒律方程的解.

### 1.4.1 积分解和 Rankine-Hugoniot 条件

考虑一维守恒律方程

$$\partial_t u + \partial_x(F(u)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad u = g \text{ on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \quad (1.4.1)$$

设  $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是具有紧支集的光滑函数, 我们一般称之为测试函数 (**test function**). 两边乘以  $v$  并分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x(F(u)))v \, dx \, dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \partial_t v \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}} uv \, dx \Big|_{t=0} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} F(u) \partial_x v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

代入边界条件得到

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \partial_t v + F(u) \partial_x v \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} gv \, dx \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.4.2)$$

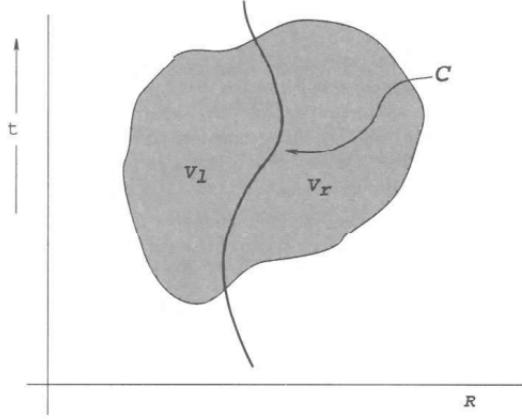
可见, 如果单纯地让(1.4.2)式成立, 并不要求  $u$  具有任何的可微性. 我们据此引进如下定义

**定义 1.4.1** (积分解 (**integral solution**)). 若对任意的测试函数  $v$ , 函数  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  都满足不等式(1.4.2), 则称  $u$  是方程(1.4.1)的积分解.

我们接下来考虑一种特殊情况 (也是研究中经常出现的情形). 设有一个开区域  $V \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , 一条光滑曲线  $C$  穿过该区域并将其分为左右两半  $V_l, V_r$ . 我们假设  $u$  是在  $V_l, V_r$  中都光滑的函数 (但可能在  $C$  上有间断), 并假设  $u$  是方程(1.4.1)的一个积分解, 其一阶导数在  $V_l, V_r$  中都是一致连续的. 现在我们在  $V_l$  中取一个测试函数, 对(1.4.2)使用分部积分, 我们得到

$$0 = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x(F(u)))v \, dx \, dt$$

对任意测试函数  $v \in C_c^\infty(V_l)$  成立, 所以我们有  $\partial_t u + \partial_x(F(u)) = 0$  在  $V_l$  中恒成立, 类似结果在  $V_r$  也成立.



Rankine-Hugoniot condition

图 1.5: Rankine-Hugoniot 条件示意图

现在我们考虑解在曲线  $C$  上的间断. 今选取测试函数  $v \in C_c^\infty(V)$ , 但它在  $C$  上未必为零. 现在, 由积分解的定义, 我们分部积分得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u \partial_t v + F(u) \partial_x v \, dx \, dt \\ &= \iint_{V_l} u \partial_t v + F(u) \partial_x v \, dx \, dt + \iint_{V_r} u \partial_t v + F(u) \partial_x v \, dx \, dt \\ &= - \iint_{V_l} (\partial_t u + \partial_x(F(u)))v \, dx \, dt - \iint_{V_r} (\partial_t u + \partial_x(F(u)))v \, dx \, dt \quad \text{这一行等于零} \\ &\quad + \int_C (u_l N^2 + F(u_l) N^1)v \, d\ell - \int_C (u_r N^2 + F(u_r) N^1)v \, d\ell, \end{aligned}$$

其中  $N = (N^1, N^2)$  为曲线  $C$  的单位法向量,  $\int_C \dots \, d\ell$  是指  $C$  上的第一型曲线积分. 从  $V_l$  指向  $V_r$ ,  $u_l, u_r$  分别表示  $u$  从  $V_l$  和  $V_r$  一侧往  $C$  取极限的值. 据此, 我们得到

$$\int_C [(F(u_l) - F(u_r))N^1 + (u_l - u_r)N^2] v \, d\ell = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(V). \quad (1.4.3)$$

所以, 我们得到曲线  $C$  上的间断条件

$$(F(u_l) - F(u_r))N^1 + (u_l - u_r)N^2 = 0 \text{ along } C. \quad (1.4.4)$$

如果我们进一步假设  $C$  是参数曲线  $\{(t, x) : x = s(t)\}$ , 其中  $s(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑函数, 我们就能计算出其法向量为  $N = (\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, -\frac{\dot{s}}{\sqrt{1+s^2}})$ , 从而(1.4.4)可以推出

$$F(u_l) - F(u_r) = \dot{s}(u_l - u_r) \text{ in } V, \text{ along } C. \quad (1.4.5)$$

**记号 1.4.1.** 对函数  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们记  $\llbracket f \rrbracket := f_l - f_r$  为  $f$  沿着曲线  $C$  的跳跃 (jump), 并记  $\sigma := \dot{s}$  为曲线  $C$  的速度. 这里  $f_l, f_r$  分别表示  $f$  从  $C$  的左侧、右侧趋向  $C$  上的点的极限。

现在我们引进守恒律方程最重要的基本概念

**定义 1.4.2.** 我们称

$$\llbracket F(u) \rrbracket = \sigma \llbracket u \rrbracket \quad (1.4.6)$$

为一维守恒律方程(1.4.1)沿着激波曲线 (shock curve)  $C$  的 Rankine-Hugoniot 间断条件 (jump condition).

接下来我们以 Burgers 方程为例来验证 Rankine-Hugoniot 条件.

**例 1.4.1.** 考虑初值问题

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = g(x) := \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}. \quad (1.4.7)$$

讨论. 据例1.3.5, 我们可以计算出通过点  $x^0 \in \mathbb{R}$  的特征线作为参数曲线的表达式为

$$\mathbf{y}(s) = (g(x^0)s + x^0, s), \quad s \geq 0.$$

因此, 方程的解为

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & x \leq t, 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & x \geq 1, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

注意到如上经典解在  $t = 1$  发生爆破, 这是由于特征线相交导致的. 如下图所示那么如何定义  $t \geq 1$

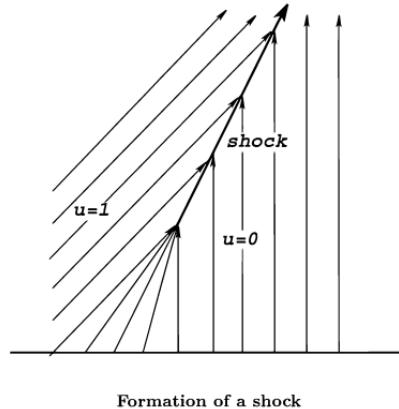


图 1.6: 例1.4.1的特征线示意图, 可以看见  $t = 1$  时特征线交汇, 激波形成

时的解呢? 这时我们可以验证积分解的存在性. 事实上, 如果我们取  $s(t) = \frac{1+t}{2}$ , 并记

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < s(t) \\ 0 & \text{if } s(t) < x \end{cases} \quad (t \geq 1).$$

那么沿着该曲线有  $u_l = 1, u_r = 0, F(u_l) = \frac{1}{2}, F(u_r) = 0$ , 从而它满足 Rankine-Hugoniot 条件(1.4.6), 这说明该解可以以积分解的形式存在.  $\square$

## 1.4.2 激波解、熵条件

接下来我们再看一个例子, 其表明产生间断的解并不一定是上一例子里面由特征线交汇产生的激波解.

**例 1.4.2.** 考虑如下 Burgers 方程的初值问题

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = g(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}. \quad (1.4.8)$$

讨论. 本例中, 我们会看见积分解的不唯一性. 现定义

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0 & x < t/2 \\ 1 & x > t/2 \end{cases}, \quad u_2(t, x) = \begin{cases} 1 & x > t \\ x/t & 0 < x < t \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

可以验证  $u_1, u_2$  都是积分解, 且满足 Rankine-Hugoniot 条件, 但这两个解的形态完全不一样. 其中我们将  $u_1$  称作非物理激波 (non-physical shock) 解,  $u_2$  称作稀疏波 (rarefaction wave) 解.  $\square$

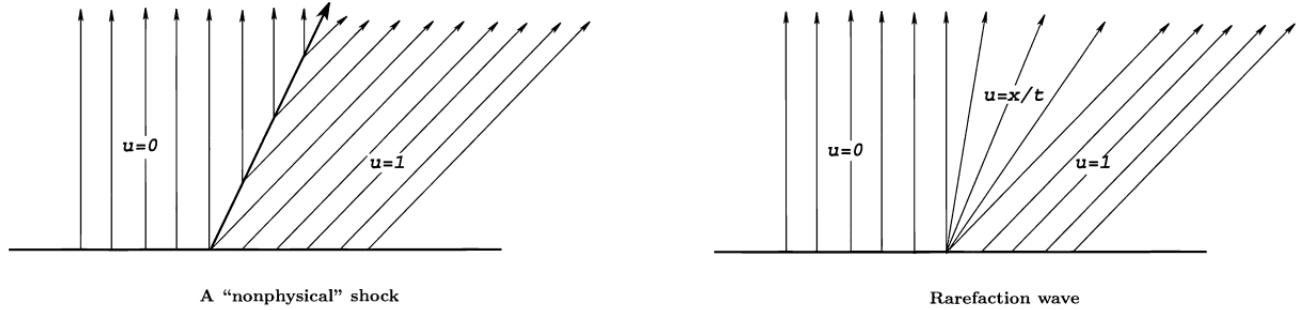


图 1.7: 非物理激波和稀疏波的实例

例1.4.2表明, 守恒律方程的积分解往往是非唯一的, 它会产生各种“非物理的”解, 并无现实意义. 那么, 我们是否能找出更精确的判定准则, 来确保守恒律方程解的唯一性呢? 要回答这个问题, 我们需要引进“熵条件 (entropy condition)”这个概念.

回忆我们在例1.3.5中已经算得, 在通过点  $x^0 \in \Gamma \subset \partial\Omega$  的投影特征线

$$\mathbf{y}(s) = (F'(g(x^0))s + x^0, s) \quad (1.4.9)$$

上, 函数  $u$  恒为常值  $g(x^0)$ . 同时我们也知道, 随着时间的正向演化, 我们会遇到特征线相交的情况, 然后解就会出现间断. 然而, 我们可以从  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  中的某点开始沿着一条特征线进行时间倒向演化, 这样就不会出现特征线的相交. 现在, 假设  $u$  在间断曲线  $C$  上的某点处的左、右极限  $u_l, u_r$  取值不同, 且从左边发出的一条特征线和从右边发出的一条特征线在该点处相交, 结合特征线方程, 我们会得出如下不等式 (不妨设  $F'(u_l) > F'(u_r)$ )

$$F'(u_l) > \sigma > F'(u_r). \quad (1.4.10)$$

**定义 1.4.3 (熵条件、激波).** 不等式(1.4.10)被称作熵条件 (entropy condition). 若方程(1.4.1)的积分解  $u$  沿着曲线  $C$  满足 Rankine-Hugoniot 条件(1.4.6)和熵条件(1.4.10), 则称  $C$  是激波曲线 (shock curve).

如果我们进一步假设  $F$  是一致凸的, 即存在常数  $\theta$  使得  $F'' \geq \theta > 0$  恒成立. 此时  $F'$  严格递增, 进而熵条件等价于  $u_l > u_r$  沿着激波曲线恒成立.

例 1.4.3. 考虑初值问题

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = g(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ 或 } x > 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (1.4.11)$$

讨论. 对  $t \in [0, 2]$ , 我们可以结合例1.4.1-例1.4.2得到经典解

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ 或 } x > 1 + \frac{t}{2} \\ x/t & 0 < x < t \\ 1 & t < x < 1 + \frac{t}{2} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2). \quad (1.4.12)$$

对  $t \geq 2$ , 我们期待激波解 (设激波曲线为参数曲线  $s(\cdot)$ ) 能够作为延续下去, 其左边为  $u = x/t$ , 右边为  $u = 0$ , 因此我们需要验证 Rankine-Hugoniot 条件(1.4.6). 直接计算可得, 该解满足

$$[u] = s(t)/t, \quad [F(u)] = \frac{1}{2} \left( \frac{s(t)}{t} \right)^2, \quad \sigma = \dot{s}(t).$$

据(1.4.6)知,  $s(t)$  应当满足方程  $\dot{s}(t) = s(t)/2t$  ( $t \geq 2$ ), 其初始条件为  $s(2) = 2$ . 直接求解常微分方程得到  $s(t) = \sqrt{2t}$ . 因此, 我们得到  $t \geq 2$  的积分解为

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ 或 } x > \sqrt{2t} \\ x/t & 0 < x < \sqrt{2t} \end{cases} \quad (t \geq 2). \quad (1.4.13)$$

解的形态如图所示 □

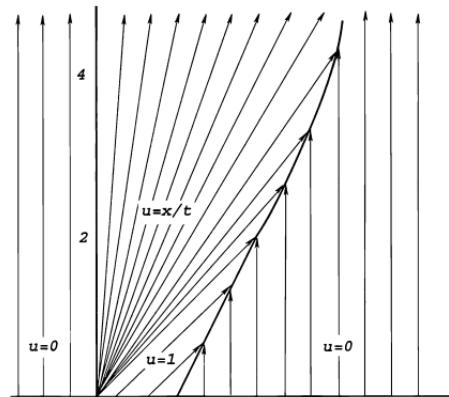


图 1.8: 例1.4.3的特征线示意图

### 1.4.3 \*弱解唯一性定理

事实上, 我们还可以计算守恒律方程解的表达式. 但由于本讲义没有介绍 Hamilton-Jacobi 方程的内容, 因此我们无法证明这些结论. 在此我们只列出主要结论, 其详细证明参见 Evans [3] 的第 3.3-3.4 节.

**定理 1.4.1 (Lax-Olešnik 公式).** 设  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一致凸的光滑函数, 并记  $G := (F')^{-1}$ , 假设  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $h(x) := \int_0^x g(y) dy$ . 则对守恒律方程(1.4.1), 成立如下结论

(1) 对任意  $t > 0$  以及  $x \in \mathbb{R}$  (除去至多可数个值), 存在唯一的点  $y(t, x)$  满足

$$\min_{y \in \mathbb{R}} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \right\} = tL\left(\frac{x-y(t, x)}{t}\right) + h(y(t, x)).$$

(2)  $x \mapsto y(t, x)$  是不减函数.

(3) (Lax-Olešnik 公式) 对任意  $t > 0$ , 有  $u(t, x) = G\left(\frac{x-y(t, x)}{t}\right)$  对几乎处处的  $x \in \mathbb{R}$  成立.

(4) 中给出的表达式是方程(1.4.1)的积分解.

(5) (单侧跳跃估计) 存在  $C > 0$  使得对任意  $t > 0, z > 0, x \in \mathbb{R}$  成立不等式

$$u(t, x+z) - u(t, x) \leq \frac{Cz}{t}, \quad (1.4.14)$$

该不等式被称作熵条件.

据此, 我们可以证明熵解的整体唯一性.

**定义 1.4.4 (熵解 (entropy solution)).** 我们称  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  是守恒律方程初值问题(1.4.1)的熵解, 是指  $u$  为该问题的积分解, 并满足: 存在  $C > 0$ , 使得对任意  $t > 0$  以及几乎处处的  $x \in \mathbb{R}, z > 0$  成立

$$u(t, x+z) - u(t, x) \leq Cz\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

**定理 1.4.2 (熵解的唯一性).** 设  $F$  是一致凸的光滑函数, 则守恒律方程初值问题(1.4.1)的熵解在相差一个零测集的意义下是唯一的.

关于拟线性双曲守恒律方程组的一般理论, 读者可以参考阅读 [9] 的第五章至第七章.

## 习题 1.4

**习题 1.4.1.** 设  $F(0) = 0$ ,  $u$  是如下守恒律方程的连续积分解

$$\partial_t u + \partial_x(F(u)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad u = g \text{ on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}.$$

此外还假设对任意  $T > 0$ ,  $u$  在  $[0, T] \times \mathbb{R}$  上具有紧支集. 证明: 对任意  $t > 0$ , 成立  $\int_{\mathbb{R}} u(t, \cdot) dx = \int_{\mathbb{R}} g dx$ .

**习题 1.4.2.** 证明: 函数

$$u(t, x) := \begin{cases} -\frac{2}{3}(t + \sqrt{3x + t^2}) & \text{若 } 4x + t^2 > 0 \\ 0 & \text{若 } 4x + t^2 < 0 \end{cases}$$

是 Burgers 方程  $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$  的无界熵解.

**习题 1.4.3.** 显式计算如下 Burgers 方程唯一的熵解

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u = g & \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < -1 \\ 0 & \text{if } -1 < x < 0 \\ 2 & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}.$$

## 第二章 全空间中的波动方程和热方程

本章介绍全空间中的波动方程和热传导方程的求解方法。即给定函数  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们希望求解方程  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$ , 其中  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , 常数  $c > 0$  称作波速; 以及方程  $\partial_t u - k \Delta u = f$ , 其中  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , 常数  $k > 0$  称作热传导系数。在部分书籍和专业文献中, 通常将欧氏空间中的波算子用  $\square := \partial_t^2 - c^2 \Delta$  记号表示。波动方程往往作为刻画弦振动 (一维)、薄膜振动 (二维)、弹性介质形变 (三维) 的简化模型出现, 其中变量  $u$  一般来说代表在某个方向的位移。进一步地, 波方程 (例如变系数、非线性波方程等) 在很多物理模型也会出现, 例如可压缩流体的运动、广义相对论中刻画时空弯曲程度的 Einstein 方程等等都可以写成非线性波方程 (组) 的形式。而热方程除了描述物体的温度变化以外, 也可以用于刻画种群的扩散或聚集 (具有扩散性)、粘性流体的流动 (具有耗散性) 等等现象, 例如 Keller-Segel 方程组、Navier-Stokes 方程组等等。

### 2.1 一维波动方程

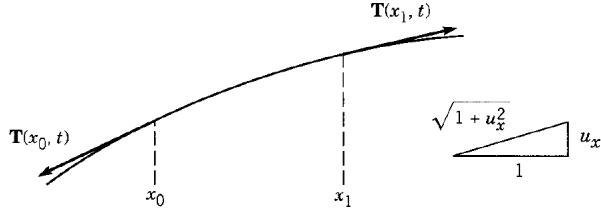
本节介绍如何求解实直线  $\mathbb{R}$  和半直线  $\mathbb{R}_+$  上的一维波动方程的初值问题  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = f$ .

#### 2.1.1 一维波动方程的导出: 弦振动方程

考虑一个密度为常值  $\rho$ 、充分柔软、具有弹性 (只抗伸长、不抗弯曲) 的弦的振动。假设这根弦只在  $xOy$ -平面内, 而且平衡态就是沿着  $x$  轴的方向, 并假设  $u(t, x)$  是垂直方向 ( $y$  方向) 距离平衡态的位移。



现在可以用牛顿第二定律导出  $u$  的方程。我们取很小一段区间  $[x_0, x_1]$ , 并且假设  $T$  为沿着弦线方向的张力 (这里考虑微小振动, 所以取成常值)



由于  $u$  表示的是垂直方向的位移，我们计算这一小段弦在垂直方向受到的力

$$T \frac{u_x}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \Big|_{x_0}^{x_1} \approx T \partial_x u(x_1) - T \partial_x u(x_0).$$

此时用牛顿第二定律，得到

$$T \partial_x u(x_1) - T \partial_x u(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \rho \underbrace{\partial_t^2 u(t, x)}_{\text{加速度}} dx,$$

其中左边用微积分基本定理可以写作  $T \int_{x_0}^{x_1} \partial_x^2 u(t, x) dx$ . 于是得到

$$\forall [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}, \quad \int_{x_0}^{x_1} \rho \partial_t^2 u - T \partial_x^2 u dx = 0 \Rightarrow \rho \partial_t^2 u - T \partial_x^2 u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

现在令  $c^2 = T/\rho$ , 我们就得到一维波动方程  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ , 其中  $c$  称作波速。

对二维或更高维数波动方程的导出，可参见 Evans [3] 的第 2.4 节，此处不再叙述。

## 2.1.2 分解引理

我们现在要解如下初值问题

$$\begin{cases} \square u := \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

其中  $f(t, \mathbf{x}) \in C(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^d)$  是给定的外力项。我们将初始位移  $\varphi$  的贡献、初始速度  $\psi$  的贡献和外力  $f$  的贡献拆开，即将方程(2.1.1)的解  $u$  拆成  $u = u_1 + u_2 + u_3$ , 后者分别满足下面三个方程：

- (W1)  $\square u_1 = 0$  in  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ,  $u_1(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ ,  $\partial_t u_1(0, \mathbf{x}) = 0$  on  $\{t = 0\} \times \mathbb{R}^d$ ;
- (W2)  $\square u_2 = 0$  in  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ,  $u_2(0, \mathbf{x}) = 0$ ,  $\partial_t u_2(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$  on  $\{t = 0\} \times \mathbb{R}^d$ ;
- (W3)  $\square u_3 = f$  in  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ ,  $u_3(0, \mathbf{x}) = \partial_t u_3(0, \mathbf{x}) = 0$  on  $\{t = 0\} \times \mathbb{R}^d$ .

注意，如上拆分方法只依赖于方程的线性，并不依赖于维数。

$u_1, u_2, u_3$  之间的关系由如下引理给出

**引理 2.1.1** (波动方程的分解引理). 记方程 (W2) 的解是  $u_2 = W_\psi(t, \mathbf{x})$ , 即  $W_\psi$  表示的是初始位移为 0、初始速度为  $\psi$  的齐次 (即  $f = 0$ ) 波动方程的解。则有如下关系成立：

$$u_1 = \partial_t(W_\varphi(t, \mathbf{x})), \quad u_3 = \int_0^t W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau.$$

这里我们假设  $W_\varphi(t, \mathbf{x})$  和  $W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x})$  关于变量  $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  和  $(\tau; t, \mathbf{x}) \in [\tau, \infty) \times \mathbb{R}^d$  ( $\tau \geq 0$  给定) 都是充分光滑的。

证明.  $u_1$  的表达式是不难算出的，实际上根据  $W_\varphi$  的定义，我们有

$$\begin{cases} \square W_\varphi = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ W_\varphi(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t W_\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

再对这个方程两边求  $\partial_t$  就得到  $\square u_1 = \square \partial_t W_\varphi = \partial_t(\square W_\varphi) = 0$ , 这说明  $u_1$  本身也满足齐次波动方程。然后再验证  $u_1$  的初值，首先显见有  $u_1(0, \mathbf{x}) = \partial_t W_\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ . 而在算  $\partial_t u_1(0, \mathbf{x})$  时，我们需要用到  $W_\varphi(t, \mathbf{x})$  在  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  是光滑的（注意时间区间左端点是闭的），这样我们就把波方程限制在  $\{t = 0\}$  上，利用方程得到  $\partial_t u_1(0, \mathbf{x}) = \partial_t^2 W_\varphi(0, \mathbf{x}) = c^2 \Delta W_\varphi(0, \mathbf{x}) = c^2 \Delta 0 = 0$ . 这就证明了  $u_1$  是 (W1) 的解。

接下来证明  $u_3$  是 (W3) 的解。现在固定一个  $\tau > 0$ , 据  $W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t, \mathbf{x})$  的定义有

$$\begin{cases} \square W_{f(\tau, \mathbf{x})} = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ W_{f(\tau, \mathbf{x})}(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t W_{f(\tau, \mathbf{x})}(0, \mathbf{x}) = f(\tau, \mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

从  $u_3$  的表达式可以看出  $u_3(0, \mathbf{x}) = 0$  对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  都成立。接下来计算  $\partial_t u_3$ :

$$\partial_t u_3(t, \mathbf{x}) = \underbrace{W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x})|_{\tau=t}}_{=0} + \int_0^t \partial_t W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau = \int_0^t \partial_t W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau$$

令  $t = 0$ , 我们就得到  $\partial_t u_3(0, \mathbf{x}) = 0$  对  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立。目前已经验证了 (W3) 的初值，接下来只要

验证 (W3) 的方程正确, 对上面  $\partial_t u_3$  的表达式再求一个  $\partial_t$ , 我们有

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_3(t, \mathbf{x}) &= \underbrace{\partial_t (W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x})|_{\tau=t})}_{=f(t, \mathbf{x})} + \underbrace{\int_0^t \partial_t^2 W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau}_{\text{用 } w \text{ 的方程}} \\ &= f(t, \mathbf{x}) + c^2 \int_0^t \Delta W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau = f(t, \mathbf{x}) + c^2 \Delta \int_0^t W_{f(\tau, \mathbf{x})}(t - \tau, \mathbf{x}) d\tau \\ &= f(t, \mathbf{x}) + c^2 \Delta u_3(t, \mathbf{x}).\end{aligned}$$

这恰好就是波动方程。  $\square$

**注记 2.1.1** ( $u_3$  的物理意义: 冲量原理/Duhamel 原理). 如果我们把  $u_3$  的表达式写成黎曼和, 就有

$$u_3(t, \mathbf{x}) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{f(t_j, \mathbf{x})}(t - t_j, \mathbf{x}) \Delta t_j = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} W_{f(t_j, \mathbf{x}) \Delta t_j}(t - t_j, \mathbf{x})$$

其中  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  是区间  $[0, t]$  的划分,  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $\Lambda := \max_{0 \leq j \leq n-1} \Delta t_j$ . 固定一个  $j$ ,  $f(t_j, \mathbf{x}) \Delta t_j$  表示的是时间  $[t_j, t_{j+1}]$  内由外力  $f$  贡献的“冲量”, 它被转化成  $t_j$  时刻的速度变化量  $f(t_j, \mathbf{x}) \Delta t_j$  (这是根据“冲量原理”  $F\Delta t = m\Delta v$  得到的). 从而初值为零、非齐次波方程 (W3) 的解  $u_3$  可以视作一大堆齐次波方程的解的“累积”(也就是一堆  $t_j$  时刻的  $u_2$  累加起来). 这个“齐次化”方法非常常用, 数学上称作 **Duhamel 原理**.

### 2.1.3 $\mathbb{R}$ 上的一维波动方程: D'Alembert 公式

现在我们可以来计算  $d = 1$  时初值问题(2.1.1)解的表达式. 据引理2.1.1, 我们只用计算  $u_2$  就行了, 剩下的  $u_1, u_3$  都可以用  $u_2$  算出来.

$$\begin{cases} \square u_2 = \partial_t^2 u_2 - c^2 \partial_x^2 u_2 = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u_2(0, x) = 0, \quad \partial_t u_2(0, x) = \psi(x) & t = 0, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

由于  $c^2 > 0$  是一个正数, 以及维数是 1, 所以我们可以直接对波算子进行“因式分解”  $\square = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$ , 把波动方程变成两个传输方程, 其未知量分别为  $u_2, v$ :

$$\partial_t u_2 - c\partial_x u_2 = v, \quad \partial_t v + c\partial_x v = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

它们的初值是  $u_2(0, x) = 0$  和  $v(0, x) = \psi(x)$ .

从第二个方程可以直接看出  $v(t, x) = \psi(x - ct)$ , 然后把它代进  $u_2$  的传输方程得到

$$\partial_t u_2 - c\partial_x u_2 = \psi(x - ct), \quad u_2(0, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

此时用非齐次传输方程解的表达式(1.1.4), 就可以算出

$$u_2(t, x) = \int_0^t \psi(x + c(t - \tau) - ct) d\tau \xrightarrow{y=x+ct-2c\tau} \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \quad (2.1.3)$$

得到  $u_2$  之后, 根据引理 2.1.1 就能计算出  $u_1, u_3$ .

$$u_1(t, x) = \frac{1}{2c} \partial_t \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy = \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)), \quad (2.1.4)$$

$$u_3(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, y) dy d\tau. \quad (2.1.5)$$

将上面三式相加, 得到一维波动方程初值问题解的表达式, 它被称作达朗贝尔 (D'Alembert) 公式:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy, \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, y) dy d\tau. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

为了得到古典解, 我们必须要求初值有足够的光滑性。事实上我们可以总结出如下定理

**定理 2.1.2.** 给定初值  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$  和源项  $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R})$ , 由达朗贝尔公式(2.1.6)给出的表达式就是方程 (2.1.1) 在  $d = 1$  时候的解  $u(t, x)$ , 并且该解满足  $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R})$ .

**注记 2.1.2 (行波 (travelling wave) 解).** 当  $f = 0$  时, 即考虑一维齐次波动方程, 它的解总可以写成如下形式

$$u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

在达朗贝尔公式中, 我们可以得到

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy, \quad G(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy,$$

其中  $F(x + ct)$  和  $G(x - ct)$  分别被称作左行波解、右行波解。这说明一维齐次波动方程初值问题的解可以视作两个波速为  $c$  但传播方向相反的行波解的叠加。

例 2.1.1. 求解  $\partial_t^2 u - 4\partial_x^2 u = 0$ , 其中初值为  $u(0, x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$  和  $\partial_t u(0, x) = 0$ .

解. 我们把初值记作  $\varphi(x)$ , 那么可以看出  $u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t))$  是方程的解. (其实这里有点不严谨, 因为上面的定理要求了初值具有一定光滑性, 但这实际上是因为不假设读者学过实变函数才写成这样) 初始时候 ( $t = 0$ ) 解的形态是两个完全重合的行波,  $\varphi$  的支集是  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 波速为 2. 因此经过时长  $t_0 = \frac{\pi}{4}$  之后, 这两个行波完全分离.

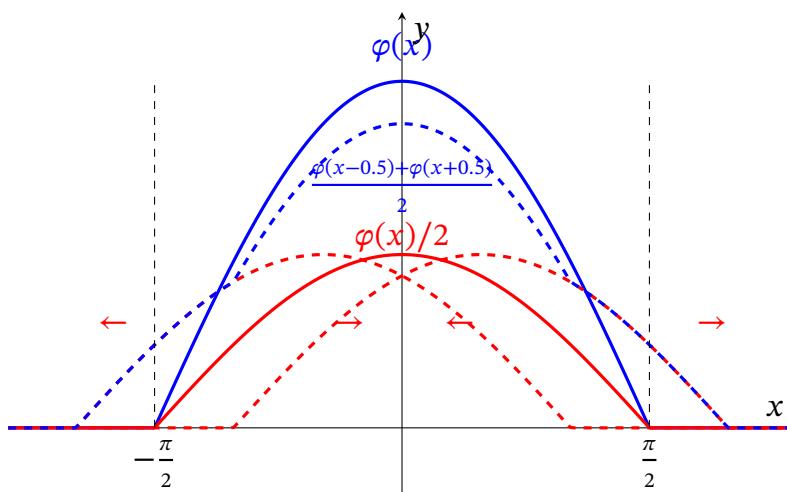


图 2.1:  $0 \leq t < \frac{\pi}{4}$  时两个行波有重叠, 此为  $t = \frac{1}{4}$  的示例

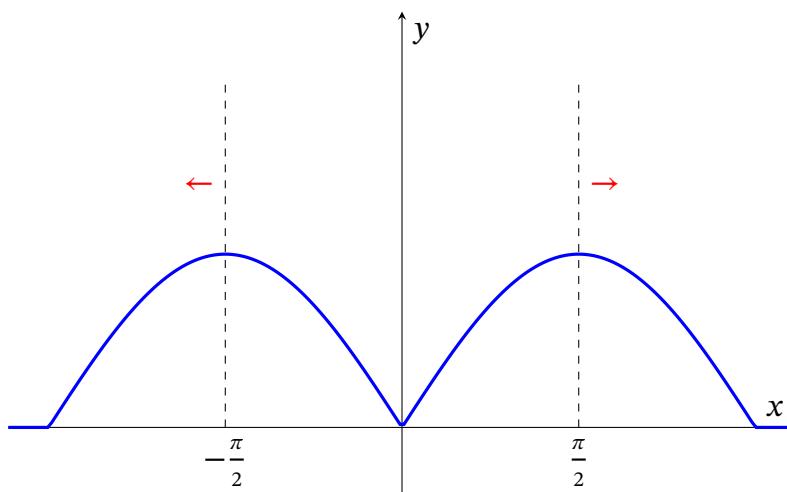


图 2.2:  $t = \frac{\pi}{4}$  时两个行波完全分离

因此我们可以写出解的表达式

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x + 2t) & -\frac{\pi}{2} < x + 2t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} \cos(x - 2t) & -\frac{\pi}{2} < x - 2t < \frac{\pi}{2}, \quad \forall t > t_0 = \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{其它情况} \end{cases}$$

当  $0 \leq t_0 \leq \frac{\pi}{4}$  时, 这两个行波在区间  $[-\frac{\pi}{2} + 2t, \frac{\pi}{2} - 2t]$  有重叠。所以此时的解是

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x + 2t) & -\frac{\pi}{2} - 2t < x < -\frac{\pi}{2} + 2t \\ \frac{1}{2} \cos(x + 2t) + \frac{1}{2} \cos(x - 2t) & -\frac{\pi}{2} + 2t \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2t \\ \frac{1}{2} \cos(x - 2t) & \frac{\pi}{2} - 2t < x < \frac{\pi}{2} + 2t \\ 0 & \text{其它情况} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

□

## 2.1.4 一维波动方程的有限传播速度

对初值为  $(u, \partial_t u)|_{t=0} = (\varphi, \psi)$  的一维齐次波动方程  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ , ( $t > 0, x \in \mathbb{R}$ ) 我们已经得到解的显式表达式

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \quad (2.1.7)$$

现在我们提出两个问题, 讨论方程的初值和方程的解之间有什么关系。

1. 给定点  $(t_0, x_0)$ , 解在这一点的取值  $u(t_0, x_0)$  依赖于初值  $\varphi, \psi$  的哪部分?
2. 如果我们修改  $\varphi, \psi$  在  $x = x_0$  附近的取值, 那么对哪些  $(t, x)$ , 解  $u(t, x)$  的取值会受到影响?

回答第一个问题, 只需要把  $(t_0, x_0)$  代入达朗贝尔公式

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{2}(\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(y) dy,$$

就能看出  $u$  在  $(t_0, x_0)$  这点的取值只取决于初值在  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  范围内的取值, 我们称  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  作点  $(t_0, x_0)$  的依赖区域。同理, 如果在  $\{t = 0\}$  上固定区间  $[x_1, x_2]$ , 过点  $x_1, x_2$  分别作直线  $x = x_1 + ct$ ,  $x = x_2 - ct$ , 它们和区间  $[x_1, x_2]$  围成一个三角形区域。此区域中任何一个点  $(t, x)$  的依赖区域都落在区间  $[x_1, x_2]$  内, 因此解在此三角形区域中任一点的取值都被初值在区间

$[x_1, x_2]$  中的取值决定, 而与此区间外的初值条件无关。我们把这个三角形区域称作区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域。

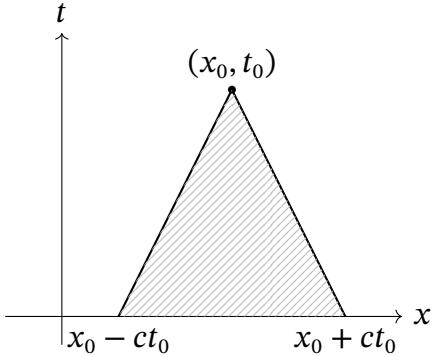


图 2.3:  $(x_0, t_0)$  的依赖区域示意图

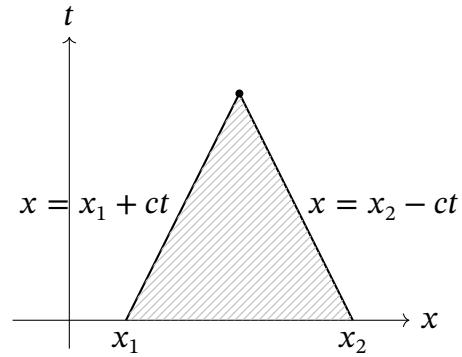


图 2.4:  $[x_1, x_2]$  的决定区域示意图

关于第二个问题, 我们从达朗贝尔公式看出, 对初值中的  $\varphi$  在  $x = x_0$  施加的扰动, 会于  $t$  时刻恰好被传播到  $x_0 \pm ct$  处; 而对初值中的  $\psi$  在  $x = x_0$  施加的扰动, 会于  $t$  时刻传播到区间  $[x_0 - ct, x_0 + ct]$  中 (不一定只有端点)。如下图所示。

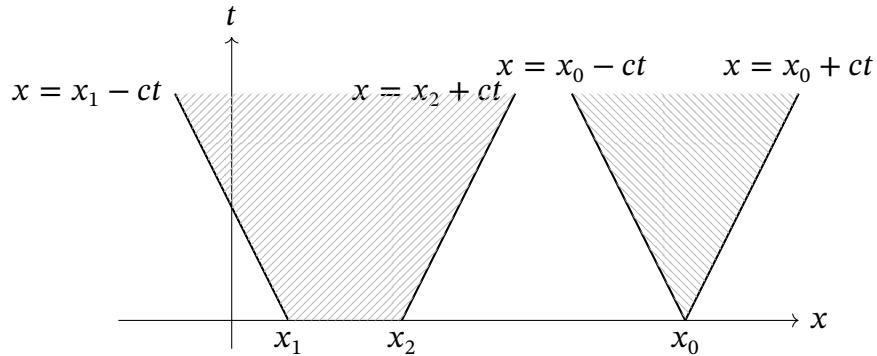


图 2.5:  $[x_1, x_2]$  和点  $\{x_0\}$  影响区域示意图

同理, 如果我们把  $x_0$  改成一小段区间  $[x_1, x_2]$ , 那么这个区间内的初值扰动会在  $t$  时刻传播到区间  $[x_1 - ct, x_2 + ct]$  中。图上的两个阴影区域被分别称作区间  $[x_1, x_2]$  和点  $x_0$  的影响区域。

一维时候有一个特殊情况, 即  $\psi \equiv 0$  时, 我们注意到达朗贝尔公式的积分项消失, 此情况下初值在  $x = x_0$  处的扰动只会沿着上图右边锥状区域的边界传播。如果把  $x_0$  换成  $[x_1, x_2]$ , 则该区间的影响区域变成下图所示的阴影部分。

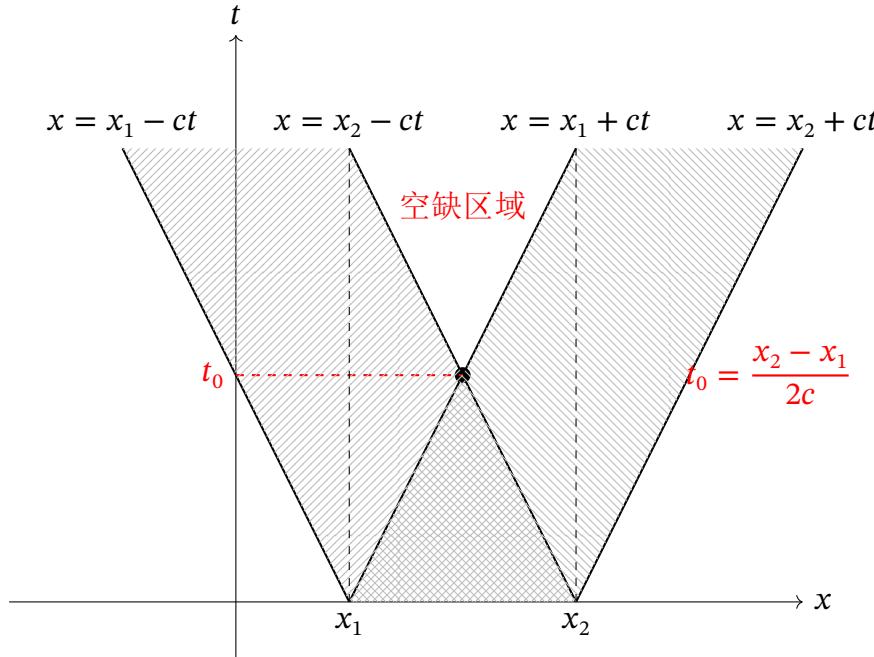


图 2.6: 初速度  $\psi = 0$  时, 区间  $[x_1, x_2]$  影响区域中有空缺区域

所以如果方程(2.1.1) ( $d = 1$ ) 的初值满足  $\text{Spt } \varphi \subset [x_1, x_2]$  且  $\psi = 0$  的话, 方程的解在

$$\left\{ (t, x) : t > \frac{x_2 - x_1}{2c}, x_2 - ct < x < x_1 + ct \right\}$$

这个区域内也是零, 对应上图的“空缺区域”。

**注记 2.1.3.** 上述讨论表明, 图上“空缺区域”的存在要求了  $\psi = 0$ , 但这在高维情况是不一样的。在本讲义的第2.2节, 我们会看见当维数  $d \geq 3$  为奇数时, 这个“空缺区域”必然存在; 而当  $d = 2$  时, 这个“空缺区域”不存在 (即便  $\psi \equiv 0$ )。该现象被称作惠更斯原理 (Huygens' principle), 其表明三维波 (球面波) 是“无后效的”, 二维波 (柱波) 并不具有该性质。我们将在第2.2节对这个现象作进一步讨论。

现在我们考虑一个稍微复杂些的例子:  $xOt$  平面上的角状区域内的波动方程求解。

**例 2.1.2.** 设  $\varphi_{\pm} \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_{\pm}})$  满足  $\varphi_+(0) = \varphi_-(0)$ . 考虑如下方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t > |x|), \quad u|_{t=\pm x} = \varphi_{\pm}(x) \quad (x \gtrless 0). \quad (2.1.8)$$

问: 对哪些  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , 解  $u(t, x)$  完全被  $\varphi_-|_{[-a, 0]}$  和  $\varphi_+|_{[0, b]}$  决定? ( $a, b > 0$  为常数)

**解.** 此情况下达朗贝尔公式肯定是用不了的, 但是我们仍然可以把解写成  $u(t, x) = F(x-t) + G(x+t)$  的形式 (回忆前面的推导过程, 得出这个表达式的时候其实只用到了波方程本身的结构, 而没

有用到任何初、边值条件)。接下来的步骤就是利用边界条件去确定  $F, G$ , 我们有

$$x > 0 : u(x, x) = \varphi_+(x) = F(0) + G(2x), \quad x < 0 : u(-x, x) = \varphi_-(x) = F(2x) + G(0),$$

求解上述方程得到  $F(x) = \varphi_-(x/2) - G(0)$  在  $x < 0$  时成立 (注意, 我们其实不需要求解  $F(x)$  在  $x \geq 0$  时的具体形式, 因为我们只在角状域  $\{t > |x|\}$  里面求解方程, 所以  $x - t > 0$  是不可能成立的), 以及  $G(x) = \varphi_+(x/2) - F(0)$  对  $x > 0$  成立。再令  $x = 0$ , 我们得到  $F(0) + G(0) = \varphi_+(0) = \varphi_-(0)$ 。这样, 我们就可以把解写成如下形式

$$u(t, x) = \varphi_- \left( \frac{x-t}{2} \right) + \varphi_+ \left( \frac{x+t}{2} \right) - \varphi_\pm(0).$$

因此  $\varphi_-|_{[-a, 0]}$  和  $\varphi_+|_{[0, b]}$  的决定区域为

$$\left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2, t > |x| \middle| -a \leq \frac{x-t}{2} \leq 0, 0 \leq \frac{x+t}{2} \leq b \right\}.$$

下图是  $a = 6, b = 4$  情况的示意图, 阴影部分即为所求的决定区域。  $\square$

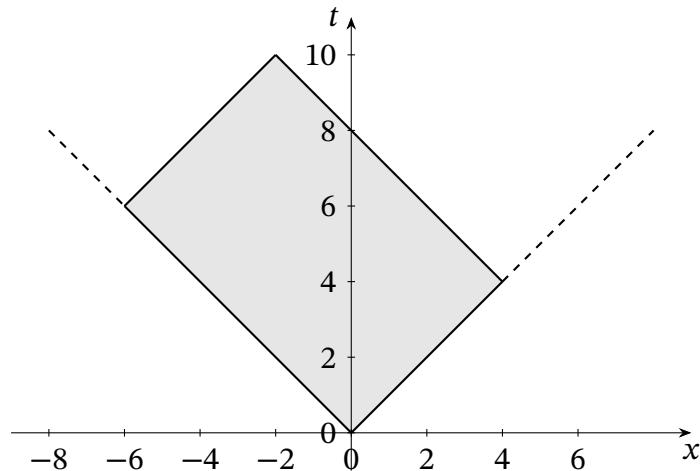


图 2.7:  $a = 6, b = 4$  时初值  $\varphi_-|_{[-a, 0]}$  和  $\varphi_+|_{[0, b]}$  的决定区域

### 2.1.5 半直线上的波动方程

本节我们考虑在半直线  $(0, \infty)$  上求解一维波方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x) & t = 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ u(t, 0) = g(t) & t \in \mathbb{R}_+, x = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

物理上来看，这个方程可以描述带一个端点的弦振动，而  $\{x = 0\}$  处的边界条件给出了端点处的弦在任意时刻  $t$  (距离平衡态) 的位移。特别地，如果  $g \equiv 0$ ，则表示弦的端点固定不动。而求解这个方程的另一个（更重要的）考量则是它在我们后面求解奇数维波动方程的初值问题时是必然会出现的一个方程。以三维情况为例，给定  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, r > 0, rU(t, r; \mathbf{x})$  这个量恰好满足一个半直线  $\{r > 0\}$  上的波动方程，这里  $U(t, r; \mathbf{x})$  是指解  $u(t, \mathbf{x})$  在球面  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  上的积分平均值。

求解方程(2.1.9)实际上只需考虑  $g \equiv 0$  的情形，否则我们令  $v(t, x) = u(t, x) - g(t)$ ，它的边值就自动归零了。那么在  $u(t, 0) = 0$  的边界条件下，我们可以试图将解  $u(t, x)$  (作为  $x \in \mathbb{R}_+$  的函数) 延拓成  $\mathbb{R}$  上的奇函数  $\bar{u}(t, x)$ 。我们能这么做的一个原因是：达朗贝尔公式实际上已经说明，如果初值  $\varphi, \psi$  都是奇函数 (偶函数)，则方程的解也是奇函数 (偶函数)。

我们现在先把初值作延拓，定义  $\bar{\varphi}(x) = \pm \varphi(\pm x)$  ( $\pm x \geq 0$ ) 是  $\varphi$  在  $\mathbb{R}$  上的奇延拓。类似地，我们可以定义  $\bar{\psi}(x)$  和  $\bar{f}(t, x)$ 。现在考虑  $\bar{u}(t, x)$  的方程

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - c^2 \bar{u}_{xx} = \bar{f}(t, x) & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ \bar{u}(0, x) = \bar{\varphi}(x), \quad \partial_t \bar{u}(0, x) = \bar{\psi}(x) & t = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

利用达朗贝尔公式，我们可以直接求得方程的解

$$\bar{u}(t, x) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi}(x + ct) + \bar{\varphi}(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{\psi}(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \bar{f}(\tau, y) dy d\tau. \quad (2.1.11)$$

接下来，我们需要从  $u(t, x) = \bar{u}(t, x)|_{x \geq 0}$  把  $u$  还原出来，这里需注意：原始的初值  $\varphi, \psi$  只在非负半轴  $[0, \infty)$  有定义，所以在用  $\varphi, \psi$  写出  $u$  的表达式时，需要分两种情况： $x \geq ct$  和  $x < ct$ 。当  $x \geq ct$  时，我们只需把上述表达式中的  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{f})$  换成  $(\varphi, \psi, f)$

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, y) dy d\tau, \quad (x \geq ct). \quad (2.1.12)$$

而当  $x < ct$  时, 我们需要代入  $\bar{\varphi}(x - ct) = -\varphi(ct - x)$  从而得到

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, y) dy d\tau + \frac{1}{2c} \int_{t-\frac{x}{c}}^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau, y) dy d\tau, \quad (x < ct). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

最后, 我们需要对初值提出若干相容性条件, 以使得算出来的解满足  $u \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$ , 这需要考虑解在角点  $(t, x) = (0, 0)$  处的连续可微性。

- 连续性:  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} u(0, x) \Rightarrow \varphi(0) = 0$ ;
- $C^1$ :  $\lim_{t \rightarrow 0} u_t(t, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} u_t(0, x) \Rightarrow \psi(0) = 0$ ;
- $C^2$ :  $\lim_{(t,x) \rightarrow (0,0)} (u_{tt} - c^2 u_{xx} - f) = 0 \Rightarrow c^2 \varphi''(0) + f(0, 0) = 0$ .

于是我们总结出如下定理

**定理 2.1.3** (半直线波方程解的表达式). 若初值  $\varphi \in C^2[0, \infty), \psi \in C^1[0, \infty)$ , 边值  $g = 0$ , 源项  $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$  满足相容性条件  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$  和  $c^2 \varphi''(0) + f(0, 0) = 0$ , 则半直线上的波方程(2.1.9)必有解  $u(t, x)$ , 其表达式为(2.1.12)-(2.1.13).

## 习题 2.1

**习题 2.1.1.** 证明方程  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  的解必定满足“平行四边形法则”, 即  $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ , 其中  $A, B, C, D$  构成  $xOt$ -平面上的平行四边形, 其边界方程为  $x \pm ct = \text{常数}$ .

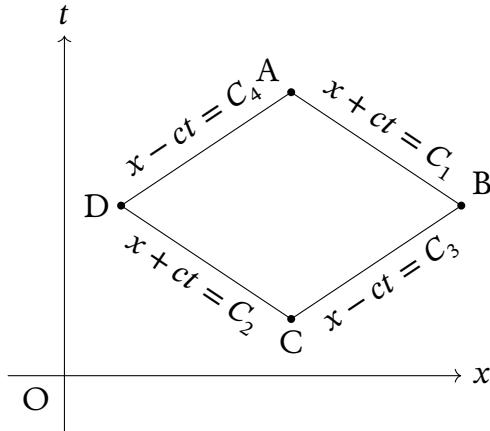


图 2.8: 习题2.1.1图

**习题 2.1.2.** 考虑方程  $20u_{tt} - u_{tx} - u_{xx} = 0$  ( $t > 0, x \in \mathbb{R}$ ).

- (1) 计算通解。(提示: 因式分解方程左边的微分算子)
- (2) 假设初值是  $u(0, x) = x$ ,  $\partial_t u(0, x) = e^{-x} + \frac{1}{4}$ , 计算方程的解  $u(t, x)$ .

**习题 2.1.3.** 考虑第一象限中一个扇形区域内的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > x > 0; \\ u(t, t) = \varphi(t), u_x(t, 0) = \psi(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

- (1) 通过将初值  $\varphi, \psi$  代入通解  $u(t, x) = F(x - t) + G(x + t)$ , 计算  $u(t, x)$  (用  $\varphi, \psi$  表示).
- (2) 对哪些  $(t, x)$ ,  $u(t, x)$  的值完全由初值  $\varphi, \psi$  在  $[0, 1]$  区间内的部分决定?

**习题 2.1.4** (一维波方程的能量均分原理). 考虑一维波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) & t = 0, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.1.15)$$

其中  $c > 0$  是给定的常数,  $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . 定义

$$K(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t, x)|^2 dx, \quad P(t) := \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 dx.$$

证明:

- (1)  $K(t) + P(t)$  是守恒量, 并据此证明方程的有限能量解 (即解的一阶导数皆在  $\mathbb{R}^d$  上平方可积) 的唯一性。
- (2) 当  $t$  充分大时, 有  $K(t) = P(t)$ . (提示: 使用达朗贝尔公式)

## 问题 2.1

**问题 2.1.1.** 求出如下方程解的显式表达式

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_t - u_x = 0 & t, x > 0, \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) & x \geq 0, \\ u(t, 0) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

其中  $\varphi, \psi$  是  $[0, +\infty)$  上的光滑函数, 满足相容性条件  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$  和  $\varphi''(0) + \varphi'(0) = 0$ .

## 2.2 高维波动方程

本节求解高维欧氏空间  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) 中的波动方程的初值问题, 即给定足够好的初值  $\varphi, \psi$ , 我们计算如下方程解的表达式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

目前我们已经有(2.2.1)在  $d = 1$  情况下解的表达式, 而另一方面  $\mathbb{R}^d$  中的点  $\mathbf{x}$  总可以用极坐标表示为  $\mathbf{x} = r\mathbf{z}$ , 其中  $r = |\mathbf{x}|$  是点  $\mathbf{x}$  到原点的距离,  $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}$  是角变量 (angular variable), 因此我们设想: 是否能把高维问题往一维归纳, 至少对径向解 (不依赖角变量  $\mathbf{z}$  的解) 看上去是可行的。

**注记 2.2.1.** 角变量  $\mathbf{z}$  是可以用球极坐标显式写出来的, 例如二维的时候我们有  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ , 从而  $\mathbf{z} = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$ ; 三维的时候有球坐标  $x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $x_3 = r \cos \theta$ , 其中  $r \geq 0$ , 纬度  $\theta \in [0, \pi]$ , 经度  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , 从而  $\mathbf{z} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2$ . 一般维数的参数表达式可在数学分析教材 [1] 的 10.8 节找到。

### 2.2.1 径向解与球面平均

本节我们暂且假设  $f \equiv 0$ . 先计算径向解满足的方程, 假设解具有形式  $u(t, \mathbf{x}) = v(t, r)$ , 其中  $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ , 那么首先就要计算  $v$  满足什么方程。特别地, 我们需要计算 Laplace 算子的径向部分. 直接计算可得

$$\partial_{x_i} r = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} = \frac{x_i}{r} \Rightarrow \partial_{x_i} u = \partial_r v \frac{x_i}{r} \quad 1 \leq i \leq d.$$

再求一次  $\partial_{x_i}$ , 可得

$$\partial_{x_i}^2 u = \partial_r^2 v \frac{x_i^2}{r^2} + \partial_r v \left( \frac{1}{r} + x_i \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{x_i}{r} \right) = \partial_r^2 v \frac{x_i^2}{r^2} + \partial_r v \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

对指标  $i$  从 1 到  $d$  求和, 得到

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u = \underbrace{\partial_r^2 v \frac{\sum x_i^2}{r^2}}_{-\frac{r^2}{r^2}=1} + \underbrace{\frac{d}{r} \partial_r v}_{=1/r} - \underbrace{\frac{\sum x_i^2}{r^3} \partial_r v}_{=1/r} = \partial_r^2 v + \frac{d-1}{r} \partial_r v.$$

于是,  $\mathbb{R}^d$  中的径向波动方程有如下形式

$$\underbrace{\partial_t^2 v - c^2 \left( \partial_r^2 v + \frac{d-1}{r} \partial_r v \right)}_{=\Delta u \text{ 的径向部分}} = 0, \quad (2.2.2)$$

该式被称作 **Euler-Poisson-Darboux 方程**。

我们注意到, 由于  $\frac{d-1}{r} \partial_r v$  的存在, 方程(2.2.2)仍不完全和一维波动方程相同。但是如果我们将变换  $V := rv$ , 就得到

$$\partial_r V = v + r \partial_r v, \quad \partial_r^2 V = r \partial_r^2 v + 2 \partial_r v \Rightarrow \partial_t^2 V - c^2 \partial_r^2 V = r \left( \partial_t^2 v - c^2 \partial_r^2 v - c^2 \frac{2}{r} \partial_r v \right).$$

此时如果维数  $d = 3$ , 那么  $d - 1 = 2$ , 于是(2.2.2)就表明上述等式的右边正好是 0. 所以对  $d = 3$  的情况, 我们证明了  $V = rv$  满足半直线  $\{r > 0\}$  上的一维波动方程, 进而可以用定理2.1.3的结论求解。这段讨论也表明, 三维情况可能是高维波动方程中最容易求解的情况。

现在我们再进一步: 如果去掉“径向解”的假设, 我们是否还能对波方程做类似于上面步骤的约化? 如果要做的话, 很显然我们需要引进一个类似于“去掉角变量”的步骤, 使得空间变量只剩下一个自由度(在上面的讨论中就是  $r$  的这个自由度)。事实上, 对(2.2.6)的一般情况, 我们可以定义解  $u(t, \mathbf{x})$  在球面  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  上的球面积分平均来达到目的。

**记号 2.2.1.** 设  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0, r > 0$ , 定义

$$U(t, r; \mathbf{x}) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\partial B(\mathbf{x}, r) \text{ 的表面积}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$$

为  $u(t, \cdot)$  在球面  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  上(即以  $\mathbf{x}$  为球心,  $r$  为半径的球面上)的积分平均。类似我们也可以定义  $\Phi(r; \mathbf{x}), \Psi(r; \mathbf{x})$  分别为初值  $\varphi, \psi$  在  $\partial B(\mathbf{x}, r)$  上的球面平均。

需注意的是,  $U(t, r; \mathbf{x})$  不是(关于  $\mathbf{x}$  的)径向函数, 而是在我们固定  $\mathbf{x}$  这个点的情况下, 关于  $\mathbf{x}$  这个点是“径向的”。据此记号, 我们可以证明球面平均满足 **Euler-Poisson-Darboux 方程**。

**引理 2.2.1.** 固定  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 设  $u$  满足方程(2.2.1), 且  $f \equiv 0$ . 则球面平均  $U$  满足

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - c^2 \left( \partial_r^2 U + \frac{d-1}{r} \partial_r U \right) = 0 & t > 0, r > 0 \\ U(0, r; \mathbf{x}) = \Phi(r; \mathbf{x}), \quad \partial_t U(0, r; \mathbf{x}) = \Psi(r; \mathbf{x}) & t = 0, r > 0. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

这个引理我们稍后再证。先假设它成立, 那么根据之前的讨论我们知道在  $d = 3$  时  $\tilde{U} := rU$  满足半直线  $\{r > 0\}$  上的波动方程。

**引理 2.2.2.** 在引理2.2.1的假设下, 令  $\tilde{U}(t, r; \mathbf{x}) := rU(t, r; \mathbf{x})$ (并类似定义  $\tilde{\Phi} = r\Phi, \tilde{\Psi} = r\Psi$ ), 维数

$d = 3$ , 则从方程 (2.2.1) (此时仍假设  $f \equiv 0$ ) 可推出

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{U} - c^2 \partial_r^2 \tilde{U} = 0 & t > 0, r > 0 \\ \tilde{U}(0, r; \mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(r; \mathbf{x}), \quad \partial_t \tilde{U}(0, r; \mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(r; \mathbf{x}) & t = 0, r > 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

因此我们可以用定理2.1.3的结论计算出  $\tilde{U}$ . 而再根据  $U$  的定义和解的连续性, 我们可以试图通过把球面往中心收缩的方式 (即取极限  $r \rightarrow 0$ ) 去计算  $u(t, \mathbf{x})$ .

$$u(t, \mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0_+} \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \lim_{r \rightarrow 0_+} \frac{1}{r} \tilde{U}(t, r; \mathbf{x}).$$

注意, 如果被积函数关于空间变量  $\mathbf{y}$  是连续的, 那么如上极限过程是必然成立的。

到这一步, 我们离完整求解三维波动方程就差证明引理 2.2.1 了。

**引理2.2.1的证明.** 证明最关键的步骤就是化简  $\partial_r U$  的表达式。

**断言.** 固定  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 我们有下式成立

$$\partial_r U(t, r; \mathbf{x}) = \frac{r}{d} \oint_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.2.5)$$

其中  $\oint_{B(\mathbf{x}, r)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} := \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int_{B(\mathbf{x}, r)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$  表示  $f$  在球  $B(\mathbf{x}, r)$  上的积分平均。

首先我们来看如果这个断言正确, 那么接下来会得到什么。

**“断言  $\Rightarrow$  引理2.2.1”的证明.** 注意到  $\text{vol}(B(\mathbf{x}, r)) = \alpha(d)r^d = \frac{r}{d}(\partial B(\mathbf{x}, r)$  的表面积), 我们得到

$$\partial_r U = \frac{r}{c^2 d} \oint_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{c^2 \text{Area}(\partial B(\mathbf{x}, r))} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u d\mathbf{y}.$$

然后用极坐标表示 (见引理B.2.1) 去写上式最后一个积分

$$r^{d-1} \partial_r U = \frac{1}{c^2 d \alpha(d)} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u d\mathbf{y} = \frac{1}{c^2 d \alpha(d)} \int_0^r \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, \rho)} \partial_t^2 u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right) d\rho.$$

再求一次  $\partial_r$  导数得到

$$\partial_r(r^{d-1} \partial_r U) = \frac{1}{c^2 d \alpha(d)} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = c^{-2} r^{d-1} \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \partial_t^2 u(t, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = c^{-2} r^{d-1} \partial_t^2 U.$$

上式左边拆括号并消掉  $r^{d-1}$ , 就得到方程  $\partial_t^2 U - c^2 \partial_r^2 U - \frac{d-1}{r} U = 0$ , 其中  $r > 0$ . 而方程(2.2.3)的初值也可以直接验证。所以现在就只用证明上面这个断言了。

**断言的证明.** 我们现在需要把(边界 $\partial B(\mathbf{x}, r)$ 上的)曲面积分转化为( $B(\mathbf{x}, r)$ 里面的)体积分, 要做到这一步就只能反过来用散度定理(命题B.1.1或B.1.2). 在此之前, 我们需注意要计算的量是 $\partial_r U$ 而不是 $U$ 本身, 而在 $U$ 的定义式里面, 积分区域和积分外面乘的系数都和 $r$ 有关, 求导计算不是很方便. 所以我们不妨作变量替换, 将积分区域变得和 $r$ 无关. 我们知道对任意 $\mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{x}, r)$ , 都存在唯一的 $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}$ 使得 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{z}$ . 如此变量替换的Jacobian也是可以直接计算的:  $dS_y = r^{d-1} dS_z$ , 这里出现 $(d - 1)$ 次方是因为单位球面本身是 $(d - 1)$ 维的超曲面. 于是现在有

$$U(t, r; \mathbf{x}) = \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(t, \mathbf{y}) dS_y \xrightarrow{\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{z}} \frac{1}{d\alpha(d)} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} u(t, \mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS_z.$$

现在计算 $\partial_r$ 导数就很容易了, 据链式法则有

$$\partial_r U(t, r; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \frac{1}{d\alpha(d)} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \partial_{x_i} u(t, \mathbf{x} + r\mathbf{z}) z_i dS_z = \frac{1}{d\alpha(d)} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \nabla u(t, \mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} dS_z.$$

接下来我们把积分变量换回 $\mathbf{y}$ -变量. 由于向量 $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}$ 恰好是球面 $\partial B(\mathbf{x}, r)$ 在 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{z}$ 这一点处的单位外法向量, 我们就可以用散度定理(命题B.1.2)得到我们想要的结论.

$$\begin{aligned} \partial_r U(t, r; \mathbf{x}) &= \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nabla u(t, \mathbf{y}) \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}}_{=N \text{ at } \mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{x}, r)} dS_y = \underbrace{\frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}}}_{=\frac{r}{d} \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \underbrace{\Delta u(t, \mathbf{y})}_{=\nabla \cdot (\nabla u)} d\mathbf{y} \\ &= \frac{r}{d} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

## 2.2.2 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中的波动方程求解

根据分解引理(引理2.1.1), 为了求解方程(2.2.1), 我们只需考虑 $\varphi(\mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) = 0$ 的情况

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

据引理2.2.2, 我们知道当 $d = 3$ 时方程(2.2.6)的解 $u(t, \mathbf{x})$ 对应的量 $\tilde{U} = rU$ 必定满足如下方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{U} - c^2 \partial_r^2 \tilde{U} = 0 & t > 0, \quad r > 0 \\ \tilde{U}(0, r; \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t \tilde{U}(0, r; \mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(r; \mathbf{x}) & t = 0, \quad r \geq 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

再由半直线波方程解的表达式（定理2.1.3）得到  $\tilde{U}$  的显式表达式为

$$\tilde{U}(t, r; \mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{r+ct} \tilde{\Psi}(s) ds, \quad 0 < r \leq ct.$$

接下来我们取  $r \rightarrow 0$  时的极限，也就是将球面收缩到球心，得到  $u = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \tilde{U}$  的表达式

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \lim_{r \rightarrow 0_+} \frac{1}{r} \int_{ct-r}^{r+ct} \tilde{\Psi}(s) ds = \frac{1}{c} \tilde{\Psi}(ct) = t \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \psi(\mathbf{y}) dS_y = \frac{1}{4c^2 \pi t} \int_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \psi(\mathbf{y}) dS_y.$$

注意，这个极限过程实际上只用到了被积函数的连续性。此时我们就得到了方程(2.2.6)的解，也是方程(2.2.1)对应  $f, \psi \equiv 0$  时的解（或者说是分解引理2.1.1中的  $u_2$ ）。接下来用引理2.1.1就可算得方程(2.2.1)在三维情况下的表达式。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad \text{解的表达式为} \quad (2.2.8)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = \underline{\partial_t \left( t \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) dS_y \right) + t \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \psi(\mathbf{y}) dS_y + \int_0^t (t-\tau) \oint_{\partial B(\mathbf{x}, c(t-\tau))} f(\tau, \mathbf{y}) dS_y d\tau}. \quad (2.2.9)$$

表达式(2.2.9)的下划线部分被称作基尔霍夫 (Kirchhoff) 公式。我们通过下面的步骤也可以把基尔霍夫公式中的  $\partial_t$  去掉

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) dS_y &= \oint_{\partial B(0, 1)} \varphi(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) dS_z \\ &\Rightarrow \partial_t \left( t \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) dS_y \right) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) dS_y + \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \nabla \varphi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_y, \end{aligned}$$

得到该式的过程与之前“断言”的证明类似，读者可以自行完成。进而我们得到基尔霍夫公式的一个更实用的版本

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) + \nabla \varphi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y}) dS_y \\ &\quad + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B(\mathbf{x}, ct)} \frac{f(t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c, \mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

本节所得的结论可总结为下述定理

**定理 2.2.3** ( $\mathbb{R}^3$  中波动方程初值问题的解). 给定初值  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$  和源项  $f \in C_{t,x}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ , 由公式(2.2.10)给出的函数  $u(t, \mathbf{x})$  就是波动方程(2.2.8)的解, 并且满足  $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ .

当空间维数  $d = 2$  时, 我们不再能将高维波方程通过如上手段变成一维半直线上的波动方程。而求解二维波动方程的方法被称作降维法 (**method of descent**). 具体而言, 我们可以把二维波动方程视作是三维波动方程在平面  $\{x_3 = 0\}$  上的限制。为了简便, 我们接下来只讨论齐次波动方程 ( $f = 0$ ) 的求解, 非齐次的情况仍然可以由分解引理直接得出解的表达式。

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta_2 u = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

此处  $\Delta_2 := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ . 现在给定  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , 我们记  $\bar{u}(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$  并类似定义  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ . 我们先考虑三维问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} - c^2 \Delta_3 \bar{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{\varphi}, \quad \partial_t \bar{u}|_{t=0} = \bar{\psi}. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

这里  $\Delta_3 := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ . 记  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$  再用基尔霍夫公式 (2.2.12) 得到

$$\bar{u}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \oint_{\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, ct)} \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{y}}) + \nabla \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{y}}) \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}) + t \bar{\psi}(\bar{\mathbf{y}}) d\bar{S}_{\bar{\mathbf{y}}}$$

其中  $\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, ct)$  是以  $\bar{\mathbf{x}}$  为球心, 半径为  $ct$  的三维球,  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, ct) \subset \mathbb{R}^3$  是这个球的边界。现在我们把这个三维球投影到平面  $\{x_3 = 0\}$  上, 因此也要把上面的曲面积分变成在平面  $\{x_3 = 0\}$  内的圆盘上的积分。先计算 Jacobian, 我们知道对球面  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, ct)$  上的点  $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, y_3)$ , 我们可以把第三个分量的坐标写成前两个分量的函数, 分别对应上、下球壳

$$\begin{aligned} (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3)^2 &= (ct)^2 \\ \Rightarrow y_3 = \gamma(\mathbf{y}) &:= \pm \sqrt{(ct)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} = \pm \sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad y_3 \gtrless 0. \end{aligned}$$

因此, 在把三维空间中的球壳  $\partial \bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, ct)$  投影到  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  时, 我们可利用参数曲面上的积分公式<sup>1</sup>算得

$$d\bar{S}_{\bar{\mathbf{y}}} = \sqrt{1 + |\nabla \gamma(\mathbf{y})|^2} d\mathbf{y} = \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}}.$$

<sup>1</sup> 对参数曲面  $x_3 = \gamma(y_1, y_2)$ , 其中  $(y_1, y_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , 它的面积由下式给出, 见数学分析教材 [1] 第 12.2 节。

$$\text{Area} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (\partial_{y_1} \gamma)^2 + (\partial_{y_2} \gamma)^2} dy_1 dy_2.$$

同时我们还要注意，在把三维空间中的球面  $\partial\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}_0, ct)$  投影到二维平面内的  $B(\mathbf{x}, ct)$  时，我们必须要将上下两半球壳给拆开（因为它们作为参数曲面的表达式有正负号的区别），所以投影之后的区域实际上是两个叠在一起的圆盘。现在就可直接写出波方程初值问题(2.2.11)在  $d = 2$  情况下的解，它被称作泊松 (Poisson) 公式。

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{4\pi ct} \int_{B(\mathbf{x}, ct)} \frac{\varphi(\mathbf{y}) + \nabla\varphi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} \quad \forall t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.2.13)$$

类似地，利用分解引理，我们可以求得非齐次问题(2.2.1)解的表达式

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) = & \frac{1}{2\pi ct} \int_{B(\mathbf{x}, ct)} \frac{\varphi(\mathbf{y}) + \nabla\varphi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} \\ & + \frac{1}{2\pi c} \int_{C(\mathbf{x}, t)} \frac{f(\tau, \mathbf{y})}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} d\mathbf{y} d\tau, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

其中  $C(\mathbf{x}, t) = \{(\mathbf{y}, \tau) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \tau \leq t, |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq c(t - \tau)\}$  是  $\mathbb{R}^3$  中以  $(\mathbf{x}, t)$  为顶点、圆盘  $\{(\mathbf{x}, 0) : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq ct\}$  为底部的圆锥。本节所得的结果便可总结为如下定理。

**定理 2.2.4** ( $\mathbb{R}^2$  中波动方程初值问题的解). 给定初值  $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2), \psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$  和源项  $f \in C^2_{t,x}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ ，由表达式(2.2.14)给出的函数  $u(t, \mathbf{x})$  是波动方程(2.2.1)在  $d = 2$  情况下的解，并属于  $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ 。

对更高维数  $d \geq 4$ ，我们仍需讨论  $d$  的奇偶性。当  $d = 2k + 1$  为奇数时，我们可以按如下方式定义  $\tilde{U}$  使得它满足半直线  $\{r > 0\}$  上的一维波动方程

$$\tilde{U}(t, r; \mathbf{x}) = \left( \frac{1}{r} \partial_r \right)^{k-1} (r^{2k-1} U(t, r; \mathbf{x})), \quad U(t, r; \mathbf{x}) := \oint_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}.$$

证明的关键步骤是建立如下恒等式

$$\partial_r^2 \left( \frac{1}{r} \partial_r \right)^{k-1} (r^{2k-1} f(r)) = \left( \frac{1}{r} \partial_r \right)^k (r^{2k} f'(r)).$$

偶数维的情况仍然采用降维法求解，具体参见 Evans [3, Chap. 2.4.1(d)-(e)]，此处不再列出表达式。

### 2.2.3 波动方程的衰减速率

对于维数  $d \geq 2$  的齐次波动方程 ( $f = 0$ )，基尔霍夫公式和泊松公式表明，如果初值  $\varphi, \psi$  具有紧支集（或者在无穷远处的衰减足够快），那么解在  $t \rightarrow \infty$  时会衰减到零。本节我们以  $d = 3$  为例给出衰减速率的计算。

首先来看一个比较简单的结果。

**定理 2.2.5** ( $\mathbb{R}^3$  中的波动方程解的衰减速率). 设空间维数  $d = 3$ , 波动方程(2.2.1)中的源项  $f \equiv 0$ , 初值  $\varphi \in C_c^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$  且二者的支集落在球  $B(\mathbf{0}, R)$  内。则存在常数  $C > 0$  (依赖  $R$ ) , 使得对任意  $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立衰减估计

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq C(1+t)^{-1} \left[ (1+t)^{-1} \max_{\mathbb{R}^3} |\varphi| + \max_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi| + \max_{\mathbb{R}^3} |\psi| \right]. \quad (2.2.15)$$

**证明.** 由基尔霍夫公式, 我们有

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \varphi(\mathbf{y}) + \nabla \varphi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \forall t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

首先我们考虑  $t > 1$  的情况。不难证明, 存在常数  $C' > 0$  使得  $(B(\mathbf{0}, R)) \cap \partial B(\mathbf{x}, ct)$  的面积  $\leq C'R^2$  (因为这个面积不可能超过球的表面积<sup>2</sup>; 另一方面,  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = ct$  在如上积分式中成立, 所以代入基尔霍夫公式就得到结论。

当  $0 < t \leq 1$  时, 又由基尔霍夫公式得知

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \max_{\mathbb{R}^3} |\varphi| + ct \max_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi| + t \max_{\mathbb{R}^3} |\psi| \leq \max_{\mathbb{R}^3} |\varphi| + c \max_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi| + \max_{\mathbb{R}^3} |\psi|.$$

而此时  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} < 1$ , 所以我们可以在不等式右边强行塞入  $\frac{1}{1+t}$  的倍数以证得相同的结论。  $\square$

**注记 2.2.2.** 上述定理表明了 3 维波动方程具有  $O(t^{-1})$  的衰减速率, 我们往往将  $t^{-1}$  改写为  $(1+t)^{-1}$  以表示这是用在  $t \rightarrow \infty$  时的衰减估计, 进而避开  $t = 0$  附近  $1/t$  的奇性。

我们注意到上面这个结果的不等式右边实际上依赖于初值支集的大小。事实上, 我们可以证明不依赖于初值支集大小的衰减速率估计, 结果如下。

**定理 2.2.6** (\* $\mathbb{R}^d$  中的波动方程解的衰减速率). 设空间维数  $d \geq 2$ , 方程(2.2.6)的初值  $\varphi = 0, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  且各阶导数均在  $\mathbb{R}^d$  上是可积的,  $u$  是方程的解。则存在常数  $C > 0$  (仅依赖  $d, c$ ) 使得对任意  $t > 1$  有

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad |u(t, \mathbf{x})| \leq Ct^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^k \psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \quad (2.2.16)$$

本讲义中我们只对  $d = 3$  作出证明,  $d = 2$  的情况留作习题 (技术上稍微复杂一点)。

**三维情况的证明.** 我们仍假设  $\psi$  具有紧支集, 否则对一般的  $\psi$ , 我们注意到解  $u(t, \mathbf{x})$  实际上只依赖于  $\psi|_{\partial B(\mathbf{x}, ct)}$  这部分的取值, 所以我们可以取截断函数  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  满足  $0 \leq \eta \leq 1, \eta$  在  $B(\mathbf{x}, c(t+1))$

<sup>2</sup>这里用到结论: 若  $C \subset \mathbb{R}^3$  是凸集且包含于某个半径为  $R$  的球, 则  $\partial C$  的“表面积”(二维 Hausdorff 测度) 不超过该球的表面积。具体证明可以参阅 Math Stackexchange 问题 <https://math.stackexchange.com/questions/58456/surface-area-of-a-convex-set-less-than-that-of-its-enclosing-sphere> 下的回答。

内恒为 1, 在  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(\mathbf{x}, c(t+2))}$  之外恒为零, 且  $|\nabla \eta|$  有一致上界。这样的话, 把方程解的表达式里面的  $\psi$  换成  $\eta\psi$  可以得到同样的上界。

对任意  $\mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{x}, ct)$ , 我们可以将其写成  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + ct\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^2$ , 于是基尔霍夫公式可以写成

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B(\mathbf{x}, ct)} \psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \psi(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}}.$$

由于  $\psi$  具有紧支集, 所以  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}) = 0$ . 再由微积分基本定理得  $\psi(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) = - \int_{ct}^{\infty} \partial_s \psi(\mathbf{x} + s\mathbf{z}) ds$ . 于是基尔霍夫公式现在变成如下形式

$$u(t, \mathbf{x}) = - \frac{t}{4\pi} \int_{ct}^{\infty} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \partial_s \psi(\mathbf{x} + s\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} ds.$$

对  $s \geq ct$ , 我们有  $t \leq s^2/(c^2 t)$ , 从而

$$\begin{aligned} |u(t, \mathbf{x})| &\leq \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{ct}^{\infty} s^2 \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} |\partial_s \psi(\mathbf{x} + s\mathbf{z})| dS_{\mathbf{z}} ds \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(\mathbf{x}, ct)}} |\nabla \psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (\text{用极坐标表示, 见引理B.2.1}) \\ &\leq \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

## 习题 2.2

**习题 2.2.1.** 设  $u(t, \mathbf{x})$  是如下初值问题的解

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \\ u(0, \mathbf{x}) = f(x_1) + g(x_2), u_t(0, \mathbf{x}) = h(x_2) + \ell(x_3) & t = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

其中  $f, g, h, \ell$  都是给定的光滑函数, 计算  $u$  的显式表达式。

提示: 利用方程的线性把三维问题转化成一维问题。

**习题 2.2.2.** 将定理2.2.5里面的维数改成  $d = 2$ , 并不妨设  $\varphi = 0$ , 证明方程的解在  $t$  充分大时具有衰减估计

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq C_R t^{-1/2} \max_{\mathbb{R}^2} |\psi|. \quad (2.2.18)$$

其中常数  $C_R > 0$  依赖于  $R, c$ .

提示：在泊松公式中令  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ , 然后讨论  $B(\mathbf{x}, ct)$  是否完全包含  $B(\mathbf{0}, R)$ . 若是, 则此时  $r \leq |\mathbf{x}| + R \leq ct$ , 实际的积分区域就是  $B(\mathbf{0}, R)$ . 若否, 则  $ct < |\mathbf{x}| + R$ , 此时需要利用极坐标去具体估算  $\partial B(0, R) \cap B(\mathbf{x}, ct)$  的弧长, 并注意到  $t$  充分大时,  $r$  和  $ct$  的大小是近乎同阶的, 利用该事实放缩 Poisson 公式中的分母。

**习题 2.2.3.** 设函数  $u(t, \mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)}$ , 其中  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ . 对如下方程具有该形式的解, 计算  $\sigma$  与  $|\mathbf{y}|$  之间的关系 (该关系称作“色散关系”).

- (1) 波动方程  $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ .
- (2) Klein-Gordon 方程  $\partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0$ , 这里  $m > 0$  是常数.
- (3) Schrödinger 方程  $i\partial_t u + \Delta u = 0$ .
- (4) Airy 方程  $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$ , 本例中  $d = 1$ .

## 问题 2.2

**问题 2.2.1.** 证明定理 2.2.5 的二维情况, 其中假设初值  $\varphi = 0, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

- (1) 用积分的极坐标表示证明

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \psi(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS_z dr.$$

- (2) 证明: 存在常数  $C > 0$  (不依赖  $\psi$ ), 使得如下估计成立

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right).$$

(2) 的提示: 把 (1) 右边的积分  $\int_0^t$  拆成  $\int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$ . 第二部分的估计和三维情况类似。对第一部分, 把  $r \leq t - \varepsilon$  带进 (1) 中的分母, 然后取  $\varepsilon > 0$  充分小去得到要证的结果。

## 2.3 能量法：波方程的有限传播速度

对于高维欧氏空间中的波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

我们已经求得古典解的显式表达式。接下来我们仿照一维情况提两个问题：

1. 给定点  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , 解在这一点的取值  $u(t_0, \mathbf{x}_0)$  依赖于初值  $\varphi, \psi$  的哪部分?
2. 如果我们修改初值  $\varphi, \psi$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  附近的取值, 那么对哪些  $(t, \mathbf{x})$ , 解  $u(t, \mathbf{x})$  的取值会受到影响?

### 2.3.1 依赖区域、影响区域、决定区域

给定点  $t_0 > 0$  和  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ , 我们定义顶点为  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  特征锥 (又称作该点的过往光锥 (past light cone)) 如下

$$K(t_0, \mathbf{x}_0) := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : 0 \leq t \leq t_0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t)\}.$$

从基尔霍夫公式和泊松公式中可以看出, 无论是二维还是三维情况, 方程的解  $u(t_0, \mathbf{x}_0)$  完全由初值在特征锥 “底座” 内的部分决定, 即如下区域

$$D(t_0, \mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct_0\},$$

该区域被称作解  $u(t, \mathbf{x})$  在点  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  处的依赖区域。另一方面, 在  $t = t_0$  时刻之前, 初值在  $D(t_0, \mathbf{x}_0)$  之外的部分对解是没有影响的。

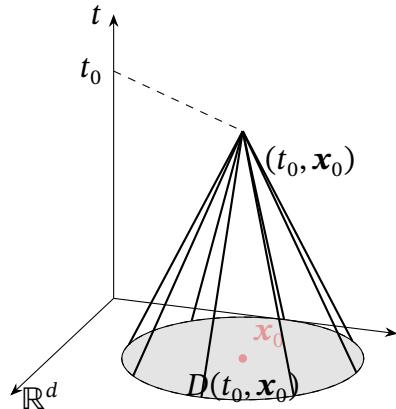


图 2.9: 顶点为  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  的特征锥示意图

**注记 2.3.1.** 给定区域  $D_0 \in \mathbb{R}^d$ , 我们希望反过来找到所有的  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ , 使得  $u(t, \mathbf{x})$  的依赖区域 (记作  $D_{(t, \mathbf{x})}$ ) 完全落在  $D_0$  内。这些  $(t, \mathbf{x})$  构成的集合被称作  $D_0$  的决定区域, 其定义为

$$F_{D_0} = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : D(t, \mathbf{x}) \subset D_0\} \subset \mathbb{R}^{1+d}.$$

我们也可以从影响区域来看。给定  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ , 我们定义未来光锥 (future light cone)  $J_{\mathbf{x}_0}$  为

$$J_{\mathbf{x}_0} := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct\},$$

它又被称作点  $\mathbf{x}_0$  的影响区域。可见，在  $\mathbf{x}_0$  处施加的扰动在  $t$  时间内至多被传播到与  $\mathbf{x}_0$  相距  $ct$  的地方。

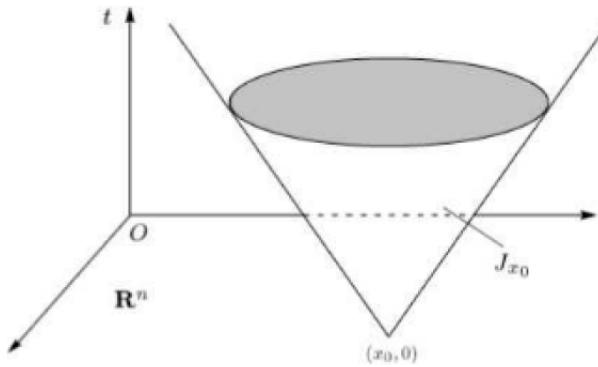


图 2.10: 点  $\mathbf{x}_0$  处初值的影响区域

同时，我们也不难看出影响区域和依赖区域之间具有如下关系：

$$J_{\mathbf{x}_0} := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : \mathbf{x}_0 \in D(t, \mathbf{x})\}.$$

类似地，给定  $\mathbb{R}^d$  中的区域  $D$ ，我们可以定义区域  $D$  的影响区域为

$$J_D = \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in D} J_{\mathbf{x}_0}.$$

如果我们进一步观察基尔霍夫公式和泊松公式，就会发现三维情况和二维情况的一个差别： $d = 3$  时， $u(t_0, \mathbf{x}_0)$  仅仅依赖于初值在决定区域的边界上的部分，即  $\partial D(t_0, \mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct_0\}$ ；而  $d = 2$  时， $u(t_0, \mathbf{x}_0)$  的取值依赖于初值在整个  $D(t_0, \mathbf{x}_0)$  内的取值。例如，假设初值  $\varphi \equiv 0$ ,  $\psi > 0$  在某个区域  $D_0$  里恒成立，并且在  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{D_0}$  上有  $\psi \equiv 0$ . 今考虑  $\mathbf{x}_0 \notin \overline{D_0}$  并且记  $d_{\min}, d_{\max}$  为点  $\mathbf{x}_0$  到区域  $D_0$  中的点的最近距离和最远距离。

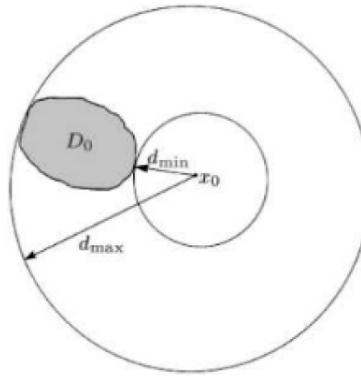


图 2.11: 区域  $D_0$  内的初值  $\psi$  对点  $x_0$  处的影响

于是我们有

- $d = 3$ :

- (1)  $0 < t_0 < \frac{d_{\min}}{c}$ : 这是因为  $\partial D(t_0, x_0) \cap D_0 = \emptyset$ , 进而  $u(t_0, x_0) = 0$ .
- (2)  $\frac{d_{\min}}{c} < t_0 < \frac{d_{\max}}{c}$ : 这是因为  $\partial D(t_0, x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$ , 进而  $u(t_0, x_0) > 0$ .
- (3)  $t_0 > \frac{d_{\max}}{c}$ : 这是因为  $\partial D(t_0, x_0) \cap D_0 = \emptyset$ , 我们又有  $u(t_0, x_0) = 0$ .

- $d = 2$ :

- (1)  $0 < t_0 < \frac{d_{\min}}{c}$ : 因为  $D(t_0, x_0) \cap D_0 = \emptyset$ , 故有  $u(t_0, x_0) = 0$ .
- (2)  $t_0 > \frac{d_{\min}}{c}$ : 因为  $D(t_0, x_0) \cap D_0 \neq \emptyset$ , 故有  $u(t_0, x_0) > 0$ .

可见, 三维的波是“无后效的”, 当波通过观察点后不会残留振动。这种特性使得声波在传播过程中不会对观察点产生持续的影响。这种现象被称作惠更斯原理 (Huygens' principle). 而二维情况不满足惠更斯原理, 存在后效性。

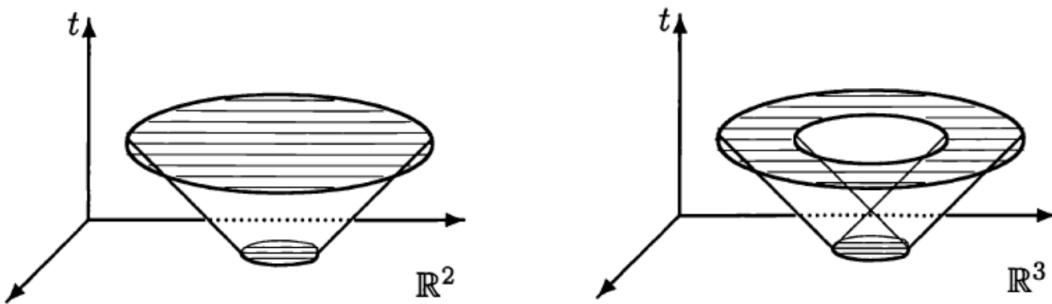


图 2.12: 惠更斯原理的示意图

**注记 2.3.2.** 上述解释可以联想生活中的两个不同现象。一个人在开放空间中对自己喊话时, 自己听到声音之后就不会再次听到了。而另一个场景则是往平静的湖面里面扔一块石头, 激起的波浪

尽管会弥散到远处，但是振幅不会归零。所以说人类应该庆幸生活在三维空间中，要是在二维空间中早就被吵死了。

### 2.3.2 能量估计

本节介绍高维波动方程有限传播速度的另证，该方法不要求求出解的表达式，仅需对方程本身的结构作分析，这在研究变系数或者非线性波动方程时也是适用的。在讲述证明之前，我们先介绍研究演化方程最重要的基本工具：Grönwall 不等式。

**定理 2.3.1** (Grönwall 不等式的微分版本). 设  $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  是非负的绝对连续函数<sup>3</sup>并满足微分不等式  $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$ . 其中  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$  是  $[0, T]$  上非负的 Lebesgue 可积函数，则有

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right], \quad \forall t \in [0, T].$$

特别地，若在  $[0, T]$  上成立  $\eta' \leq \phi\eta$  且  $\eta(0) = 0$ ，则  $\eta$  在  $[0, T]$  上恒为零。

证明. 从微分不等式中，我们得知

$$\frac{d}{ds} \left( \eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \right) = e^{-\int_0^s \phi(r)dr} (\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \psi(s)$$

对几乎处处的  $0 \leq s \leq T$  成立。因此对任意的  $0 \leq t \leq T$ ，由微积分基本定理知

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr} \psi(s) ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds.$$

□

等价地，我们也有积分形式的 Grönwall 不等式。

**定理 2.3.2** (Grönwall 不等式的积分形式). 设  $\xi(t)$  是  $[0, T]$  上的 Lebesgue 可积函数，且存在非负常数  $C_1, C_2$  使得对几乎处处的  $t \in [0, T]$  满足积分不等式  $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$ . 则有

$$\xi(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}), \quad \text{a.e. } t \in [0, T].$$

特别地，若对几乎处处的  $t \in [0, T]$  有  $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$ ，则  $\xi$  在  $[0, T]$  上几乎处处等于零。

<sup>3</sup> 我们说  $\eta$  在  $[0, T]$  上是绝对连续的，是指对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$  满足：对于  $[0, T]$  内的任何有限个开区间  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ，只要  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ ，就有  $\sum_{i=1}^n |\eta(b_i) - \eta(a_i)| < \varepsilon$  恒成立。该条件比“连续性”和“一致连续性”更强。事实上，绝对连续函数是几乎处处可微的（即去掉一个零测集），且函数的绝对连续性是有界闭区间上牛顿-莱布尼茨公式成立的充分必要条件。

证明. 令  $\eta(t) := \int_0^t \xi(s) ds$ , 则有  $\eta' \leq C_1\eta + C_2$  对几乎处处的  $t \in [0, T]$  成立。据微分版本的 Grönwall 不等式有

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t} (\eta(0) + C_2 t) = C_2 t e^{C_1 t},$$

于是得到

$$\xi(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}).$$

□

**注记 2.3.3.** 如上两个不等式（尤其是第二个）常用于建立演化方程（尤其是非线性方程）的各类能量估计。特别地，我们在考虑一个演化方程解的长时间存在性时，往往需要对方程建立所谓的“延拓准则”，即类似于“方程的解在  $T_*$  时刻还能继续演化下去当且仅当某个量在  $T_*$  时刻仍然保持有界”这样的论断。此外，如果  $\phi(t)$  关于时间  $t$  具有衰减性，则我们也可以用 Grönwall 不等式计算演化方程解的寿命（见习题 2.3.4）。在实际应用到诸多非线性问题的场景时，尤其是求解非线性方程的过程中对逼近解做一致估计取极限时，我们往往需要更一般形式的 Grönwall 型不等式，即

$$E(t) \leq P(E(0)) + P(E(t)) \int_0^t P(E(s)) ds \Rightarrow \exists T > 0, \text{ 使得 } \sup_{t \in [0, T]} E(t) \leq P(E(0)),$$

其中  $P(\dots)$  表示一个关于括号内各分量的（具有非负系数的）多项式，详情参见 [18, Chapter 2].

### 能量守恒与有限传播速度

对于波动方程(2.3.1)，如果初值  $\varphi, \psi$  满足  $\nabla \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ，且在无穷远处衰减到 0，那么可以证明它的总能量关于时间  $t$  是守恒的，即令

$$E(t) = K(t) + P(t), \quad K(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad P(t) := \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

其中  $K(t), P(t)$  分别被称作动能和势能。若  $E(0) < \infty$ ，则可以证明  $E(t) \equiv E(0)$ . 证明的过程非常简单，我们只需要利用分部积分和方程本身去证明  $E'(t) = 0$  即可。

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_t^2 u d\mathbf{x} + c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \partial_t \nabla u d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u \partial_t^2 u d\mathbf{x} - c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \cdot \partial_t u d\mathbf{x} = 0.$$

特别地，上述能量守恒以及方程(2.3.1)的线性直接蕴含了方程(2.3.1)有限能量解的唯一性。事实上，如果  $u_1, u_2$  是方程(2.3.1)带相同初值  $(\varphi, \psi)$  的解，则它们作差之后  $w := u_1 - u_2$  仍然满足相同的方程，但是初值是零，进而  $w(t, \mathbf{x})$  的能量必须恒为零，这表明  $w$  是常值，又因为它的初值是零，所以这个常值只能是零。同理，我们也可以证明波动方程(2.3.1)解对初值的连续依赖性。即假设  $u_1, u_2$  是方程 (2.3.1) 分别带初值  $(\varphi_1, \psi_1)$  和  $(\varphi_2, \psi_2)$  时的解，则它们的差  $v := u_1 - u_2$  满足同样的

波方程，初值为  $(\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2)$ 。此时能量守恒表明

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t v|^2 + c^2 |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_1 - \psi_2|^2 + c^2 |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|^2 \, d\mathbf{x}.$$

所以如果  $\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)$  和  $\psi_1 - \psi_2$  的  $L^2(\mathbb{R}^d)$  范数都很小，那么对任意的  $t, v(t, \mathbf{x})$  对应的能量  $E(t)$ （即上式的左边）也会一直保持很小。

接下来我们证明“水平切片” $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t)\}$  上的能量关于时间  $t$  单调递减，该结论实际上蕴含了高维波动方程解的有限传播速度。

**定理 2.3.3 (有限传播速度).** 对波动方程(2.3.1)，若存在  $t_0 > 0$  和  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  使得初值  $\varphi, \psi$  在  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct_0\}$  中恒为零，则它对应的解  $u(t, \mathbf{x})$  在如下过往光锥中恒为零

$$K(t_0, \mathbf{x}_0) := \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d : 0 \leq t \leq t_0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t)\}.$$

**证明.** 只需证明在过往光锥的每个“水平切片”上（即图中的每个阴影区域）成立  $u = 0$  即可。特别地，当空间维数  $d = 1$  时，阴影区域实际上就是区间  $[x_0 - c(t_0 - t), x_0 + c(t_0 - t)]$ ，读者可以对照一维情况的结论来理解。

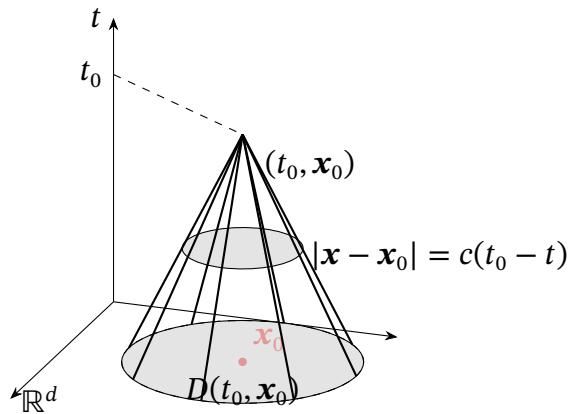


图 2.13: 顶点为  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  的特征锥示意图

接下来的证明过程是不依赖方程解的表达式的。定义  $e(t)$  为  $t$  时刻对应的“水平切片” $\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0 - t)) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c(t_0 - t)\}$  上的能量

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0 - t))} |u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}.$$

则初值条件  $\varphi, \psi$  在“底座” $\{t = 0\} \times \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct_0\}$  上恒为零表明  $e(0) = 0$ 。因此如果能证明  $e'(t) \leq 0$ ，就能利用  $e(t)$  本身的非负性得出  $e(t) \equiv 0$ 。

在计算  $E'(t)$  时, 我们注意到积分区域也依赖时间  $t$ , 所以在求导时还需要考虑  $\partial_t$  落在积分区域的情况。关于对移动区域内的积分求导, 我们有如下公式, 其一维版本更容易理解。

**引理 2.3.4.** 考虑一组光滑区域  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$  且至少  $C^1$  依赖于参数  $t$ , 设其边界上的单位外法向量为  $N$ , 边界  $\partial\Omega(t)$  运动速度为  $\vec{v}$ . 则有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \partial_t f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} f(\vec{v} \cdot N) dS_{\mathbf{x}}.$$

特别地, 当空间维数  $d = 1$  且  $\Omega(t) = [A(t), B(t)]$  时, 上述公式变成

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(t, x) dx = \int_{A(t)}^{B(t)} \partial_t f(t, x) dx + f(t, B(t))B'(t) - f(t, A(t))A'(t).$$

据此引理, 我们可以计算出

$$e'(t) = \int_{\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} u_t u_{tt} + c^2 (\nabla u) \cdot (\nabla u_t) d\mathbf{x} - c \cdot \frac{1}{2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} |u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2 dS,$$

其中我们利用了阴影区域的边界  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t_0 - t)$  的移动速度是  $-c$ , 对应一维区间的情况则是  $A(t) = x_0 - c(t_0 - t)$ ,  $B(t) = x_0 + c(t_0 - t)$ .

在  $e'(t)$  的第一个积分式中, 我们分部积分 (见命题B.1.1) 可得

$$\int_{\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} u_t u_{tt} + c^2 (\nabla u) \cdot (\nabla u_t) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} u_t u_{tt} d\mathbf{x}}_{=\sum_i \partial_i u \partial_i u_t} - c^2 \underbrace{\int_{\bar{B}(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} \nabla \cdot (\nabla u) (u_t) d\mathbf{x}}_{=\sum_i \partial_i \partial_i u = \Delta u} + c \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} u_t \cdot \left( c \frac{\partial u}{\partial N} \right) dS_{\mathbf{x}}.$$

结合上述两个表达式, 得到

$$e'(t) = -\frac{c}{2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} |u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2 dS_{\mathbf{x}} + c \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} u_t \cdot \frac{c \partial u}{\partial N} dS_{\mathbf{x}}.$$

在最后一项中使用均值不等式可得

$$\left| u_t \cdot \left( c \frac{\partial u}{\partial N} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left( |u_t|^2 + c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial N} \right|^2 \right) \leq \frac{1}{2} (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2),$$

这可以推出

$$e'(t) \leq -\frac{c}{2} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} |u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2 dS_{\mathbf{x}} + \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} \frac{c}{2} (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS_{\mathbf{x}} = 0.$$

□

**注记 2.3.4.** 上述定理表明，初值在  $\bar{B}(\mathbf{x}_0, ct_0)$  之外的部分在  $t_0$  时刻之前无法对解  $u$  产生影响。这也解释了为什么我们说“波动方程的解具有有限传播速度”。需注意，如上证明过程并不依赖方程解的显式表达式，该方法可以推广到非线性波动方程上，本节末尾的问题2.3.1便是一个例子。

### 非齐次波动方程的能量估计

如果外力项  $f(t, \mathbf{x})$  非零，那么我们不再具有能量守恒，但是我们仍然可以用 Grönwall 不等式来估计能量的增长速率。本节考虑如下方程的能量估计

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

并令  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ . 直接计算可得

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u (\partial_t^2 u - c^2 \Delta u) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

对时间变量积分得到

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u(\tau, \mathbf{x}) f(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\tau \leq E(0) + \int_0^t \|\partial_t u(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\tau \\ &\leq E(0) + \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\partial_t u(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\tau \end{aligned}$$

用 Young 不等式，得到对任意  $\delta > 0$  都有

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) + \delta \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\partial_t u(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{4\delta} \left( \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} d\tau \right)^2 \\ &\leq E(0) + \delta \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\partial_t u(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{T}{4\delta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\tau. \end{aligned}$$

给定  $T > 0$ ，两边对  $t \in [0, T]$  取上确界，并取  $\delta > 0$  充分小使得右边的  $\delta$  项被左边吸收，就得到

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(t) \leq C \left( E(0) + T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \right).$$

同样地，我们可以对方程(2.3.2)建立一个与定理2.3.3类似的结果。模仿之前的定理证明可以算得

$$e'(t) \leq \int_{B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} \partial_t u f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq e(t) + \frac{1}{2} \int_{B(\mathbf{x}_0, c(t_0-t))} f^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall t \in [0, t_0].$$

用 Grönwall 不等式就可算出能量泛函在“水平切片”上的增长率

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} e(t) \leq C \left( e(0) + t_0 \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}^d} f^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \right).$$

### 习题 2.3

**习题 2.3.1.** 设  $\mathbb{R}^d$  中的波动方程(2.2.1)的源项  $f \equiv 0$ , 初值  $\varphi, \psi$  都是多项式, 问: 方程的解是否也是关于  $t, \mathbf{x}$  的多项式? 证明你的结论。

提示:  $g(\mathbf{x})$  是多项式当且仅当存在正整数  $k$ , 使得对长度  $\geq k$  的多重指标  $\alpha$  都有  $\partial^\alpha g = 0$ .

**习题 2.3.2.** 证明: 如下的梁方程 (beam equation) 至多只有一个光滑解。

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, 1) \\ u = u_x = 0 & \text{on } [0, T] \times (\{0\} \cup \{1\}) \\ u = \varphi, u_t = \psi & \text{on } \{t = 0\} \times [0, 1]. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

**习题 2.3.3.** 证明: 对任意常数  $D \in \mathbb{R}$ , 如下方程至多只有一个光滑解  $u \in C^\infty([0, T] \times [0, 1])$ .

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & t \in (0, T), x \in (0, 1) \\ u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x) & x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

**习题 2.3.4.** 设  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 设非负函数  $\eta \in C^1([0, \infty))$  满足  $\eta'(t) \leq \varepsilon \phi(t)\eta(t)$ , 且  $\eta(0) = \varepsilon$ .

- (1) 若给定  $\int_0^\infty \phi(s) ds < \infty$ , 证明存在常数  $C > 0$  使得  $\eta(t) \leq C\varepsilon$  对  $t \geq 0$  恒成立。这说明当  $\eta(t)$  的衰减速率关于时间变量  $t$  可积时, 小初值不可能得到大解。
- (2) 当  $\varepsilon$  充分小,  $\phi(t)$  分别取成  $(1+t)^{-1}, (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{(2+t)\ln(2+t)}, \frac{1}{(2+t)\ln^2(2+t)}$  时, 求出  $T_\varepsilon$  的阶, 使得在  $[0, T_\varepsilon]$  中不等式  $\eta(t) \leq C\varepsilon$  仍对某个不依赖  $\varepsilon$  的常数  $C > 0$  成立。

注: 该题所涉及的结论实际上在证明诸多偏微分方程的小初值长时间行为时经常用到, 即所谓的“连续性方法”或者叫“bootstrap argument”, 该方法的原理和叙述可参见陶哲轩的书 [18, 1.2-1.3 节]。

### 问题 2.3

**问题 2.3.1.** 考虑如下三维半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u^5 = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

(1) 证明：如下定义的  $E(t)$  是守恒量。

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + \frac{u^6}{6} d\mathbf{x}.$$

(2) 给定  $t_0 > 0$  和  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ , 定义顶点为  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  的“过往光锥”为

$$K(t_0, \mathbf{x}_0) := \{(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq t_0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq t_0 - t\},$$

该光锥的  $K(t_0, \mathbf{x}_0)$  的弯曲边界为  $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0) := \{(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq t_0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = t_0 - t\}$ . 定义该光锥上的能量流为

$$e(t) := \int_{B(\mathbf{x}_0, t_0 - t)} \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + \frac{u^6}{6} d\mathbf{x} \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

证明：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0)} \frac{1}{2}|(\partial_t u)\nu - \nabla u|^2 + \frac{u^6}{6} dS = e(0) \quad (2.3.6)$$

其中  $\nu := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$ .

(3) 用 (2) 证明该半线性方程也有和定理 2.3.3 一样的结果。

(2) 的提示：计算  $e'(t)$  并与要证的恒等式左边进行比较，尤其是思考为什么会出现系数  $1/\sqrt{2}$ .

### 2.4 傅立叶变换求解热方程

根据能量守恒定律，物体内部热量的改变等于通过物体边界流入的热量加上物体内部热源所生成热量的总和，如下图所示。

热量 $t = t_2$	- 热量 $t = t_1$	$=$	通过边界的流入量 $t_1 \leq t \leq t_2$	+ 热源的生成量 $t_1 \leq t \leq t_2$
-----------------	-------------------	-----	-----------------------------------	-----------------------------------

今在物体  $\Omega$  内任取一小块区域  $D$ , 在时间段  $[t_1, t_2]$  上对  $D$  使用能量守恒定律, 得到

$$\int_D c\rho(u(t_2, \mathbf{x}) - u(t_1, \mathbf{x})) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} \mathbf{q} \cdot \mathbf{N} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_D \rho f_0 d\mathbf{x}.$$

这里  $u(t, \mathbf{x})$  是温度,  $\rho$  是物体密度,  $c$  是比热容,  $\mathbf{q}$  是热流密度,  $f_0$  是热源强度。根据傅立叶定律, 在一定条件下, 热流向量与温度梯度成正比, 即  $\mathbf{q} = -a\nabla u$ , 其中导热系数  $a > 0$ .

据微积分基本定理, 我们得到对任意的时间区间  $[t_1, t_2]$  和任意区域  $D \subset \Omega$  有

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_D c\rho \partial_t u d\mathbf{x} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} a \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_D \rho f_0 d\mathbf{x} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\nabla \cdot (a \nabla u) + \rho f_0) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

因此必有被积函数相等, 即  $c\rho \partial_t u - \nabla \cdot (a \nabla u) = \rho f_0$ . 如果假设  $c, \rho, a$  是常数, 并且令  $k = a/c\rho > 0$ ,  $f = f_0/c$ , 就得到热方程  $\partial_t u - k\Delta u = f$ .

### 2.4.1 傅立叶变换法求解欧氏空间热方程

设  $A \in \mathbb{R}$  是常数, 考虑常微分方程  $u'(t) + Au(t) = 0$  的解为  $u(t) = e^{-At}u(0)$ . 若考虑非齐次方程  $u' + Au = f$ , 则可以用常数变易法求解, 即假设  $u(t) = C(t)e^{-At}$  然后求解  $C(t)$ . 对这个预设的表达式作直接计算可得  $u'(t) = (C'(t) - AC(t))e^{-At}$ , 于是代入方程  $u' + Au = f$  之后就得到

$$C'(t)e^{-At} = f(t) \Rightarrow C(t) = C(0) \int_0^t e^{A\tau} f(\tau) d\tau,$$

而初值可以确定出  $u(0) = C(0)$ . 这样的话非齐次常微分方程  $u' + Au = f$  的解就等于

$$u(t) = u(0)e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

我们发现, 如果能在某种意义上把  $(-\Delta)$  这个常系数微分算子看作常数 (至少是跟  $t$  无关的), 那么热方程就和上面提到的常微分方程具有相同的形式。于是我们很自然就会问能否像下式一样写出非齐次热方程  $\partial_t u - k\Delta u = f$  的解

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{kt\Delta} u(0, \mathbf{x}) + \int_0^t e^{k(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau. \quad (2.4.1)$$

至此问题就变成: 我们在何种意义下能把  $(-\Delta)$  这个常系数线性微分算子视作常数, 使得齐次

方程的解可以写成  $u(t, \mathbf{x}) = e^{kt\Delta}u(0, \mathbf{x})$  的形式？事实上，这可以通过对方程作傅立叶变换来实现。傅立叶变换也是当下研究偏微分方程最重要的工具之一。

今用傅立叶变换来求解如下方程

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = f(t, \mathbf{x}) & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

有关傅立叶变换的基本性质，请读者参考附录C.1查询。为了避免不必要的讨论，我们先假设初值  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  以及对任意  $t > 0$  有  $f(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 。现在对  $\mathbf{x}$  变量作傅立叶变换，并记  $u(t, \mathbf{x})$  的傅立叶变换为  $\hat{u}(t, \xi)$ 。据命题C.1.3(1) 得到关于  $t$  的常微分方程

$$\hat{u}_t + k|\xi|^2\hat{u} = \hat{f}(t, \xi), \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi).$$

两边乘以  $e^{tk|\xi|^2}$ （积分因子法），左边变成  $\frac{d}{dt}(e^{tk|\xi|^2}\hat{u})$ ，这样就可算出方程的解为

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-tk|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi) + \int_0^t \hat{f}(\tau, \xi)e^{-(t-\tau)k|\xi|^2} d\tau.$$

现在对上式作傅立叶逆变换，利用命题C.1.3(3)，即  $(\hat{f}\hat{g})^\vee = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(f * g)$ ，可以求得  $u$  的表达式

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} ((e^{-tk|\xi|^2})^\vee * \varphi)(\mathbf{x}) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^t (f(\tau, \cdot) * (e^{-(t-\tau)k|\xi|^2})^\vee)(\mathbf{x}) d\tau.$$

**注记 2.4.1.** 由命题C.1.3(1)，我们得到  $\widehat{-\Delta u}(\xi) = |\xi|^2\hat{u}(\xi)$ ，因此如果我们“定义”  $e^{t\Delta}u := (e^{-t|\xi|^2}\hat{u}(\xi))^\vee$ （至少对 Schwartz 函数来说这样做是可行的），那么之前我们期待的表达式(2.4.1)就顺理成章地成立了。算子族  $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$  被称作热半群， $e^{t\Delta}u$  被称作从  $u(0, \mathbf{x})$  出发的热流。热流在几何分析中经常出现。除此之外，热流也可以用于在流形上“定义傅立叶变换”（实际上是替代欧氏空间调和分析中的 Littlewood-Paley 理论），这在几何色散方程的研究中也会被用到。

现在我们需要计算  $e^{-tk|\xi|^2}$  和  $e^{-(t-\tau)k|\xi|^2}$  的傅立叶逆变换。这首先依赖于如下事实：高斯核（数学期望为零的正态分布的概率密度函数）的傅立叶变换仍具有高斯核的形式。

**引理 2.4.1.** 令  $\Phi(\mathbf{x}) = e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$ ，则有  $\hat{\Phi}(\xi) = \Phi(\xi)$ 。

**证明.** 首先我们考虑一维的情况，据  $\hat{\Phi}$  的定义可得

$$\hat{\Phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{-i\xi} e^{-ix\xi} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

分部积分一次，得到

$$\hat{\Phi}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\xi} e^{-ix\xi} (xe^{-\frac{x^2}{2}}) dx = -\frac{1}{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (-ix\Phi(x)) dx.$$

据命题C.1.3 (1) 知，上式右边等于  $-\xi^{-1} \frac{d}{d\xi} \hat{\Phi}(\xi)$ . 这样我们就得到一个可以求解  $\hat{\Phi}$  的常微分方程

$$\frac{d}{d\xi} \hat{\Phi} + \xi \hat{\Phi}(\xi) = 0, \quad \hat{\Phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) dx = 1,$$

它的解算出来是  $\hat{\Phi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \Phi(\xi)$ . 这里  $\hat{\Phi}(0)$  值的计算留作习题（习题2.4.1）.

对一般维数  $d > 1$ , 我们利用  $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$  和一维的结果得到

$$\hat{\Phi}(\xi) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-ix_j \xi_j} dx_j = \prod_{j=1}^d e^{-\frac{\xi_j^2}{2}} = \Phi(\xi).$$

□

现在我们有  $e^{-tk|\xi|^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2kt}|\xi|)^2}{2}} = \hat{\Phi}(\sqrt{2kt}\xi)$ , 再用命题C.1.3(2) 中的伸缩性质 (令  $\lambda = 1/\sqrt{2kt}$ ) 就得到

$$(\hat{\Phi}(\sqrt{2kt}\xi))^{\vee} = \frac{1}{(\sqrt{2kt})^d} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{2kt}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2kt})^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}}.$$

把它代回  $u$  的表达式，就得到方程(2.4.2)在初值、源项均为 Schwartz 函数时解的如下表达式，它被称作泊松公式 (Poisson formula).

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4kt}} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \frac{1}{(4\pi k(t-\tau))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4k(t-\tau)}} f(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau. \quad (2.4.3)$$

我们称  $K(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}}$  为  $\mathbb{R}^d$  中热方程的基本解，也被称作热核。至此，我们只对初值和源项都是 Schwartz 函数的情况求得了热方程解的表达式，但另一方面我们不难观察到表达式 (2.4.3) 里面的积分收敛似乎并不需要  $\varphi, f(t, \cdot)$  的衰减性有 Schwartz 函数那么强。事实上，如果  $\varphi$  是有界连续函数， $f \in C_1^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^d)$  具有紧支集 (后面严格验证方程的解需要该假设)，我们同样可以验证表达式(2.4.3)给出了热方程初值问题(2.4.2)的有界解，但证明过程依赖热核的性质。

## 2.4.2 热核与解的性质

本节将验证上一小节最后提到的事实：如果  $\varphi$  是有界连续函数， $f \in C_1^2(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^d)$  具有紧支集，那么(2.4.3)给出了热方程初值问题(2.4.2)的有界解。具体来说，我们可以将其拆解成两个问题单独验证： $f \equiv 0, \varphi \neq 0$  和  $f \neq 0, \varphi \equiv 0$ .

首先我们介绍热核的若干基本性质

**命题 2.4.2** (热核的性质). 令  $K(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}}$  为热核，则有如下性质成立：

- (1)  $K(t, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$  且在  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  上取值为正；
- (2) 对任意  $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 有  $\partial_t K - k\Delta_{\mathbf{x}} K = 0$ ；
- (3) 对任意  $t > 0$ , 有  $\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ .
- (4) 对任意  $\delta > 0$ , 我们有  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|\mathbf{x}| > \delta} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ .

证明. (1)、(2) 可以直接计算证得，此处不再赘述。(3) 的证明则可以直接通过变量替换完成。令  $\varepsilon = \sqrt{2kt}$ , 则有  $K(t, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-d} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , 其中  $\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-d} \Phi(\mathbf{x})$ . 这样我们作变量替换  $\mathbf{y} = \varepsilon \mathbf{x}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} \xrightarrow{y=\mathbf{x}/\varepsilon, dy=\varepsilon^{-d} dx} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

(4) 的证明也是类似的，我们知道  $|\mathbf{x}| > \delta$  等价于  $|\mathbf{y}| > \varepsilon^{-1}\delta = \delta/\sqrt{2kt}$ . 因此有

$$\int_{|\mathbf{x}| > \delta} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{|\mathbf{y}| > \frac{\delta}{\sqrt{2kt}}} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2}} d\mathbf{y}.$$

当  $t \rightarrow 0^+$  有  $\frac{\delta}{\sqrt{2kt}} \rightarrow \infty$ . 因为  $\tilde{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 据 Lebesgue 积分的绝对连续性<sup>4</sup>, 便知道 (4) 是成立的。  $\square$

现在可以证明如下结论：

**定理 2.4.3.** 设方程(2.4.2)的初值  $\varphi \in C(\mathbb{R})$  是有界的，源项  $f \equiv 0$ , 则由泊松公式(2.4.3)给出的表达式是初值问题(2.4.2)的有界解。

证明. 据泊松公式有

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

对任意正数  $\delta$ , 上述等式右端的积分在区域  $\{t \geq \delta\} \times \mathbb{R}^d$  上是一致收敛的，因此在此区域上可以直

<sup>4</sup>Lebesgue 积分的绝对连续性是指：若  $\tilde{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在充分大的  $R$ , 使得  $\int_{|\mathbf{y}| > R} |\tilde{\Phi}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} < \varepsilon$ .

接交换求导和积分号。命题2.4.2(2) 表明  $\partial_t K - k\Delta K = 0$ , 求导得对任意固定的  $t > 0$  有

$$\partial_t u - k\Delta u = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t K - k\Delta K)(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

接下来证明: 对任意给定的  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  有  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(t, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0)$ . 关键步骤是用  $\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$  将  $\varphi(\mathbf{x}_0)$  写为

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}_0) d\mathbf{y}.$$

因此对任意的  $\delta > 0$ , 成立

$$u(t, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})(\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{y} = \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| \leq \delta} + \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| > \delta}.$$

对第二部分, 我们利用  $\varphi$  的有界性 (设  $|\varphi(\mathbf{x})| \leq M$ ) 和命题2.4.2 (4), 得到当  $t \rightarrow 0$  时

$$\left| \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| > \delta} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})(\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{y} \right| \leq 2M \left| \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| > \delta} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \rightarrow 0.$$

对第一部分, 我们可以用  $\varphi$  的连续性。事实上, 因为  $\{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| \leq \delta\}$  是紧集, 所以  $\varphi(\mathbf{y})$  在  $\{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| \leq \delta\}$  上是一致连续的。因此, 任给  $\varepsilon > 0$ , 我们必能找到  $\delta > 0$  使得只要  $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| \leq \delta$  就有  $|\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ . 这样, 第一部分的积分就有如下上界

$$\left| \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0| \leq \delta} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})(\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}_0)) d\mathbf{y} \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \varepsilon.$$

□

**注记 2.4.2.** 上面提到泊松公式只给出了(2.4.2)的有界解 (可以证明这是唯一的有界解), 而实际上该方程还有无穷多个无解解。以  $d = 1, \varphi, f \equiv 0$  为例, 如下定义的级数  $v(t, x)$  也满足热方程

$$v(t, x) = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \eta(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (t \neq 0), \quad \eta(t) = \begin{cases} \exp(-1/t^2) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

利用热核的性质, 我们还能证明方程的解是光滑函数, 且具有无限传播速度。

**推论 2.4.4 (光滑效应).** 在定理2.4.3的假设下, 由泊松公式给出的解  $u(t, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ .

证明. 当  $t > 0$  时, 我们有

$$\partial_x^\alpha \partial_t^l u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha \partial_t^l K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

事实上, 因为对于任意正数  $\delta$ , 上述等式右端的积分在区域  $\{t \geq \delta, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$  上一致收敛, 因此可以在积分号下求导, 由于  $K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})$  当  $t > 0$  时无穷次可微, 故  $u(t, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ .  $\square$

**推论 2.4.5** (无限传播速度). 设方程(2.4.2)的源项  $f \equiv 0$ , 初值  $\varphi$  为  $\mathbb{R}$  上的非负有界连续函数, 且存在  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d, \delta > 0$  使得  $\varphi$  在球  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$  内取值为正, 则对任意  $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 由泊松公式给出的解满足  $u(t, \mathbf{x}) > 0$ .

证明. 只需注意到泊松公式中的基本解  $K$  是恒为正的函数.  $\square$

**注记 2.4.3.** 考虑一个无穷长的杆子上的温度分布。上述推论表明, 即使初值热量集中于杆子上的一小块地方, 但只要一开始演化, 热量就会立即扩散到杆上任一点。这是热方程与波动方程的本质区别之一。

### 2.4.3 热方程的其它性质: 衰减速率、倒向唯一性

接下来我们假设  $f \equiv 0$  并讨论热方程解在  $t \rightarrow \infty$  时的衰减速率。

**推论 2.4.6** (热方程的衰减速率). 设  $u(t, \mathbf{x})$  是由泊松公式(2.4.3)给出的方程(2.4.2)在  $f = 0$  时的解。

1. 若  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 则有  $|u(t, \mathbf{x})| \leq Ct^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$ .
2. 若  $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  且在  $\{|\xi| \leq 1\}$  中有  $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ , 则解满足  $|u(t, \mathbf{x})| \leq Ce^{-kt}$ .

证明. (1) 可以直接由  $u(t, \mathbf{x}) = (K(t, \cdot) * \varphi)(\mathbf{x})$  得到

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}{4kt}} |\varphi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \frac{C}{t^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$$

with  $C = 1/(4\pi k)^{d/2}$ .

(2) 的证明则是注意到  $u(t, \mathbf{x}) = (\hat{u}(t, \xi))^\vee = (e^{-tk|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi))^\vee$ , 于是有

$$|u(t, \mathbf{x})| = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} e^{-tk|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-tk|\xi|^2} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi.$$

因为  $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  且在  $\{|\xi| \leq 1\}$  里面有  $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ , 上述积分便有如下上界

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \frac{e^{-kt}}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi \leq Ce^{-kt} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi$$

其中  $C = (\sqrt{2\pi})^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\phi}(\xi)| d\xi$ . □

**注记 2.4.4.** 上述结果表明热方程的衰减速率一般为  $O(t^{-d/2})$ , 比波动方程的  $O(t^{-\frac{d-1}{2}})$  略快一些。而当初值没有低频部分时 (即  $\hat{\phi}$  的支集远离  $\xi = \mathbf{0}$ ), 我们可以证得解具有指数衰减, 而这对于波动方程是无法做到的。事实上, 这是由于两个方程的衰减机制完全不同, 热方程的机制是热量的扩散, 而波动方程对应波的色散。对热方程来说, 上面提到的“避开低频部分”在边值问题也有对应的例子, 即考虑有界区域内带有零边值条件的热传导方程。我们可以利用分离变量法证得解的  $L^2$  范数具有指数衰减, 而可以用极大值原理和  $(-\Delta)$  特征函数的性质来证得逐点的指数衰减性。这将会在后面两章学到。

波方程和热方程的另一个区别则是: 波方程可以按时间倒向演化回去, 但是热方程不能。具体来说, 如果给定  $T > 0$  时刻的解  $u(T, \mathbf{x})$ , 我们是否可以求解时间倒向 (time-backward) 问题将初值  $u(0, \mathbf{x})$  还原出来? 这对热方程是不正确的, 时间倒向热方程可以不满足解对初值的连续依赖性。例如, 考虑如下问题

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, \pi), \\ u(T, x) &= \varphi(x) \quad \forall x \in [0, \pi], \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

对  $n \in \mathbb{N}^*$ , 我们取  $\varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ , 可见  $n \rightarrow \infty$  时有  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ . 然而我们又可以解得  $u_n(t, x) = \frac{\sin nx}{n} e^{n^2(T-t)}$ , 当  $n \rightarrow +\infty$  时, 我们有对任意的  $t < T$ ,  $u_n(t, x) \rightarrow \infty$ .

尽管热方程的时间倒向问题是不稳定的, 我们仍可以证明热方程本身具有倒向唯一性, 即有界区域内同一个热方程的两个解如果在  $T$  时刻完全相等, 那么它们在  $T$  时刻之前也完全相等。

**命题 2.4.7 (倒向唯一性).** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$  中的有界区域, 边界为  $\partial\Omega$ . 设  $v, w \in C^2(\overline{\Omega_T})$  (记号见附录 A) 是如下方程的解

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g(t) & \text{on } [0, T] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.4)$$

若对任意  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 有  $v(T, \mathbf{x}) = w(T, \mathbf{x})$ , 则在  $\Omega_T$  中恒有  $v = w$ .

这个问题看似很像极大值原理的推论 (在后续章节中会学到), 但是由于我们不知道初始时刻的信息, 所以抛物边界  $\overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$  上的信息并不完善。我们将使用能量法证明该结论。

**证明.** 令  $e(t) = \int_{\Omega} u(t, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$ . 我们现在只知道  $e(T) = 0$  和  $e'(t) < 0$ , 这显然不足以得到  $e(t)$  在区间  $[0, T]$  内恒为零。现在我们进一步分析  $e(t)$  的估计, 直接计算可得

$$e'(t) = 2 \int_{\Omega} uu_t d\mathbf{x} = 2 \int_{\Omega} u \Delta u d\mathbf{x} = -2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}.$$

再求一次导数得到

$$e''(t) = -4 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx = 4 \int_{\Omega} (\Delta u)(u_t) \, dx = 4 \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \, dx.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们算得

$$(e'(t))^2 \leq e(t)e''(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

现在用反证法证明  $e(t) = 0$ . 由  $e(t)$  的连续性，如果我们假设存在  $t_1 < t_2 \leq T$ , 使得在  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  中有  $e(t) > 0$ , 而当  $t_2 \leq t \leq T$  时有  $e(t) \equiv 0$ . 现在令  $f(t) = \ln e(t)$ , 从而有

$$f''(t) = \frac{e(t)e''(t) - (e(t))^2}{e^2(t)} \geq 0.$$

而有界闭区间上的凸函数不可能下降到  $\ln 0 = -\infty$ , 出现矛盾。具体地，任取  $s_1, s_2 \in [t_1, t_2]$  以及  $\lambda \in [0, 1]$ , 我们可以证明

$$f(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2) \leq \lambda f(s_1) + (1 - \lambda)f(s_2) \xrightarrow{f(t)=\ln e(t)} e(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2) \leq e(s_1)^\lambda e(s_2)^{1-\lambda}.$$

今选取  $s_2 = t_2$ , 我们得到对任意  $s_1 \in [t_1, t_2]$  和  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 成立不等式  $e(\lambda s_1 + (1 - \lambda)t_2) = 0$ , 这表明  $e(t) \equiv 0$  in  $[t_1, t_2]$ , 矛盾。  $\square$

## 习题 2.4

**习题 2.4.1.** 证明:  $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**习题 2.4.2.** 本题考虑半平面内的调和函数求解。

(1) 给定  $y > 0$ , 计算  $F_y(\xi) = e^{-|\xi|y}$  关于频率变量  $\xi \in \mathbb{R}$  的傅立叶逆变换。

(2) 计算如下边值问题有界解的显式表达式

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  是给定的。

(3) 证明: 对任意  $y > 0$  有  $\int_{\mathbb{R}} |u(x, y)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \, dx$ .

**习题 2.4.3 (Cole-Hopf 变换).** 设  $a > 0, b \in \mathbb{R}$  是给定的常数, 求解如下拟线性热方程。

$$\begin{cases} \partial_t u - a^2 \Delta u + b |\nabla u|^2 = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & t = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

提示: 考虑  $v = e^{-\frac{bu}{a^2}}$  满足的方程。

**习题 2.4.4.** 求解如下粘性 Burgers 方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + uu_x = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = \varphi(x) & t = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里  $a \in \mathbb{R}$  是给定的常数。

提示: 考虑  $v(t, x) = \int_{-\infty}^x u(t, y) dy$  满足的方程。

**习题 2.4.5.** 计算如下问题有界解  $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$  的显式表达式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - \frac{U''(u)}{U'(u)} |\nabla u|^2 = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & t = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

其中  $0 < \varphi \in C(\mathbb{R}^d)$  是有界连续函数,  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是光滑函数且满足  $U' > 0$ .

提示: 考虑  $v(t, \mathbf{x}) = U(u(t, \mathbf{x}))$ .

**习题 2.4.6.** 求解线性薛定谔方程, 其中  $i = \sqrt{-1}$ ,  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  是复值未知函数,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

$$\begin{cases} i \partial_t u + \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

**习题 2.4.7.** 考虑热传导方程  $\partial_t u - \Delta u = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

- (1) 证明: 若  $u(t, \mathbf{x})$  是该方程的解, 则对任意非零常数  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 函数  $u(\lambda^2 t, \lambda \mathbf{x})$  也是该方程的解。
- (2) 求出全体形如  $u(t, \mathbf{x}) = v(|\mathbf{x}|^2/t)$  的解。
- (3) 选取 (2) 中的一个解  $K(t, \mathbf{x})$ , 使得对任意  $t > 0$  都有  $\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ .

**习题 2.4.8.** 考虑齐次热传导方程的初值问题, 即方程(2.4.2)在  $f \equiv 0$  的情况, 设初值  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 由泊松公式(2.4.3)给出的解为  $u(t, \mathbf{x})$ .

- (1) 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得  $|u(t, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq C \sqrt{kt}$  对任意  $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立。

(2) 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得  $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |u(t, \mathbf{x})| \leq Ct^{-\frac{d}{4}}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  对任意  $t > 0$  成立。

提示: (1) 注意  $\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ , 将  $\varphi(\mathbf{x})$  写作  $\int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{y}$ . (2) 将  $u$  写成  $(\hat{u})^\vee$  然后用傅立叶逆变换的定义得到  $|u(t, \mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(t, \xi)| d\xi$ , 代入  $\hat{u}(t, \xi)$  的表达式后用 Cauchy-Schwarz 不等式。

## 问题 2.4

**问题 2.4.1.** 计算如下问题有界解  $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  的显式表达式

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = 0 & t = 0, x > 0, \\ u(t, 0) = g(t) & t > 0, x = 0 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

其中  $g \in C^1(\mathbb{R})$  有界, 且满足  $g(0) = 0$ .

提示: 令  $v(t, x) = u(t, x) - g(t)$  并定义  $\bar{v}(t, x)$  为  $v(t, x)$  在实轴上的奇延拓, 然后用泊松公式求解  $\bar{v}$ .

**问题 2.4.2.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域且边界光滑,  $u(t, \mathbf{x}) \in C_1^2((0, \infty) \times \Omega) \cap C([0, \infty) \times \overline{\Omega})$  是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \Omega \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \\ u = 0 & t \geq 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中  $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$  给定。证明: 存在常数  $a > 0$  (仅和区域本身有关) 使得

$$\int_{\Omega} (u(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \leq e^{-at} \int_{\Omega} (u_0(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}.$$

提示: 对有界区域  $\Omega$ , 若  $f|_{\partial\Omega} = 0$ , 则必存在常数  $C > 0$  使得  $\int_{\Omega} f^2 d\mathbf{x} \leq C \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\mathbf{x}$ . 思考如何利用类似于“微积分基本定理”的想法去证明这个事实。

**问题 2.4.3.** 在  $f \neq 0$  的情况下证明(2.4.3)的结论 (此时解未必关于  $t$  一致有界)。

提示: 不妨设  $\varphi = 0$ . 可计算得  $\partial_t u - \Delta u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} K(t-\tau, \mathbf{x}-\mathbf{y})(\partial_\tau - \Delta_y) f(\tau, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\tau + \int_{\mathbb{R}^d} K(t, \mathbf{y}) f(0, \mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . 然后将  $\int_0^t$  拆成  $\int_0^\varepsilon, \int_\varepsilon^t$ , 对后者分部积分。

**问题 2.4.4.** 考虑多孔介质方程  $\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$  ( $t > 0$ ),  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . 其中  $u \geq 0$ , 常数  $\gamma > 1$ . 考虑形如

下式的解

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{\mathbf{x}}{t^\beta}\right).$$

- (1) 若  $\alpha + 1 = \alpha\gamma + 2\beta$ , 证明:  $\alpha v + \beta \mathbf{y} \cdot \nabla v = \Delta(v^\gamma) = 0$ , 其中  $\mathbf{y} = t^{-\beta} \mathbf{x}$ .  
(2) 在 (1) 的条件下, 若  $\alpha = d\beta$ , 且  $v$  是径向函数, 计算  $u(t, \mathbf{x})$  的表达式。

**问题 2.4.5** (Laplace 方法实例: Burgers 方程的无粘极限). 设常数  $\varepsilon > 0$ , 考虑粘性 Burgers 方程

$$\partial_t u^\varepsilon - \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad u^\varepsilon(0, x) = \varphi^\varepsilon(x) \text{ on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d. \quad (2.4.7)$$

$U$  满足的方程可以用习题 2.4.3 的方法来求解, 从而解得  $u^\varepsilon$  的表达式。

(1)\* 设  $k, \ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数,  $\ell$  至多线性增长,  $k$  至多二次增长, 即存在  $C > 0$ , 使得

$$|x| \rightarrow \infty \text{ 时, } |k(x)| \leq C|x|^2, \quad |\ell(x)| \leq C|x|.$$

并假设存在唯一的  $y_0 \in \mathbb{R}$  使得  $k(y_0) = \lim_{y \in \mathbb{R}} k(y)$ . 证明:

$$\ell(y_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} \ell(y) e^{-k(y)/\varepsilon} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-k(y)/\varepsilon} dy}.$$

(2)\* 用 (2) 的方法计算无粘 Burgers 方程 (即(2.4.7)在  $\varepsilon = 0$  的情况) 的解。

**注记 2.4.5** (渐近分析中的 Laplace 方法). 在数学物理问题中, 我们会遇到形如  $I(x) = \int_a^b f(t) e^{xh(t)} dt$  的实 Laplace 积分, 并考察其在  $x \rightarrow \infty$  时的渐近行为。直观地看, 若函数  $h(t)$  在  $[a, b]$  上某内点  $t_c$  处有最大值, 当  $x \rightarrow \infty$  时, 指数函数  $e^{xh(t)}$  使被积函数在  $t_c$  附近要比  $[a, b]$  中其它地方要大得多, 所以 Laplace 积分的主要贡献来自  $t_c$  附近区域的积。当最大值在边界点  $a$  或  $b$  处时, 也有相同的情形, 不过此时  $a$  或  $b$  不一定同时是极值点。上述思想可从下图中明显地看出, 当然在实际情形还要考虑  $f(t)$  在  $t_c$  附近性态的影响。

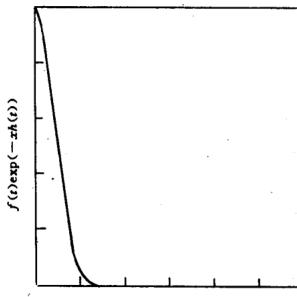


图 2.14: 被积函数的形态

事实上我们有

引理. 若在区间  $[a, b]$  中,  $h'(t), h''(t)$  存在连续,  $h'(t) \neq 0, f'(t)$  存在连续,  $f(a) \cdot f(b) \neq 0$  则积分

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{xh(t)} dt = O\left(\frac{1}{x} e^{x \max(h(a), h(b))}\right)$$

进一步我们可以证明该类积分的渐近展开

定理 (Laplace 积分定理). 对于积分

$$I(x) = \int_a^b f(t)e^{xh(t)} dt \quad x \rightarrow \infty,$$

在区间  $[a, b]$  中,  $h'(t), h''(t)$  存在连续,  $h'(a) = 0, h''(a) < 0$ , 即在  $a$  点有最大值,  $h'(t)$  在其余各点不为零;  $f'(t)$  存在连续,  $f(a) \neq 0$ , 我们有渐近表示

$$I(x) \sim f(a)e^{xh(a)} \sqrt{\frac{-\pi}{2xh''(a)}}.$$

该方法可以进一步推广到复积分的情况, 即考虑  $J(x) = \int_C f(z)e^{xh(z)} dz$ , 其中  $f, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  为全纯函数,  $C$  为特定的积分路径。研究其在  $x \rightarrow \infty$  时的渐近形态的方法被称作最陡下降法 (又称“鞍点法”), 其在精确计算各类重要特殊函数 (例如  $\Gamma$  函数、Airy 函数等) 的渐近行为时非常重要, 而这些特殊函数则在诸多物理现象的定量刻画中出现。Laplace 积分定理、最陡下降法, 以及后面章节会出现的震荡积分的驻相法是几类常见的研究积分式渐近展开的方法, 具有广泛应用。

## 2.5 波动方程的傅立叶方法

在用傅立叶变换法求解欧氏空间中的热方程时, 我们实际上是将微分算子  $(-\Delta)$  视作与事件无关的常数从而得到解的傅立叶变换的表达式。那么类似方法是否可以推广到波动方程上呢? 如果能, 那么用傅立叶变换求得的解是否与之前求得的基尔霍夫公式(2.2.10)和泊松公式(2.2.13)契合? 相较热方程而言, 波方程需要在技术细节上作出更细致的处理。现在我们考虑如下初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

为了方便使用傅立叶变换, 我们不妨假设  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

### 2.5.1 方程的求解

现在我们对波方程中的  $\mathbf{x}$  变量作傅立叶变换, 由于  $-\widehat{\Delta u}(t, \xi) = |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi)$ , 我们就得到一个关于  $t$  变量的二阶齐次线性常微分方程:

$$\partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) + c^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi), \quad \partial_t \hat{u}(0, \xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

它对应的特征多项式为  $\lambda^2 + c^2 |\xi|^2 = 0$ , 两根为  $\lambda_{\pm} = \pm ic|\xi|$ . 因此, 把方程初值代入后可解得

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(ct|\xi|)\hat{\varphi}(\xi) + \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}\hat{\psi}(\xi). \quad (2.5.2)$$

接下来需要计算傅立叶逆变换, 这一步在一般维数的情况下较为复杂, 本讲义中我们只讨论  $d = 3$  的情况。它最关键的一步是如下引理的结论

**引理 2.5.1.** 设  $\mathbb{S}^2$  是  $\mathbb{R}^3$  中的单位球面, 则

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi \cdot z} dS_z = \frac{\sin |\xi|}{|\xi|}.$$

如何理解这个引理? 事实上它给出了单位球面上的曲面测度 (记作  $d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ ) 的傅立叶变换<sup>5</sup>

$$\widehat{d\sigma_{\mathbb{S}^2}}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^{-3} (4\pi) \frac{\sin |\xi|}{|\xi|}.$$

现在我们先假设这个引理成立, 并据此计算  $\frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}\hat{\psi}(\xi)$  的傅立叶逆变换。将  $\xi$  换成  $ct\xi$ , 我们得到

$$\frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}\hat{\psi}(\xi) = \frac{\sin(ct|\xi|)}{ct|\xi|}(t\hat{\psi}(\xi)) = (t\hat{\psi}(\xi)) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(ct\xi) \cdot z} dS_z = (t\hat{\psi}(\xi)) (\sqrt{2\pi})^3 \widehat{d\sigma_{\mathbb{S}^2}}(ct\xi).$$

接下来再用傅立叶变换的伸缩性质 (命题C.1.3(3)) 可得

$$\widehat{d\sigma_{\mathbb{S}^2}}(ct\xi) = \frac{1}{(ct)^2} \widehat{d\sigma_{\partial B((0), ct)}}(\xi),$$

---

<sup>5</sup> 严格来说, 设  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mu$  是  $\mathbb{R}^d$  上的测度, 我们可以对测度  $\mu$  定义傅立叶变换

$$\hat{\mu}(\xi) := (\sqrt{2\pi})^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x),$$

类似也可定义卷积  $(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) d\mu(y)$ .

于是有

$$\frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \hat{\psi}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^3 (t\hat{\psi}(\xi)) \frac{1}{(ct)^2} \widehat{d\sigma_{\partial B((0),ct)}}(\xi).$$

再由傅立叶变换的卷积性质 (命题C.1.3 (3)), 我们得到

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \hat{\psi}(\xi) \right)^\vee(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi(ct)^2} (t\psi) * (d\sigma_{\partial B(\mathbf{0},ct)})(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{\partial B(\mathbf{0},ct)} t\psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y = \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{\partial B(\mathbf{x},ct)} t\psi(\mathbf{y}) dS_y \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x},ct)} t\psi(\mathbf{y}) dS_y, \end{aligned}$$

而这项恰好是基尔霍夫公式(2.2.10)中由  $\psi$  贡献的部分。

类似地, 我们也可以计算  $\cos(ct|\xi|)\hat{\phi}(\xi)$  的傅立叶逆变换。事实上, 这只需注意到  $\cos(ct|\xi|)$  恰好等于  $\partial_t \left( \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \right)$ , 从而立马得到基尔霍夫公式(2.2.10)中由  $\phi$  贡献的部分

$$(\cos(ct|\xi|)\hat{\phi}(\xi))^\vee = \partial_t \left( \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \hat{\phi}(\xi) \right)^\vee = \partial_t \left( \int_{\partial B(\mathbf{x},ct)} t\phi(\mathbf{y}) dS_y \right).$$

剩下要做的事情就是证明引理2.5.1了。如果我们直接计算曲面测度的傅立叶变换, 那么  $e^{-i\xi \cdot z}$  这一项的处理会很麻烦, 原因在于  $\xi$  的每个分量都有可能非零。为了克服这个困难, 我们可以将向量  $\xi$  旋转到  $(0, 0, r)$ ,  $r = |\xi|$ , 这样就可以把问题归结为径向函数的傅立叶变换。而径向函数的傅立叶变换仍然是径向函数 (习题C.1.3)。结合这两件事, 便可算出我们想要的结果。

**引理2.5.1的证明.** 设  $\mathcal{T}$  是  $\mathbb{R}^3$  中的任何一个旋转变换 (对应的矩阵), 由于正交方阵必然是规范方阵 ( $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ ), 于是我们有

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi \cdot z} dS_z \xrightarrow{z' = \mathcal{T}^{-1}z} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i\xi \cdot (\mathcal{T}z')} dS_{z'} \xrightarrow{\mathcal{T} = \mathcal{T}^*} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(\mathcal{T}\xi) \cdot z'} dS_{z'},$$

这说明我们可以把向量  $\xi$  旋转到与  $z_3$  轴平行的向量  $(0, 0, r)$ ,  $r = |\xi|$ . 现在就只需证明  $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(0,0,r) \cdot z} dS_z$ . 为此, 我们在单位球面  $\mathbb{S}^2$  上引进球坐标  $z_1 = \sin\theta \cos\phi$ ,  $z_2 = \sin\theta \sin\phi$ ,  $z_3 = \cos\theta$ , 其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . 数学分析教材中已经算过 Jacobian 为  $dS_z = \sin\theta d\theta d\phi$ . 于是要算的积分就变成

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i(0,0,r) \cdot z} dS_z = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ir \cos\theta} \sin\theta d\theta d\phi \xrightarrow{s = \cos\theta} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-irs} ds = \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{2ir} = \frac{\sin r}{r}.$$

□

## 2.5.2 能量均分原理

利用傅立叶变换方法，我们同样可以证明能量  $E(t) := K(t) + P(t)$  是守恒量，其中

$$K(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}, \quad P(t) = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

进一步地，我们可以证明当时间  $t \rightarrow +\infty$  时，动能  $K(t)$  和势能  $P(t)$  是渐近均分的，即  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = E(0)/2$ . 回忆我们在习题2.1.4中，对初值具有紧支集的一维波方程也证明了类似的结论，当时用的方法是结合达朗贝尔公式这个解的显式表达式作直接计算。但现在我们考虑的初值是 Schwartz 函数，其未必具有紧支集，而且维数变高之后解的表达式也更加复杂，采取和一维情况相同的方法大概率是不可取的。因此，我们希望找到一个不依赖于波方程解的显式表达式的方法，对高维波动方程证明“能量渐近均分原理”。

现在我们结合  $\hat{u}(t, \xi)$  的表达式以及傅立叶变换的性质（命题C.1.3(1) 和定理C.1.8(Plancherel 恒等式)) 可以算得

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t \hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (-c|\xi| \sin(ct|\xi|) \hat{\phi}(\xi) + \cos(ct|\xi|) \hat{\psi}(\xi))^2 d\xi$$

以及

$$P(t) = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 \left( \cos(ct|\xi|) \hat{\phi}(\xi) + \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \hat{\psi}(\xi) \right)^2 d\xi.$$

现在我们任取  $K(t)$  和  $P(t)$  中的一项计算即可。例如动能  $K(t)$  可以写成

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} c^2 |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 \frac{1 - \cos(2ct|\xi|)}{2} + |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{1 + \cos(2ct|\xi|)}{2} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} c|\xi| (\hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} + \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)}) \sin(2ct|\xi|) d\xi \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} c^2 |\xi|^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 + |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} (c^2 |\xi| \hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} - |\hat{\psi}(\xi)|^2) \cos(2ct|\xi|) d\xi - \frac{c}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi| (\hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} + \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)}) \sin(2ct|\xi|) d\xi. \end{aligned}$$

至此，我们结合命题C.1.3(1) 和定理C.1.8就发现最后一个等号右边的第一行恰好等于  $E(0)/2$ . 而上式的第二行会在  $t \rightarrow \infty$  时收敛到零，这可以由 Riemann-Lebesgue 引理证得。事实上，我们发现最后一行里面的项都具有  $\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \cos(2ct|\xi|) d\xi$  或  $\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \sin(2ct|\xi|) d\xi$  的形式，其中  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

我们可以用极坐标对其化简，即令  $\xi = r\mathbf{z}$ , 其中  $r = |\xi|, \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}$ , 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \cos(2ct|\xi|) d\xi = \int_0^\infty r^{d-1} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} \right) \cos(2ctr) dr.$$

因为  $r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}}$  和  $\cos(2ctr)$  都是径向函数，所以我们结合一维情况的 Riemann-Lebesgue 引理 (命题C.1.3(4)), 即

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(xt) dx = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(xt) dx = 0.$$

这就证明了  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = E(0)/2$ . 而  $K(t) + P(t) \equiv E(0)$  是守恒量，所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  存在且等于  $E(0)/2$ .

**注记 2.5.1.** 能量  $E(t)$  是波动方程最简单的一个守恒量。事实上，我们利用诺特定理等变分法中的工具，可以得到更加复杂的守恒量或恒等式（往往是通过寻找一个特殊的乘子求得），而它们的来源则是考虑方程在不同变换下的不变性（例如伸缩变换、Kelvin 变换等等）。这些结论在研究非线性波动方程的长时间行为时起到了关键作用。具体可以参见 Evans [3] 第 8、12 章相关章节。

## 习题 2.5

**习题 2.5.1.** 考虑  $\mathbb{R}^d$  中的 Klein-Gordon 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), u_t(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

其中  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

- (1) 定义能量  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (u_t)^2 + |\nabla u|^2 + m^2 u^2 d\mathbf{x}$ . 证明:  $E(t)$  是守恒量。
- (2) 用  $\hat{\varphi}$  和  $\hat{\psi}$  写出解的傅立叶变换  $\hat{u}(\xi)$  的表达式。
- (3) 证明:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + m^2 u^2 d\mathbf{x} = E(0)$ , 进而该方程也有能量渐近均分原理

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + m^2 u^2 d\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (u_t)^2 d\mathbf{x}.$$

提示：思考如何正确地使用 Riemann-Lebesgue 引理。

习题 2.5.2. 考虑  $\mathbb{R}^d$  中的波动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (2.5.3)$$

其中初值  $\psi, \varphi$  是紧支光滑函数，其支集落在球  $B(\mathbf{0}, R)$  内。记能量  $E(t) \equiv E$ , 其中  $E > 0$  是常数，并定义位力 (Virial potential)

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 (|\partial_t u(t, \mathbf{x})|^2 + |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2) d\mathbf{x}.$$

(1) 证明：对任意  $t > 0$  有  $|V'(t)| \leq 2E(R + t)$ .

(2) 用  $E$  表示  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V''(t)$  的取值。

提示：(1) 利用有限传播速度，(2) 计算  $V''(t)$  的表达式。

## 问题 2.5

问题 2.5.1. 考虑描述深水区域中一维内波的 Benjamin-Ono 方程

$$\partial_t u + \mathcal{H}(\partial_x^2 u) = u \partial_x u, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

其中未知函数  $u = u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是实值的，且对任意  $t > 0$  有  $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ， $\mathcal{H}$  是 Hilbert 变换，其定义为：对  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，有  $\widehat{\mathcal{H}(f)}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$ .

今假设已知实值函数的 Hilbert 变换仍然是实值函数。定义  $E(t) = \int_{\mathbb{R}} (u(t, x))^2 dx$ ，证明： $E(t)$  是守恒量。

## 2.6 \* 震荡积分简介

薛定谔方程和热方程衰减速率的不同主要是因为色散和扩散的机制不同。但是，薛定谔方程和波动方程都属于色散方程，从它们解的表达式可以看出，二者解的衰减速率分别为  $O(t^{-\frac{d}{2}})$  和  $O(t^{-\frac{(d-1)}{2}})$ 。那么如何进一步解释二者衰减速率的不同呢？本节我们将介绍震荡积分 (oscillatory integral) 这个在调和分析和渐近分析中都非常重要的概念来给出上述问题的解释。事实上，全空间中的齐次线性波动方程和薛定谔方程的解都可以写作震荡积分的形式，其相函数均具有非退化的一阶临界点，进而可以计算其衰减速率。进一步地，二者的解都可以视作曲面测度的傅立叶变换：波动方程对应锥面，薛定谔方程对应抛物面，而曲面测度的傅立叶变换的衰减速率恰好取决于该

曲面有多少个方向的主曲率非零，每多一个主曲率非零的方向，该类震荡积分的衰减速率就增加  $O(t^{-\frac{1}{2}})$ . 而锥面沿着直母线方向是平坦的，因此相比抛物面来说，恰好少了一个主曲率非零的方向，因此波动方程解的衰减速率比薛定谔方程要慢  $O(t^{-\frac{1}{2}})$ . 本节我们将证明这一事实。

我们记  $u, v$  波方程和薛定谔方程的解，其中薛定谔方程的初值为  $\varphi$ , 波方程中我们假设  $\psi = 0$ ,  $c = 1$ . 则我们可以直接算出方程解的傅立叶变换

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cos(t|\xi|), \quad \hat{v}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi),$$

作傅立叶逆变换（我们忽略那些带有  $2\pi$  的系数）

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{\pm} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x \cdot \xi \pm t|\xi|)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \\ v(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x \cdot \xi - t|\xi|^2)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

可见，二者都可以写成如下含参震荡积分的形式

$$I(\lambda; t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi(\xi; t, x)} \psi(\xi) d\xi,$$

这里我们称  $\Phi$  为相函数 (phase function), 称  $\psi$  为振幅 (amplitude). 一般来说我们假设  $\psi$  是具有紧支集且充分光滑的函数。人们关注的问题是如何刻画该类型震荡积分在  $\lambda \rightarrow \infty$  时的渐近行为。

## 2.6.1 震荡积分的衰减估计、固相法

本节我们考虑最简单的一类震荡积分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi(x)} \psi(x) dx, \tag{2.6.1}$$

其中  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  是给定的函数，并不妨假设  $\mathbf{0} \in \text{Spt } \psi$ .

**非驻相法 (non-stationary phase):** 衰减速率快于任何多项式衰减

当相函数  $\Phi$  没有临界点时，即存在常数  $c > 0$ , 使得对任意  $x \in \text{Spt } \psi$  都成立  $|\nabla \Phi(x)| \geq c > 0$ . 此时我们证明如下结论

**命题 2.6.1 (非驻相法).** 设  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  是给定的函数，且存在常数  $c > 0$ , 使得对任

意  $\mathbf{x} \in \text{Spt } \psi$  都成立  $|\nabla \Phi(\mathbf{x})| \geq c > 0$ . 则对任意  $N \in \mathbb{N}^*$ , 都存在常数  $c_N > 0$ , 使得

$$\forall \lambda > 0, \quad |I(\lambda)| \leq c_N \lambda^{-N}.$$

证明. 从结论往回看, 不难认为最关键的步骤就是: 如何“无限次地”构造出衰减因子  $\lambda^{-1}$ . 而这则基于一个非常简单的观察, 首先以维数  $d = 1$  的情况为例, 我们知道

$$\frac{d}{dx}(e^{i\lambda\Phi(x)}) = i\lambda\Phi'(x)e^{i\lambda\Phi(x)}.$$

所以如果令算子  $L = \frac{1}{i\lambda\Phi'} \frac{d}{dx}$ , 则容易得到  $L(e^{i\lambda\Phi}) = e^{i\lambda\Phi}$ . 分部积分可得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi} \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\lambda\Phi'} (e^{i\lambda\Phi})' \psi(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda\Phi} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Phi'(x)} \psi(x) \right) \, dx.$$

而由于  $|\Phi'(x)| \geq c$ , 所以我们可以将  $\frac{1}{\Phi'(x)} \psi(x)$  看成新的振幅函数, 再重复如上过程, 得到  $O(\lambda^{-N})$  的衰减速率。

高维的情况也是类似的, 我们只需要将算子  $L$  改写为  $L := \frac{1}{i\lambda} (\mathbf{a} \cdot \nabla)$ , 其中  $\mathbf{a} = \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|^2}$ . 则我们依旧有  $L(e^{i\lambda\Phi}) = e^{i\lambda\Phi}$ . 于是分部积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi} \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} L(e^{i\lambda\Phi}) \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi} L^*(\psi) \, d\mathbf{x},$$

其中  $L^*(\psi) = -\frac{1}{i\lambda} \nabla \cdot (\mathbf{a} \psi)$  是算子  $L$  在  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上的伴随算子, 该具体形式同样是通过分部积分算出。同样地, 由于  $|\nabla \Phi(\mathbf{x})| \geq c > 0$ , 我们可以重复如上过程, 得到  $O(\lambda^{-N})$  的衰减速率。  $\square$

**注记 2.6.1.** 进一步地, 我们可以考虑震荡积分作为算子作用在函数上, 即形如

$$I(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\Phi(\mathbf{x}, \xi)} a(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

当  $u$  是光滑函数时, 我们可以类似证得  $|I(\xi)|$  有任意  $O(\lambda^{-N})$  的衰减速率。但实际上在  $u$  不光滑时, 我们仍然可以证得, 只要当  $\xi$  在某点  $\xi_0$  附近时  $\Phi$  的导数不落在  $u$  的“波前集 (wave front set)”(可理解为“奇异”的部分), 那么沿着  $\xi_0$  附近的方向仍然有任意  $O(\lambda^{-N})$  的衰减速率。具体可以参考于品教授的数学分析讲义 [19, 第 83 节, 引理 550]. 这里建议读者在阅读 [19] 的对应章节时思考和体会: 函数的“光滑性”和“不光滑性”是如何利用傅立叶变换这一工具来刻画的, 这是微局部分析最基本的思想之一。

驻相法 (stationary phase): 相函数临界点附近只有  $O(\lambda^{-\frac{d}{2}})$  的衰减速率

若将波动方程和薛定谔方程解写成震荡积分的形式，则相函数都具有临界点，并不满足  $|\nabla \Phi(\mathbf{x})| \geq c > 0$  这么强的条件。若该临界点是非退化的，则震荡积分的主要贡献部分出现中该临界点附近，远离临界点的地方仍然和非驻相法一样有很快的衰减。

**命题 2.6.2** (驻相法, Van der Corput 引理). 假设相函数满足  $\nabla \Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , 且  $\nabla \Phi$  在  $\text{Spt } \psi$  上的其它地方都非零，并假设  $\Phi$  在  $\mathbf{0}$  处的 Hessian 矩阵非退化，即  $\det \nabla^2 \Phi(\mathbf{0}) \neq 0$ . 则对任意  $\lambda \geq 1$ , 成立如下估计

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda \Phi(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq C \lambda^{-\frac{d}{2}}.$$

有一点不严格的证明. 据条件知, 如果我们对  $\Phi$  在原点附近作 Taylor 展开, 则可以得到  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 \eta(\mathbf{x})$ , 其中  $\eta \in C^\infty$ ,  $\mathbf{x}^2$  代表由形如  $x_j x_k$  的项构成的多项式。我们知道, 关于变量  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  的任一二次型都可以通过线性变换化简为形如  $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \dots - x_d^2$  的标准型, 而  $e^{i\lambda Q(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})}$  是变量分离的形式, 即可以写成  $d$  个  $e^{\pm i\lambda x_j^2 \eta(\mathbf{x})}$  的乘积, 所以我们只需要对  $d = 1$  的情况证明即可。

我们在上面提到的“将二次型化为标准型”这件事情是可以做到的, 其结论为如下的 Morse 引理, 证明略去。

**引理 2.6.3** (Morse 引理). 设相函数  $\Phi(\mathbf{y})$  满足  $\Phi(\mathbf{0}) = 0$ , 且原点是它的非退化临界点。则在  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  附近存在一个光滑的变量替换  $\mathbf{y} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}$ , 使得在新坐标下成立

$$\Phi(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1^2 + \dots + \tilde{y}_m^2 - \tilde{y}_{m+1}^2 - \dots - \tilde{y}_d^2)$$

接下来我们考虑  $d = 1$  的情况, 即震荡积分  $\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda \Phi} \psi(x) dx$  的衰减估计。由于  $\Phi$  有非退化临界点  $x = 0$ , 所以我们希望把临界点“隔离出来”, 在远离临界点的地方继续使用非驻相估计。为此, 我们引进光滑的截断函数  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 它在  $\{|x| < 1\}$  里面取值恒为 1, 在  $\{|x| > 2\}$  取值恒为零, 这样的话, 震荡积分就可以拆分成如下两部分

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda \Phi} \psi(x) \rho(x/\delta) dx + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda \Phi} \psi(x) (1 - \rho(x/\delta)) dx =: A + B$$

其中  $\delta > 0$  是一个待定的常数。对 A 部分, 我们并没有太多技巧可以用, 由于  $\rho(x/\delta)$  支于  $(-2\delta, 2\delta)$ , 所以有

$$|A| \leq \max |\psi| \int_{-2\delta}^{2\delta} dy \leq C' \delta.$$

B 部分则是远离临界点的震荡积分，据命题2.6.1，我们得到

$$|B| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi} (L^*)^N (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta))) \, dx \right| \leq \int_{|x|>\delta} |(L^*)^N (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta)))| \, dx,$$

其中  $L^*(f) := -\frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Phi'} f \right)$ .

今假设  $\text{Spt } \psi \subset [-M, M]$ . 又由 Taylor 展开和 Hessian 方阵的非退化性 (此处指  $\Phi''(x)$  的取值非零) 知，存在  $C'' > 0$ , 使得  $|\Phi'(x)| \geq C''|x|$  在  $\delta < |x| < M$  中恒成立. 现在考察被积函数  $(L^*)^N (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta)))$ . 先看  $N = 1$  的情况，我们直接计算可得

$$\begin{aligned} L^* (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta))) &= -\frac{1}{i\lambda} \frac{d}{dx} \left( \frac{\psi(x)(1 - \rho(x/\delta))}{\Phi'(x)} \right) \\ &= \frac{i}{\lambda} \left[ \frac{-\psi'(x)\rho(x/\delta)}{\Phi'(x)} + \delta^{-1} \frac{\psi(x)\rho'(x/\delta)}{\Phi'(x)} - \frac{\psi(x)(1 - \rho(x/\delta))}{(\Phi'(x))^2} \right] \\ \Rightarrow |L^* (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta)))| &\leq C\lambda^{-1} [(1 + \delta^{-1})|x|^{-1} + |x|^{-2}]. \end{aligned}$$

重复  $N$  次，可以类似证得

$$|(L^*)^N (\psi(x)(1 - \rho(x/\delta)))| \leq C\lambda^{-N} [(1 + \delta^{-1})|x|^{-N} + |x|^{-2N}].$$

所以，当  $0 < \delta \ll 1$  时，便有

$$|B| \leq C\lambda^{-N} \int_{\delta}^M |x|^{-N} \delta^{-N} + |x|^{-2N} \, dx \lesssim \lambda^{-N} \delta^{1-2N}.$$

将 A, B 相加，我们得到  $|I(\lambda)| \lesssim \delta + \lambda^{-N} \delta^{1-2N}$ . 因此，选取  $\delta = 1/\sqrt{\lambda}$ , 我们就得到最优的衰减速率。  $\square$

## 2.6.2 曲面测度的傅立叶变换

本节我们可以从几何的角度，回答为什么波动方程和薛定谔方程解的衰减速率不同。由傅立叶变换，我们解得

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\pm} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\mathbf{x} \cdot \xi \pm t|\xi|)} \hat{\phi}(\xi) \, d\xi = \sum_{\pm} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{i(\mathbf{x} \cdot \xi \pm t\tau)} \hat{\phi}(\xi) \, d\sigma_{\Gamma}, \\ v(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\mathbf{x} \cdot \xi - t|\xi|^2)} \hat{\phi}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{i(\mathbf{x} \cdot \xi + t\tau)} \hat{\phi}(\xi) \, d\sigma_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

这里  $\Gamma := \{(\xi, \tau) : |\xi| = |\tau|, \xi \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$  (锥面),  $\mathcal{P} := \{(\xi, \tau) : \tau = -|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^d\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$  (抛物面) 是频率空间  $\mathbb{R}^{d+1}$  中的两个超曲面.  $d\sigma_\Gamma$  和  $d\sigma_{\mathcal{P}}$  分别是  $\Gamma$  和  $\mathcal{P}$  上定义的曲面测度. 换言之, 齐次线性波动方程和薛定谔方程的解可以视作支撑曲面上测度的傅立叶(逆)变换

$$u(t, \mathbf{x}) = (\varphi * \widetilde{d\sigma}_\Gamma)(\mathbf{x}), \quad v(t, \mathbf{x}) = (\varphi * \widetilde{d\sigma}_{\mathcal{P}})(\mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1+d}.$$

本节我们考虑一般的参数曲面

$$M := \{(\mathbf{x}', x_{d+1}) \in \bar{B} : x_{d+1} = h(\mathbf{x}')\},$$

其中  $\bar{B}$  是以原点为球心的一个闭球,  $h$  是光滑函数, 满足  $h(\mathbf{0}) = 0$  和  $\nabla_{\mathbf{x}'} h(\mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'=0} = \mathbf{0}$ . 据 Taylor 展开, 我们有

$$h(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, j \leq d} a_{kj} x_k x_j + O(|\mathbf{x}'|^3).$$

现在我们旋转坐标轴 (类似于 Morse 引理), 可将  $h$  写成

$$h(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \lambda_j x_j^2 + O(|\mathbf{x}'|^3)$$

的形式, 其中  $\lambda_j$  被称作  $M$ (在原点处) 的主曲率 (principal curvature), 乘积  $\lambda_1 \cdots \lambda_d$  称作  $M$  的高斯曲率 (Gauss curvature).

现在我们考虑  $M$  上诱导出的 Lebesgue 测度  $d\sigma$ , 其满足: 对任意  $M$  上具有紧支集的连续函数  $f$ , 成立  $\int_M f d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\text{dist}(\mathbf{x}, M) < \varepsilon} F d\mathbf{x}$ , 这里  $F$  是  $f$  在  $M$  的一个邻域中的连续延拓. 那么根据参数曲面积分的计算公式, 我们知道

$$\int_M f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}')) \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbf{x}'} h|^2} d\mathbf{x}'. \quad (2.6.2)$$

**定义 2.6.1.** 设  $\psi \in C_c^\infty(M)$ , 我们称形如  $d\mu := \psi d\sigma$  ( $\psi \in C_c^\infty(M)$ ) 的测度  $d\mu$  是支撑曲面  $M$  上的一个曲面测度 (surface-carried measure)<sup>6</sup>.

本节主要结论如下

**命题 2.6.4.** 设  $d\mu$  是  $M \subset \mathbb{R}^{d+1}$  上的一个支撑曲面测度, 且  $M$  的 Gauss 曲率在  $d\mu$  的支集内处处非零. 则

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| = O(|\xi|^{-d/2}), \quad \text{as } |\xi| \rightarrow \infty.$$

---

<sup>6</sup>这个词似乎没有标准的中文翻译, 此处采用的是苗长兴教授所著《调和分析及其在偏微分方程中的应用》一书中的翻译。

证明. 若令  $\Psi(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}', h(\mathbf{x}'))\sqrt{1 + |\nabla_{\mathbf{x}'} h|^2} \in C_c^\infty$ , 则我们可以将  $\widehat{d\mu}$  写作

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\mathbf{x}' \cdot \xi' + h(\mathbf{x}')\xi_{d+1})} \Psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (2.6.3)$$

现在我们把  $\xi$  变量所处的空间分成两部分: 主要部分为  $\{|\xi_{d+1}| \geq c|\xi'|\}$ , 次要部分为  $\{|\xi_{d+1}| < c|\xi'|\}$ , 其中后者我们需要假设  $c$  充分小。

在主要部分  $\{|\xi_{d+1}| \geq c|\xi'|\}$  中, 我们不妨假设  $\xi_{d+1}$  恒为正数, 这样的话傅立叶变换中的相位函数就可以写作

$$-i(\mathbf{x}' \cdot \xi' + h(\mathbf{x}')\xi_{d+1}) = i\lambda\Phi(\mathbf{x}'), \quad \lambda = \xi_{d+1}, \quad \Phi(\mathbf{x}') = -h(\mathbf{x}') - \frac{\mathbf{x}' \cdot \xi'}{\xi_{d+1}}.$$

而  $\Phi$  的 Hessian 非退化 (这是 Gauss 曲率非零和  $\nabla_{\mathbf{x}'}^2 \Phi = -\nabla_{\mathbf{x}'}^2 h$  共同保证的), 据 Van der Corput 引理 (命题2.6.2) 可得

$$\text{当 } |\xi_{d+1}| \geq c|\xi'| \text{ 时, } |\widehat{d\mu}(\xi)| = O(\lambda^{-d/2}) = O(\xi_{d+1}^{-d/2}) = O(|\xi|^{-d/2}).$$

而对次要部分  $\{|\xi_{d+1}| < c|\xi'|\}$ , 我们记  $\lambda = |\xi'|$ ,  $\Phi(\mathbf{x}') = -h(\mathbf{x}')\frac{\xi_{d+1}}{|\xi'|} - \frac{\mathbf{x}' \cdot \xi'}{|\xi'|}$ . 由于  $\left|\nabla_{\mathbf{x}'}\left(\frac{\mathbf{x}' \cdot \xi'}{|\xi'|}\right)\right| = 1$ , 而当  $c$  充分小时有  $|\nabla_{\mathbf{x}'} h|\frac{|\xi_{d+1}|}{|\xi'|} \leq 1/2$ , 所以我们得到  $|\nabla_{\mathbf{x}'} \Phi| \geq 1/2$ . 据命题2.6.1知,

$$\text{当 } |\xi_{d+1}| < c|\xi'| \text{ 时, } |\widehat{d\mu}(\xi)| = O(|\xi|^{-N}), \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

取  $N > d/2$  即证毕。  $\square$

利用 Morse 引理并模仿上述证明, 我们可以得到如下推论。

**推论 2.6.5.** 设  $M$  是  $\mathbb{R}^{d+1}$  中的超曲面, 且在支撑曲面测度  $d\sigma_M$  的支集内的每一点处都有  $m$  个非零的主曲率, 则有

$$|\widehat{\psi d\sigma_M}(\xi)| \leq C|\xi|^{-m/2} \text{ as } |\xi| \rightarrow \infty.$$

现在回忆:薛定谔方程对应的超曲面  $M$  为  $\mathbb{R}^{d+1}$  中的抛物面, 而波动方程对应的超曲面为  $\mathbb{R}^{d+1}$  中的锥面。锥面沿着直母线方向是平坦的, 所以它只有  $(d-1)$  个非零的主曲率, 而抛物面则有  $m$  个非零的主曲率。而上述推论表明每有一个非零主曲率, 支撑曲面测度的傅立叶变换的衰减速率就增加  $1/2$  阶, 这正好解释了波动方程和薛定谔方程解的衰减速率不同这一现象。

**注记 2.6.2.** 其实上面这段话并不是特别严谨, 因为我们在证明支撑曲面测度傅立叶变换的衰减性时是假设了图像函数  $h$  具有紧支集的,但是在实际处理色散方程的解时,  $\phi$  未必具有紧支集(因为一个非零的 Lebesgue 可积函数和它的傅立叶变换不可能同时具有紧支集)。为此, 我们还需要在频率

空间作类似于 Littlewood-Paley 分解的单位分解来证明最终的结论。具体的细节可以参见 Sung-Jin Oh 在 2018 年左右写的一个 Notes <https://math.berkeley.edu/~sjoh/pdfs/dispersion.pdf>.

## 习题 2.6

**习题 2.6.1.** 设  $\Phi \in C^2([a, b])$ . 定义  $I_1(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\Phi(x)} dx$ .

- (1) 若  $|\Phi'(x)| \geq 1$  对任意  $x \in [a, b]$  都成立, 证明: 对任意  $\lambda > 0$ , 成立不等式  $|I_1(\lambda)| \leq 3/\lambda$ .
- (2) 若  $|\Phi''(x)| \geq 1$  对任意  $x \in [a, b]$  都成立, 证明: 对任意  $\lambda > 0$ , 成立不等式  $|I_1(\lambda)| \leq 8\lambda^{-1/2}$ .
- (3) 在 (2) 的假设下, 证明:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\Phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq 8\lambda^{-1/2} \left( \int_a^b |\psi'(x)| dx + |\psi(b)| \right).$$

**习题 2.6.2.** Airy 函数的定义为

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\frac{y^3}{3} + xy)} dy.$$

证明如下结论。

- (1) 如上广义积分是收敛的, 即对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 极限  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{i(\frac{y^3}{3} + xy)} dy$  存在。
- (2) 存在常数  $C > 0$  使得  $|Ai(x)| \leq C$ ,  $|Ai(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1/4}$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  成立。
- (3) 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 对任意正整数  $k$  都有  $|x|^k |Ai(x)| \rightarrow 0$ .
- (4) 用 Airy 函数表示 Airy 方程的解

$$\partial_t u = \partial_x^3 u \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

则该解满足  $\sup_x |u(t, x)| \leq C|t|^{-1/3} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ .

- (5) 设  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 证明:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi_1 t + \xi_2 t^3)} \psi(t) dt \right| = O(|\xi|^{-1/3}), \quad \text{as } |\xi| \rightarrow \infty.$$

## 问题 2.6

**问题 2.6.1.** 证明: 单位球面  $\mathbb{S}^{d-1}$  上的曲面测度满足

$$\widehat{\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}}(\xi) = e^{i|\xi|} \omega_+ (|\xi|) + e^{-i|\xi|} \omega_- (|\xi|) \quad \forall |\xi| \geq 1,$$

其中  $\omega_{\pm}$  是满足如下条件的光滑函数

$$|\partial_r^k \omega_{\pm}(r)| \leq C_k r^{-\frac{d-1}{2}-k}, \quad \forall r \geq 1, k \in \mathbb{N}.$$

**问题 2.6.2.** 记  $\mathbb{R}^d$  中的单位球为  $B$ ,  $\mathbf{1}_B$  是  $B$  的示性函数。证明：存在常数  $C > 0$  使得

$$|\widehat{\mathbf{1}_B}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{1+d}{2}}.$$

该结论可以用于估计球内的格点（即每个坐标分量都为整数的点）数量，见问题C.2.3。

问题2.6.3-2.6.4请参见 Evans [3, 第 4.5.3 节].

**问题 2.6.3.** 设  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbf{A}$  是非奇异的实对称方阵, 证明：当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时有如下渐近表达式

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{2\varepsilon} \mathbf{y} \cdot \mathbf{A} \mathbf{y}} a(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \mathbf{A}}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} (a(\mathbf{0}) + O(\varepsilon)).$$

其中  $\operatorname{sgn} \mathbf{A}$  是方阵  $\mathbf{A}$  的正特征值个数减去负特征值个数。

**问题 2.6.4** (波动光学到几何光学的高频极限). 设  $0 < \varepsilon \ll 1$  是小参数, 考虑波动方程的初值问题

$$\partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad (u^\varepsilon, \partial_t u^\varepsilon)|_{t=0} = (g^\varepsilon, 0). \quad (2.6.4)$$

并假设  $g^\varepsilon(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) \exp(ip(\mathbf{x})/\varepsilon)$ , 其中  $a, p \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 且在  $\operatorname{Spt} a$  中恒有  $\nabla p \neq \mathbf{0}$ .

(1) 证明：方程的解  $u^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(I_+^\varepsilon(t, \mathbf{x}) + I_-^\varepsilon(t, \mathbf{x}))$ , 其中

$$I_\pm^\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} a(\mathbf{z}) e^{i\varepsilon^{-1} \phi_\pm(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} d\mathbf{y} d\mathbf{z}, \quad \phi_\pm(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := (\mathbf{x} - \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} \pm t|\mathbf{y}| + p(\mathbf{z}).$$

(2) 当  $t_0 > 0$  很小时, 计算当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $u^\varepsilon(t_0, \mathbf{x}_0)$  的极限。

提示：需要用到问题2.6.3的结论和 Morse 引理。

# 第三章 一维边值问题的分离变量法

前一章我们讨论了如何求解欧氏空间中的波动方程和热方程，其中的一个特点是  $\mathbb{R}^d$  并不带边界，因此我们可以直接使用特征线法、傅立叶变换法等方法求解方程。而现实中的很多模型都是在带边区域内考虑偏微分方程的求解，例如一个物体的温度变化、一根有限长的弦的振动、一个导体内部的电荷分布等等。本章讨论的就是特殊区域内波动方程、热方程、Laplace 方程的求解方法，其被称作分离变量法。囿于本讲义并不要求读者掌握泛函分析和特殊函数计算的知识，大部分的讨论都仅局限于一维的情况。本章的最后将介绍分离变量法的数学原理，即对称椭圆算子的主特征值变分原理，当然本讲义对其进行简单处理，避开了需要泛函分析的部分。

## 3.1 波方程的分离变量法

本章第一节讨论如何求解一维区间上的波动方程，其物理模型对应有限长度的弦振动。为了计算的简便，我们假设区间为  $\Omega = (0, \pi)$ ，并考虑如下带有 Dirichlet 边值条件的一维波方程。

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi, \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varphi(x), \psi(x)) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = g_1(t), u(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

利用能量法，我们可以证明平方可积解的唯一性。因此如果我们能“提前预测”解的正确形式，那么求出来的这个解就必定是(3.1.1)的唯一解。

### 3.1.1 Dirichlet 边值条件

我们首先考虑  $f = 0, g_1, g_2 = 0$ , 即带有 Dirichlet 边界条件的齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi, \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varphi(x), \psi(x)) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

我们现在“预测”解具有变量分离的形式, 即  $u(t, x) = T(t)X(x)$ , 把它代入方程(3.1.2)可得

$$T''(t)X(x) - c^2 T(t)X''(x) = 0 \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

其中  $\frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$  这一项只依赖  $t$ , 而  $\frac{X''(x)}{X(x)}$  这一项只依赖  $x$ . 二者相等就说明它们只能等于常数, 记作  $-\lambda$ . 于是就得到  $T, X$  各自满足一个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad (3.1.3)$$

和

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0. \quad (3.1.4)$$

我们先求解(3.1.3)算出  $X$ . 首先可以证明  $\lambda > 0$ . 事实上, 我们可以在方程(3.1.3)两边乘以  $X(x)$  然后在  $\Omega$  上积分得到

$$\int_0^\pi X''X + \lambda X^2 dx \stackrel{I.B.P.}{=} \int_0^\pi (-X')^2 + \lambda X^2 dx = 0,$$

如果  $\lambda \leq 0$ , 就会迫使  $X = 0$ , 导致  $u = 0$ , 而零解并不满足初值条件。

当  $\lambda > 0$  时, 直接求解常微分方程可得

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

代入边值条件  $X(0) = X(\pi) = 0$  得到

$$C_1 = 0, C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \stackrel{C_2 \neq 0}{\implies} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

对每个  $n$ , 我们可以得到算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  的特征值和特征函数为

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin(nx).$$

现在把特征值代入  $T$  的方程, 就能对每个  $n$  求解出  $T_n(t)$ :

$$T_n(t) = A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt).$$

因此, 我们形式上得到了方程的解为

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx), \quad (3.1.5)$$

其中系数  $A_n, B_n$  应该由初值  $\varphi, \psi$  来决定。事实上, 由傅立叶级数理论可以算出 (即在上式中令  $t = 0$ , 以及在  $\partial_t u$  的形式傅立叶级数中令  $t = 0$ )

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx. \quad (3.1.6)$$

现在我们严格叙述按照如上计算所得的结论。

**定理 3.1.1.** 假设初值  $\varphi \in C^3([0, \pi]), \psi \in C^2([0, \pi])$  满足相容性条件

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0,$$

则方程(3.1.2)有唯一解  $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$ , 其表达式为

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx), \quad (3.1.7)$$

其中系数  $A_n, B_n$  等于

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx. \quad (3.1.8)$$

**证明.** 我们在此之前讨论已经把解的表达式算出来了, 所以这里就不再重复计算过程。这段证明主要是讲如何确定系数  $A_n, B_n$ , 为什么需要初值满足相容性条件 (保证解的区域“角点”处的连续性和可微性), 以及为什么假设初值具有  $C^3 \times C^2$  的正则性。

**第一步：**对初值作傅立叶级数展开。在之前计算中，我们已经知道  $A_n, B_n$  需满足如下等式

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx), \quad \psi(x) = u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot (cn) \sin(nx).$$

由于我们只给定了  $[0, \pi]$  上的初值，所以首先我们要，把初值延拓为  $\mathbb{R}$  上的  $2\pi$ -周期函数。由于我们要求解具有  $C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$  的连续可微性，所以边值条件表明  $u(0, 0) = u_t(0, 0) = u(0, \pi) = u_t(0, \pi) = 0$ ，进而  $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(\pi) = \psi(\pi) = 0$ . 据此，我们可以对  $\varphi, \psi$  作奇延拓<sup>1</sup> 得到  $[-\pi, \pi]$  上的奇函数，然后把这个周期复制到其它的  $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ ，使得  $\varphi, \psi$  变成  $2\pi$ -周期函数。

由于  $\varphi, \psi$  是奇函数，所以  $\varphi(x) \sin(nx), \psi(x) \sin(nx)$  是偶函数，这样就有

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(nx), \quad \varphi_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin(nx), \quad \psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx) dx.\end{aligned}$$

与之前形式求解时所得的  $\varphi, \psi$  的傅立叶展开比较，便有  $A_n = \varphi_n, cnB_n = \psi_n$ .

**第二步：寻找初值的相容性条件。**接下来我们需要明确初值需要满足哪些相容性条件，使得解在闭集  $[0, +\infty) \times [0, \pi]$  内具有  $C^2$  可微性。上一步的证明里面，我们已经写出了使得  $u$  和  $u_t$  在角点处 ( $t = 0, x = 0$  和  $t = 0, x = \pi$ ) 具有连续性的条件。对于二阶可微性，如果要求  $u_{tt}$  在角点处是连续的，那么把  $x = 0, \pi$  代入  $c^2 u_{xx}(0, x) = u_{tt}(0, x) = 0$  就得到  $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ .

**第三步：初值的正则性。**为了保证解在角点  $\{t = 0\} \times \{x = 0\}$  处的二阶连续可微性，我们要求  $u, \partial_{t,x} u$  和  $\partial_{t,x}^2 u$  的傅立叶级数是一致收敛的。不失一般性，我们考察  $u_{xx}$  的傅立叶展开，其等于  $-\sum_n n^2 (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx)$ . 为了保证一致收敛性，我们要求初值  $\varphi$  和  $\psi$  分别具有  $C^3$  和  $C^2$  的正则性。事实上，如果记  $a_n, b_n$  为  $\varphi'''(x)$  和  $\psi''(x)$  的傅立叶系数，那么可以算得  $B_n = -\frac{b_n}{(cn)^3}$  和  $A_n = -\frac{a_n}{n^3}$ ，从而

$$\left| \sum_n n^2 (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx) \right|^2 \leq C \left( \sum_n \frac{|a_n| + |b_n|}{n} \right)^2 \leq C (\sum_n a_n^2 + b_n^2) (\sum_n \frac{1}{n^2}).$$

利用 Parseval 恒等式，我们知道右边是收敛的。类似地，我们可以验证  $u$  和它的一阶导数对应傅立叶级数的一致收敛性。  $\square$

**注记 3.1.1.** 事实上，我们对初值正则性的假设可以减弱到  $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$ ，这与方程中实际出现

<sup>1</sup>这里奇延拓是最佳的延拓方式，因为这样延拓出来的函数的傅立叶级数展开里面只有正弦函数的项，这与我们之前形式求解所得的表达式是吻合的。

的导数阶数相同，但是证明方法有所不同。在这个假设下，我们需要对初值作奇延拓

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = \Phi(x + 2\pi), \quad \Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = \Psi(x + 2\pi), \quad x \in \mathbb{R}; \\ \Phi(x) &= \varphi(x), \quad \Psi(x) = \psi(x) \quad x \in [0, \pi].\end{aligned}$$

据此我们可以用达朗贝尔公式求解  $\mathbb{R}$  上初值为  $(\Phi, \Psi)$  的波动方程，记它的解为  $U$ ，而我们要求的解  $u$  则可以视作  $U$  在  $[0, \pi]$  区间上的限制。我们将其严格验证留作习题。

**注记 3.1.2.** 若将区间  $[0, \pi]$  改为一般的  $[0, L]$ ，那么对应的特征值为  $\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ ，特征函数为  $X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ ，对应的傅立叶系数为

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{cL\pi} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

**例 3.1.1.** 现在我们来算一个例子

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.9)$$

**解.** 根据之前的讨论，我们知道方程的解具有如下形式

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)) \sin(nx),$$

接下来利用初值  $\varphi(x) = \sin x$  和  $\psi(x) = x(\pi - x)$  来确定系数  $A_n, B_n$ 。据定理 3.1.1，我们有

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin(nx) dx = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases},$$

以及

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) \right) dx \\
 &= -\underbrace{\frac{2}{n^2\pi} x(\pi - x) \cos(nx)}_{=0} \Big|_0^\pi + \frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos(nx) dx \\
 &= -\frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi n^4} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{8}{(2k-1)^4\pi} & n = 2k-1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

所以方程的解为

$$u(t, x) = \cos t \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^4\pi} \sin((2k-1)t) \sin((2k-1)x).$$

同时我们也可以直接验证初值满足相容性条件。  $\square$

接下来我们在一般情况下求解(3.1.1), 但事实上我们总可以把一般情况化成  $f = g_1 = g_2 = 0$  这种最简单的情况。

$f \neq 0, g_1, g_2 = 0$  的情况

当方程的右端有非零的源项  $f$  时, 一种方法是使用 Duhamel 原理求解方程, 但是我们仍需要算出  $f$  在  $\Omega$  的“额外贡献”, 而这部分现在并不能像之前那样使用达朗贝尔公式计算。

我们仍假设解具有如下形式

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx),$$

并假设  $f(t, x)$  有类似的傅立叶展开式

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(nx).$$

注意, 这里只使用正弦级数展开也是可行的, 因为  $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  构成  $L^2[0, \pi]$  的完备正交基。

把上面的  $u, f$  的表达式代入波动方程，得到系数  $T_n$  的常微分方程

$$T_n''(t) + c^2 n^2 T_n(t) = f_n(t),$$

这个方程可以使用常数变易法求解（也就是假设  $T_n(t) = C_n(t) \cos(cnt) + D_n(t) \sin(cnt)$ ，然后代回常微分方程里面解出  $C_n(t), D_n(t)$ 。）

$$T_n(t) = A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt) + \frac{1}{cn} \int_0^t f_n(\tau) \sin(cn(t - \tau)) d\tau.$$

这里的系数  $f_n(t)$  等于

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t, x) \sin(nx) dx.$$

## 一般情况

若  $g_1, g_2 \neq 0$ ，我们可以很容易地将问题化为  $g_1, g_2 = 0$  的情况。令

$$v(t, x) = u(t, x) - (1 - \frac{x}{\pi})g_1(t) - \frac{x}{\pi}g_2(t).$$

那么可以计算出  $v$  满足如下方程

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = f - (1 - \frac{x}{\pi})g_1''(t) - \frac{x}{\pi}g_2''(t),$$

其初值为

$$v(0, x) = \varphi(x) - (1 - \frac{x}{\pi})g_1(0) - \frac{x}{\pi}g_2(0), \quad v_t(0, x) = \psi(x) - (1 - \frac{x}{\pi})g_1'(0) - \frac{x}{\pi}g_2'(0),$$

边界条件为  $v(0, t) = v(\pi, t) = 0$ 。这就化为  $f \neq 0, g_1, g_2 = 0$  的情况。

类似地，我们可以得到具有 Dirichlet 边界条件的波动方程解的如下结论

**定理 3.1.2.** 假设初值  $\varphi \in C^3([0, \pi]), \psi \in C^2([0, \pi]), f \in C^1([0, \infty) \times [0, \pi])$  满足相容性条件

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= g_1(0), \quad \varphi(\pi) = g_2(0), \quad \psi(0) = g_1'(0), \quad \psi(\pi) = g_2'(0), \\ g_1''(0) - c^2 \varphi''(0) &= f(0, 0), \quad g_2''(0) - c^2 \varphi''(\pi) = f(0, \pi). \end{aligned}$$

则一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi, \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varphi(x), \psi(x)) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = g_1(t), u(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

有唯一解  $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt)) \sin(nx) \\ & + \frac{1}{cn} \int_0^t \tilde{f}_n(\tau) \sin(cn(t - \tau)) d\tau \\ & + (1 - \frac{x}{\pi})g_1(t) + \frac{x}{\pi}g_2(t) \end{aligned}$$

其中系数  $A_n, B_n, \tilde{f}_n$  由如下傅立叶系数给出

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \varphi(x) - (1 - \frac{x}{\pi})g_1(0) - \frac{x}{\pi}g_2(0) \right) \sin(nx) dx, \\ B_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^\pi \left( \psi(x) - (1 - \frac{x}{\pi})g'_1(0) - \frac{x}{\pi}g'_2(0) \right) \sin(nx) dx, \\ \tilde{f}_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( f(t, x) - (1 - \frac{x}{\pi})g''_1(t) - \frac{x}{\pi}g''_2(t) \right) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

### 3.1.2 两个例子：驻波、共振

考虑有限长度的一维弦振动

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi, \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varphi(x), \psi(x)) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = g_1(t), u(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

方程的初值表示弦上每一点初始时刻的位移 ( $\varphi$ ) 以及初始时刻的速度 (正比于  $\psi$ ). Dirichlet 边界条件给出了弦端点的具体位置 ( $g_1, g_2$ ), 非齐次项  $f(t, x)$  表示作用在弦上的外力。

分离变量法可以给出如上方程解的显式表达式。而齐次方程情况 ( $f = g_1 = g_2 = 0$ ) 表明解可以视作驻波的叠加, 非齐次方程则可以解释共振现象。

### 例子一：驻波

当  $f = g_1, g_2 = 0$  时，即弦的两端固定在平衡态，且没有外力作用在弦上。此时，分离变量法所得的解可以视作具有特定频率的驻波的叠加。事实上，从解的表达式出发

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(cn t) + B_n \sin(cn t)) \sin(nx),$$

我们发现每一项  $X_n(x)T_n(t)$  都能写成如下形式

$$u_n(t, x) := X_n(x)T_n(t) = N_n \sin(nx) \sin(cn t + \alpha_n), \quad N_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \alpha_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}.$$

对弦上任意定点  $x$ ，每个  $u_n(x)$  代表一个该点处的简谐振动，其振幅为  $a_n := N_n \sin(nx)$ ，频率  $\omega_n := cn$  称作固有频率 (natural frequency)，初始相位为  $\alpha_n$ 。特别地，如果  $\alpha_n = 0$ ，则在  $x = 0, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\pi, \pi$  处有  $a_n = 0$  成立，在  $x = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$  处有  $a_n = \pm N_n$  成立。可见，每一点处的波峰的振幅与时间无关；在波形上，波节和波腹的位置始终是不变的，给人“驻立不动”的印象。这类波动叫作驻波 (stationary wave)。比如常见的弦乐器和管乐器分别是利用了弦上的驻波和管中的驻波进行发声，更详细的解释请参阅 [8] 第二章的 4.2 节（懒得复制了）。

### 例子二：共振

当  $f \neq 0$  时，我们就说弦的振动为受迫振动 (forced vibration)，这个过程中会出现所谓的共振 (resonance) 现象。从物理上讲，共振描述了当施加的周期性外力的频率等于或接近其作用的系统的固有频率时，振幅增加的现象。例如一根两端固定的弦线如果在一个周期外力作用下作强迫振动，假如这个周期外力的频率与弦线的某一特征频率相等，那么弦线将产生共振，即弦线一些点的振幅将随着时间的增大而趋于无穷，这必然在某一时刻导致弦线的断裂。因此对于很多工程问题（例如建坝、建屋、……）来说共振现象必须设法避免。为此必须预先知道这个物体的固有频率，即去求某一个特征值问题的解。但是在有些问题中，例如在电磁振荡理论中，人们又经常利用“共振”现象来调频，所以特征值问题无论在建筑工程方面还是在无线电、电子工程方面都有着重要的应用。

接下来我们从数学上严格验证这一点，不妨设外力是周期函数  $f(t, x) = A(x) \sin(\omega t)$ ，其频率固定为  $\omega$ （这里我们还要假设  $A(0) = A(\pi) = 0$ ）。我们假设波方程的初值  $\varphi, \psi$  和边值  $g_1, g_2$  都是零，以单独考虑周期外力作用的效果。此时，方程的解为

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{cn} \sin(nx) \int_0^t f_n(\tau) \sin(cn(t - \tau)) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \sin(nx) \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau,$$

此处第二个等号是写出展开式  $A(x) = \sum_n a_n \sin(nx)$  得到的，其中  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A(x) \sin(nx) dx$ ,  $\omega_n := cn$ . 现在对被积函数作积化和差，得到

$$\sin(\omega\tau) \sin(\omega_n(t-\tau)) = \frac{1}{2} (\cos[(\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t] - \cos[(\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t]).$$

1. 如果  $\omega \neq \omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ): 直接积分可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega + \omega_n} \sin[(\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t] - \frac{1}{\omega - \omega_n} \sin[(\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t] \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\omega + \omega_n} - \frac{1}{\omega - \omega_n} \right) \sin(\omega t) + \left( \frac{1}{\omega + \omega_n} + \frac{1}{\omega - \omega_n} \right) \sin(\omega_n t) \right] \\ &= \frac{\omega \sin(\omega_n t) - \omega_n \sin(\omega t)}{\omega^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

进而

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin(\omega_n t) - \omega_n \sin(\omega t)) \sin(nx),$$

它的右端关于时间  $t$  是一致有界的。

2. 如果存在  $k \in \mathbb{N}^*$  使得  $\omega = \omega_k$ , 则被积函数

$$\sin(\omega\tau) \sin(\omega_k(t-\tau)) = \frac{1}{2} (\cos(2\omega_k\tau - \omega_k t) - \cos(\omega_k t))$$

的第二项与被积变量  $\tau$  无关，此时可以算得

$$\int_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega_k(t-\tau)) d\tau = \frac{\sin(\omega_k t) - t\omega_k \cos(\omega_k t)}{2\omega_k},$$

进而

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \neq k} \frac{a_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin(\omega_n t) - \omega_n \sin(\omega t)) \sin(nx) \\ &\quad + \frac{a_k}{2\omega_k^2} (\underbrace{\sin(\omega_k t) - t\omega_k \cos(\omega_k t)}_{\text{无界}}) \sin(kx). \end{aligned}$$

因此，如果外力的频率  $\omega$  与弦振动的某个固有频率  $\omega_n = cn$  相同，那么弦振动的振幅会随着时间

增长而趋于无穷，从而必在有限时间内发生断裂。此结果也表明波动方程不可能满足极大值原理。

### 3.1.3 Neumann 边界条件

除了 Dirichlet 型边界条件以外，我们也可以在边界设定 Neumann 边界条件如下

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi, \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varphi(x), \psi(x)) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = g_1(t), u_x(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

为了简便，我们仍然假设  $f = g_1, g_2 = 0$ ，否则可以用与前一节类似的技巧将问题化为这个最简单的情况。该边界条件下，弦的两端位置不再被给定，而边界条件  $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$  表明弦的端点是套在一根固定杆上，杆并不随着弦振动而发生运动，也就是说杆并不产生作用在弦上的外力。

我们仍然希望找到变量分离形式的解  $u(t, x) = X(x)T(t)$ 。模仿上一节求解 Dirichlet 边值问题的方法，我们得到两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0 \quad (3.1.13)$$

和

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0. \quad (3.1.14)$$

类似地，我们可以证明特征值  $\lambda \geq 0$ 。但在 Neumann 边界条件下， $\lambda_0 = 0$  也是微分算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  的特征值，并可解得对应的特征函数为  $X_0(x) = \text{常数}$ ，系数  $T_0(t)_0 = A_0 + B_0 t$ 。

当  $\lambda > 0$  时，可算得(3.1.13)具有通解

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

该方程的边界条件表明

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{\lambda}(-C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x))|_{x=0} = \sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ X'(\pi) &= \sqrt{\lambda}(-C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\pi))|_{x=\pi} \stackrel{C_2=0}{=} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = n^2. \end{aligned}$$

对任一正整数  $n$ ，我们再次得到微分算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  的特征值  $\lambda_n = n^2$  和特征函数  $X_n(x) = \cos(nx)$ 。把它带回  $T$  的方程可以解得对应的系数  $T_n(t)$

$$T_n(t) = A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt).$$

于是，我们形式上求得了(3.1.12)的解

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = (A_0 + B_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(c n t) + B_n \sin(c n t)) \cos(n x), \quad (3.1.15)$$

其中  $A_n, B_n$  由初值  $\varphi, \psi$  的傅立叶系数确定，它们的值为

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos(nx) dx, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^\pi \psi(x) \cos(nx) dx \quad (n \geq 1), \quad (3.1.16)$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) dx, \quad B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) dx. \quad (3.1.17)$$

思考. 当  $f$  或者  $g_1, g_2$  非零时，该怎样求解方程(3.1.12)？

### 习题 3.1

**习题 3.1.1.** 求解如下具有 Neumann 边界条件的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos x, \quad u_t(0, x) = 0 & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

**习题 3.1.2.** 考虑一维带阻尼的波动方程，其中常数  $d \in (0, 2)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + du_t = 0 & t > 0, 0 < x < \pi; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

求该方程具有分离形式的解  $u(t, x) = T(t)X(x)$ ，并说明  $t \rightarrow +\infty$  时这些解的行为。

**习题 3.1.3.** 考虑具有混合边值条件的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

(1) 它的通解是什么？

(2) 若给定初值  $u(0, x) = \varphi(x)$ ,  $u_t(0, x) = \psi(x)$  ( $0 \leq x \leq \pi$ )，如何计算通解里面的傅立叶系数？

习题 3.1.4. 解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \frac{2}{x}u_x = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = \cos x & 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

提示：令  $v(t, x) = xu(t, x)$ , 验证  $v$  满足  $v_{tt} - v_{xx} = 0$ .

习题 3.1.5. 设  $A, B$  是常数, 求解如下方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t, 0) = At, u_x(t, \pi) = Bt & t \geq 0. \end{cases}$$

习题 3.1.6. 考虑具有固定端点且长度有限的弦发生的受迫振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x \cos 5x \sin(\omega t) & t > 0, x \in (0, \pi) \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0 & x \in [0, \pi] \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

其中  $\omega > 0$  是常数。求解方程并讨论  $\omega$  为何值时方程的解一致有界？即  $\sup_{t>0, x\in(0,\pi)} |u(t, x)| < \infty$ .

习题 3.1.7. 按照注记3.1.1所述, 给出定理3.1.1在  $\varphi \in C^2, \psi \in C^1$  条件下的证明。

## 3.2 热方程的分离变量法

对一维有限区间上的热传导方程, 我们也可以类似地使用分离变量法对其进行求解。

### 3.2.1 Dirichlet 边界条件

今考虑区间  $\Omega = (0, \pi)$  内的热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = g_1(t), u(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中  $k > 0$  是常值。

最简单情况仍然是  $f = 0, g_1 = g_2 = 0$ . 此情况下, 我们再次假设解具有变量分离形式  $u(t, x) = T(t)X(x)$ , 进而得到如下方程

$$T'(t)X(x) - kT(t)X''(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

此时  $X(x)$  满足如下常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

这个方程和之前波方程的情况是相同的, 我们可以解得特征值为  $\lambda_n = n^2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 特征函数为  $X_n(x) = \sin(nx)$ . 代入  $T$  的方程得到  $T'_n(t) + kn^2T_n(t) = 0$ , 进而解得  $T_n(t) = C_n e^{-kn^2 t}$ . 因此, 方程的通解可以写作

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-kn^2 t} \sin(nx).$$

接下来就是利用初值来确定  $C_n$  的取值。在通解中令  $t = 0$ , 得到

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx).$$

由傅立叶级数的唯一性知,  $C_n$  必定是  $\varphi$  的傅立叶系数, 即  $C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx$ .

**注记 3.2.1.** 上面最后一步中实际上是将  $\varphi(x)$  延拓为  $(-\pi, \pi)$  的奇函数, 使得我们可以将  $\varphi$  展开成傅立叶级数。这就需要  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ . 而这件事是必定成立的, 因为我们要计算的是方程的古典解, 该解  $u(t, x)$  在  $(0, 0)$  处连续, 进而得到  $u(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} u(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t, 0) = 0$ .

若边值  $g_1, g_2 \neq 0$ , 我们仍然和之前一样引进辅助函数  $v(t, x) = u(t, x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)g_1(t) - \frac{x}{\pi}g_2(t)$  将边界条件进行齐次化, 这样的话就得到具有零边值条件的非齐次热方程

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)g'_1(t) - \frac{x}{\pi}g'_2(t) & t > 0, 0 < x < \pi \\ v(0, x) = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)g_1(0) - \frac{x}{\pi}g_2(0) & 0 \leq x \leq \pi \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

问题也就化为求解源项  $f(t, x) \neq 0, g_1, g_2 = 0$  时的非齐次方程。一般来说这个源项并不一定具有变量分离的形式, 但是我们仍然可以利用  $\{\sin nx\}_{n \geq 1}$  构成  $L^2[0, \pi]$  的完备正交基这一事实, 将  $f$

展开成正弦级数：

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(nx), \quad f_n(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t, x) \sin(nx) dx.$$

同时我们也有初值的傅立叶展开式

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin(nx), \quad \varphi_n(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) dx.$$

并假设解具有展开式  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx)$ .

将如上展开式代入热方程，得到常微分方程  $T'_n(t) + kn^2 T_n(t) = f_n(t)$ ，其中初值为  $T_n(0) = \varphi_n$ . 直接求解可得

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-kn^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-kn^2(t-\tau)} d\tau.$$

### 3.2.2 Neumann 边界条件

设常数  $k > 0$ ，我们也可以求解带 Neumann 边界条件的热方程。

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t, 0) = g_1(t), u_x(t, \pi) = g_2(t) & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

我们仍然只需考虑  $g_1 = g_2 = 0$  的情况，否则考虑引进辅助函数

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{1}{2\pi} ((\pi - x)^2 g_1(t) - x^2 g_2(t))$$

将边界条件齐次化。

当  $f(t, x) = 0$  时，唯一的不同之处就是特征函数不再是  $\{\sin nx\}$ 。我们需要求解

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

其解为  $X_n(x) = \cos(nx)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 。于是  $T_n = C_n e^{-kn^2 t}$ 。所以解为

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-kn^2 t} \cos(nx),$$

其中  $C_n$  由  $\varphi(x)$  的傅立叶级数确定。

当  $f(t, x)$  不恒为零时, 我们还是像之前一样将  $\varphi, f(t, \cdot)$  和  $u(t, \cdot)$  展开成余弦级数, 这是因为此时的特征函数系为  $\{\cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . 与 Dirichlet 边界条件不同的是, 现在  $\lambda_0 = 0$  也是特征值, 所以需要额外计算这一项。

## 习题 3.2

**习题 3.2.1.** 对热传导方程  $u_t = u_{xx}$  ( $0 < x < \pi$ ), 初值  $u(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ , 求出具有变量分离形式的解  $u(t, x) = T(t)X(x)$ .

**习题 3.2.2.** 求出方程  $tu_t = u_{xx} + 2u$  ( $t > 0, 0 < x < \pi$ ) 具有变量分离形式的解, 其边界条件为  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ . 之后证明有无穷多个这样的解都满足  $u(0, x) = 0$ .

**习题 3.2.3.** 考虑具有 Neumann 边界条件的热传导方程, 其中  $k \geq 0$  是常数

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = k(1 - u) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

求解这个方程, 并计算  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x)$ .

**习题 3.2.4.** 设  $A, B \in \mathbb{R}$  是常数, 用分离变量法求解如下方程

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t, 0) = At, u_x(t, \pi) = Bt & t \geq 0. \end{cases}$$

**习题 3.2.5.** 考虑如下热传导方程的初边值问题

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad t > 0, x \in (0, \pi); \quad u(0, x) = \varphi(x) \in C^2([0, \pi]) \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0.$$

(1) 证明: 方程的解满足估计  $\int_0^\pi u(t, x)^2 dx \leq e^{-2t} \int_0^\pi \varphi(x)^2 dx$ .

(2) 证明: 存在常数  $C > 0$  使得  $|u(t, x)| \leq Ce^{-t}$  对任意  $t > 0, x \in [0, \pi]$  成立。

提示: 无论使用能量法还是分离变量法, 可能都需要使用 Parseval 恒等式; 对 (2), 思考为什么这里假设了  $\varphi \in C^2([0, \pi])$ , 具有该光滑性的函数的傅立叶系数具有怎样的阶?

### 3.3 求解特殊区域内的调和函数

若函数  $u(\mathbf{x})$  在区域  $\Omega$  内满足  $-\Delta u = 0$ , 我们就称  $u$  是区域  $\Omega$  内的调和函数。调和函数具有广泛的物理背景, 振动的平衡态、热传导的稳态、保守场的势函数等等都可以用它来刻画。本节暂不讨论调和函数的一般性质与重要定理, 而是先显式求解一些特殊情况, 作为分离变量法的例子。

#### 3.3.1 圆盘内的调和函数求解

我们首先考虑二维圆盘、圆环以及圆盘的外区域中的调和函数的显式求解, 该情况下我们可以用极坐标  $(r, \theta)$  去重写  $\Delta$  算子。首先, 由链式法则我们知道

$$\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} \partial_\theta, \quad \partial_y = \frac{\partial r}{\partial y} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial y} \partial_\theta.$$

回忆极坐标定义为  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . 等价地有  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$ , 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-(y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

这样就得到一阶偏导数的极坐标表达式

$$\partial_x = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta, \quad \partial_y = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta.$$

接下来再算二阶导数

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= (\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta \partial_r^2 - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \partial_r \partial_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r} \partial_r, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \partial_y^2 &= (\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta \partial_r^2 + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \partial_r \partial_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \partial_\theta^2 - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \partial_r. \end{aligned}$$

两式相加得到  $\mathbb{R}^2$  上的  $\Delta$  算子的极坐标表达式

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

**例 3.3.1** (圆盘内的调和函数). 设  $\Omega = B(\mathbf{0}, a)$  是以原点为圆心,  $a$  为半径的开圆盘。考虑如下方程

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad u = h(\theta) \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (3.3.1)$$

其中  $h$  是周期为  $2\pi$  的连续函数。

**解.** 首先我们可以证明这个方程的  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  解 (如果存在) 是唯一的。事实上, 假设  $u_1, u_2$  都是方程的解, 则  $v := u_1 - u_2$  满足  $\Delta v = 0$  和  $v|_{\partial\Omega} = 0$ . 于是用极大值原理或者能量法即可得到唯一性。这里我们稍微写下能量法的证明, 即  $v$  的方程两边同时乘以  $v$ , 之后分部积分得到

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial N} \, dS_x = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \Rightarrow v = \text{常数}.$$

而  $v$  的边值是零, 所以根据解的连续性,  $v$  自己只能是零。接下来我们用分离变量法求解方程, 假设  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , 那么  $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$  表明

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \Rightarrow -\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda.$$

所以现在就只要解两个常微分方程

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

对函数  $\Theta$ , 它应当以  $2\pi$  为周期, 所以有  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ . 同前面的章节我们可以算出  $\lambda = n^2$ ,  $\Theta(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$ , 这里  $n$  可取任意非负整数。接下来我们对每个  $n$  求解对应的  $R_n$ :

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0.$$

当  $n = 0$  时, 我们可以解得  $R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r$ . 当  $n \geq 1$  时, 由于自变量  $r$  非负, 我们可以作变量替换  $t = \ln r$  并令  $Z_n(t) = R_n(r)$ . 从而

$$Z'_n(t) = R'_n(r) \frac{dr}{dt} = rR'_n(r), \quad Z''_n(t) = R''_n(r)(\frac{dr}{dt})^2 + R'_n(r) \frac{d^2r}{dt^2} = r^2R''_n(r) + rR'_n(r).$$

进而得到  $Z''_n(t) - n^2Z_n(t) = 0$ , 解得  $Z_n(t) = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt}$ , 也即  $R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$ .

至此，我们利用分离变量法求得圆盘内的调和函数具有如下形式

$$u = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n \geq 1} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

**注记 3.3.1** (周期边界条件下的特征函数系). 如上计算过程实际上已经用到了如下事实:  $-\frac{d^2}{dx^2}$  在周期边界条件下的特征函数系构成  $L^2(\mathbb{T})$  的一组正交基, 其证明可以参见常微分方程教材 [10, 第 7.4 节], 否则我们不能直接下结论说分离变量所得的解就是该边值问题的所有解。

**有界性假设.** 我们注意到上述通解在原点  $r = 0$  处可能有奇性, 因为  $\ln r$  和  $r^{-n}$  都会发散。如果我们在  $r = 0$  加上“边界条件”:  $u$  取值有限。那么通解中的  $\ln r$  和  $r^{-n}$  部分都要删除, 得到

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

这里系数  $A_n, B_n$  由傅立叶系数确定: 在圆盘边界  $\{r = a\}$  上代入  $u(a, \theta) = h(\theta)$  并作傅立叶展开得

$$h(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

比较系数就得到

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

□

### 3.3.2 泊松公式和非切向极限

上述解的公式可以进一步化简。事实上, 我们把傅立叶系数的表达式代入通解得到

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos(n(\theta - \varphi)) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\theta - \varphi)) \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{a} \right)^n + \left( \frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{a} \right)^n \right) d\varphi, \end{aligned}$$

这里我们在最后一步用到了  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ .

由于圆盘内部有  $r < a$ , 我们知道上式出现的级数是绝对收敛的, 继续计算得

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{a} \right)^n + \left( \frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{a} \right)^n = 1 + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{a - re^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{a - re^{-i(\theta-\varphi)}} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2},$$

从而解的表达式为如下积分式

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad r < a \text{ (不是 } r \leq a \text{ !!).} \quad (3.3.2)$$

该式被称作圆盘上的泊松公式。

### 非切向极限

函数  $P_r(\theta) := \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}$  ( $r < a$ ) 被称作圆盘  $B(\mathbf{0}, a)$  的泊松核 (Poisson kernel). 泊松公式(3.3.2)给出的解则可以视作泊松核与边值的卷积, 进一步我们可以算得  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$ , 并证明非切向极限 (non-tangential limit) (注意: 泊松公式在边界并不成立! )

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in B(0, a)} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial B(0, a).$$

事实上, 泊松核是一族逼近恒等 (approximation to identity): 当参数  $r \rightarrow 0$  时, 有  $(P_r(\cdot) * h)(\theta) \rightarrow h(\theta)$  这样的收敛关系 (收敛方式取决于  $h$  本身是什么函数); 若将  $h \mapsto P_r * h$  视作一个算子, 则它在  $r \rightarrow 0$  的极限就是恒同算子。

证明非切向极限之前, 我们先介绍圆盘上的泊松核的基本性质。

**命题 3.3.1.** 对  $0 < r < a$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , 令  $P_r(\theta) := \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}$ . 则有

- (1) 对任意  $r < a$ , 有  $P_r(\theta) > 0$ .
- (2)  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$ .
- (3)  $P_r(\theta)$  是  $\{r < a\}$  内的调和函数.
- (4) 非切向极限  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in B(0, a)} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial B(0, a)$ .

**(4) 的证明.** (1) 是可以直接看出来的, (2) 的验证则可以利用泊松核的级数表示, (3) 的证明可以用卷积求导的性质完成, 此处一并略去, 留给读者自行完成。接下来证明 (4): 今固定一个  $\theta_0 \neq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 并考虑一个非常接近圆盘半径  $a$  的半径  $r$ . 据 (2) 我们可以计算差值如下

$$u(r, \theta_0) - h(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta_0 - \varphi)(h(\varphi) - h(\theta_0)) d\varphi.$$

现在我们需要一个简单的观察：当  $r - a$  充分小的时候， $P_r(\theta)$  的图像是几乎“集中于” $\theta = 0$  附近。事实上，我们可以从泊松核的表达式看出当  $\theta$  不靠近  $2\pi$  的整数倍时，有

$$|P_r(\theta)| = \frac{a^2 - r^2}{(a - r)^2 + 2ar(1 - \cos \theta)} = \underbrace{\frac{a^2 - r^2}{(a - r)^2 + 4ar \sin^2(\theta/2)}}_{\approx 0} \approx 1.$$

换言之，当  $r - a$  充分小，给定任意  $\varepsilon > 0$ ，我们都可以找到  $\delta > 0$  使得  $\forall \theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ,  $|P_r(\theta)| < \varepsilon$ .

接下来我们把差值  $|u(r, \theta_0) - h(\theta_0)|$  拆成两部分

$$|u(r, \theta_0) - h(\theta_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} P_r(\theta_0 - \varphi) \cdot \varepsilon d\varphi + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|\varphi - \theta_0| > \delta} |h(\varphi) - h(\theta_0)| d\varphi,$$

其中第二个  $\varepsilon$  是由  $P_r(\theta)$  的小性给出，第一个  $\varepsilon$  是由  $h$  的一致连续性给出。因为  $h$  是有界的，所以我们知道存在常数  $C > 0$ ，使得上述积分  $C\varepsilon$ .  $\square$

**注记 3.3.2.** 在边界  $\partial\Omega$  给定函数  $h(\theta)$ ，如上方程的解就是  $h$  在区域  $\Omega$  内的调和延拓 (harmonic extension)。当  $\Omega$  是圆盘、圆盘外区域、半空间等特殊区域时，我们可以显式计算调和延拓的表达式。对一般区域  $\Omega$ ，显式求解调和延拓问题是不可能的。然而，我们仍然可以定义泊松核，并利用格林函数方法对方程进行分析，我们在本讲义第五章对此作进一步讨论。

**例 3.3.2 (圆盘外区域的调和延拓问题).** 利用分离变量法，我们同样可以求解圆盘外区域的调和延拓问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{r > a\} \\ u = h(\theta) & \text{on } \{r = a\} \\ u \text{ 有界, as } r \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

**解.** 回忆我们之前用极坐标表示求得了通解具有如下形式

$$u(r, \theta) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

由于现在我们假设解在无穷远处仍然保持有界，所以应该去掉通解里面包含  $r^n$  和  $\ln r$  的项，于是通解变成

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)).$$

代入边界条件  $u(a, \theta) = h(\theta)$ , 我们得到

$$h(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)),$$

因此  $A_n, B_n$  可以由  $h$  的傅立叶系数确定

$$A_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad B_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

类似地, 我们将圆盘内的泊松公式(3.3.2)里面的  $r, a$  替换为  $1/r, 1/a$  得到

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{r^2 - a^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad r > a.$$

□

### 3.3.3 径向调和函数的求解

本节我们求解欧氏空间中的径向调和函数 (即在极坐标下不依赖角变量  $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ ). 当空间维数为 2 时, 我们从之前的算过的 Laplace 算子极坐标表示中去掉所有含有  $\partial_\theta$  的项得到

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \Rightarrow \partial_r(r u_r) = 0 \Rightarrow u = C_1 \ln r + C_2.$$

对一般欧氏空间  $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$ , 我们也可以计算  $\Delta u = 0$  的径向解。设径向函数  $u(\mathbf{x}) = v(r)$ . 由  $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$  可得

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x_i) = \frac{x_i}{r} \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

再由链式法则得到

$$\partial_{x_i} u = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad \partial_{x_i}^2 u = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

从而我们得到径向函数求 Laplace 算子以后的表达式

$$\Delta u = v''(r) + \frac{d-1}{r} v'(r).$$

于是求解调和方程  $\Delta u = 0$  就约化为求解常微分方程

$$v'' + \frac{d-1}{r}v' = 0,$$

化简得  $(\ln |v'|)' = \frac{1-d}{r}$ , 进而存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $v'(r) = \frac{a}{r^{d-1}}$ . 所以对  $r > 0$  我们解得

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c & d = 2 \\ \frac{b}{r^{d-2}} + c & d \geq 3 \end{cases}.$$

**定义 3.3.1** (Laplace 方程的基本解 (fundamental solution)). 函数

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}| & d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} & d \geq 3 \end{cases} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

被称作 Laplace 方程的基本解. 这里  $\alpha(d) := \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$  是  $\mathbb{R}^d$  中单位球的体积. 函数  $\Phi$  将在求解一般区域内的位势方程  $-\Delta u = f$  时起到至关重要的作用。

不难证明, 对  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 存在常数  $C > 0$  使得

$$|\nabla \Phi(\mathbf{x})| \leq C|\mathbf{x}|^{1-d}, \quad |\nabla^2 \Phi(\mathbf{x})| \leq C|\mathbf{x}|^{-d}.$$

### 习题 3.3

**习题 3.3.1.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是单位圆盘。求解方程

$$\Delta u = 2 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 2x_1x_2.$$

**习题 3.3.2.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是圆环  $\{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ . 解方程

$$\Delta u = 2 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 2|\mathbf{x}| - 1.$$

**习题 3.3.3.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是单位圆盘。求解方程

$$\Delta u = x_1^2 - x_2 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = x_1.$$

**习题 3.3.4.** 证明方程  $\Delta u = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  的解是旋转不变的, 即对  $d \times d$  正交方阵  $\mathbf{O}$ , 令  $v(\mathbf{x}) :=$

$u(\mathbf{Ox})$ , 则必有  $\Delta v = 0$ .

习题 3.3.5 (Kelvin 变换). 对  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  ( $d \geq 2$ ), 我们定义它关于单位球面的反演点为  $\mathbf{x}^* := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ . 再定义函数  $u(\mathbf{x})$  的 Kelvin 变换为  $(\mathcal{K}u)(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}^*)|\mathbf{x}^*|^{d-2} = u\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}\right)|\mathbf{x}|^{2-d}$ . 按照如下步骤证明: 如果  $u$  是单位球内的调和函数, 则  $\mathcal{K}u$  是单位球外部的调和函数。

- (1) 对任意  $1 \leq i, j \leq d$ , 证明:  $\frac{\partial x_j^*}{\partial x_i} = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{2x_i x_j}{|\mathbf{x}|^4}$ . 这里的  $\delta_{ij} = 1$  if  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  if  $i \neq j$ . 据此证明  $\nabla \mathbf{x}^* (\nabla \mathbf{x}^*)^\top = |\mathbf{x}|^{-4} I_d$ , 其中  $I_d$  是  $d \times d$  单位方阵。
- (2) 用 (1) 证明:  $\Delta(\mathbf{x}^*) = 2(2-d)\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^4}$ .
- (3) 证明:  $\Delta(\mathcal{K}u(\mathbf{x})) = \Delta(u\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}\right)|\mathbf{x}|^{2-d}) = 0$ .

## 3.4 分离变量法的数学原理: 特征函数系的完备正交性

在用分离变量法求解波方程、热方程、Laplace 方程时, 我们往往能将问题约化为常微分方程  $X''(x) + \lambda X(x) = 0$  的边值问题求解。这里的  $\lambda$  可被视作二阶微分算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  的特征值, 特征值  $\lambda_n$  对应的特征函数  $X_n(x)$  则可以视作一组“基底”, 而最终解的表达式基本都是写成  $X_n(x)$  的函数项级数的形式。本节将对这一“观察”作出证明。我们将首先考虑一维闭区间的情况, 该情况可以对特征值问题显式求解; 之后我们将该结论推广到  $\mathbb{R}^d$  中的有界区域, 并将  $-\frac{d^2}{dx^2}$  换成  $(-\Delta)$  算子。需注意“区域”一词已经暗含了连通性, 这在证明中是必要的, 同时区域的有界性也是必要的。

### 3.4.1 一维特征值问题: Sturm-Liouville 理论

对特征值问题  $X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < \pi$ , 如果我们设定 Dirichlet 边界条件或者 Neumann 边界条件, 那么特征值和特征函数都可以显式计算出来。但是如果边界条件为一般的 Robin 边界条件, 即形如  $aX' + bX|_{\partial\Omega} = 0$  时, 特征值与特征函数未必能显式求解, 但仍然可以证明如下结论。

定理 3.4.1. 设  $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$  是常数, 且  $a_i + b_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ). 则常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 < x < \pi \\ -a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0 \\ a_2 X'(\pi) + b_2 X(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

的解满足如下性质:

1. 所有特征值  $\lambda$  皆为非负实数。特别地, 若  $b_1 + b_2 > 0$ , 则全体特征值皆为正数。
2. 不同特征值对应的特征函数是正交的, 即对任意特征值  $\lambda_k \neq \lambda_l$  及其特征函数  $X_k(x), X_l(x)$ ,

必有

$$\int_0^\pi X_k(x)X_l(x) dx = 0.$$

3. 全体特征值构成一个单调递增到  $+\infty$  的序列

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

4.  $\{X_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  构成  $L^2((0, \pi))$  的一组基, 即任意给定  $f \in L^2((0, \pi))$ , 存在唯一的序列  $\{C_n\} \subset \mathbb{R}$  使得  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$ , 且  $C_n$  的值为

$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}.$$

证明. 我们只证明 (1)-(3). (4) 的证明依赖泛函分析中的结论, 在此跳过。首先我们证明特征值  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 这只需在方程两边乘以复共轭  $\bar{X}$  并在  $(0, \pi)$  上积分, 得到

$$\int_0^\pi X''(x)\bar{X}(x) dx + \lambda \int_0^\pi X(x)\bar{X}(x) dx = 0.$$

分部积分可得

$$\int_0^\pi X''(x)\bar{X}(x) dx = - \int_0^\pi |X'(x)|^2 dx + X'(x)\bar{X}(x) \Big|_0^\pi.$$

在区间端点上, 我们有  $X'(0) = \frac{b_1}{a_1}X(0)$  以及  $X'(\pi) = -\frac{b_2}{a_2}X(\pi)$ . 注意, 这里假设了  $a_1, a_2 \neq 0$ , 否则在端点上就变成 Dirichlet 边界条件, 而该情况之前已经证过了。于是积分产生的边界项就变成

$$-\frac{b_2}{a_2}|X(\pi)|^2 - \frac{b_1}{a_1}|X(0)|^2 \in \mathbb{R}.$$

把它代入上面的积分等式, 得到

$$\lambda = \left( \int_0^\pi |X(x)|^2 dx \right)^{-1} \left( \int_0^\pi |X'(x)|^2 dx + \frac{b_2}{a_2}|X(\pi)|^2 + \frac{b_1}{a_1}|X(0)|^2 \right) \in \mathbb{R},$$

同时由于上式右边每一项都非负, 所以可以看出  $\lambda \geq 0$ , 这就证明了全体特征值皆为非负整数。

接下来我们讨论  $\lambda = 0$  的情况, 此时可以解得对应的  $X''(x) = A+Bx$ . 若  $b_1 = b_2 = 0$  (Neumann 边界条件), 我们得到  $X(x) = \text{const}$  是一个非零解, 进而  $\lambda = 0$  确实是特征值。但是当  $b_1 + b_2 > 0$

时 (不妨  $b_1 > 0, b_2 = 0$ , 则  $a_2 > 0$ ), 却有

$$0 = -a_1 B + b_1 A, \quad 0 = a_2 B \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ 不是特征值.}$$

这样就证明了 (1).

接下来证明 (2) (正交性), 在  $X_k, X_l$  的方程两边各自乘以  $X_l, X_k$  再积分 (这里不需要再去复共轭了, 因为已经证明特征值都是实数), 得到

$$\begin{aligned} \lambda_k \int_0^\pi X_k(x) X_l(x) dx &= - \int_0^\pi X_l(x) X_k''(x) dx, \\ \lambda_l \int_0^\pi X_l(x) X_k(x) dx &= - \int_0^\pi X_k(x) X_l''(x) dx. \end{aligned}$$

第一式减去第二式, 得到

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_l) \int_0^\pi X_k(x) X_l(x) dx &= - \int_0^\pi X_l(x) X_k''(x) - X_k(x) X_l''(x) dx \\ &= - \int_0^\pi (X_l(x) X_k'(x) - X_k(x) X_l'(x))' dx. \end{aligned}$$

令  $J(x) = \begin{vmatrix} -X_k'(x) & X_k(x) \\ -X_l'(x) & X_l(x) \end{vmatrix}$ , 然后利用方程  $-X_j'' = \lambda_j X_j$  可得

$$(\lambda_k - \lambda_l) \int_0^\pi X_k(x) X_l(x) dx = \int_0^\pi J'(x) dx = J(\pi) - J(0).$$

现在代入  $x = 0$  处的边界条件:

$$-a_1 X_k'(0) + b_1 X_k(0) = 0, \quad -a_1 X_l'(0) + b_1 X_l(0) = 0.$$

由于  $a_1 + b_1 > 0$ , 这两个方程构成的关于  $(a_1, b_1)$  的齐次线性方程组必有非零解, 这就表明系数矩阵的行列式  $J(0)$  必须为零. 类似地, 我们还可以得到  $J(\pi) = 0$ , 因此我们有

$$(\lambda_k - \lambda_l) \int_0^\pi X_k(x) X_l(x) dx = 0.$$

由于特征值  $\lambda_k, \lambda_l$  不相等, 所以特征函数  $X_k, X_l$  的  $L^2$ -内积为零, 即为所求.

(3) 的证明很直接但是也很无聊, 就是直接硬算 ODE 的解. 讲义中不再写出详细计算过程,

谁爱算谁去算。首先我们知道  $X$  满足的常微分方程通解为

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \quad \mu := \sqrt{\lambda}.$$

代入边界条件有

$$b_1 C_1 + (-a_1 \mu) C_2 = 0, \quad (b_2 \cos \mu \pi - a_2 \mu \sin \mu \pi) C_1 + (a_2 \mu \cos \mu \pi + b_2 \sin \mu \pi) C_2 = 0.$$

同样地，如上两个方程可以视作关于  $(C_1, C_2)$  的齐次线性方程组，它有非零解，所以系数矩阵行列式为零，从而我们得到

$$(a_1 a_2 \mu^2 - b_1 b_2) \sin \mu \pi = (a_1 b_2 + b_1 a_2) \mu \cos \mu \pi.$$

1.  $a_1 = a_2 = 0, b_1, b_2 > 0$  (Dirichlet):  $\lambda_n = n^2, X_n(x) = \sin(nx).$
2.  $b_1 = b_2 = 0, a_1, a_2 > 0$  (Neumann):  $\lambda_n = n^2, X_n(x) = \cos(nx).$
3.  $a_1 = b_2 = 0$  (混合型边界条件):  $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2, X_n(x) = \sin((n - \frac{1}{2})x).$
4.  $a_2 = b_1 = 0$  (混合型边界条件):  $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2, X_n(x) = \cos((n - \frac{1}{2})x).$
5. 只有  $a_1 = 0$ :  $\tan \mu \pi = -\frac{a_2}{b_2} \mu$ .  $\lambda_n \in ((n - \frac{1}{2})^2, (n + \frac{1}{2})^2), X_n(x) = \sin \mu_n x.$
6. 只有  $a_2 = 0$ :  $\tan \mu \pi = -\frac{a_1}{b_1} \mu$ .  $\lambda_n \in ((n - \frac{1}{2})^2, (n + \frac{1}{2})^2), X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{a_1}{b_1} \mu_n \cos \mu_n x.$
7. 只有  $b_1 = 0$ :  $\cot \mu \pi = \frac{a_2}{b_2} \mu$ .  $\lambda_n \in ((n - 1)^2, n^2), X_n(x) = \cos \mu_n x.$
8. 只有  $b_2 = 0$ :  $\cot \mu \pi = \frac{a_1}{b_1} \mu$ .  $\lambda_n \in ((n - 1)^2, n^2), X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{a_1}{b_1} \mu_n \cos \mu_n x.$
9. 全体  $a_i, b_i > 0$ :  $\cot \mu \pi = \frac{a_1 a_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \mu - \frac{b_1 b_2}{(a_1 b_2 + a_2 b_1) \mu}$ . 该式右边关于  $\mu$  单调递增，且在  $\mu = 0_+$  附近趋于  $-\infty$ ，在  $\mu \rightarrow +\infty$  时趋近于  $y = \frac{a_1 a_2}{a_1 b_2 + a_2 b_1} \mu$ . 对任意  $n$ , 特征值  $\mu_n \in (n - 1, n)$ , 特征函数  $X_n(x) = \sin \mu_n x + \frac{a_1}{b_1} \mu_n \cos \mu_n x.$

□

上面讨论的一维特征值问题是 Sturm-Liouville 问题的一种特殊情况，S-L 问题考虑的是如下形式的二阶线性常微分方程

$$-(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = \lambda X(x) \quad x \in [a, b],$$

其边界条件为

$$KX(a) + LX'(a) = 0, \quad MX(b) + NX'(b) = 0,$$

其中  $K^2 + L^2 > 0, M^2 + N^2 > 0$ , 以及  $p, q, r \in C[a, b], p(x), r(x) > 0$ , 且  $p(x)$  一阶连续可微。对此

类常微分方程，我们总能够将其转化为形如

$$Y''(x) + (\lambda + q(x))Y(x) = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

的常微分方程，其边界条件为

$$Y(0)\cos\theta - Y'(0)\sin\theta = 0, \quad Y(\pi)\cos\phi - Y'(\pi)\sin\phi = 0,$$

这就几乎与我们上面讨论的常微分方程相同。S-L 边值问题的性质也与定理3.4.1类似，除了其特征值不一定为严格正（除非我们有类似于定理中  $a_i + b_i > 0$  的假设）。

进一步地，特征值的非负性和特征函数的正交性，其本质来源于微分算子是  $L^2$  上的自伴 (self-adjoint) 算子。

**定义 3.4.1.** 我们称微分算子  $\mathcal{L}$  (给定边界条件) 是  $L^2(\Omega)$  上的自伴算子，是指对任意两个函数  $f, g \in L^2(\Omega)$  (满足给定的边界条件) 都有  $(\mathcal{L}f, g)_{L^2(\Omega)} = (f, \mathcal{L}g)_{L^2(\Omega)}$ .

**注记 3.4.1.** 定义3.4.1里面提到的  $L^2(\Omega)$ -内积是对复值函数定义的，即  $(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)} dx$ . 这是因为我们现在还不知道自伴算子的特征值是否一定为实值。

**命题 3.4.2.** 给定区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , 考虑微分算子  $\mathcal{L}$  的特征值问题  $\mathcal{L}X = \lambda X$  (边界条件给定). 若在该边界条件下  $\mathcal{L}$  是  $L^2(\Omega)$  上的自伴算子，则有

- (1)  $\mathcal{L}$  的全体特征值皆为实值；
- (2) 不同特征值对应的特征函数在  $L^2(\Omega)$  内是正交的；
- (3) 若  $\mathcal{L}$  是非负定的，即对任意满足给定边界条件的函数  $f \in L^2(\Omega)$ , 都有  $(\mathcal{L}f, f) \geq 0$  成立，则  $\mathcal{L}$  的全体特征值皆为非负实数。

**证明.** 这个定理的证明与之前研究  $-X''(x) = \lambda X(x)$  类似  $(\mathcal{L}f, f) = (f, \mathcal{L}f)$ . 设  $f$  是微分算子  $\mathcal{L}$  关于特征值  $\lambda$  的特征函数，则由自伴性得知

$$\int_{\Omega} \lambda f \bar{f} dx = \int_{\Omega} f \bar{\lambda f} dx \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{\Omega} |f|^2 dx = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

这就证明了全体特征值皆为实数。正交性也可以直接证明。设  $f_i (i = 1, 2)$  分别是  $f$  关于特征值  $\lambda_i$  的特征函数，据自伴性有

$$(\mathcal{L}f_1, f_2) = (f_1, \mathcal{L}f_2) \Rightarrow (\lambda_1 f_1, f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} f_1 \bar{f}_2 dx = 0.$$

若  $\mathcal{L}$  是非负定的，则由 (1) 的证明得知  $\int_{\Omega} \lambda f \bar{f} dx = \lambda \int_{\Omega} |f|^2 dx \geq 0$ , 进而  $\lambda \geq 0$ . □

### 3.4.2 $(-\Delta)$ 的主特征值变分原理：分离变量法的根基

本节我们将定理3.4.1的结论推广到一般的有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  上，对应地，微分算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  也要换成  $(-\Delta)$ 。为了简便，本节只讨论带 Dirichlet 零边值条件的情况，带 Neumann 边界条件和 Robin 边界条件的情况可由读者自行思考。本节要证明的核心结论被称作  $(-\Delta)$  算子的主特征值变分原理，它实际上是我们使用分离变量法求解偏微分方程边值问题的根基：将解按照  $(-\Delta)$  算子的特征函数系展开，后者构成  $L^2(\Omega)$  的标准正交基，而它的一维区间  $(0, \pi)$  上的特殊情况就是傅立叶级数展开。在后续的课程学习中，所谓 Galerkin 逼近法正是分离变量法的进一步推广，它在偏微分方程的理论求解和数值计算中都起到了重要作用。

今考虑如下特征值问题

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (3.4.2)$$

显见，具有 Dirichlet 边界条件时， $-\Delta$  是  $L^2$  上的自伴算子

$$(-\Delta u, v) = - \int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, dx \stackrel{I.B.P.}{=} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \Delta \bar{v} \, dx = (u, -\Delta v).$$

特别地，令  $v = u$  并假设  $u$  为  $(-\Delta)$  关于  $\lambda$  的特征函数，则  $(-\Delta)$  的全体特征值皆为非负实数。

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq 0.$$

事实上，我们还能证明全体特征值皆为严格正数。若不然，假设  $\lambda = 0$  也是特征值，则存在对应的不恒为零的特征函数  $u$ 。但如上计算表明  $\nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{常数}$ 。但  $u$  的边值是零，所以这个常数只能是零，矛盾。

接下来我们叙述定理3.4.1(3)-(4) 的推广结论，其证明依赖线性泛函分析的理论，此处略去。

**定理 3.4.3.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域，且边界光滑，则

- (1)  $-\Delta$  (带 Dirichlet 零边值条件) 的特征值皆为正实数，且构成一个单调递增到  $+\infty$  的序列（这蕴含了特征值有可数多个）

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

- (2)  $L^2(\Omega)$  存在一组标准正交基  $\{w_k\}$ ，其中  $w_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) 是  $\lambda_k$  对应的特征函数，满足方程

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k \quad \text{in } \Omega, \quad w_k = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

**注记 3.4.2.** 本定理的结论中, 除去  $\lambda_1 > 0$  之外, 剩下部分对形如下式的线性对称椭圆偏微分算子都成立

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_j} (a^{ij}(\mathbf{x}) \partial_{x_i} u) + c(\mathbf{x})u,$$

其中  $a^{ij}, c \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\{a^{ij}\}$  是实对称正定方阵。若  $c(\mathbf{x}) \geq 0$  在  $\overline{\Omega}$  恒成立, 则我们仍可以断言主特征值  $\lambda_1 > 0$ .

**注记 3.4.3** (Neumann 边界条件的情况). 若特征值问题的边界条件改为 Neumann 边界条件  $\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial\Omega} = 0$ , 则  $\lambda_0 = 0$  也为  $(-\Delta)$  的特征值, 对应特征函数为任何的非零常数, 定理3.4.3中的其它结论仍然成立 ((2) 中的  $k \in \mathbb{N}^*$  要改成  $k \in \mathbb{N}$ ).

**注记 3.4.4** (Weyl 律). 椭圆偏微分算子的特征值分布问题在物理中也非常重要, 这是因为 Laplace 方程本身可以视作很多二阶演化方程的“稳态”(steady state)情况, 例如薛定谔方程、波动方程等等。关于特征值渐近分布的一个标志性的结果由 H. Weyl 给出, 对如上特征值问题, 可以证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{\frac{1}{d}}}{n} = \frac{(2\pi)^d}{\text{Vol}(\Omega)\alpha(d)}, \quad \alpha(d) := \mathbb{R}^d \text{中单位球的体积.}$$

读者可以参考于品教授的数学分析讲义 [19] 的第 79 节推论 530 和第 82 节的定理 541.

下面我们进一步研究  $(-\Delta)$  算子的主特征值 (principal eigenvalue), 即最小特征值  $\lambda_1$ . 我们将证明  $\lambda_1$  必定是单重特征值, 其特征函数在  $\Omega$  内部不变号。

**定理 3.4.4** ( $(-\Delta)$  主特征值的变分原理 (Variational Principle)). 设  $\lambda_1 > 0$  是  $(-\Delta)$  算子 (带 Dirichlet 零边值条件) 的主特征值, 则有如下结论成立。

(1) (Rayleigh 公式) 设  $\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{\Omega}) | w = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$  为容许集 (admissible set), 则有主特征值的变分刻画

$$\lambda_1 = \min_{w \in \mathcal{A}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} w(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}}.$$

等价地, 也有

$$\lambda_1 = \min_{w \in \mathcal{A}'} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathcal{A}' := \left\{ w \in C^2(\overline{\Omega}) \middle| \int_{\Omega} w(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} = 1 \text{ 且 } w = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}.$$

(2) (极小化子 = 特征函数) (1) 中的最小值会在  $w$  取成  $\lambda_1$  的特征函数  $w_1$  时达到, 且  $w_1$  在  $\Omega$  内不变号。这里的特征函数  $w_1$  是指如下方程的非零解

$$-\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 \quad \text{in } \Omega, \quad w_1 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

(3) (主特征值必是单重特征值) 若  $u \in \mathcal{A}$  是如下方程的解

$$-\Delta u = \lambda_1 u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

则  $u$  必定是  $w_1$  的常数倍, 即存在常数  $C$  使得在  $\Omega$  内恒有  $u = Cw_1$ .

**注记 3.4.5** (特征函数的光滑性). 一般来说, 定理所述的容许集中的函数应当从 Sobolev 空间  $H_0^1(\Omega)$  中选取。但若  $\Omega$  的边界光滑, 那么椭圆正则性定理 (Evans [3, 定理 6.3.6]) 表明  $w_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , 所以这里我们取成  $C^2$  函数是合理的。

**注记 3.4.6.** (3) 表明特征值满足  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ . 这与一维区间  $\Omega = (0, \pi)$  的情况是契合的。

**注记 3.4.7** (Neumann 边界条件的情况). 若特征值问题的边界条件改为 Neumann 边界条件  $\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial\Omega} = 0$ , 并记  $\lambda_1$  为最小的正特征值, 则 (1) 中的容许集  $\mathcal{A}$  应改为  $\{w \in C^2(\bar{\Omega}) : \int_{\Omega} w \, d\mathbf{x} = 0, w \not\equiv 0, \frac{\partial w}{\partial N}|_{\partial\Omega} = 0\}$ . (2) 的结论仍然成立. 对 (3), 最小正特征值  $\lambda_1$  的特征函数不再在  $\Omega$  内保持不变号, 一个很简单的反例就是  $\Omega = (0, \pi)$  时, 最小正特征值  $\lambda_1 = 1$  对应的特征函数为  $X_1(x) = \cos x$ .

**证明.** 设  $u$  是泛函  $I[w] = \frac{\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|w\|_{L^2(\Omega)}^2}$  在  $\mathcal{A}$  上的极小化子 (这里默认了存在性), 并设

$$m = I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} \frac{\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|w\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

**第一步: 证明  $I[w]$  的最小值是  $(-\Delta)$  的主特征值.** 任取  $v \in \mathcal{A}$ , 由于  $u$  是极小化子, 所以我们可以  $f(\varepsilon) := I[u + \varepsilon v]$  作为  $\varepsilon$  的函数在  $\varepsilon = 0$  达到极小值, 这样的话就有  $f'(0) = 0$ .

另一方面, 我们可以用导数的定义去写出  $f'(0) = 0$  的表达式. 事实上, 我们有

$$f(\varepsilon) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2\varepsilon(\nabla u) \cdot (\nabla v) + \varepsilon^2 |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2 \, d\mathbf{x}},$$

进而对  $\varepsilon$  求导之后, 再令  $\varepsilon = 0$  可得

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= \frac{\left( \int_{\Omega} 2(\nabla u) \cdot (\nabla v) + 2\varepsilon |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \right)}{\left( \int_{\Omega} u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2 \, d\mathbf{x} \right)} \\ &\quad - \frac{\left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + 2\varepsilon(\nabla u) \cdot (\nabla v) + \varepsilon^2 |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\Omega} 2uv + 2\varepsilon v^2 \, d\mathbf{x} \right)}{\left( \int_{\Omega} u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2 \, d\mathbf{x} \right)^2} \\ f'(0) &= \frac{\left( \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right) \left( 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \right) - \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} \right) \left( 2 \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} \right)}{\left( \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^2} = 0. \end{aligned}$$

$f'(0)$  表达式的分子必定是 0, 因此我们得到

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x}} \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x} = m \int_{\Omega} uv \, d\mathbf{x}.$$

如上积分式左边分部积分一次, 得到

$$\int_{\Omega} (\Delta u + mu)v \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{A},$$

这表明  $-\Delta u = mu$  在  $\Omega$  内恒成立, 从而  $m$  是  $-\Delta$ (带零边值条件) 的特征值,  $u$  是对应的特征函数。

接下来证明  $m = \lambda_1$ . 我们记特征值  $\lambda_j$  对应的特征函数为  $w_j$ . 在方程  $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$  两边乘以  $w_j$  并积分, 分部积分可得

$$\lambda_j \int_{\Omega} |w_j|^2 \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\Delta w_j) w_j \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla w_j|^2 \, d\mathbf{x} \Rightarrow \lambda_j = \frac{\|\nabla w_j\|_{L^2}^2}{\|w_j\|_{L^2}^2} \geq \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} = m.$$

所以  $m$  的取值不可能超过  $(-\Delta)$  的任何一个特征值, 而  $m$  本身自己又是  $(-\Delta)$  的特征值, 所以就只能是最小特征值  $\lambda_1$ . 同时, 这意味着泛函  $I[w]$  的极小化子  $u$  是  $\lambda_1$  对应的特征值问题的解, 这就证明了(1) 和 (2) 的前半部分。

**第二步: 证明主特征值的特征函数不变号.** 现在我们把上述极小化子  $u$  记作  $w_1$ . 我们将证明

“区域  $\Omega$  内, 要么恒有  $w_1 > 0$ , 要么恒有  $w_1 < 0$ .”

首先我们断言

**断言.** 设  $w_1^+, w_1^-$  分别表示  $w_1$  的正部、负部<sup>2</sup>, 则  $w_1^\pm$  也是  $\lambda_1$  对应的特征值问题的解。

在证明断言之前, 我们先看看如果它成立, 接下来会发生什么。事实上, 结合该断言和强极值原理(推论4.2.4)就能直接证明我们想要的结论。在此我们列出强极值原理的结论, 其证明将在本讲义的第4.2.2节完成。

**定理(强极值原理).** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域(有界性和连通性都是需要的),  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

- (1) 如果  $-\Delta u \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 且存在点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  满足  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  必为常值函数。
- (2) 如果  $-\Delta u \geq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 且存在点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  满足  $u(\mathbf{x}_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  必为常值函数。

“断言 + 强极值原理  $\Rightarrow w_1$  不变号”的证明. 我们先看  $w_1^+$ . 现在断言表明在  $\Omega$  内有  $-\Delta w_1^+ = \lambda_1 w_1^+ \geq 0$ . 如果  $w_1^+$  在  $\Omega$  内恒大于零, 那么说明  $w_1$  在  $\Omega$  内恒正, 结论已经得证。否则就必定存在

<sup>2</sup>对实值函数  $f$ , 定义其正部为  $f^+ := \max\{f, 0\}$ , 负部为  $f^- := \max\{0, -f\}$ . 显见  $f^\pm \geq 0$ ,  $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ .

$\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $w_1^+(\mathbf{x}_0) = 0$ , 这就说明  $w_1^+$  的最小值在  $\Omega$  内部达到, 而  $-\Delta w_1^+ \geq 0$ , 所以据强极值原理 (2) 有  $w_1^+$  恒为零, 也就是说我们已经证明了: 只要  $w_1^+$ (或者  $w_1$  自身) 在  $\Omega$  内不是恒为正的, 那么必有  $w_1 \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立。

这个时候我们再考察负部  $w_1^-$ . 同样地, 如果  $w_1^-$  在  $\Omega$  内恒大于零, 那么说明  $w_1$  在  $\Omega$  内恒为负, 结论得证。否则必定存在  $\mathbf{x}_1 \in \Omega$  使得  $w_1^-(\mathbf{x}_1) = 0$ , 这就表明  $w_1^-$  的最小值在  $\Omega$  内部达到, 而  $-\Delta w_1^- \geq 0$ , 所以据强极值原理 (2) 有  $w_1^-$  恒为零。而特征函数是不能恒为零的, 所以只有“ $w_1$  在  $\Omega$  内恒正”和“ $w_1$  在  $\Omega$  内恒为负”两种情况发生, 结论得证。

**断言的证明.** 为证明断言, 我们不妨假设  $\|w_1\|_{L^2} = 1$  并且定义

$$A := \int_{\Omega} (w_1^+)^2 d\mathbf{x}, \quad B = \int_{\Omega} (w_1^-)^2 d\mathbf{x} \Rightarrow A + B = 1, \quad A, B \geq 0.$$

根据函数正、负部的定义和  $\lambda_1, A, B$  的定义, 我们有

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_{\Omega} |\nabla w_1|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla w_1^+ - \nabla w_1^-|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} |\nabla w_1^+|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla w_1^-|^2 d\mathbf{x} - \underbrace{2 \int_{\Omega} \nabla w_1^+ \cdot \nabla w_1^- d\mathbf{x}}_{=0} \\ &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} |w_1^+|^2 d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |w_1^-|^2 d\mathbf{x} = \lambda_1(A + B) = \lambda_1. \end{aligned}$$

其中在最后一个不等式我们用到了  $\lambda_1$  的最小性。这样的话上面的不等式被迫等式成立, 因此得到

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla w_1^\pm\|_{L^2}^2}{\|w_1^\pm\|_{L^2}^2} \Rightarrow w_1^\pm \text{ 也是 } \lambda_1 \text{ 对应的特征值问题的解。}$$

**第三步：证明主特征值是单重特征值.** 假设  $u_1, u_2$  是  $\lambda_1$  对应的特征值问题的两个解

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

由 (2) 知道  $\int_{\Omega} u_1 d\mathbf{x} \neq 0$ . 所以存在  $C \in \mathbb{R}$  满足  $\int_{\Omega} u_1 - Cu_2 d\mathbf{x} = 0$ . 而特征值问题是线性问题, 所以  $u_1 - Cu_2$  也是同一个特征值问题的解。现在 (2) 表明: 如果  $u_1 - Cu_2$  在  $\Omega$  内不恒为零(即如果  $u_1 - Cu_2$  是  $\lambda_1$  对应的一个特征函数), 那么它必定在  $\Omega$  内恒正或者恒负, 这与积分式  $\int_{\Omega} u_1 - Cu_2 d\mathbf{x} = 0$  矛盾。所以  $u_1 - Cu_2 = 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 也就是说  $\lambda_1$  对应的特征子空间是一维的, 因此是单重特征值。□

**注记 3.4.8.** (1) 的证明方法被称作变分法 (calculus of variation). 这个方法提供了一个新的观点: 偏微分方程的解可以等价视作某个能量泛函在某些约束条件下的极小化子。特别地,  $J[w] := \|\nabla w\|_{L^2}^2$  一般被称作位势能量, 它可以表示由点电荷产生的静电场的静电势能。本节习题 3.4.6 就是一个简例。数学上, 变分法在导出非线性偏微分方程及其单调量、守恒律的过程中起到了重要作用。

**注记 3.4.9.**  $\Omega$  的有界性是必要的, 其保证了特征值是至多可数的, 这是线性泛函分析中紧自伴算子的谱定理的结论。若  $\Omega$  无界, 则  $-\Delta$  的谱未必是离散的, 我们也无法将特征值写成一个序列。

## 习题 3.4

**习题 3.4.1.** 设  $p(x), q(x)$  是  $[0, 1]$  上给定的实值函数, 且取值均为正。考虑特征值问题

$$-(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X'(1) = 0.$$

证明: 不同特征值对应的特征函数在  $L^2(0, 1)$  中是正交的, 且全体特征值皆为正实数。(提示: 证明算子  $\mathcal{L}X := -(pX')' + qX$  在给定边界条件下是  $L^2(0, 1)$  上的自伴算子。)

**习题 3.4.2.** 在定理 3.4.4 的假设下, 证明: 对任意  $j \geq 2$ ,  $\lambda_j$  对应的特征函数  $w_j$  必在  $\Omega$  内变号。

**习题 3.4.3.** 如果将特征值问题 (3.4.2) 里面的边界条件换成 Robin 边界条件:  $\frac{\partial u}{\partial N} + a(\mathbf{x})u = 0$  on  $\partial\Omega$ . 证明主特征值有表达式

$$\lambda_1 = \min_{w \in \mathcal{A}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} a(\mathbf{x})w(\mathbf{x})^2 dS_{\mathbf{x}}}{\int_{\Omega} w(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}}.$$

其中  $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : w \not\equiv 0\}$ . 这里我们默认极小化子的存在性是成立的。

**习题 3.4.4.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域,  $u(t, \mathbf{x}) \in C_1^2((0, \infty) \times \Omega) \cap C([0, \infty) \times \bar{\Omega})$  是如下热传导方程的解。

$$u_t - \Delta u = 0 \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \in C(\bar{\Omega}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0.$$

(1) 证明:  $\int_{\Omega} (u(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \leq e^{-2\lambda_1 t} \int_{\Omega} (u_0(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$ . 其中  $\lambda_1 > 0$  是  $\Omega$  上的  $(-\Delta)$  算子 (带 Dirichlet 边界条件) 的主特征值。(提示: 使用  $\lambda_1$  的变分刻画。)

(2) 怎样的非零初值  $u_0$  能使得 (1) 中的等号成立?

**习题 3.4.5.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域,  $u(t, \mathbf{x}) \in C_1^2((0, \infty) \times \Omega) \cap C([0, \infty) \times \bar{\Omega})$  是如下热传导方程的解。

$$u_t - \Delta u = 0 \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial N} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0.$$

- (1) 证明：对任意  $t \geq 0$ ,  $\int_{\Omega} u(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .
- (2) 证明：对任意  $t \geq 0$ ,  $\int_{\Omega} |u(t, \mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |u_0(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$ .

提示：本题跟特征值理论没什么关系；对(2), 注意到  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon = |r|$ .

**习题 3.4.6 (Dirichlet 原理).** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界  $C^1$  的有界开集，给定函数  $f \in C(\bar{\Omega})$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$ , 定义能量泛函

$$I[w] := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf d\mathbf{x}, \quad w \in \mathcal{A} := \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : w = g \text{ on } \partial\Omega\}.$$

证明： $u$  是  $I[\cdot]$  在  $\mathcal{A}$  上的极小化子 (即  $I[u] = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w]$ ,  $u \in \mathcal{A}$ ) 当且仅当  $u$  是位势方程的解

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad u = g \text{ on } \partial\Omega.$$

提示：本题跟特征值理论没什么关系；令  $j(\varepsilon) = I[u + \varepsilon v]$ , 其中  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , 然后计算  $j'(0) = 0$ .

## 问题 3.4

**问题 3.4.1.** 在定理3.4.4的假设下，令  $\Sigma_k$  是  $\lambda_k$  的全体特征函数张成的实线性空间。定理3.4.4的结论已经表明：对任意  $k \neq l$ , 有  $\Sigma_k \cap \Sigma_l = \{0\}$ .

- (1) 证明：

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} w(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x}} \middle| w \not\equiv 0, w|_{\partial\Omega} = 0, w \in C^2(\Omega), \int_{\Omega} wv d\mathbf{x} = 0 \forall v \in \Sigma_1 \oplus \cdots \oplus \Sigma_{n-1} \right\}.$$

这里仍然默认极小化子的存在性。

- (2) 利用  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$  并模仿傅立叶级数理论中的 Bessel 不等式的证明，去证明：对任意  $f \in H_0^1(\Omega)$ , 即满足  $f, \nabla f \in L^2(\Omega)$ ,  $f|_{\partial\Omega} = 0$  的全体函数  $f$ , 必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j w_j \right\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

其中  $w_j$  是  $\lambda_j$  对应的特征函数,  $c_j := \frac{\int_{\Omega} f w_j d\mathbf{x}}{\|w_j\|_{L^2(\Omega)}^2}$  是  $f$  关于正交基  $\{w_j\}$  的傅立叶系数。

**问题 3.4.2.** 本题考察  $(-\Delta)$  特征值大小与区域  $\Omega$  体积大小的定量变化关系。考虑一族边界光滑的区域  $\Omega(\tau) \subset \mathbb{R}^d$ , 它的变化光滑地依赖参数  $\tau \in \mathbb{R}$ . 当参数  $\tau$  变化时, 边界  $\partial\Omega(\tau)$  的移动速度为  $\mathbf{v}$ .

对任意  $\tau$ , 我们考虑特征值  $\lambda = \lambda(\tau)$  及其对应的特征函数  $w = w(\mathbf{x}; \tau)$ , 即考虑如下特征值问题

$$-\Delta w = \lambda w \text{ in } \Omega(\tau), \quad w|_{\partial\Omega(\tau)} = 0.$$

其中假设  $\|w\|_{L^2(\Omega(\tau))} = 1$ ,  $\lambda, \omega$  是  $\tau, \mathbf{x}$  的光滑函数。证明:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = - \int_{\partial\Omega(\tau)} \left| \frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{x}; \tau) \right|^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) dS_{\mathbf{x}}$$

其中  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$  是边界  $\partial\Omega(\tau)$  的法向速度。

提示: 特征值问题表明  $\lambda(\tau) = \int_{\Omega(\tau)} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ . 然后利用公式(B.2.3)求导去证明  $\int_{\Omega(\tau)} \partial_{\tau} |\nabla w(\mathbf{x}; \tau)|^2 = 0$ . 这一步中你需要证明  $\|w\|_{L^2(\Omega(\tau))} \equiv 1$  来得到  $\frac{d}{d\tau} \|w\|_{L^2(\Omega(\tau))}^2 = 0$ . 该题结论表明  $\Omega$  增大的过程中,  $(-\Delta)$  的特征值会变小。

# 第四章 极大值原理

我们在上一章已经学了如何求解一维区间或者一些特殊区域内的几类线性偏微分方程的边值问题。然而，对一般的有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ，我们难以写出特征函数系的显式表达式，而特征函数系的正交性仅能给出  $L^2$  型的估计（事实上这与能量法是等价的），已有的工具无法让我们对解作出合适的逐点估计，例如上界估计、增长速率估计、震荡幅度估计等等。本章将介绍热传导方程和 Laplace 方程的极大值原理来解决这一问题。需注意的是，对波动方程（或是双曲型偏微分方程）是无法建立类似于本章讨论的极大值原理的结论的。事实上我们会看到极大值原理某种程度上表现出“无限传播速度”这一性质（热传导方程），这与波动方程“有限传播速度”这一性质矛盾。

## 4.1 热方程的极大值原理

考虑区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  内的热传导方程  $u_t - k\Delta u = f$  ( $k > 0$ ). 如果  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , 我们已经用傅立叶变换求得显式解。但是对一般的带边区域，解的显式表达式无法写出。对于热传导方程，我们可以证明“极大值原理”这一性质给出解的逐点上界估计。本节我们只介绍热传导方程的弱极大值原理而不介绍强极大值原理，后者的证明要么依赖于热传导方程的平均值公式，要么依赖于 Harnack 不等式等涉及对数梯度估计方法的计算。本讲义中，我们只对调和函数证明强极值原理和 Harnack 不等式，热传导方程的版本是类似的，具体可参见 Evans [3] 的第 2.3 节和第 7.1 节。

记号 4.1.1. 给定有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , 我们定义

- $\Omega_T := (0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$ , 称作**抛物圆柱** (parabolic cylinder).
- $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = (\{t = 0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega)$ , 称作**抛物边界** (parabolic boundary). 如下图所示，抛物边界可以视作抛物圆柱的“底部”（对应初始时刻  $t = 0$ ）和“侧壁”（对应  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  时的边值）的并集。
- $u(t, \mathbf{x}) \in C_1^2(\Omega_T)$ , 是指  $u$  作为  $t, \mathbf{x}$  的函数关于  $\mathbf{x}$  变量是  $C^2$  的，关于  $t$  变量是  $C^1$  的。

### 4.1.1 热方程的弱极大值原理

对于热算子  $\mathcal{L} := \partial_t - k\Delta$  ( $k > 0$ ), 我们有如下定理

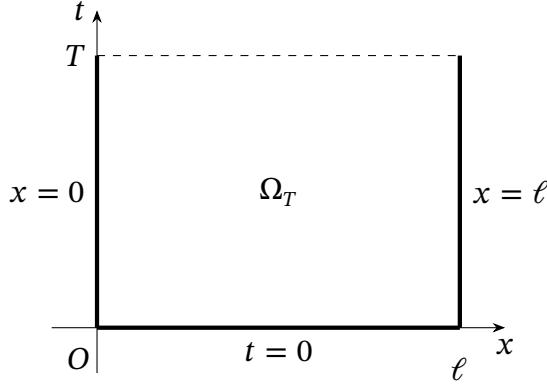


图 4.1: 一维区间  $\Omega = (0, \ell)$  的情况, 加粗部分即为抛物边界  $\Gamma_T$ .

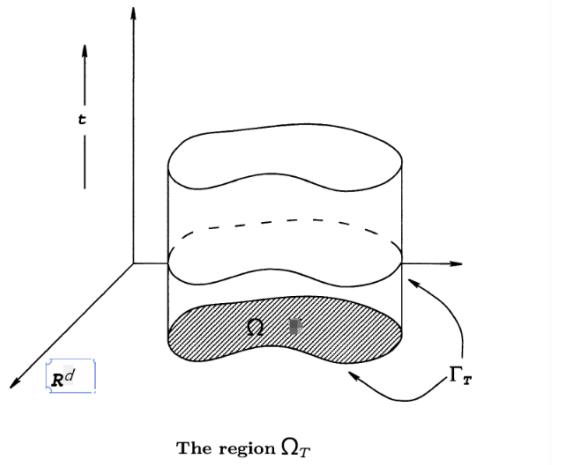


图 4.2: 一般区域  $\Omega$  对应的抛物边界

**定理 4.1.1** (热方程的弱极大值原理). 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  在  $\Omega_T$  内满足  $\partial_t u - k\Delta u \leq 0$ . 则  $u$  的最大值必定在抛物边界  $\Gamma_T$  上达到, 即

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

如果条件中的 “ $\leq 0$ ” 改成 “ $= 0$ ”, 则上述结论对  $|u|$  也成立; 如果条件中的 “ $\leq 0$ ” 改成 “ $\geq 0$ ”, 则上述结论中的 “最大值” 改成 “最小值” 也成立。

这个结论实际上是不难预测到的。若不然, 也就是如果假设  $u(t, \mathbf{x})$  在抛物圆柱内部的点  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega_T$  达到最大值, 那么就有  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  (而不在边界  $\partial\Omega$  上),  $0 < t_0 \leq T$ . 由于  $u(t_0, \mathbf{x}_0)$  是  $u$  的最大值, 所以有

$$\nabla_{\mathbf{x}} u(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad \text{Hessian 方阵 } \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(t_0, \mathbf{x}_0) \text{ 半负定} \Rightarrow \text{Tr } \nabla_{\mathbf{x}}^2 u(t_0, \mathbf{x}_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta u(t_0, \mathbf{x}_0) \leq 0.$$

对时间变量  $t$  则有两种情况:

- 若  $0 < t_0 < T$ , 则  $\partial_t u(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ ;
- 若  $t_0 = T$ , 则  $\partial_t u(T, \mathbf{x}_0) \geq 0$ .

无论如上哪种情况发生, 我们都会得到  $(\partial_t u - k\Delta u)|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \geq 0$ . 这几乎就已经得到的矛盾: 我们就只差把  $\geq$  改进为严格不等号  $>$ . 为了完成这最后的“临门一脚”, 我们可以考虑引进一个小扰动, 再利用解的连续性过渡到我们想要的结论。

**证明.** 我们引进辅助函数  $v(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) - \varepsilon t$ , 其中  $0 < \varepsilon \ll 1$  是一个小常数, 则  $v$  满足

$$\partial_t v - k\Delta v = \partial_t u - k\Delta u - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0.$$

这样的话根据上面的讨论,  $v$  的最大值必定在  $\Gamma_T$  上达到

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v(t, \mathbf{x}) = \max_{\Gamma_T} v(t, \mathbf{x}).$$

另一方面, 据  $u = v + \varepsilon t$  可得

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u(t, \mathbf{x}) \leq \max_{\overline{\Omega_T}} v(t, \mathbf{x}) + \varepsilon T = \max_{\Gamma_T} v(t, \mathbf{x}) + \varepsilon T \leq \max_{\Gamma_T} u(t, \mathbf{x}) + \varepsilon T,$$

这里我们在最后一步用了  $v \leq u$ . 由于  $\varepsilon > 0$  是任意的, 令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , 就可得到  $\max_{\overline{\Omega_T}} u(t, \mathbf{x}) = \max_{\Gamma_T} u(t, \mathbf{x})$ .

特别地, 若  $\partial_t u - k\Delta u = 0$ , 则  $-u$  也满足同样的结论, 进而得到  $\max_{\overline{\Omega_T}} |u(t, \mathbf{x})| = \max_{\Gamma_T} |u(t, \mathbf{x})|$ .  $\square$

**注记 4.1.1** (热方程极大值原理的物理解释). 想象现在有一根不接触外部热源的杆 ( $f = 0$ ), 杆上温度最高的点和温度最低的点都只能出现在初始时刻或者是杆的两端。因此如果在初始时刻杆的中间有一点温度最高, 那么开始演化之后, 除非在端点处向杆上提供外部热源, 否则  $t = 0$  时温度最高的点将迅速冷却。这个现象可以理解为是“无限传播速度”的另一种形式, 与本章开头所述契合。同时该性质与波动方程的有限传播速度相悖, 因此也与我们在第3.1.2节末尾讨论共振现象时举的例子形成对比。

如果我们将热算子改写为  $\mathcal{L}u := \partial_t u - k\Delta u + cu$ , 其中  $c(t, \mathbf{x}) \geq 0$  是给定的函数, 那么也可以建立一个类似的结论。

**推论 4.1.2** (热传导方程在  $c \geq 0$  时的弱极值原理). 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  在  $\Omega_T$  中满足  $\partial_t u - k\Delta u + cu = f$ , 其中  $c \geq 0$  是给定的非负函数。则

1. 若在  $\Omega_T$  内有  $f \leq 0$ , 则  $\max_{\overline{\Omega_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+$ ; ( $u$  的正最大值必定在抛物边界达到)

2. 若在  $\Omega_T$  内有  $f \geq 0$ , 则  $\min_{\overline{\Omega}_T} u \geq -\max_{\Gamma_T} u^-$ ; ( $u$  的负最小值必定在抛物边界达到)
3. 若在  $\Omega_T$  内有  $f \equiv 0$ , 则  $\max_{\overline{\Omega}_T} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|$ ,

其中  $u^+ := \max\{u, 0\}$  和  $u^- := \max\{-u, 0\}$  分别为  $u$  的正部和负部。

证明. 只用证明 (1), (2)-(3) 可以直接从 (1) 得出, 而 (1) 的证明与  $c = 0$  的情况是类似的。

我们再次采用扰动法, 对充分小的常数  $\varepsilon > 0$ , 我们定义  $v(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) - \varepsilon t$ , 并假设  $v$  在抛物圆柱的某个内点  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega_T$  取到正最大值。这里需注明: 如果  $\max v \leq 0$ , 则 (1) 的结论对  $v$  是自动成立的。这样的话我们根据前面的讨论得到  $\partial_t v(t_0, \mathbf{x}_0) \geq 0$  以及  $\Delta v(t_0, \mathbf{x}_0) \leq 0$ .

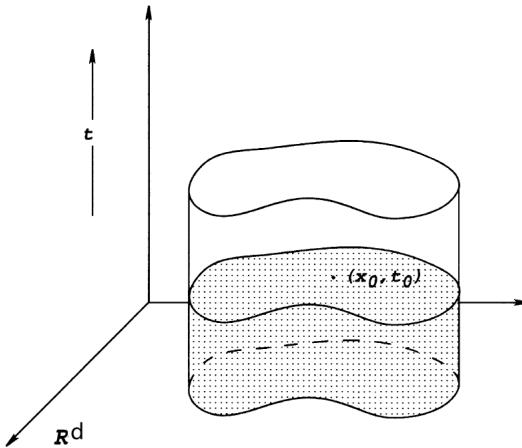
接下来直接计算得到  $\partial_t v - k\Delta v = \partial_t u - \varepsilon - k\Delta u = f - \varepsilon - cu = f - \varepsilon(1+t) - cv < 0$ , 利用  $c = 0$  情况的弱极大值原理得知

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\overline{\Omega}_T} v + \varepsilon T = \max_{\Gamma_T} v + \varepsilon T \leq \max_{\Gamma_T} v^+ + \varepsilon T \leq \max_{\Gamma_T} u^+ + \varepsilon T.$$

最后令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  即为所求。  $\square$

在弱极大值原理的证明中, 区域  $\Omega$  的连通性并没有用到, 所以弱极值原理对一般的有界开集  $\Omega$  都是正确的。若假设  $\Omega$  具有连通性, 则我们可以加强结论为

“ $u$  的极值在内点  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega_T$  达到  $\Rightarrow u(t, \mathbf{x})$  在  $t_0$  时刻之前的抛物圆柱  $\overline{\Omega}_{t_0}$  内是常值。”



Parabolic strong maximum principle

图 4.3: 抛物强极值原理示意图

如上结论被称作“强极值原理”。本课程涉及到的问题中, 弱极大值原理已经足够使用。接下来我们只列出强极大值原理的结论, 证明略去。

**定理 4.1.3** (热传导方程在  $c \geq 0$  时的强极值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域, 且  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  在  $\Omega_T$  内满足  $\partial_t u - k\Delta u + cu = f$ , 其中  $c \geq 0$  是给定的函数。

1. 若在  $\Omega_T$  内有  $f \leq 0$ , 且  $u$  在抛物圆柱的内点  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega_T$  达到非负最大值, 则  $u$  在  $\overline{\Omega_{t_0}}$  内是常值。
2. 若在  $\Omega_T$  内有  $f \geq 0$ , 且  $u$  在抛物圆柱的内点  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega_T$  达到非正最小值, 则  $u$  在  $\overline{\Omega_{t_0}}$  内是常值。

弱极大值原理有一个简单但是十分重要的推论, 被称作比较原理 (comparison principle).

**定理 4.1.4** (热传导方程的比较原理). 设  $c(t, \mathbf{x}) \geq 0$  是给定的函数, 定义微分算子  $\mathcal{L}$  为  $\mathcal{L}u = \partial_t u - k\Delta u + cu$ . 若  $u, v \in C_1^2(\Omega_T) \cap (\overline{\Omega_T})$  满足

$$\mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v \text{ in } \Omega_T, \text{ 以及 } u \leq v \text{ on } \Gamma_T,$$

则在整个抛物圆柱的闭包  $\overline{\Omega_T}$  中都有  $u \leq v$ .

比较原理的证明非常简单, 即直接对  $u - v$  使用弱极大值原理即可, 因此我们略去过程。据此结论, 我们可以证明有界区域内热传导方程初边值问题解的唯一性和对初、边值的连续依赖性。考虑方程

$$\begin{cases} \partial_t u - k\Delta u = f(t, \mathbf{x}) & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \text{on } \{t = 0\} \times \overline{\Omega} \\ u = g_u & \text{on } [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

若  $u, v \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  分别是方程(4.1.1)在初值为  $u_0(\mathbf{x}), v_0(\mathbf{x})$ , 边值为  $g_u, g_v$  情况下的解, 则对  $u - v$  使用弱极大值原理可得

$$\max_{\Omega_T} |u(t, \mathbf{x}) - v(t, \mathbf{x})| \leq \max \left\{ \max_{\overline{\Omega}} |u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x})|, \max_{[0, T] \times \partial\Omega} |g_u(t, \mathbf{x}) - g_v(t, \mathbf{x})| \right\}.$$

## 4.1.2 热方程初边值问题的点态估计

接下来我们利用热方程的弱极大值原理证明解的一些逐点估计。

### 初边值问题解的逐点估计

**命题 4.1.5.** 设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  是方程(4.1.1)的解, 则

$$\max_{\overline{\Omega_T}} |u(t, \mathbf{x})| \leq AT + B,$$

其中  $A := \max_{\Omega_T} |f(t, \mathbf{x})|$ ,  $B := \max \left\{ \max_{\Omega} |u_0(\mathbf{x})|, \max_{[0,T] \times \partial\Omega} |g_u| \right\}$ .

**证明.** 我们考虑辅助函数  $w(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) - At - B$ . 很明显, 辅助函数取成这个样子就是为了“凑出”弱极大值原理的条件。直接计算表明  $w$  满足

$$w_t - k\Delta w = u_t - k\Delta u - A = f(t, \mathbf{x}) - A \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T,$$

以及

$$w(0, \mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x}) - B \leq 0, \quad w|_{\partial\Omega} = g - B \leq 0 \Rightarrow w|_{\Gamma_T} \leq 0.$$

对  $w$  和 0 使用比较原理可得  $w \leq 0$  在  $\overline{\Omega_T}$  恒成立, 即  $u \leq AT + B$  在  $\overline{\Omega_T}$  恒成立。

类似地, 我们把  $u$  换成  $-u$ , 可以证得对  $-u$  有一模一样的估计, 即  $-u \leq AT + B$  在  $\overline{\Omega_T}$  恒成立, 这就表明  $|u| \leq AT + B$  在  $\overline{\Omega_T}$  恒成立。  $\square$

该命题表明, 即便我们不知道有界区域内的热方程初边值问题解的显式表达式, 我们仍然可以估计解的逐点上界和增长速率。这一点与波动方程完全不同, 后者除去解的显式表达式以外, 能给出的所有信息都是  $L^2$  型的能量估计而非点态估计。

接下来我们证明有界区域内热传导方程的解有时候可以具有指数衰减速率。

**命题 4.1.6.** 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  是有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  内如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + cu = 0 & (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \in C(\overline{\Omega}), & t = 0, \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \\ u = 0 & t \geq 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

其中  $c(t, \mathbf{x})$  是连续函数。

- (1) 若存在常数  $c_0$  使得  $c \geq c_0 > 0$  恒成立, 则存在常数  $A > 0$  使得  $|u(t, \mathbf{x})| \leq Ae^{-c_0 t}$  对任意  $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_T$  成立。
- (2) 若  $g \geq 0$  且  $c$  有界 (未必非负), 则  $u \geq 0$  对任意  $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_T$  成立。

**证明.** 我们仍然希望通过构造辅助函数来凑出极大值原理的条件。设  $\lambda \in \mathbb{R}$  是常数, 如果考虑形如  $v(t, \mathbf{x}) = e^{-\lambda t}u(t, \mathbf{x})$  的辅助函数, 那么通过计算可得  $v$  满足热传导方程

$$\partial_t v - \Delta v + (c + \lambda)v = 0, \quad v(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

对于(1), 我们取  $\lambda = -c_0$  即可得到

$$\partial_t v - \Delta v + \underbrace{(c - c_0)v}_{\geq 0} = 0.$$

那么据推论4.1.2( $c \geq 0$  的弱极大值原理), 我们得到

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |v(t, \mathbf{x})| = \max_{\Gamma_T} |v(t, \mathbf{x})| = \underbrace{\max_{\Omega} |g(\mathbf{x})|}_{=: C} \Rightarrow \max_{\overline{\Omega}_T} |u(t, \mathbf{x})| \leq Ce^{-c_0 t}.$$

对于(2), 我们可以取  $\lambda = 1 + \max |c(t, \mathbf{x})|$ , 使得零阶项系数  $c + \lambda > 0$ . 据推论4.1.2( $c \geq 0$  的弱极大值原理), 我没得到

$$\min_{\overline{\Omega}_T} v \geq -\max_{\Gamma_T} u^- = \max_{\Gamma_T} g^- = 0$$

其中  $g \geq 0$  表明  $g^- \equiv 0$ . 这就证明了  $v \geq 0$  在  $\overline{\Omega}_T$  中恒成立, 进而  $u$  也是如此。  $\square$

**注记 4.1.2.** 需注意的是(1)的结论对  $c_0 \leq 0$  情况也对, 这里加上  $c_0 > 0$  纯粹是因为说明解具有衰减性而非增长性。事实上, 即使  $c_0 = 0$ , 我们也可以证明解具有逐点的指数衰减速率, 但证明比该问题困难不少, 详见习题4.1.4和问题4.1.1.

### 初值问题的逐点估计

本节的最后, 我们证明欧式空间  $\mathbb{R}^d$  中的热方程初值问题的解有逐点估计。

**命题 4.1.7.** 设  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ,  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$  是如下初值问题的有界解

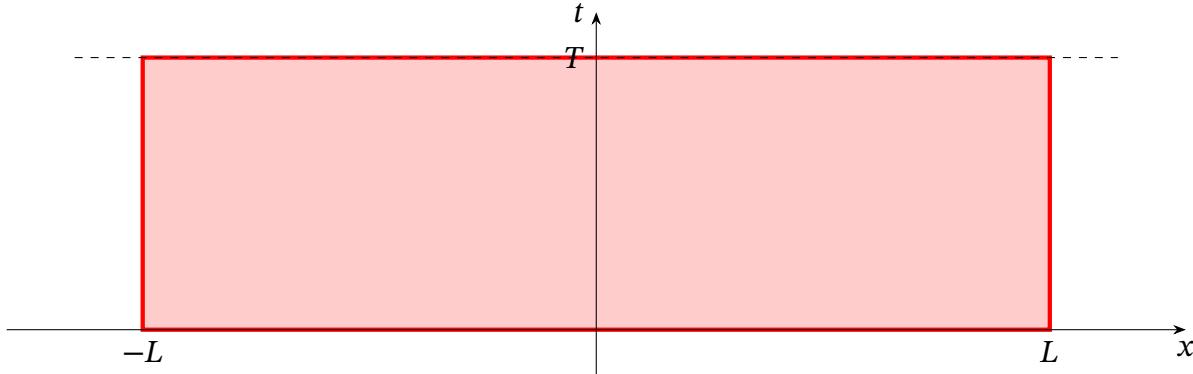
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(t, \mathbf{x}) & \text{in } [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \text{on } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (4.1.3)$$

则

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u(t, \mathbf{x})| \leq AT + B,$$

其中  $A := \max_{(0, T] \times \mathbb{R}^d} |f|$ ,  $B := \max_{\mathbb{R}^d} |u_0|$ .

证明该命题之前, 我们先来看一个错误的证法。为了叙述简便, 我们以  $d = 1$  为例, 现在要证明的是  $|u(t_0, x_0)| \leq AT + B$  对任意  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$  成立。我们知道  $\mathbb{R}$  是无界区域, 而极大值原理这类点态上界估计只对有界区域成立, 那么一个很直接的想法就是对  $\mathbb{R}$  作截断  $\Omega^L := (-L, L)$ , 因为给定  $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ , 总是存在  $L > 0$  使得  $(t_0, x_0) \in \Omega_T \subset \Omega^L$  内。

图 4.4: 在  $x = \pm L$  处没有极值的估计

但是正如上图所示, 我们仍然难以在截断后的区域上使用极大值原理, 这是因为在截断区域的抛物边界上有信息缺失: 我们并不知道  $u$  在  $x = \pm L$  处的上界, 给定的常数  $B$  里面不包括  $\max |u(t, \pm L)|$ . 这样的话, 我们被迫去思考如何构造一个合适的辅助函数, 使得在截断区域的抛物圆柱  $\Omega_T^L$  上能够使用极大值原理或者比较原理。

**证明.** 记  $\mathcal{L} = \partial_t - \Delta$ , 设常数  $M > 0$  满足  $|u(t, \mathbf{x})| \leq M$  在  $(0, T] \times \mathbb{R}^d$  恒成立。对  $R > 0$ , 今考虑在  $(0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  定义形如  $w(t, \mathbf{x}) = At + B + v_R(t, \mathbf{x})$  的函数, 其中  $v_R$  是一个待定的辅助函数, 在后面我们会明确它的选取。现在我们已有如下信息:

- $\mathcal{L}u \leq A$  在  $(0, T] \times \mathbb{R}^d$  成立, 以及  $u \leq B$  在  $\{t = 0\} \times \mathbb{R}^d$  成立。
- $w(0, \mathbf{x}) = B + v_R(0, \mathbf{x})$  在  $\{t = 0\} \times B(\mathbf{0}, R)$  成立, 以及  $w \geq v_R$  在  $(0, T] \times \partial B(\mathbf{0}, R)$  成立。

关于辅助函数  $v_R$ , 我们希望它满足

- $\mathcal{L}v_R \geq 0$  在  $(0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  成立,
- $v_R(0, \mathbf{x}) \geq 0$  在  $\{t = 0\} \times B(\mathbf{0}, R)$  成立,  $v_R \geq u$  在  $(0, T] \times \partial B(\mathbf{0}, R)$  成立,
- 当  $R \rightarrow \infty$  时, 有  $v_R \rightarrow 0$ .

如果这样的  $v_R$  存在, 那么我们很容易得到  $\mathcal{L}u \leq A \leq \mathcal{L}w$  在  $(0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  成立以及  $u \leq w$  在  $(0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  的抛物边界成立。再由比较原理得知  $u \leq w$  在  $(0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  成立, 类似结果对  $-u$  也是对的。从而对任意  $(t, \mathbf{x}) \in (0, T] \times B(\mathbf{0}, R)$  成立如下不等式

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq A + Bt + |v_R(t, \mathbf{x})| \leq A + BT + |v_R(t, \mathbf{x})| \text{ in } (0, T] \times B(\mathbf{0}, R).$$

再令  $R \rightarrow \infty$  就是我们想要的结果。

余下只要选取满足上述要求的辅助函数  $v_R$ . 这时我们需要一个简单但是常用的事:  $\Delta(|\mathbf{x}|^2) = 2d$ , 这样的话就可以凑出  $\mathcal{L}(|\mathbf{x}|^2 + 2dt) = 0$ , 也就是说热算子对它“不起作用”。接下来还要保证边值满足条件, 以及  $\lim_{R \rightarrow \infty} v_R(t, \mathbf{x}) = 0$ . 次数我们乘以因子  $M/R^2$ , 其中  $M$  如证明的一开始所定义。

这样的话，我们就“凑出”一个辅助函数  $v_R(t, \mathbf{x}) = \frac{M}{R^2}(|\mathbf{x}|^2 + 2dt)$  满足我们的全部要求。  $\square$

## 习题 4.1

**习题 4.1.1.** 设常数  $L > 0$ , 记  $\Omega^L = (0, L)$ .  $u^L(t, x) \in C_1^2(\Omega_T^L) \cap C(\overline{\Omega_T^L})$  是如下问题的解

$$\begin{cases} u_t^L - u_{xx}^L = 0 & (t, x) \in \Omega_T^L \\ u^L(0, x) = 0 & x \in [0, L], \\ u^L(t, 0) = g(t), \quad u^L(t, L) = 0 & t \in [0, T], \end{cases}$$

其中  $g(t) \geq 0$ . 证明：对任意  $L_1 < L_2$  和  $(t, x) \in \Omega_T^{L_1}$ ,  $u^{L_1}(t, x) \leq u^{L_2}(t, x)$  恒成立。

提示：思考如何使用比较原理。

**习题 4.1.2.** 设  $\Omega = (0, 1)$ ,  $h > 0$  是常数.  $u^h(t, x) \in C_1^2(\Omega_T) \cap C_0^1(\overline{\Omega_T})$  是如下方程的解

$$\begin{cases} u_t^h - u_{xx}^h = 0 & (t, x) \in \Omega_T, \\ u^h(0, x) = 0 & t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ (u_x^h + h(1 - u^h))|_{x=0} = 0, \quad u^h|_{x=1} = 0 & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

(1) 证明： $0 \leq u(t, x) \leq 1$  在  $\Omega_T$  中恒成立。

(2) 证明：对任意  $(t, x) \in \Omega_T$  和  $0 < h_1 < h_2$ , 都有  $u^{h_1}(t, x) \leq u^{h_2}(t, x)$  成立。

提示：(1) 用反证法证明  $u^h$  在  $[0, T] \times \{x = 0\}$  上的最小值不可能非负，最大值不可能超过 1.

(2) 令  $v(t, x) = u^{h_2} - u^{h_1}$ , 计算  $v$  的边界条件, 之后模仿 (1) 的证明。

**习题 4.1.3.** 设  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是单调递增函数,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域, 常数  $T > 0$ . 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$  是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + f(u) = 0, & \text{in } \Omega_T \\ u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), & t = 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \\ u(t, \mathbf{x}) = g(t, \mathbf{x}), & t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中  $\varphi, g$  是给定的有界光滑函数。

(1) 设  $f \in C^1$ , 叙述并证明微分算子  $\mathcal{L}u := \partial_t u - \Delta u + f(u)$  的比较原理。

(2) 如果只假设  $f$  连续, 证明上述方程解的唯一性。

## 习题 4.1.4. 考虑一维热方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in } [0, +\infty) \times [0, \pi], \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad (t \geq 0).$$

(1) 证明: 对任意  $a \in \mathbb{R}$ ,  $v(t, x) = ae^{-t} \sin x$  满足上述方程。

(2) 若初值选取为  $u(0, x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ , 证明: 对应的解满足不等式

$$e^{-t} \leq \max_{x \in [0, \pi]} u(t, x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

提示: (2) 显然要用比较原理, 可以联想 (1) 中解的初值是什么。

习题 4.1.5. 今考虑一维区间  $\Omega = (0, L)$  上如下带有 Neumann 或 Robin 边界条件的热方程, 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C_0^1(\overline{\Omega_T})$  是它的解。

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f & (t, x) \in \Omega_T; \\ u(0, x) = \varphi(x) & t = 0, x \in [0, L]; \\ -u_x + \alpha(t)u = g_1(t) & 0 \leq t \leq T, x = 0; \\ u_x + \beta(t)u = g_2(t) & 0 \leq t \leq T, x = L. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

其中  $k > 0$  是常数,  $\alpha(t), \beta(t) \geq 0$ .

(1) 若  $f, \varphi, g_1, g_2 \geq 0$  对任意  $(t, x) \in \overline{\Omega_T}$  恒成立, 证明:  $u \geq 0$  也对任意  $(t, x) \in \overline{\Omega_T}$  恒成立。

(2) 令  $F := \sup_{\Omega_T} |f|$ ,  $B = \max\{\max_{[0, T]} |g_1|, \max_{[0, T]} |g_2|, \max_{[0, L]} |\varphi|\}$ . 证明: 存在仅依赖  $k, L, T$  的常数  $C > 0$ , 使得  $|u(t, x)| \leq C(F + B)$  对任意  $(t, x) \in \overline{\Omega_T}$  恒成立。

提示: (1) 先假设  $g_1, g_2 > 0$ , 此情况可用反证法证得结论; 一般情况考虑辅助函数  $v(t, x) := u(t, x) + \varepsilon \left[ 2kt + (x - \frac{L}{2})^2 \right]$ . (2) 考虑辅助函数  $w(t, x) = \pm u(t, x) + Ft + Bz(t, x)$ , 其中  $z(t, x) := 1 + \frac{1}{L} \left[ 2kt + (x - \frac{L}{2})^2 \right]$ .

习题 4.1.6. 今考虑一维区间  $\Omega = (0, L)$  上如下带有 Dirichlet 边界条件的热方程, 设  $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C_0^1(\overline{\Omega_T})$  是它的解。

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & (t, x) \in \Omega_T; \\ u(0, x) = \varphi(x) & t = 0, x \in [0, L]; \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

- (1) 证明:  $\max_{(0,T)} |u_x(t, 0)| \leq C$ ,  $\max_{(0,T)} |u_x(t, 0)| \leq C$ , 其中  $C > 0$  仅依赖  $\varphi, \varphi'$  在  $[0, L]$  的上界。
- (2) 若设  $u_x \in C_1^2(\Omega_T)$ , 证明:  $\max_{\overline{\Omega}_T} |u_x(t, x)| \leq C'$ , 其中  $C' > 0$  仅依赖  $\varphi, \varphi'$  在  $[0, L]$  的上界。

提示: (1) 注意到  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , 先估计  $|u(0, x)|$ , 再用比较原理得到  $|u(t, x)|$  的界, 最后用导数定义得到  $|u_x(t, 0)|$  的界。 (2) 考虑  $v := u_x$  满足的热方程, 再用命题4.1.5.

### 问题 4.1

**问题 4.1.1.** 习题4.1.4中, 假设初值  $u(0, x) = u_0(x) \in C^1([0, \pi])$  且满足  $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ , 证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得对应的解满足  $\sup_{x \in [0, \pi]} |u(t, x)| \leq Ce^{-t}$ .

提示: 将  $u_0(x)$  与习题4.1.4(1) 初值的常数倍相比较, 这是本题假设初值  $C^1$  的原因所在。

## 4.2 调和函数的基本性质

在一般区域内, 我们无法求得调和函数的显式表达式, 但是我们仍然可以从调和函数的平均值原理出发, 建立极值原理、梯度估计、Harnack 不等式等诸多点态估计。本节也是这一章最重要的部分。

### 4.2.1 调和函数的平均值原理

首先介绍调和函数的平均值原理, 这是本节几乎所有结论的出发点。设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是一个给定的开集。

**定理 4.2.1** (调和函数的平均值原理). 设  $u \in C^2(\Omega)$  是调和函数, 则对任意的球  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ , 成立如下等式

$$u(\mathbf{x}_0) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u \, dS_{\mathbf{x}} = \oint_{B(\mathbf{x}_0, r)} u \, d\mathbf{x}.$$

证明. 令  $u$  在球面  $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$  上的平均值为

$$\varphi(r) := \oint_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} = \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}},$$

其中  $d\alpha(d)r^{d-1}$  是  $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$  的表面积。我们要证明  $\varphi'(r) = 0$ . 由于上式中的积分区域和前面的系数都依赖  $r$ , 我们不方便直接对上式中的  $r$  变量求偏导  $\partial_r$ , 所以先考虑作变量替换  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + r\mathbf{z}$ , 即球面  $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$  的任一点总能写成形如  $\mathbf{x}_0 + r\mathbf{z}$  的形式, 其中  $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}$  是单位球面上的一点。由于

球面是  $(d - 1)$  维的超曲面，所以我们有  $dS_x = r^{d-1} dS_z$ ，这样得到

$$\varphi(r) \xrightarrow{x=x_0+rz} \frac{1}{d\alpha(d)} \int_{\partial B(0,1)} u(x_0 + rz) dS_z = \oint_{\partial B(0,1)} u(x_0 + rz) dS_z.$$

对  $r$  求导，据链式法则可得

$$\varphi'(r) = \sum_{i=1}^d \oint_{\partial B(0,1)} \partial_i u(x_0 + rz) z_i dS_z = \oint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x_0 + rz) \cdot z dS_z.$$

接下来把  $z$  变量换回  $x$  变量可得

$$\varphi'(r) \xrightarrow{x=x_0+rz} \oint_{\partial B(x_0,r)} \nabla u(x) \cdot \frac{x - x_0}{r} dS_x.$$

此时注意  $x$  这个点落在球面  $\partial B(x_0, r)$  上，这就说明  $x - x_0$  这个向量是该球面的外法向量，且长度恰好为球的半径  $r$ . 所以  $\frac{x - x_0}{r}$  恰好就是  $x \in \partial B(x_0, r)$  点处的单位外法向量。据散度定理（命题B.1.2）得

$$\varphi'(r) = \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial N}(x) dS_x \xrightarrow{\text{散度定理}} \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{B(x_0,r)} \Delta u(x) dx.$$

由于  $u$  是  $\Omega$  上的调和函数（在这之前的推导完全没有用到调和函数的假设），所以上式右边为零，即  $\varphi'(r) \equiv 0$ ，这就说明  $\varphi(r)$  是常数，再利用  $u$  的连续性，令  $r \rightarrow 0_+$  得到

$$\varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0_+} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0_+} \oint_{\partial B(x_0,r)} u(x) dS_x \xrightarrow{u \text{ 连续}} u(x_0).$$

接下来证明  $u(x_0)$  也等于体积积分的平均值。我们利用积分的极坐标表示（引理B.2.1）和调和函数球面平均的结论得到

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r)} u(x) dx &= \int_0^r \left( \int_{\partial B(x_0,\rho)} u dS_x \right) d\rho = \int_0^r u(x_0) (d\alpha(d)\rho^{d-1}) d\rho \\ &= u(x_0) \cdot (r^d \alpha(d)) = u(x_0) \text{Vol}(B(x_0, r)). \end{aligned}$$

□

**注记 4.2.1** (与 Poisson 公式的关系). 在前面的章节，我们用分离变量法可以解得圆盘  $B(\mathbf{0}, a) \subset \mathbb{R}^2$

上边值为  $h(\theta)$  的调和函数的显式表达式为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad r < a.$$

令  $r = 0$ , 可得

$$u(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) \frac{a^2}{a^2} d\varphi = \oint_{\partial B(\mathbf{0}, a)} h dS,$$

这与调和函数平均值原理的结论契合。事实上，在高维的球内我们也可求得调和函数的显式表达式，但是非常复杂。

**定理 4.2.2** (平均值原理的逆定理). 若函数  $u \in C^2(\Omega)$  满足对任意球  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$  都有

$$u(\mathbf{x}_0) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u dS_x$$

成立，则  $u$  必是  $\Omega$  上的调和函数。

**证明.** 反证法，如果  $\Delta u$  在  $\Omega$  内不恒为零，则由  $\Delta u$  的连续性，存在小球  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ ，使得  $\Delta u > 0$  (或  $\Delta u < 0$  也可以) 在  $B(\mathbf{x}_0, r)$  内恒成立。但是这与定理4.2.1证得的  $\varphi'(r) = 0$  相矛盾：

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{d\alpha(d)r^{d-1}} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} \Delta u(x) dx > 0.$$

□

**注记 4.2.2.** 事实上，对函数  $u$  的  $C^2(\Omega)$  假设可以进一步弱化为  $u \in C(\Omega)$ ，但该情况的证明则需要用附录B.3中介绍的卷积光滑子来完成，见定理4.2.10。

## 4.2.2 强极值原理和 Hopf 引理

本节我们将用调和函数的平均值原理来证明调和函数的强极值原理。

**定理 4.2.3** (调和函数的极值原理). 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  是有界开集  $\Omega$  上的调和函数。

- (弱极大值原理)  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .
- (强极大值原理) 若  $\Omega$  是连通集 (即为区域)，且存在点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ ，则  $u$  在  $\Omega$  内必定是常数。

**证明.** 这里我们只证明 (2). (1) 的证明与热传导方程的极大值原理 (定理4.1.1) 类似，我们留作习题4.2.3。

今假设在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  处有  $u(\mathbf{x}_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u$ . 则对  $0 < r < \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Omega)$ , 调和函数的平均值性质表明

$$M = u(\mathbf{x}_0) = \fint_{B(\mathbf{x}_0, r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq M.$$

该等号成立当且仅当  $u \equiv M$  在球  $B(\mathbf{x}_0, r)$  内恒成立。这表明集合  $C := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$  是  $\Omega$  的开子集, 因为对任意  $\mathbf{x}_0 \in C$ , 我们都能找到一个球  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset C$ .

接下来证明  $C$  是  $\Omega$  的(相对)闭子集, 若能证得该结论, 则由  $\Omega$  的连通性就知道  $C = \emptyset$  或者  $C = \Omega$ , 而现在的假设表明  $\mathbf{x}_0 \in C$ , 所以  $C$  非空, 从而只能等于  $\Omega$ .

$C$  是闭集的证明并不困难, 因为  $C$  本身是单点集  $\{M\}$  在连续函数  $u$  下的原像集 (pre-image), 而连续函数的等价定义之一就是闭集的原像仍为闭集, 所以这证明了是  $\Omega$  的(相对)闭子集。□

思考. 上述证明中  $\Omega$  的有界性用在什么地方? 若去掉强极值原理中  $\Omega$  连通的假设, 会有怎样的反例?

进一步地, 我们有更一般的结论

**定理 4.2.4** (上/下调和函数的强极大值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

- (1) 若在  $\Omega$  中恒有  $-\Delta u \leq 0$  (此时称  $u$  是  $\Omega$  内的下调和 (subharmonic) 函数), 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  内必定是常数。
- (2) 若在  $\Omega$  中恒有  $-\Delta u \geq 0$  (此时称  $u$  是  $\Omega$  内的上调和 (superharmonic) 函数), 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  内必定是常数。

该定理的证明需要如下所述的 Hopf 引理。

**引理 4.2.5** (Hopf 引理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集, 函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  且满足

- (1) (下调和)  $-\Delta u \leq 0$  在  $\Omega$  中恒成立;
- (2) 存在点  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , 使得  $u(\mathbf{x}_0) > u(\mathbf{x})$  对任意  $\mathbf{x} \in \Omega$  都成立;
- (3) ( $\mathbf{x}_0$  处的内球条件) 存在开球  $B \subset \Omega$  使得  $\mathbf{x}_0 \in \partial B$ .

则  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0) > 0$ , 其中  $N$  是球  $B$  在边界点  $\mathbf{x}_0 \in \partial B$  处的单位外法向量。

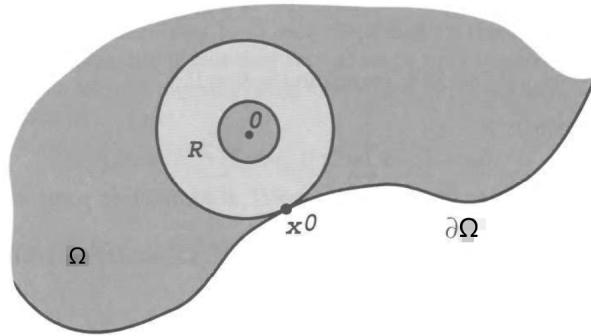
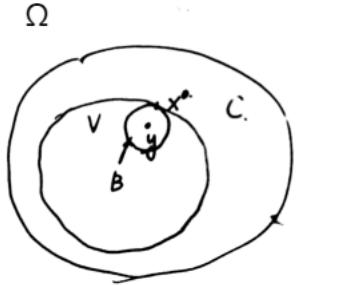


图 4.5: 内球条件示意图

“Hopf 引理  $\Rightarrow$  定理4.2.4”的证明. 我们只证明(1),(2)的证明只需把  $u$  换成  $-u$ . 记  $M := \max_{\overline{\Omega}} u$ , 集合  $C = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ . 现在用反证法, 假设  $u \not\equiv M$ , 并定义集合  $V := \{x \in \Omega : u(x) < M\}$ . 现在我们选取点  $y \in V$  使得  $\text{dist}(y, C) < \text{dist}(y, \partial\Omega)$ , 并且令  $B$  是球心为  $y$  并落在  $V$  内的最大球. 这样的话, 就存在点  $x_0 \in C$  使得  $x_0 \in \partial B$ , 且  $u(x_0) > u(x)$  对任意  $x \in V$  都成立 (这是由  $C$  和  $V$  的定义得到的). ”

图 4.6: “Hopf 引理  $\Rightarrow$  定理4.2.4”的证明

据 Hopf 引理, 我们得到  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0) > 0$ . 但这与  $u$  在  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  处达到最大值矛盾, 因为  $u$  在  $\Omega$  的内点  $\mathbf{x}_0$  处达到最大值这一事实蕴含了  $\nabla u(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , 从而  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0)$  必为零.

这就表明  $V$  是空集, 从而下调和函数  $u$  一旦在  $\Omega$  内部达到最大值,  $u$  就必须是常值函数.  $\square$

关于 Hopf 引理本身, 它的结论并不难理解: 如果  $u$  在区域边界的某点  $\mathbf{x}_0$  上达到最大值, 则在  $\Omega$  内部靠近  $\mathbf{x}_0$  的地方,  $u$  的取值应当沿着该点处的外法向是递增的 (否则  $u$  不可能在边界点达到最大值), 这就说明  $\mathbf{x}_0$  处的外法向导数  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0)$  不可能是负的. 不过, 要证明  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0)$  是严格正的, 还需要施加合适的扰动并仔细选取辅助函数.

**Hopf 引理的证明.** 为了方便显式构造辅助函数, 不妨设球  $B$  为  $B(\mathbf{0}, r)$ . 由 Hopf 引理的假设 (2), 我们希望构造辅助函数  $v$  使得对任意充分小的  $0 < \varepsilon \ll 1$  成立

- i.  $u(\mathbf{x}_0) \geq u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x})$  对  $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{0}, r) \cup \partial B(\mathbf{0}, r/2)$  成立.
- ii.  $-\Delta(u + \varepsilon v) \leq 0$  在环形区域  $A := B(\mathbf{0}, r) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, r/2)}$  成立.
- iii.  $v|_{\partial A} = 0, \frac{\partial v}{\partial N}(\mathbf{x}_0) < 0$

如果能构造出这样的函数  $v$ , 则由弱极大值原理可得  $u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0) \leq 0$  在  $A$  中恒成立, 以及  $u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon v(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{x}_0) = 0$ . 所以函数  $u + \varepsilon v - u(\mathbf{x}_0)$  在  $\mathbf{x}_0$  处的外法向导数必定是非负的, 因此得到  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial N}(\mathbf{x}_0) > 0$ .

这样的辅助函数  $v$  可以选取为  $v(\mathbf{x}) = e^{-\lambda|\mathbf{x}|^2} - e^{-\lambda r^2}$  的形式, 其中  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, r)$ ,  $\lambda > 0$  是一个待定的充分大的常数。直接计算可得

$$-\Delta v = e^{-\lambda|\mathbf{x}|^2}(-4\lambda^2|\mathbf{x}|^2 + 2d\lambda),$$

该项括号里面是关于  $\lambda$  的二次函数, 其图像是开口向下的抛物线, 所以只要我们把  $\lambda$  取得充分大, 即  $\lambda > \frac{d}{2r^2}$ , 那么必有  $-\Delta v \leq 0$  对任意  $\mathbf{x} \in A$  成立。而剩下的 (i), (ii) 性质都是可以直接验证的。□

### 4.2.3 Harnack 不等式

利用平均值原理, 我们还能估计调和函数的“振幅”。

**定理 4.2.6 (Harnack 不等式).** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是开集,  $V \subset \Omega$  是连通的紧子集。则存在仅依赖于维数  $d$  和距离  $\text{dist}(V, \partial\Omega)$  的常数  $C > 0$ , 使得对  $\Omega$  上的任何非负调和函数  $u$  都有

$$\max_V u \leq C \min_V u.$$

特别地, 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , 存在常数  $C > 0$  使得  $C^{-1}u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq Cu(\mathbf{y})$ .

**证明.** 我们取  $r = \frac{1}{4}\text{dist}(V, \partial\Omega)$ , 并选取点  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  使得  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq r$ , 这样的话  $B(\mathbf{y}, r) \subset B(\mathbf{x}, 2r)$ . 于是

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, 2r)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \geq \frac{1}{(2r)^d \alpha(d)} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1}{2^d} \int_{B(\mathbf{y}, r)} u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1}{2^d} u(\mathbf{y}).$$

因此, 对  $V$  中距离不超过  $r$  的两点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , 成立不等式  $1/2^d u(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x}) \leq 2^d u(\mathbf{y})$ .

接下来我们希望把这个性质推广到  $V$  中任意两点。由于  $V$  是连通的紧集, 我们就可以将  $V$  用有限个球覆盖住, 记这些球为  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq N}$ , 其中  $B_i$  的半径均为  $r/2$ , 且  $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$  对  $2 \leq i \leq N$  成立。于是反复利用上述性质可得  $u(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^{d(N+1)}} u(\mathbf{y})$  对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  成立。□

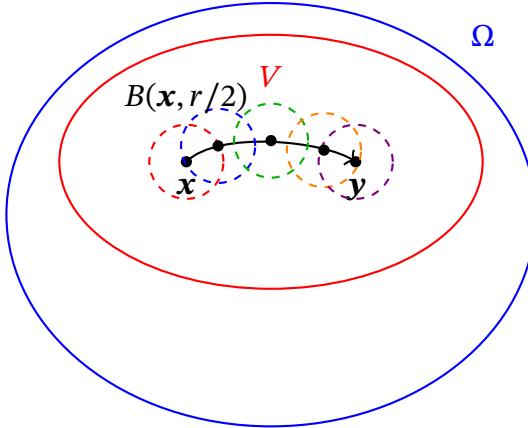


图 4.7: 用平均值原理证明 Harnack 不等式的示意图

**注记 4.2.3.** 上述证明完全依赖调和函数  $u$  的平均值原理。如果我们将  $-\Delta$  算子换成一般的椭圆微分算子  $-\sum_{i,j=1}^d a^{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b^i \partial_i + c$ , 其中  $\{a^{ij}\}$  是严格正定的实对称方阵, 则平均值原理不再成立。

另一方面, 如果我们想在黎曼流形上建立类似于 Harnack 不等式的结论, 则平均值原理也会因为曲率的存在而不成立。一般情况下, 我们确实可以找到不依赖平均值原理的方法去证明 Harnack 不等式, 该方法称作对数梯度估计 (logarithmic gradient estimates), 即构造辅助函数并用弱极大值原理证明  $|\nabla \ln u| \leq C$ , 该式的成立将直接导出 Harnack 不等式 (为什么?), 同时取对数也要求了  $u$  必须是非负函数。本讲义的定理 4.3.8 就介绍了这一方法。

#### 4.2.4 梯度估计和 Liouville 定理

无论是平均值性质、极大值原理还是 Harnack 不等式, 我们都只能得到调和函数  $u$  自身的逐点估计。从泰勒展开的角度看, 如果想估计一个函数的增长速率, 则需要对该函数的导数建立合适的估计。而在上面的讨论中, 我们只对考虑了  $C^2$  的调和函数, 因此要想讨论调和函数的导数估计, 则先需要回答问题: 调和函数的可微性能到多高阶? 是否一定是光滑函数? 事实上, 对欧氏空间开集内的调和函数, 该问题的答案是肯定的, 我们甚至可以证明调和函数必是实解析函数, 即对任意  $x_0 \in \Omega$ , 调和函数  $u$  在  $x_0$  的一个邻域内可以写成一个关于  $(x - x_0)$  的一致收敛的幂级数, 即  $u$  在  $x_0$  处的泰勒级数在  $x_0$  的一个邻域内一致收敛到  $u(x_0)$ .

本小节我们先默认事实 “ $u$  是  $\Omega$  内的调和函数, 则  $u \in C^\infty(\Omega)$ ”, 该事实的证明参见定理 4.2.10. 据此, 我们在本小节先对调和函数的各阶导数作出估计, 然后利用这些估计在下一小节的定理 4.2.11 证明调和函数的实解析性。

本节主要结论为

**定理 4.2.7 (梯度估计).** 设  $u$  是开集  $\Omega$  内的调和函数, 则对任意自然数  $k$ , 任意球  $B(x_0, r) \subset \Omega$ , 任

意阶数为  $k$  的多重指标  $\alpha$ , 存在仅依赖  $d, k$  的常数  $C_k > 0$  使得如下不等式成立

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{C_k}{r^{d+k}} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

进一步地, 我们有  $C_0 = \frac{1}{\alpha(d)}$ ,  $C_k = \frac{(2^{d+1}dk)^k}{\alpha(d)}$  ( $k \geq 1$ ).

这个定理的结论看上去复杂, 但实际上只需要证出  $k = 1$  的情况然后利用数学归纳法即可。更重要的是如下推论

**定理 4.2.8** (Liouville 定理).  $\mathbb{R}^d$  上的有界调和函数  $u$  只能是常数。

**证明.** 要证明  $u$  是常值, 则只要证明它的全体一阶偏导数皆为零。设有上界  $|u| \leq M$ , 并固定点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ . 据  $k = 1$  的梯度估计得知

$$|\nabla u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{dC_1}{r^{d+1}} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \frac{dC_1\alpha(d)}{r} \cdot \frac{1}{\alpha(d)r^d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \frac{dC_1\alpha(d)}{r} \quad \forall r > 0.$$

令  $r \rightarrow +\infty$ , 就有  $\nabla u(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . 由于  $\mathbf{x}_0$  是任取的, 所以  $u$  只能是常数。  $\square$

**注记 4.2.4.** 此处的 Liouville 定理与复分析中的 Liouville 定理本质上是相同的, 后者表明有界整函数 (在整个复平面  $\mathbb{C}$  上全纯) 必定是常数。这是因为全纯函数的实部和虚部都是调和函数。

**注记 4.2.5.** 事实上, Liouville 定理中的有界假设可以弱化为如下两个假设之一

- (1)  $|u|$  在无穷远处的增长严格慢于线性增长, 即  $|u(\mathbf{x})| = o(|\mathbf{x}|)$ , as  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ;
- (2)  $u$  单侧有界。

我们把结论的证明留作习题4.2.8. 事实上, 在条件 (1) 下我们只要证明  $u$  在任一点的各个一阶偏导数皆为零即可, 而这可以在梯度估计结论中令  $k = 1, r \rightarrow \infty$  直接得到, 其在高阶导数也有推广: 若  $|u|$  在无穷远处的增长为  $O(|\mathbf{x}|^p)$  ( $p > 0$ ), 则  $u$  必为不超过  $p$  次的多项式, 它的证明也是将梯度估计用在  $k = [p] + 1, r \rightarrow \infty$  的情况即可得到, 参见习题4.2.7; 而在条件 (2) 下则可以不妨设  $u \geq 0$  (为什么?) 再利用习题4.2.6的结论。

现在证明梯度估计, 这里只写了  $k = 1$  的情况, 一般情况参见 Evans [3, 29 页定理 2.2.7].

**$k = 1$  的梯度估计证明.** 设  $u$  在  $\Omega$  内是调和函数, 则对任意  $1 \leq i \leq d$ ,  $\partial_{x_i} u$  也是  $\Omega$  内的调和函数 (注意这句话是基于  $\partial_i u \in C^2$  的假设得到的)。今对  $\partial_{x_i} u$  使用平均值原理得到

$$\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0) = \fint_{B(\mathbf{x}_0, r/2)} \partial_{x_i} u d\mathbf{x} = \frac{2^d}{\alpha(d)r^d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r/2)} \partial_{x_i} u d\mathbf{x}.$$

再用 Gauss-Green 公式 (命题B.1.1) 将边界积分转化为内部积分得到

$$\frac{2^d}{\alpha(d)r^d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r/2)} \partial_{x_i} u \, d\mathbf{x} = \frac{2^d}{\alpha(d)r^d} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)} u N_i \, dS_{\mathbf{x}},$$

所以有

$$|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^d}{\alpha(d)r^d} \cdot \text{Area}(\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)) \cdot \max_{\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)} |u| = \frac{2d}{r} \cdot \max_{\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)} |u|,$$

其中  $\text{Area}(\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)) = d\alpha(d)(r/2)^{d-1}$ . 接下来我们要用  $|u|$  的积分去控制  $\max_{\partial B(\mathbf{x}_0, r/2)} |u|$ .

注意到, 若  $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_0, r/2)$ , 则  $B(\mathbf{x}, r/2) \subset B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ , 所以对这个点  $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_0, r/2)$ , 我们利用平均值原理得到  $|u(\mathbf{x})|$  的如下估计

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{\alpha(d)(r/2)^d} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{x}_0, r/2).$$

将其代入  $\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)$  的估计就得到我们想要的结论

$$|\nabla u(\mathbf{x}_0)| \leq d |\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^{d+1}d}{\alpha(d)r^{d+1}} \int_{B(\mathbf{x}_0, r)} |u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y}.$$

□

在上面的证明中, 我们实际上已经得到了如下结论

**命题 4.2.9.** 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  是开集  $\Omega$  内的调和函数, 球  $B(\mathbf{x}_0, R) \Subset \Omega$ , 则

$$|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d}{R} \max_{B(\mathbf{x}_0, R)} |u|, \quad 1 \leq i \leq d.$$

**证明.** 证明过程和定理4.2.7方法相同, 只是把  $r/2$  换成  $R$  即可得到

$$\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\alpha(d)R^d} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, R)} u N_i \, dS_{\mathbf{x}},$$

进而

$$|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{1}{\text{Vol}(B(\mathbf{x}_0, R))} \cdot \text{Area}(\partial B(\mathbf{x}_0, R)) \cdot \max_{B(\mathbf{x}_0, R)} |u| = \frac{d}{R} \max_{B(\mathbf{x}_0, R)} |u|.$$

□

上面提到, 全空间  $\mathbb{R}^d$  中单侧有界的调和函数必是常值函数。现在问: 如果将条件换成“单侧有多项式下界”, 例如  $u(\mathbf{x}) \geq -C|\mathbf{x}|^p$ , 是否能像习题4.2.7一样证明  $u$  是次数不超过  $p$  的多项式

呢？答案是肯定的，事实上我们可以利用梯度估计得到  $u$  的  $[p]+1$  阶及以上偏导数皆为零，证明留作习题4.2.9及其推论（习题4.2.10）。

### 4.2.5 \* 光滑性和实解析性

本节证明欧氏空间开集内的调和函数必是光滑函数，该证明需要用到附录B.3中的卷积光滑逼近。进一步地，结合该结论和梯度估计，我们可以证明调和函数必是实解析函数。

**定理 4.2.10**（光滑性）. 若  $u \in C(\Omega)$  满足球面平均性质，即

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u \, dS_{\mathbf{x}}$$

对任意  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$  都成立，则  $u$  必是  $\Omega$  上的调和函数，且  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

证明. 由于  $\Omega$  是开集，所以我们只要证明

$$\forall 0 < \varepsilon \ll 1, u = u_\varepsilon \text{ in } \Omega_\varepsilon.$$

这里  $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$ ,  $\eta_\varepsilon$  的附录B.3中定义的卷积光滑子，区域  $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ . 换言之，我们无法直接证明  $u \in C^\infty(\Omega)$ ，但是可以先证明  $u$  在“缩水一点点的区域”  $\Omega_\varepsilon$  上是  $C^\infty$  的，然后令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  将其拓展到整个集合  $\Omega$  上。

固定  $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$ ，我们利用积分的极坐标表示来计算  $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\right) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \eta|_{|\mathbf{x}|=\rho/\varepsilon} \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}, \rho)} u \, dS \right) \, d\rho = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \eta|_{|\mathbf{x}|=\rho/\varepsilon} d\alpha(d) \rho^{d-1} u(\mathbf{x}) \, d\rho \\ &= u(\mathbf{x}) \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon \, d\mathbf{y} = u(\mathbf{x}) \cdot 1 = u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

上述过程中，我们用到了  $\eta$  是径向函数，所以可以把它从球面积分  $\int_{\partial B(\mathbf{x}, \rho)}$  里面提出来，而倒数第二行的等号则是在  $\partial B(\mathbf{x}, \rho)$  上对  $u$  使用调和函数的平均值原理。  $\square$

接下来我们结合梯度估计去证明调和函数的实解析性。

**定理 4.2.11**（实解析性）. 设  $u$  是  $\Omega$  上的调和函数，则  $u$  是  $\Omega$  上的实解析函数，即对任意  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ，存在  $\mathbf{x}_0$  的邻域（记作  $O$ ），使得

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \quad \forall \mathbf{x} \in O.$$

此处的求和是对全体多重指标  $\alpha$  的求和, 阶乘  $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ .

**证明.** 固定  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . 为了证明泰勒级数的收敛性, 我们需要验证余项  $R_N(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0$  的充分小的邻域 (不妨记作  $O$ ) 内 (一致) 收敛, 其中

$$R_N(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha}{\alpha!}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

显见, 我们应当利用  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  的小性, 以及  $\partial^\alpha u$  在  $\mathbf{x}_0$  附近的梯度估计来证明想要的结论。

先看梯度估计, 此时需注意梯度估计给出的因子  $1/r^{d+k}$  现在贡献的是增长速率而不是衰减速率 (因为  $r$  小), 所以阶数不能太高。具体计算的话, 取  $r = \frac{1}{4}\text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega)$ ,  $M := \frac{1}{\alpha(d)r^d} \int_{B(\mathbf{x}_0, 2r)} |u| < \infty$ . 对任意  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ , 我们有  $B(\mathbf{x}, r) \subset B(\mathbf{x}_0, 2r) \subset \Omega$ , 据梯度估计, 我们有

$$\max_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\partial^\alpha u| \leq M \cdot k^k \cdot (2^{d+1}d/r)^k \quad \forall |\alpha| = k.$$

由于  $k^k < e^k k!$ ,  $k! \leq d^k \alpha_1! \cdots \alpha_d!$  (回忆  $k = |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ ), 我们得到

$$\max_{B(\mathbf{x}_0, r)} |\partial^\alpha u| \leq CM \left( \frac{2^{d+1}d^2e}{r} \right)^k \alpha!$$

因此现在可将邻域  $O$  选得充分小, 使得  $\forall \mathbf{x} \in O$ ,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \frac{r}{2^{d+2}d^3e}$ . 将其代入余项  $R_N(\mathbf{x})$  有

$$|R_N(\mathbf{x})| \leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left( \frac{2^{d+1}d^2e}{r} \right)^N \left( \frac{r}{2^{d+2}d^3e} \right)^N \leq CM/2^N \rightarrow 0.$$

□

## 4.2.6 调和函数的可去奇点

本节我们讨论调和函数的孤立奇点。回忆我们在计算  $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$  的径向调和函数 (基本解) 时求得的解在原点处有奇性, 而在其他地方都是调和的。本节证明的结论大致表明: 基本解具有的奇性可以认为是调和函数能具有的最弱的奇性。换言之, 我们将证明: 如果去心球  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  内的调和函数在原点附近增长速率严格慢于基本解, 则原点是可去奇点。

**定理 4.2.12** (调和函数的可去奇点). 设  $u$  是去心球  $\check{B}(\mathbf{0}, R) := B(\mathbf{0}, R) \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) 内的调和

函数，且满足

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} o(|\mathbf{x}|^{2-d}) & d \geq 3 \\ o(\ln |\mathbf{x}|) & d = 2, \end{cases} \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow 0.$$

则  $u$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  处有定义，即  $u$  在球  $B(\mathbf{0}, R)$  内是调和函数。

证明该结论之前，我们先大致叙述一下思路。首先，球  $B(\mathbf{0}, R)$  是有界区域，据强极大值原理，给定边值的情况下， $B(\mathbf{0}, R)$  内的调和函数只有唯一解。而另一方面，我们又可以用格林函数的方法显式计算出边值在内部的调和延拓，如公式(5.2.9)所示。所以只要证明  $u$  等于(5.2.9)给出的这个调和延拓（记作  $v$ ）即可。

**证明.** 不妨设  $u$  在去心球  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  内是连续的，并记  $v$  为公式(5.2.9)给出的由边值  $u|_{\partial B(\mathbf{0}, R)}$  往球  $B(\mathbf{0}, R)$  的调和延拓，即在  $B(\mathbf{0}, R)$  中成立  $\Delta v = 0$ ，在  $\partial B(\mathbf{0}, R)$  上有  $v = u$ . 在  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  中令  $w = v - u$ ，并记  $M_r = \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |w(\mathbf{x})|$ ,  $M := \max_{\partial B(\mathbf{0}, R)} |u(\mathbf{x})|$ . 据极大值原理知  $|v| \leq M$  在  $B(\mathbf{0}, R)$  恒成立。

接下来证明  $w = 0$  在  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  中恒成立。为了叙述上的简便，我们接下来假设  $d \geq 3$  ( $d = 2$  的情况证法类似). 现在我们稍微把去心球靠近圆心的部分再挖掉一些，考虑  $w$  在环形区域  $A_r := \{r < |\mathbf{x}| < R\}$  里面的行为。那么在环形区域的边界  $\partial A_r$  上，必定成立

$$|w(\mathbf{x})| \leq M_r \frac{r^{d-2}}{|\mathbf{x}|^{d-2}} \quad \text{on } \partial A_r.$$

事实上，在该环形区域的外边界  $\{|\mathbf{x}| = R\}$  上，根据定义我们有  $w \equiv 0$ ，所以上面这个不等式显然成立；而在内侧边界  $\{|\mathbf{x}| = r\}$  上，该不等式由  $M_r$  的定义知必然成立。而  $A_r$  是远离原点的有界区域， $w$  和  $M_r \frac{r^{d-2}}{|\mathbf{x}|^{d-2}}$  都是  $A_r$  上的调和函数，据极大值原理可得

$$|w(\mathbf{x})| \leq M_r \frac{r^{d-2}}{|\mathbf{x}|^{d-2}}, \quad \forall \mathbf{x} \in A_r.$$

进一步地，我们有

$$M_r = \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |v - u| \leq \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |v| + \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |u| \leq M + \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |u|.$$

将其代入  $w$  的上界估计，我们得到

$$|w(\mathbf{x})| \leq \frac{r^{d-2}}{|\mathbf{x}|^{d-2}} M + \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} (r^{d-2} \max_{\partial B(\mathbf{0}, r)} |u|) \quad \text{in } A_r.$$

现在对任意固定的  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ，我们选取  $r$  使得  $r < |\mathbf{x}|$ ，再让  $r \rightarrow 0$ ，就得到  $|w(\mathbf{x})|$  的上界收敛到零（这里用到了  $u$  在原点附近的增长率严格慢于基本解），这表明  $w(\mathbf{x}) = 0$ ，从而  $w = 0$ ,  $u = v$  在去心球  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  内成立。

球  $\check{B}(\mathbf{0}, R)$  中恒成立。因此我们可以将  $u$  延拓到原点使得它恒等于  $v$ 。  $\square$

## 习题 4.2

**习题 4.2.1.** 设  $\Omega = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$  是单位圆盘，函数  $u(x_1, x_2)$  满足在  $\Omega$  内成立  $\Delta u = x_1 x_2$ ，以及  $u|_{\partial\Omega} = 0$ 。计算  $u(0, 0)$ 。

**习题 4.2.2.** 设  $\Omega = B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  在  $\Omega$  内满足方程  $-\Delta u + \mathbf{A} \cdot \nabla u = 0$  和边界条件  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . 这里  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  是有界、连续的向量值函数。证明： $u(\mathbf{x}) \geq 0$  在  $\overline{\Omega}$  中恒成立。

提示：考虑辅助函数  $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon(e^{MR} - e^{Mx_1})$ , 其中  $\varepsilon > 0$ ,  $M := 1 + \sup_{\Omega} |\mathbf{A}|$ . 计算  $v$  的方程，并用反证法证明  $v > 0$  在  $\Omega$  上恒成立，最后令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ .

**习题 4.2.3** (下调和函数的弱极值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集（未必是区域）。函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  是  $\Omega$  中的下调和函数，即  $-\Delta u \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立。

(1) 证明： $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .

(2) 证明：若  $v \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  是  $\Omega$  内的调和函数，则  $|\nabla v|$  在  $\partial\Omega$  上达到最大值。

提示：(1) 先证明  $-\Delta u < 0$  的情况，对一般情况考虑扰动  $u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2$ . (2) 计算  $\Delta(|\nabla v|^2)$ .

**习题 4.2.4** (位势方程 Dirichlet 问题解的唯一性). 设  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$ ,  $u$  是有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  内的 Poisson 方程的解

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \partial\Omega.$$

证明：存在仅依赖  $\Omega$  的常数  $C > 0$  使得  $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C(\max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\Omega} |f|)$ .

**习题 4.2.5.** 设  $\Omega := B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  满足

$$\Delta u - 2u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g(\mathbf{x}).$$

这里  $g$  是  $\partial\Omega$  上的连续函数，证明：存在常数  $C > 0$  使得  $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C$ .

提示：选取充分大的常数  $\lambda > 0$ , 使得  $\Delta(u^2 + \frac{\lambda}{4}|\mathbf{x}|^2) \geq 0$ .

**习题 4.2.6.** 证明：在命题4.2.9中，若再假设  $u \geq 0$ , 则梯度估计右边可以去掉绝对值，即对  $1 \leq i \leq d$  有  $|\partial_{x_i} u(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{d}{R} \max_{B(\mathbf{x}_0, R)} u$ .

**习题 4.2.7.** 给定  $p > 0$ , 假设  $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$  是  $\mathbb{R}^d$  中的调和函数，且存在  $C > 0$  使得对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  都有  $|u(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|^p)$ . 证明： $u$  必定是次数不超过  $p$  的多项式。

**习题 4.2.8.** 设  $u$  是  $\mathbb{R}^d$  中的调和函数。证明：若  $u$  满足以下两个条件中任何一个，则  $u$  必是常数。

- (1) 存在常数  $C > 0, p > 0$  使得  $|u(\mathbf{x})| \leq C(\log(1 + |\mathbf{x}|^p) + 1) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .
- (2) 存在常数  $C \in \mathbb{R}$ ,  $u(\mathbf{x}) \geq C \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

**习题 4.2.9.** 设  $u$  是  $\mathbb{R}^d$  内的调和函数, 且存在常数  $C > 0, p > 0$  使得  $u(\mathbf{x}) \geq -C|\mathbf{x}|^p$  对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立, 则  $u$  是次数不超过  $p$  的多项式。

提示: 令  $v = u + C|\mathbf{x}|^p$ , 则  $v \geq 0$ . 据梯度估计和平均值性质, 对任意阶数为  $k$  的多重指标  $\alpha$  有  $|\partial^\alpha u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{r^{d+k}} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$ , 利用  $v$  非负证明  $|u(\mathbf{y})| \leq u(\mathbf{y}) + 2C|\mathbf{y}|^p$ , 所以有  $\int_{B(\mathbf{x}, r)} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \text{vol}(B(\mathbf{x}, r))u(\mathbf{x}) + C \int_{B(\mathbf{x}, r)} (|\mathbf{x}| + r)^p d\mathbf{y} = O(r^{d+p})$ . 所以当  $k \geq [p] + 1$  时令  $r \rightarrow \infty$  即可。

**习题 4.2.10.** 设  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  是非负光滑函数,  $C \in \mathbb{R}$  是给定的常数, 且  $\Delta u = C$  对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立。证明:  $u$  是不超过二次的多项式。

提示: 设  $w = u - \frac{C}{2d}|\mathbf{x}|^2$ , 然后用习题 4.2.9.

**习题 4.2.11 (Harnack 不等式的另证).** 设  $u > 0$  是  $B(\mathbf{x}_0, R) \subset \mathbb{R}^d$  内的调和函数。

- (1) 证明: 对任意  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R/2)$ , 成立对数梯度估计  $|\partial_{x_i} \ln u(\mathbf{x})| \leq \frac{2d}{R} \quad i = 1, \dots, d$ .
- (2) 用 (1) 证明: 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, R/2)$ , 我们有  $u(\mathbf{x}) \leq Cu(\mathbf{y})$ , 其中该常数  $C > 0$  仅依赖维数  $d$  和半径  $R$ .

## 问题 4.2

**问题 4.2.1.** 本题是习题 3.4.4 和问题 4.1.1 的高维版本。设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域, 考虑热方程

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in } [0, T] \times \Omega, \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

证明: 存在常数  $C > 0$ , 使得  $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(t, \mathbf{x})| \leq Ce^{-\lambda_1 t}$  对任意  $t > 0$  成立。这里  $\lambda_1 > 0$  是区域  $\Omega$  上  $(-\Delta)$  算子 (带 Dirichlet 边界条件) 的主特征值。

提示:  $\lambda_1$  对应的特征函数  $w_1$  满足 Hopf 引理的假设, 然后模仿问题 4.1.1 的方法用比较原理。

**注记 4.2.6.** 本题的结论实际上对连续初值  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  都成立, 但是这需要用到 Weyl 律  $\lambda_n \sim n^{2/d}$  (注记 3.4.4) 和特征函数增长速率估计  $\|w_n\|_{L^\infty} \leq C\lambda_n^{(d-1)/4}$  的结论, 或者使用热半群的  $L^2 - L^\infty$  估计  $\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-d/4}\|f\|_{L^2}$  (这个结论在  $\mathbb{R}^d$  中很容易证明, 但是需要将其推广到有界区域的情况), 但证明这些结论所涉及的内容 (谱理论、傅立叶积分算子等) 已经远超本讲义的范围。

**问题 4.2.2 (Hadamard 三圆定理).** 设  $u$  是  $\mathbb{R}^2$  上的调和函数,  $M(r) := \max_{|\mathbf{x}|=r} |u(\mathbf{x})|$ . 证明:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{\log r_2 - \log |\mathbf{x}|}{\log r_2 - \log r_1} M(r_1) + \frac{\log |\mathbf{x}| - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} M(r_2), \quad \forall 0 < r_1 \leq |\mathbf{x}| \leq r_2.$$

**问题 4.2.3.** 设  $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  满足

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial B(\mathbf{0}, 1).$$

- (1) 若  $d = 2$ , 且  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) / \ln |\mathbf{x}| = 0$ , 证明:  $u$  在  $\Omega$  内恒为零。
- (2) 若  $d \geq 3$ , 且  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$ , 证明:  $u$  在  $\Omega$  内恒为零。
- (3) 若  $d \geq 3$ , 但只假设  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) / \ln |\mathbf{x}| = 0$ , 此时  $u$  在  $\Omega$  内是否还恒等于零? 证明你的结论。

提示: 用习题3.3.5和定理4.2.12的结论。

**问题 4.2.4 (弱调和 = 调和).** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域, 函数  $u \in C(\Omega)$  满足  $\int_{\Omega} u \Delta \phi \, d\mathbf{x} = 0$  对任意  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  恒成立。证明:  $u$  是  $\Omega$  上的调和函数。

提示: 考虑  $u$  的光滑逼近  $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon$ , 其中  $\eta_\varepsilon$  是附录B.3中定义的卷积光滑子。可以证明  $u_\varepsilon$  是区域  $\Omega_\varepsilon$  中的调和函数, 且在  $\Omega$  的任意紧子集上是一致有界的。然后取  $\varepsilon \rightarrow 0$  证明最终的极限函数是所求的调和函数。

**问题 4.2.5.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域。函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  满足  $\Delta u = 0$  在  $\Omega$  中恒成立, 且在边界  $\partial\Omega$  的一个开的光滑部分  $\Gamma \subset \Omega$  上满足  $u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ . 证明:  $u$  恒为零。

提示: 考虑一个被  $\Gamma$  分割成两部分的小开集  $U$ , 我们在  $U \cap \Omega^c$  里面对  $u$  作零延拓, 然后只需证明  $u$  在  $U$  内是调和函数即可 (思考为什么?). 为此, 不妨设  $U = B(\mathbf{x}_0, R)$ , 其中  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega \cap \Gamma$ , 只需证明  $\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial N} \, dS = 0$  就能得到  $u$  在  $U$  内是调和函数, 联想平均值原理的证明过程, 思考为什么证到这就够了?

## 4.3 椭圆算子的极大值原理与 Harnack 不等式

上节我们利用调和函数的平均值原理建立起了强极值原理、梯度估计、Harnack 不等式等重要的逐点估计。然而如果将  $(-\Delta)$  算子换成一般系数的椭圆偏微分算子  $- \sum_{i,j=1}^d a^{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^d b^i \partial_i + c$ , 或者我们在黎曼流形上考虑 Laplace-Beltrami 算子对应的极值原理、Harnack 不等式等结论时, 平均值原理不再成立, 因此我们需要另辟不依赖平均值原理的方法来证明这些逐点估计, 而这些方法只需建立在弱极大值原理的基础上, 其证明并不依赖平均值原理。

本节我们证明非散度型椭圆偏微分算子的极值原理和 Harnack 不等式。设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集,  $u \in C^2(\Omega)$ . 令  $L$  为具有如下形式的二阶线性偏微分算子:

- 散度形式 (往往用于证明能量估计、弱解存在性)

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d \partial_j(a^{ij}(\mathbf{x}) \partial_i u) + \sum_{i=1}^d b^i(\mathbf{x}) \partial_i u + c(\mathbf{x})u \quad (4.3.1)$$

- 非散度形式（往往用于证明极大值原理等结论）

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(\mathbf{x}) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^d b^i(\mathbf{x}) \partial_i u + c(\mathbf{x}) u \quad (4.3.2)$$

其中系数  $a^{ij}, b^i, c$ , ( $1 \leq i, j \leq d$ ) 是给定的函数,  $\{a_{ij}\}$  是对称方阵。

**定义 4.3.1.** 我们称由(4.3.1)或(4.3.2)定义的微分算子  $L$  是(一致)椭圆的, 是指存在常数  $\theta > 0$  满足

$$\sum_{i,j=1}^d a^{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4.3.3)$$

换言之, 对任意  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $L$  是椭圆偏微分算子就意味着系数矩阵  $\{a^{ij}(\mathbf{x})\}$  是实对称正定方阵, 其最小特征值不小于  $\theta > 0$ . 在有界开集上, Laplace 算子就是一个这样的例子。

为了记号简便, 本节采用 Einstein 求和记号, 即重复指标意味着对该指标求和。所以(4.3.1)-(4.3.2)可以写成

$$Lu = -\partial_j(a^{ij}\partial_i u) + b^i\partial_i u + cu \text{ 或 } Lu = -a^{ij}\partial_i \partial_j u + b^i\partial_i u + cu.$$

初学者在阅读本节时可以心中“默认”椭圆算子  $L = -\Delta + c(\mathbf{x})$ , 并在读完本节之后思考其原因。

### 4.3.1 极值原理和 Hopf 引理

本节证明非散度型椭圆偏微分算子  $L$ (即具有形式(4.3.2)的偏微分算子)对应的极值原理和 Hopf 引理, 其中假设系数  $a^{ij}, b^i, c \in C(\bar{\Omega})$ . 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集 (未必连通)。

**定理 4.3.1** (弱极大值原理). 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $c = 0$ .

- 若  $Lu \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ . 此时称  $u$  是下解 (subsolution).
- 若  $Lu \geq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$ . 此时称  $u$  是上解 (supersolution).

特别地, 若  $Lu = 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$ .

**证明.** 与定理4.1.1证明类似, 我们仍然采用扰动法。

**断言.** 若  $Lu < 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .

先假设断言成立来证明 (1). 现在 (1) 的假设只有  $Lu \leq 0$ , 所以我们考虑对  $u$  作小扰动, 定义  $u^\varepsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$ , 其中  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\lambda > 0$  是一个充分大的待定常数. 直接计算可得:  $Lu^\varepsilon$  被一

个关于  $\lambda$  的二次函数所控制, 其二次项系数为负

$$Lu^\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) \leq 0 + \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1) \leq \varepsilon e^{\lambda x_1}(-\lambda^2 \theta + \lambda \|b\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

所以当  $\lambda$  充分大时, 就有  $Lu^\varepsilon < 0$  在  $\Omega$  内恒成立。据断言知  $\max_{\bar{\Omega}} u^\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u^\varepsilon$ . 而  $\varepsilon > 0$ , 所以

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} (u + \varepsilon e^{\lambda x_1}) = \max_{\bar{\Omega}} u^\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u^\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \max_{\partial\Omega} \varepsilon e^{\lambda x_1}.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , 我们得到要证的结论  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .

接下来只要证明断言。反证法: 若存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ . 那么有

$$\partial_i u(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq d), \quad \text{Hessian 方阵 } \nabla^2 u(\mathbf{x}_0) \leq 0 \text{ (半负定)} \Rightarrow \partial_i^2 u(\mathbf{x}_0) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq d.$$

若  $a^{ij}$  是对角阵, 则我们已经证得想要的结论: 因为此时可以结合  $a^{ii} \geq \theta$  得到  $Lu(\mathbf{x}_0) = -a^{ii}\partial_i^2 u \geq 0$ , 从而  $Lu \geq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 与断言的假设矛盾。一般情况下, 由于  $\{a^{ij}\}$  是严格正定的实对称方阵, 那么就存在正交方阵  $\mathbf{O} = \{o_{ij}\}$  使得

$$\mathbf{O} \mathbf{A} \mathbf{O}^\top = \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d), \quad \lambda_i \geq \theta, \quad 1 \leq i \leq d.$$

同时, 我们也作对应的变量替换  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{O}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  得到

$$\partial_{x_i} u = \sum_k o_{ki} \partial_{y_k} u, \quad \partial_{x_i} \partial_{x_j} u = \sum_{k,l} o_{ki} (\partial_{y_k} \partial_{y_l} u) o_{lj}.$$

所以在  $\mathbf{x}_0$  处, 我们算得

$$Lu(\mathbf{x}_0) = -a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u = -(o_{ki} a^{ij} o_{lj}) \partial_{y_k} \partial_{y_l} u = -\sum_{k=1}^d \lambda_k \partial_{y_k}^2 u \geq 0,$$

这又与断言的假设矛盾。  $\square$

若  $L$  的系数满足  $c \geq 0$ , 我们仍然可以证明与推论4.1.2类似的结论, 证明方法与定理4.3.1完全一样, 此处略去。

**定理 4.3.2** ( $c \geq 0$  的弱极大值原理). 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $c \geq 0$  在  $\Omega$  内恒成立。

- 若  $Lu \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$ . 即  $u$  的非负最大值在边界上达到。
- 若  $Lu \geq 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则  $\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-$ . 即  $u$  的非正最小值在边界上达到。

特别地, 若  $Lu = 0$  在  $\Omega$  内恒成立, 则有  $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$ .

对具有形式(4.3.2)的椭圆偏微分算子  $L$ , 我们也可以建立 Hopf 引理和强极值原理。证法与  $L = (-\Delta)$  的情况仍然完全一致, 此处略去。

**引理 4.3.3** (Hopf 引理). 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c = 0$ . 假设

- $Lu \leq 0$  在  $\Omega$  内恒成立;
- 存在边界点  $\mathbf{x}^0 \in \partial\Omega$  使得  $u(\mathbf{x}^0) > u(\mathbf{x})$  对任意  $\mathbf{x} \in \Omega$  成立;
- $\Omega$  在  $\mathbf{x}^0$  处满足内球条件 (*interior ball condition*), 即存在球  $B \subset \Omega$  使得  $\mathbf{x}^0 \in \partial B$ .

则  $\frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{x}^0) > 0$ , 其中  $N$  是球  $B$  在边界点  $\mathbf{x}^0$  处的单位外法向量。若  $c \geq 0$ , 则再加条件  $u(\mathbf{x}^0) \geq 0$ , 仍然可以保证同样的结论成立。

Hopf 引理也可以导出强极值原理

**定理 4.3.4** (强极大值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $c = 0$ .

- (1) 若在  $\Omega$  中恒有  $Lu \leq 0$ , 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  内必定是常数。
- (2) 若在  $\Omega$  中恒有  $Lu \geq 0$ , 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u(\mathbf{x}_0) = \min_{\bar{\Omega}} u$ , 则  $u$  在  $\Omega$  内必定是常数。

当  $c \geq 0$  时, 我们也有类似结论

**定理 4.3.5** ( $c \geq 0$  的强极大值原理). 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $c \geq 0$ .

- (1) 若在  $\Omega$  中恒有  $Lu \leq 0$ , 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u$  在  $\mathbf{x}_0$  处达到非负最大值, 则  $u$  在  $\Omega$  内是常数。
- (2) 若在  $\Omega$  中恒有  $Lu \geq 0$ , 且存在内点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  使得  $u$  在  $\mathbf{x}_0$  处达到非正最小值, , 则  $u$  在  $\Omega$  内是常数。

据极大值原理, 我们可以推出有界区域  $\Omega$  上位势方程  $Lu = f$  的 Dirichlet 边值 (即给定  $u|_{\partial\Omega} = g$  时) 问题解的唯一性和对边值的连续依赖性 (证明类似于习题4.2.4), 而当边值条件变为 Neumann 条件时, 即使 Neumann 边值恒为零, 方程也可能有非零解, 因此极大值原理在 Neumann 边界条件下一般不成立、而当给定 Robin 边值条件  $(\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(\mathbf{x})u)|_{\partial\Omega} = g$  时, 若给定函数  $\alpha$  恒正, 则我们也可以证得与习题4.2.4的极大值估计。这里我们对  $L = -\Delta + c(\mathbf{x})$  的情况证明如下结论, 其中  $c \geq 0$ .

**命题 4.3.6.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $c(\mathbf{x}) \geq 0$  有界,  $\alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 > 0$ . 若  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  是如下方程的解

$$-\Delta u + c(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(\mathbf{x})u \right) \Big|_{\partial\Omega} = g(\mathbf{x}), \quad (4.3.4)$$

其中  $f, g$  均为连续函数。则有  $\max_{\bar{\Omega}} u \leq C(\max_{\partial\Omega} |g| + \max_{\Omega} |f|)$ , 其中常数  $C > 0$  仅依赖于  $d, \alpha_0, \Omega$  的直径。

证明. 令  $G := \max_{\partial\Omega} |g|, F := \max_{\Omega} |f(\mathbf{x})|$ . 我们先设法构造出满足  $-\Delta w + c(\mathbf{x})w \leq 0$  的辅助函数  $w$  使得我们能够运用极大值原理 (至少能用定理4.3.2) 的结论。今不妨设  $\Omega$  直径为  $D$  且包含原点, 令  $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x})$ , 我们希望它满足

$$-\Delta w + cw \leq f - F (\leq 0) \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial N} + \alpha(\mathbf{x})w \leq g - G (\leq 0) \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (4.3.5)$$

这就要求  $\Omega$  上有  $-\Delta z + c(\mathbf{x})z \geq F$  以及边界  $\partial\Omega$  上有  $\frac{\partial z}{\partial N} + \alpha(\mathbf{x})z \geq G$ . 注意到  $\Delta(|\mathbf{x}|^2) = 2d$ , 所以为了凑出  $F$ , 我们待定  $z(\mathbf{x}) = \frac{F}{2d}(D^2 - |\mathbf{x}|^2) + A$ , 其中  $A \geq 0$  是一个待确定的常数。这样假设是因为它既能凑出  $F$  (来自  $-\Delta z$  项) 又能保证加上  $c z$  之后不产生新的负项抵消  $F$  的作用。接下来我们通过边界条件确定  $A$ , 直接计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial N} + \alpha(\mathbf{x})z &= -\frac{F}{2d}(2\mathbf{x} \cdot N) + \alpha(\mathbf{x})\left(\frac{F}{2d}(D^2 - |\mathbf{x}|^2) + A\right) \\ &\geq -\frac{F}{2d}(|\mathbf{x}|^2 + 1) + \alpha_0 A \geq -\frac{F}{2d}(d^2 + 1) + \alpha_0 A. \end{aligned}$$

所以我们如果取  $A = \frac{1}{\alpha_0}(G + \frac{F}{2d}(d^2 + 1))$ , 我们便能构造出想要的辅助函数。现在这样构造出的  $w := u - z$  用定理4.3.2得到  $w(\mathbf{x})$  的非负的最大值一定在边界  $\Omega$  取到, 不妨设该点作  $\mathbf{x}_0$ , 从而  $\frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{x}_0) \geq 0$ . 但另一方面我们又有

$$\frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{x}_0) \leq \frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x}_0)w(\mathbf{x}_0) \leq 0,$$

这导致  $w(\mathbf{x}_0) \leq 0$ , 从而  $w \leq 0$  在  $\bar{\Omega}$  上恒成立, 从而  $u \leq z \leq C(G + F)$  在  $\bar{\Omega}$  上恒成立。  $\square$

作为推论, 我们可以得到(4.3.6)解的唯一性和对源项、系数、边值的连续依赖性。

**推论 4.3.7.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是有界区域,  $c_i(\mathbf{x}) \geq 0$  有界,  $\alpha_i(\mathbf{x}) \geq \alpha_0 > 0$ , ( $i = 1, 2$ ). 若  $u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  是如下方程的解

$$-\Delta u_i + c_i(\mathbf{x})u_i = f_i(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad \left. \left( \frac{\partial u_i}{\partial N} + \alpha_i(\mathbf{x})u_i \right) \right|_{\partial\Omega} = g_i(\mathbf{x}), \quad (i = 1, 2) \quad (4.3.6)$$

其中  $f_i, g_i$  均为连续函数。则有

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq C \left[ \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| + \max_{\partial\Omega} |\alpha_1 - \alpha_2| + \max_{\Omega} |f_1 - f_2| + \max_{\Omega} |c_1 - c_2| \right].$$

其中常数  $C > 0$  仅依赖于  $d, \alpha_0, \Omega$  的直径和  $f_i, g_i$  的最大值。

**注记 4.3.1.** 本小节的最后, 我们要说明极大值原理并非证明位势方程唯一性和对边值、源项的连续依赖性的唯一方法。例如, 若考虑对应的齐次方程边值问题 ( $f = g = 0$  的情况), 我们可以采

用能量法来证明方程解的唯一性，即方程两边乘以  $u$  然后分部积分得到结论，读者可以自行思考如何证明。事实上，能量方法和极值原理的方法各有优劣之处。后者的好处是直接给出了逐点的估计，而前者只能证得  $L^2$  型的积分估计，不够精细。而后的坏处是过度依赖微分算子是二阶椭圆算子，且方程的解必须的古典解，前者在使用时可以继续对方程求导，从而求得高阶导数的估计，这是极值原理难以做到的。最后，笔者强调并非所有类型的二阶偏微分方程都有极大值原理，例如第3.1.2节的共振现象就否定了波动方程的极大原理，对波动型方程做逐点估计也基本只有靠 Sobolev 嵌入定理强行转化为高阶导数的能量估计（问题C.1.7），但正是这个想法催生了双曲偏微分方程独特的研究工具——交换向量场方法（由 Christodoulou 和 Klainerman 给出），即以“更适配于波方程光锥的”向量场替代普通导数  $\partial_t, \partial_{x_i}$ ，在保证 Sobolev 嵌入定理阶数正确的情况下，把不等式中的常数  $C$  给“加强”为关于时间、空间的衰减因子，这是研究拟线性波动方程长时间行为非常有力的工具。例如真空 Einstein 方程在平直时空 (Minkowskian) 附近的小扰动整体稳定性的证明<sup>1</sup>就是由该方法派生出的一大杰作。关于非线性波动方程的基本理论，可在具有一定傅立叶分析、实分析、泛函分析的基础上阅读如下讲义

- Jonathan Luk. Introduction to Nonlinear Wave Equations, Stanford University. <https://web.stanford.edu/~jluk/NWnotes.pdf>
- Qian WANG. Lectures on Nonlinear Wave Equation, University of Oxford. [https://people.maths.ox.ac.uk/wangq1/Lecture\\_notes/nonlinear\\_wave\\_9.pdf](https://people.maths.ox.ac.uk/wangq1/Lecture_notes/nonlinear_wave_9.pdf)

### 4.3.2 \*Harnack 不等式：对数梯度估计

极大值原理给出了椭圆方程解的极值估计，接下来我们想进一步控制解的振幅。本节证明 Harnack 不等式：在远离边界的有界子区域中， $Lu = 0$  的非负解的最小值和最大值是可比较的。

**定理 4.3.8** (Harnack 不等式). 设  $0 \leq u \in C^2(\Omega)$  是方程  $Lu = 0$  在  $\Omega$  内的解，其中算子  $L$  具有形式(4.3.2). 设  $V \Subset \Omega$  是连通自己。则存在常数  $C > 0$  (仅依赖  $V$  和  $L$  的系数) 使得如下不等式成立

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

与调和函数的 Harnack 不等式 (定理4.2.6) 相比，我们现在不再有平均值原理这一重要性质，从而定理4.2.6的“滚球法”证明不再奏效。接下来我们介绍证明 Harnack 不等式的一般方法：对数梯度估计 (logarithmic gradient estimates).

---

<sup>1</sup>这个结论的原始证明是 1993 年由 Demetrios Christodoulou 和 Sergiu Klainerman 完成的，全文超过 600 页，作为专著发表 “The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space (PMS-41)”, Princeton University Press. 后来 Hans Lindblad 和 Igor Rodnianski 注意到真空 Einstein 方程在调和度规 (harmonic gauge) 下可以写成带有“弱零条件 (weak null condition)”的拟线性波动方程组，从而将证明缩短到 77 页，见 Hans Lindblad, Igor Rodnianski: The global stability of Minkowski space-time in harmonic gauge, Annals of Mathematics, 171(3), 2010, 1401-1477.

接下来我们不妨假设  $u > 0$ , 否则考虑加上一个常值小扰动  $u + \varepsilon > 0$ . 给定  $V \Subset \Omega$ , 我们希望证明存在  $C > 0$  使得  $u(\mathbf{x}) \leq Cu(\mathbf{y})$  对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  成立. 而这个不等式等价于说  $|\ln \frac{u(\mathbf{x})}{u(\mathbf{y})}| \leq C'$  对某个常数  $C' > 0$  成立。现在再 (对函数  $g(t) := \ln u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})$ ) 用微积分基本定理和链式法则得到下式 (这种写法以后还会经常用到)

$$\ln \frac{u(\mathbf{x})}{u(\mathbf{y})} = \ln u(\mathbf{x}) - \ln u(\mathbf{y}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \int_0^1 \nabla \ln u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt,$$

所以问题就转化为证明存在常数  $C'' > 0$  使得  $\sup_V |\nabla \ln u| \leq C''$ . 这也说明了为什么我们将接下来要展现的证明方法命名为“对数梯度估计”。

有的人也许会问：为什么我们非要将 Harnack 不等式的证明转化为对数函数的估计呢？事实上我们可以考虑一个特殊情况，即调和函数的 Harnack 不等式。若  $u$  的调和函数，则  $v := \ln u$  就满足  $-\Delta v = |\nabla v|^2$ , 再令  $w = |\nabla v|^2$  可得  $\Delta w + 2\nabla w \cdot \nabla v = 2|\nabla^2 v|^2$ . 所以问题就转化为对  $v$  作内梯度估计，从而可以用习题4.3.3的方法来完成证明，这些步骤是完全不依赖平均值原理的。

为了免去不必要的麻烦，接下来我们假设  $b^i = c = 0, u > 0$  来证明 Harnack 不等式。在证明的末尾，我们会以调和函数的 Harnack 不等式为例，稍加解释辅助函数选取的方法。

**证明.** 设  $b^i = c = 0, u > 0$ . 令  $v = \ln u$ , 则直接计算可得

$$u = e^v, \quad \partial_i u = e^v \partial_i v, \quad \partial_i \partial_j v = e^v (\partial_i v \partial_j v + \partial_i \partial_j v),$$

代入  $Lu = 0$  得到  $a^{ij}(\partial_i \partial_j v + \partial_i v \partial_j v) = 0$  在  $\Omega$  中成立。现在令  $w := a^{ij} \partial_i v \partial_j v$ , 则上式表明  $w = -a^{ij} \partial_i \partial_j v$ . 接下来我们作出断言

**断言.** 令  $b^k := -2a^{kl} \partial_l v$ . 则

$$-a^{kl} \partial_k \partial_l w + b^k \partial_k w \leq -\frac{\theta^2}{2} |\nabla^2 v|^2 + C |\nabla v|^2. \quad (4.3.7)$$

断言的证明包含巨量的无聊计算，我们暂时先跳过它来看看断言成立之后能推出什么。

今选取光滑截断函数  $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$  满足  $0 \leq \zeta \leq 1, \zeta|_V = 1$ , 并定义辅助函数  $z = \zeta^4 w$  将  $w$  的取值局限在  $V$  里面。假设  $z$  在某点  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  取得最大值，从而对  $1 \leq k \leq d$  有  $\partial_k z(\mathbf{x}_0) = 0$ , 从而

$$0 = \partial_k z = \zeta^4 \partial_k w + 4\zeta^3 w \partial_k \zeta \Rightarrow \zeta \partial_k w + 4(\partial_k \zeta)w = 0,$$

以及

$$\partial_k \partial_l z = \zeta^4 \partial_k \partial_l w + 4\zeta^3 \partial_l \zeta \partial_k w + 12\zeta^2 \partial_l \zeta + \partial_k \zeta w + 4\zeta^3 \partial_k \partial_l \zeta w + 4\zeta^3 \partial_k \zeta \partial_l w.$$

接下来计算

$$\begin{aligned}
 & -a^{kl}\partial_k\partial_l z + b^k\partial_k z \\
 & = \zeta^4(-a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k\partial_k w) - 12a^{kl}(\zeta^2\partial_l\zeta\partial_k\zeta)w - 4a^{kl}(\zeta^3\partial_k\zeta)\partial_l w - 4a^{kl}\zeta^3\partial_k\partial_l\zeta w + 4b^k\zeta^3\partial_k\zeta w \\
 & = \zeta^4(-a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k\partial_k w) + O(\zeta^3|\nabla w| + \zeta^2 w + |\nabla v|\zeta^3|w|)
 \end{aligned}$$

其中最后一项中的  $|\nabla v|$  是由不等式  $|b^k| \leq C|\nabla v|$  给出的。

在  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  处, 我们有  $\partial_k z = 0$ ,  $-a^{kl}\partial_k\partial_l z \geq 0$  (因为 Hessian 矩阵  $\nabla^2 z$  是半负定的), 所以得到

$$0 \leq \zeta^4(-a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k\partial_k w) + C'(\zeta^3|\nabla w| + \zeta^2|w| + |\nabla v|\zeta^3|w|). \quad (4.3.8)$$

据(4.3.7), (4.3.8) 以及一致椭圆条件, 得到

$$0 \leq \zeta^4(-\frac{\theta^2}{2}|\nabla^2 v|^2 + C|\nabla v|^2) + C'(\zeta^3|\nabla w| + \zeta^2|w| + |\nabla v|\zeta^3|w|), \quad \text{at } \mathbf{x}_0.$$

由于  $w = -a^{ij}\partial_i\partial_j v$ , 我们实际上得到

$$\zeta^4 w^2 \leq C''(\zeta^4|\nabla v|^2 + \zeta^3|\nabla w| + \zeta^2|w| + \zeta^3|\nabla v||w|), \quad \text{at } \mathbf{x}_0 \quad (4.3.9)$$

接下来我们分析如上不等式的右边

- $\zeta^3|\nabla v||w| = (\zeta^2|\nabla v|)\zeta w \leq \varepsilon w \zeta^4 |\nabla v|^2 + w C_\varepsilon \eta^2 \leq \frac{\varepsilon}{\theta} \zeta^4 w^2 + C(\varepsilon) w \zeta^2$ . 此处我们用了带  $\varepsilon$  的 Young 不等式, 以及  $\theta|\nabla v|^2 \leq w$ , 它由  $w = a^{ij}\partial_i v \partial_j v$  得到.
- $\zeta^4|\nabla w|$ . 回忆我们有  $\zeta\partial_k w + 4\partial_k\zeta w = 0$ , 它表明  $|\zeta\nabla w| \leq C|w|$ , 从而  $\zeta^3|\nabla w| \leq C\zeta^2|w|$ .
- $\zeta^4|\nabla v|^2 \leq \zeta^2|\nabla v|^2 \leq \frac{\zeta^2 w}{\theta}$ .

把上述估计代入 (4.3.9), 得到存在常数  $C_1, C_2 > 0, \varepsilon > 0$ , 使得在  $\mathbf{x}_0$  处成立  $\zeta^4 w^2 \leq C_1 \varepsilon \zeta^4 w^2 + C_2 \zeta^2 w$ . 今选取  $\varepsilon < \frac{1}{2C_1}$ , 得到

$$\zeta^4 w^2 \leq 2C_2 \zeta^2 w \Rightarrow z = \zeta^4 w \leq 2C_2 \zeta^2 \leq 2C_2, \quad \text{at } \mathbf{x}_0.$$

由于  $z = \zeta^4 w$  在  $\mathbf{x}_0$  达到最大以及  $\zeta|_V = 1$ , 结合  $w \geq \theta|\nabla v|^2$  知存在  $C_0 > 0$  满足  $|\nabla v| \leq C_0$ .

接下来只需证明断言成立。直接计算可得

$$\partial_l w = \partial_l a^{ij}(\partial_i v \partial_j v) + 2a^{ij}\partial_l\partial_i v \partial_j v, \quad \partial_k\partial_l w = 2a^{ij}\partial_l\partial_i v \partial_k\partial_j v + 2a^{ij}\partial_k\partial_l v \partial_i v \partial_j v + R$$

其中  $R := \partial_k\partial_l a^{ij} \partial_i v \partial_j v + 2\partial_l a^{ij} \partial_k \partial_i v \partial_j v + 2\partial_k a^{ij} \partial_l \partial_i v \partial_j v$ , 其满足: 对  $\varepsilon > 0$ , 成立  $|R| \leq C(|\nabla v|^2 +$

$|\nabla v||\nabla^2 v| \leq \varepsilon |\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon) |\nabla v|^2$ . 因此现在得到

$$-a^{kl}\partial_k\partial_l w = -R - 2a^{kl}a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v) - 2a^{kl}a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v \partial_j v. \quad (4.3.10)$$

该式的第1项可以由一致椭圆条件控制, 因为系数矩阵  $\{a^{ij}\}$  是严格正定的实对称方阵, 故存在方阵  $P$  使得  $\{a^{ij}\} = P^\top P$ , 进而有  $a^{kl}a^{ij}(\partial_l\partial_i v)(\partial_j\partial_k v) = (\nabla^2 v \cdot P) \cdot (\nabla^2 v \cdot P)^\top \geq \theta^2 |\nabla^2 v|^2$ . (4.3.10) 中的第2项包含了三阶导数, 我们可以利用  $w = a^{kl}\partial_k\partial_l v$  将其降阶:

$$\begin{aligned} -a^{kl}a^{ij}\partial_k\partial_l\partial_i v \partial_j v &= -a^{ij}\partial_j v a^{lk}\partial_i\partial_k\partial_l v = -a^{ij}\partial_j v (\partial_i(a^{kl}\partial_k\partial_l v) - \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v) \\ &= -a^{ij}\partial_j v (\partial_i w - \partial_i a^{lk}\partial_k\partial_l v) = -\frac{1}{2} b^i \partial_i w + a^{ij}\partial_i a^{lk}\partial_j v \partial_k\partial_l v. \end{aligned}$$

我们把上述两项代入(4.3.10), 并结合  $|R|$  的估计, 就得到

$$\begin{aligned} -a^{kl}\partial_k\partial_l w + b^k \partial_k w &\leq |R| - \theta^2 |\nabla v|^2 + |a^{ij}\partial_j a^{lk}\partial_k\partial_l v| \\ &\leq |R| - \theta^2 |\nabla^2 v|^2 + C |\nabla v| |\nabla^2 v| \leq \varepsilon |\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon) |\nabla v|^2 - \theta^2 |\nabla^2 v|^2 \\ &\leq -\frac{\theta^2}{2} |\nabla^2 v|^2 + C(\varepsilon) |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

其中我们用到了带  $\varepsilon$  的 Young 不等式, 并取  $\varepsilon \in (0, \frac{\theta^2}{2})$  把带  $\varepsilon$  的项吸收掉。断言证毕。  $\square$

**注记 4.3.2** (辅助函数  $\zeta^4 w$  的选取). 读者也许会问为什么在辅助函数里面把  $\zeta$  的幂次取成 4, 而不是像内梯度估计 (习题4.3.3) 那样取成 2 或者是其它幂次? 这也许可以从调和函数 Harnack 不等式的证明里面看出来。今假设  $L = -\Delta u$ ,  $\Omega = B(\mathbf{0}, 1)$ ,  $V = B(\mathbf{0}, \frac{1}{2})$ , 设有光滑截断函数  $\varphi$  满足  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi|_V = 1$ , 我们计算  $\Delta(\varphi w)$  得到

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi w) + 2\nabla w \cdot \nabla(\varphi w) &= 2\varphi |\nabla^2 v|^2 + 2(\nabla\varphi) \cdot (\nabla^2 v) \cdot (\nabla v)^\top + 2w \nabla\varphi \cdot \nabla v + (\Delta\varphi)w \\ &\geq \varphi |\nabla^2 v|^2 - 2|\nabla\varphi| |\nabla v|^3 + \left( \Delta\varphi - \frac{4|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \right) |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

若选取  $\varphi = \zeta^4$  并结合不等式  $|\nabla^2 v|^2 \geq \sum_{i=1}^d \partial_i^2 v \geq \frac{1}{d} (\Delta v)^2 = \frac{|\nabla v|^4}{d} = \frac{w^2}{d}$  则可以证明  $\Delta(\varphi w) + 2\nabla w \cdot \nabla(\varphi w)$  具有不依赖  $v$  的下界 (因为下式第一行右边诸项皆为  $\zeta |\nabla v|$  的幂次, 且是首项系数为正的四次多项式, 故一定有下界)

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta^4 w) + 2\nabla w \cdot \nabla(\zeta^4 w) &\geq \frac{1}{d} \zeta^4 |\nabla v|^4 - 8\zeta^3 |\nabla\zeta| |\nabla v|^3 + 4\zeta^2 (\zeta \Delta\zeta - 13 |\nabla\zeta|^2) |\nabla v|^2 \\ &\stackrel{t=\zeta |\nabla v|}{=} \frac{1}{2d} \zeta^4 w^2 + \frac{t^4}{2d} - 8|\nabla\zeta| t^3 + 4(\zeta \Delta\zeta - 13 |\nabla\zeta|^2) t^2 \geq -C' \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

我们现在保留  $\frac{1}{2d}\zeta^4 w^2$  这项是因为最终我们要估计  $\zeta^4 w$  的最大值。假设  $\zeta^4 w$  在内点  $\mathbf{x}_0 \in B_1$  取到最大值，那么有  $\nabla(\zeta^4 w) = 0$  以及  $\Delta(\zeta^4 w) \leq 0$  在  $\mathbf{x}_0$  处成立，进而得到  $\zeta^4 w^2(\mathbf{x}_0) \leq 2C'd$ . 这个  $C'$  现在依赖于维数  $d$  和截断函数  $\zeta$ . 若  $w(\mathbf{x}_0) \geq 1$ , 则  $\zeta^4 w^2(\mathbf{x}_0) \leq 2C'd$ ; 否则我们有  $\zeta^4 w(\mathbf{x}_0) \leq \zeta^4(\mathbf{x}_0)$ . 所以无论如何都存在只依赖维数的常数  $C > 0$  使得  $\zeta^4 w \leq C$  在  $B_1$  中恒成立。

如果我们将  $\varphi = \zeta^4$  换成  $\zeta^2$ , 则会算出

$$\Delta(\zeta^2 w) + 2\nabla w \cdot \nabla(\zeta^2 w) \geq \frac{1}{d}\zeta^2 |\nabla v|^4 - 4\zeta |\nabla \zeta| |\nabla v|^3 + 2\zeta \Delta \zeta |\nabla v|^2 - \underline{16|\nabla \zeta|^2 |\nabla v|^2}.$$

这样的话，上述不等式右边就不再是  $t' := \sqrt{\zeta} |\nabla v|$  的多项式（因为出现了带下划线的项），进而不能保证不等式右边有不依赖  $v$  的下界估计。

### 习题 4.3

本节习题均假设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域。

**习题 4.3.1.** 设  $u$  是方程  $-a^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$  在  $\Omega$  内的光滑解，系数  $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ . 证明：

$$\max_{\Omega} |\nabla u| \leq C(\max_{\partial\Omega} |\nabla u| + \max_{\partial\Omega} |u|).$$

提示：令  $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$ , 选取充分大的  $\lambda$  使得  $Lv \leq 0$  在  $\Omega$  中恒成立。

**习题 4.3.2.** 设  $u$  是方程  $-a^{ij}\partial_i\partial_j u = f$  in  $\Omega$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  的光滑解，其中  $f$  有界。固定  $\mathbf{x}^0 \in \partial\Omega$ , 我们称  $C^2$  函数  $w$  是  $\mathbf{x}^0$  处的闸函数 (barrier function) 是指  $w$  满足如下条件：

$$Lw \geq 1 \text{ in } \Omega, \quad w(\mathbf{x}^0) = 0, \quad w \geq 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

证明：若  $w$  是  $\mathbf{x}^0$  处的一个闸函数，则存在常数  $C > 0$  使得  $|\nabla u(\mathbf{x}^0)| \leq C \left| \frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{x}^0) \right|$ .

**习题 4.3.3 (内梯度估计).** 设  $u \in C^3(B_1) \cap C^1(\overline{B_1})$  是单位球  $B_1$  内的调和函数。不用平均值原理证明：存在常数  $C > 0$ , 使得  $\max_{B_{\frac{1}{2}}} |\nabla u| \leq C \max_{\partial B_1} |u|$  成立。

提示：选取辅助函数  $\varphi = \zeta^2 \in C_c^2(B_1)$  使得存在  $C' > 0$  满足不等式  $\Delta(\varphi |\nabla u|^2) \geq -C' |\nabla u|^2$ , 其中  $\zeta$  如注记 4.3.2 中那样定义。然后再用  $\Delta(u^2) = 2|\nabla u|^2$  得到结论。

**习题 4.3.4.** 证明推论 4.3.7.

**习题 4.3.5.** 设  $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  ( $i = 1, 2$ ) 是如下方程的解

$$-\Delta u_i + c_i(\mathbf{x})u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u_i|_{\partial\Omega} = g_i(\mathbf{x}).$$

若  $c_2(\mathbf{x}) \geq c_1(\mathbf{x}) \geq 0$  和  $g_2(\mathbf{x}) \geq g_1(\mathbf{x}) \geq 0$  恒成立，证明： $u_1(\mathbf{x}) \geq u_2(\mathbf{x})$  在  $\overline{\Omega}$  上恒成立。

提示：先证明  $u_i \geq 0$ , 再考虑  $u_1 - u_2$  满足的方程和边值条件。

**习题 4.3.6.** 设  $B \subset \mathbb{R}^d$  是单位球,  $u \in C^2(B)$  不恒为零且满足  $u(\mathbf{0}) = 0$ . 证明：对任意  $\alpha > 0$ , 存在  $\mathbf{x}_0 \in B$  使得  $\Delta u(\mathbf{x}_0) < \alpha u(\mathbf{x}_0)$ .

提示：反证法，然后用定理4.3.5.

**习题 4.3.7.** 设空间维数  $d \geq 2$ , 点  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , 函数  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \{\mathbf{x}_0\})$  满足如下方程

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}} = g.$$

这里  $f, g$  分别为  $\Omega, \partial\Omega$  上的连续函数。

(1) 证明有界解的唯一性。

(2) 若  $f = 0$ , 且存在常数  $M_0 > 0$  使得  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |u(\mathbf{x})| \leq M_0$ . 证明：

$$\sup_{\Omega} |u(\mathbf{x})| \leq \max \left\{ M_0, \sup_{\partial\Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}} |g(\mathbf{x})| \right\}.$$

提示：(1) 只用证明齐次方程 ( $f, g$  皆为零) 时方程的有界解必为零, 为此在  $\Omega \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)$  上考虑辅助函数  $w(\mathbf{x}) = \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{2-d} \pm u(\mathbf{x})$  ( $d \geq 3$ ) 或  $w(\mathbf{x}) = \varepsilon (\ln D - \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \pm u(\mathbf{x})$ , 其中  $D$  为区域  $\Omega$  的直径。之后依次令  $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ . (2) 在  $\Omega \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)$  上用极值原理, 再令  $\delta \rightarrow 0$ .

### 问题 4.3

**问题 4.3.1.** 设  $B_R = B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^2$ , 半径  $R < 1$ . 考虑如下方程

$$\Delta u = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|\mathbf{x}|^2} \left( \frac{4}{\sqrt{-\ln |\mathbf{x}|}} + \frac{1}{2(-\ln |\mathbf{x}|)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

其中右端项在  $\overline{B_R}$  上连续 (如果将设它在原点处取值为 0). 令  $u(\mathbf{x}) := \sqrt{-\ln |\mathbf{x}|}(x_1^2 - x_2^2)$ . 证明：

- (1)  $u \in C(\overline{B_R}) \cap C^\infty(\overline{B_R} \setminus \{\mathbf{0}\})$  在  $B_R \setminus \{\mathbf{0}\}$  中满足上述方程, 且在边界  $\partial B_R$  上有  $u = \sqrt{-\ln R}(x_1^2 - x_2^2)$ .
- (2)  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \partial_1^2 u = \infty$ , 进而得到  $u \notin C^2(B_R)$ .

**问题 4.3.2.** 证明：问题4.3.1中的方程没有属于  $C^2(B_R)$  的古典解。

提示：反证法, 若存在这样的古典解  $v \in C^2(B_R)$ , 则考虑  $w = u - v$ , 其中  $u$  的定义如问题4.3.1所述。可见  $w$  是调和函数, 且在去心圆盘  $B_R \setminus \{\mathbf{0}\}$  上有界, 利用定理4.2.12将其延拓为整个圆盘上的调和函数, 从而属于  $C^2(B_R)$ . 这与问题4.3.1的结论矛盾。



# 第五章 位势方程的求解与 Schauder 估计

在第三章，我们对特殊区域内的调和函数进行了显式求解。本章将讨论非齐次方程（又称位势方程、泊松方程）在全空间  $\mathbb{R}^d$  以及如下 Dirichlet 边值问题的解法

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

前者的解最终可以写作非齐次项  $f$  与  $(-\Delta)$  算子基本解  $\Phi$  的卷积，后者的解则可以借助格林函数表示，而格林函数的一个实例则是静电力学中的“电像法”。本章的后三节（目前还处于放鸽子的状态）则讨论位势方程在 Hölder 连续函数空间的  $C^{2,\alpha}$  正则性估计以及 Dirichlet 边值问题解的存在性。之所以选用 Hölder 连续函数空间，是因为我们可以证明类似于 “ $f \in C^{0,\alpha} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}$  ( $\alpha \in (0, 1)$ )” 的提高二阶正则性的结论，这与方程  $-\Delta u = f$  是“二阶”偏微分方程这一事实相契合。另一方面，在问题4.3.1-4.3.2中我们也证明了  $\alpha = 0$  时， $f \in C(\Omega)$  未必能推出解  $u \in C^2(\Omega)$ .

## 5.1 欧氏空间情况的求解

设  $\Omega = \mathbb{R}^d$ ，本节将证明  $-\Delta u = f$  的古典解就是基本解  $\Phi$  和非齐次项  $f$  的卷积。

**定理 5.1.1** ( $\mathbb{R}^d$  中的位势方程). 设维数  $d \geq 2$ . 给定  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ , 定义  $u(\mathbf{x})$  如下

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} & d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}} d\mathbf{y} & d \geq 3 \end{cases}.$$

则

- (1)  $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ,
- (2)  $-\Delta u = f$  在  $\mathbb{R}^d$  中恒成立。

**证明.** (1) 的证明并不困难，这是因为  $f$  本身已经具有  $C^2$  的可微性，所以我们可以直接将导数求

到卷积里面的  $f$  上面。事实上，我们有

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} == \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

进而

$$\frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - u(\mathbf{x})}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h}.$$

由于  $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$  具有紧支集，所以我们有

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{h} \xrightarrow{\text{一致收敛}} \partial_{x_i} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \quad \text{as } h \rightarrow 0,$$

这样的话我们就可以把积分号  $\int$  和  $\lim_{h \rightarrow 0}$  交换：

$$\partial_{x_i} u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{y}) \partial_{x_i} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

类似地，对任意  $1 \leq i, j \leq d$ ，我们有

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{y}) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

该式作为  $\mathbf{x}$  变量的函数是连续函数。

接下来证明  $u$  是  $\mathbb{R}^d$  中位势方程的解。需注意的是，当我们把 Laplace 算子作用在卷积式子上的时候，我们需要分部积分两次，将 Laplace 算子转移到基本解  $\Phi$  上（因为我们已知  $-\Delta \Phi = 0$  在原点以外的区域成立），但是  $\Phi$  本身在原点处具有奇性，所以我们在分部积分之前需要挖掉原点的一个小邻域  $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ ，然后单独估计  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  上的曲面积分。

今将  $\Delta u$  拆分成靠近原点和远离原点的两部分，分别记作  $I_\varepsilon, J_\varepsilon$

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_x f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_x f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} =: I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

首先我们可以证明靠近原点的部分，即  $I_\varepsilon$ ，具有小性。事实上我们有

$$|I_\varepsilon| \leq \max_{\mathbb{R}^d} |\Delta f| \cdot \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & d = 2 \\ C\varepsilon^2 & d \geq 3 \end{cases}.$$

这里  $\int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}$  的阶数可以通过积分的极坐标表示 (引理B.2.1) 计算出来, 以  $d \geq 3$  为例有:

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} &= \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \rho^{d-1} \underbrace{\frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \rho^{2-d}}_{=\Phi|_{\{|\mathbf{x}|=\rho\}}} dS_x d\rho \\ &= \underbrace{\text{Area}(\partial B(\mathbf{0}, 1))}_{d\alpha(d)} \cdot \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \int_0^\varepsilon \rho d\rho = \frac{\varepsilon^2}{2(d-2)}. \end{aligned}$$

对  $J_\varepsilon$ , 我们希望通过分部积分将  $\Delta$  算子转移到  $\Phi$  上。第一次分部积分可得

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \nabla \Phi(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial \nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &=: K_\varepsilon + L_\varepsilon. \end{aligned}$$

这里  $\nu$  是  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  的单位内法向量, 因为它实际上是外区域  $\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  的单位外法向量. 由于  $\Phi$  是径向函数,  $|\partial f|$  又关于  $\varepsilon$  一致有界 (因为  $f$  是紧支连续函数, 所以必有界), 那么我们可以期待  $L_\varepsilon$  也具有小性: 因为球面  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  的面积是  $O(\varepsilon^{d-1})$  阶, 而基本解在球面  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  的阶为  $O(\ln \varepsilon)$  或  $O(\varepsilon^{2-d})$ .

$$|L_\varepsilon| \leq \max_{\mathbb{R}^d} |\nabla f| \cdot \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} |\Phi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon| & d = 2 \\ C\varepsilon & d \geq 3 \end{cases}.$$

对  $K_\varepsilon$ , 我们再次分部积分, 内部项因为  $\Delta \Phi = 0$  而消失, 所以只需分析边界项。

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \underbrace{\Delta \Phi(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{=0} d\mathbf{y} - \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y \\ &= - \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y. \end{aligned}$$

现在我们对该曲面积分作进一步化简。由于  $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  是一个球体, 所以它边界上  $\mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  这一点处的单位内法向量可以显式写出, 即  $\nu(\mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} = -\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}$ . 注意, 这里第一个等号成立是因为法向量的方向恰好就是径向, 而第二个等号成立是因为这个球面的半径是  $\varepsilon$ . 而在  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  上, 我们可

以显式计算  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y})$  如下 (以  $d \geq 3$  为例,  $d = 2$  时计算结果是一样的) :

$$\partial_{y_i} \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \cdot (2-d) \cdot \frac{1}{|\mathbf{y}|^{d-1}} \cdot \frac{y_i}{|\mathbf{y}|} = -\frac{y_i}{d\alpha(d)|\mathbf{y}|^d} \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

从而

$$\nabla \Phi(\mathbf{y}) = -\frac{1}{d\alpha(d)} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^d} = -\frac{1}{d\alpha(d)} \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon^d} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial B(\mathbf{0}, \varepsilon).$$

这样的话  $K_\varepsilon$  里面的被积函数可以化简为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y}) = \nu \cdot \nabla \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{d\alpha(d)\varepsilon^{d-1}} \quad \text{on } \partial B(\mathbf{0}, \varepsilon).$$

由于  $d\alpha(d)\varepsilon^{d-1}$  恰好等于球面  $\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)$  的表面积, 所以  $K_\varepsilon$  实际上就是  $-f$  在球面  $\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  上的积分平均值。当半径  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  时, 据  $f$  的连续性, 该积分平均收敛到被积函数在球心处的取值, 即

$$K_\varepsilon = - \oint_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_y = - \oint_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} f(\mathbf{y}) dS_y \rightarrow -f(\mathbf{x}), \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0_+.$$

□

**注记 5.1.1 (唯一性).** 我们并不能得出  $\mathbb{R}^d$  上的位势方程  $-\Delta u = f$  的解具有唯一性 (哪怕假设解是有界的), 这是因为只要  $u$  是这个方程的解, 那么对任意  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $u(\mathbf{x}) + Ax_1 + B$  也是同一个方程的解。

**注记 5.1.2 (“基本解”的理解).** 事实上, 基本解  $\Phi$  可以视作  $\mathbb{R}^d$  中的方程  $-\Delta \Phi = \delta$  的解 (在分布意义上), 其中  $\delta$  为原点处的 Dirac delta “函数”, 它实际上是卷积运算的单位元, 即  $\delta * f = f$ . 从这个角度看, 我们很容易得到位势方程的解为

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} -\Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = (\delta * f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}).$$

严格的理论则需要引入“分布”(或称“广义函数”)这个概念来叙述, 见 Stein[16, 第三章]。

**注记 5.1.3 (物理实例).** 物理上, 位势方程的解有如下例子对应

- 基本解  $\Phi$  可以视作原点处的点电荷产生电场的静电势函数 (可能需要乘以某些常数).
- 不可压缩无旋流体的势函数。这里说流体是不可压缩的是指  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , 即为连续性方程  $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$  中密度  $\rho$  等于常值的情况。而速度场无旋则表明  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , 等价地我们可以将无旋场写成势函数的梯度, 即  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . 这样的话  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  就等价于  $\Delta \phi = 0$ .
- 重力位势, 它往往在自引力星体 (self-gravitational star/planet) 的运动方程里面出现, 其满足  $\Delta \phi = -4\pi G\rho$ , 其中  $G > 0$  是引力常数,  $\rho$  是星体的密度。

## 习题 5.1

**习题 5.1.1** (Poisson 方程边值问题的均值公式). 设  $u$  在球  $B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 3$ ) 内满足位势方程

$$-\Delta u = f \text{ in } B(\mathbf{0}, r), \quad u = g \text{ on } \partial B(\mathbf{0}, r).$$

模仿平均值原理 (定理4.2.1) 的证明方法, 证明:

$$u(\mathbf{0}) = \oint_{\partial B(\mathbf{0}, r)} g \, dS + \frac{1}{d(d-2)\alpha(d)} \int_{B(\mathbf{0}, r)} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} - \frac{1}{r^{d-2}} \right) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

## 5.2 边值问题的格林函数方法

在第三章, 我们讨论了在特殊区域如何求解给定 Dirichlet 边值的调和函数, 而本节则考虑在一般区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  内求解位势方程

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \tag{5.2.1}$$

当  $\Omega$  是二维平面上的圆盘时, 我们也许可以找到函数  $\phi$  使得  $-\Delta\phi = f$ . 这样的话  $u - \phi$  就是  $\Omega$  内的调和函数, 进而可以显式求解。例如考虑方程

$$\Delta u = x^2 + y^4 \text{ in } B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} = 0.$$

我们不难发现  $\Delta(\underbrace{\frac{x^4}{12} + \frac{y^6}{30}}_{=: \phi}) = x^2 + y^4$ , 所以就只要求解

$$\Delta(u - \phi) = 0, \quad u - \phi|_{\partial B(0, 1)} = -\frac{x^4}{12} - \frac{y^6}{30},$$

而该方程可以在极坐标下得到显式解。

然而对一般区域  $\Omega$ , 我们很难找到“特解”  $\phi$  使得  $-\Delta\phi = f$ , 所以必须另辟方法求解一般区域内的位势方程。

### 5.2.1 格林函数的形式推导

今假设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑的有界区域, 我们希望找到一个比较有普适性的公式来表示如下位势方程的解

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

为此, 我们回忆第二 Green 恒等式 (命题B.1.3(3))

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \, dS_x.$$

该恒等式可由  $\int_{\Omega} u\Delta v \, dx$  和  $-\int_{\Omega} v\Delta u \, dx$  各自分部积分一次得到, 接下来它将发挥重要作用。

设  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , 固定  $x \in \Omega$  并选取充分小的  $\varepsilon > 0$  使得  $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$ . 现在我们选取积分区域为  $V_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ , 第二 Green 恒等式中的函数为  $u(y)$  和  $\Phi(y - x)$ , 于是有

$$\int_{V_\varepsilon} u(y)\Delta\Phi(y - x) - \Phi(y - x)\Delta u(y) \, dy = \int_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial N}(y - x) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial N}(y) \, dS_y, \quad (5.2.2)$$

其中  $N$  为  $\partial V_\varepsilon$  的单位外法向量。

有一个很直接的问题, 为什么这样选取被积函数和积分区域? 首先, 积分区域的选取不难理解, 因为基本解  $\Phi$  在原点处具有奇性, 在分部积分时需要避开它。而另一方面, 我们模仿定理5.1.1的证明就能发现, (5.2.2)的右端第二项在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时的极限就是  $u(x)$ . 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial N}(y - x) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial N}(y) \, dS_y \\ &= \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial N}(y - x) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial N}(y) \, dS_y + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y - x) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \, dS_y, \end{aligned}$$

以及

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \, dS_y \right| \leq C\varepsilon^{d-1} \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| = \begin{cases} C\varepsilon \ln \varepsilon & d = 2 \\ C\varepsilon & d \geq 3 \end{cases},$$

和

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y - x) \, dS_y = \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \, dS_y \rightarrow u(x) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

其中  $\nu$  是球面  $\partial B(x, \varepsilon)$  的单位内法向量, 这是因为  $\partial B(x, \varepsilon)$  作为  $\partial V_\varepsilon$  的边界时的定向与它作为  $B(x, \varepsilon)$  边界时的定向相反。

而在(5.2.2)的左边, 第一项里面有  $\Delta\Phi(y - x) = 0$  对任意  $y \in V_\varepsilon$  成立. 所以在(5.2.2)两边取极

限  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 我们得到

$$-\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial N}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{y}) dS_y + u(\mathbf{x}).$$

我们将  $u$  从第二 Green 恒等式中还原出来

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial N}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dS_y - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.2.3)$$

但是, 从求解位势方程边值问题的角度来看, (5.2.3)式并不是结束, 因为这里面  $u$  的 Neumann 边值, 即  $\frac{\partial u}{\partial N}$  的边值, 是未知的。事实上, 对位势方程(5.2.1)来说, 我们不可能同时施加 Dirichlet 边值和 Neumann 边值, 否则该问题就变成超定问题, 未必存在解。对 Dirichlet 边值问题而言, 我们需要进一步化简恒等式(5.2.3), 使得未知项  $\frac{\partial u}{\partial N}$  在该式中消失。为此, 我们对每个固定的  $\mathbf{x} \in \Omega$  可以引进一个修正项 (correct), 记作  $\psi^x(\mathbf{y})$ , 其定义为  $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})|_{\mathbf{y} \in \partial\Omega}$  在  $\Omega$  内部的调和延拓 (作为  $\mathbf{y}$  变量的函数):

$$\begin{cases} -\Delta \psi^x(\mathbf{y}) = 0 & \mathbf{y} \in \Omega, \\ \psi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \mathbf{y} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

据此, 我们再用第二 Green 恒等式, 就得到

$$-\int_{\Omega} \psi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \psi^x}{\partial N}(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial N}(\mathbf{y}) dS_y. \quad (5.2.4)$$

现在我们可以定义格林函数了

**定义 5.2.1.** 区域  $\Omega$  对应的格林函数 (Green's function) 的定义为

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \psi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

据此, 我们可以用  $\Delta u$ ,  $u|_{\partial\Omega}$  和格林函数  $G$  写出  $u(\mathbf{x})$  的表达式

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

**定理 5.2.1** (位势方程 Dirichlet 边值问题解的表达式). 若  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  是如下位势方程的解

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g,$$

则有

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y + \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.2.5)$$

**注记 5.2.1.** 回忆基本解  $\Phi$  可以视作欧氏空间中方程  $-\Delta\Phi = \delta_0$  的解。那么现在格林函数  $G$  (固定  $\mathbf{x}$ , 作为  $\mathbf{y}$  的函数) 可以类似地视作如下方程的解

$$-\Delta G = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G|_{\partial\Omega} = 0.$$

物理上, 我们可以想象  $\Omega$  是一个导体, 其表面接地 (对应表面电势  $G|_{\partial\Omega} = 0$ ), 而在  $\mathbf{x} \in \Omega$  处有一个带正电的点电荷, 这样的话在  $\mathbf{y} \in \Omega$  处由该点电荷产生的电势即为  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

## 5.2.2 格林函数的对称性

格林函数具有对称性, 这在我们作具体计算时会用到。

**命题 5.2.2** (格林函数的对称性). 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , 必有  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

**证明.** 固定  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , 并取充分小的  $\varepsilon > 0$  使得  $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cup B(\mathbf{y}, \varepsilon) \subset \Omega$  以及  $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap B(\mathbf{y}, \varepsilon) = \emptyset$ . 记  $v(\mathbf{z}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ,  $w(\mathbf{z}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in \Omega$ . 则  $\Delta v = \Delta w = 0$  在  $V := \Omega \setminus (\overline{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \cup \overline{B(\mathbf{y}, \varepsilon)})$  中恒成立, 且在  $\partial\Omega$  上有  $v, w = 0$ . 据第二 Green 恒等式, 有

$$\int_V v(\mathbf{z}) \Delta w(\mathbf{z}) - w(\mathbf{z}) \Delta v(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\partial V} v(\mathbf{z}) \frac{\partial w}{\partial N}(\mathbf{z}) - w(\mathbf{z}) \frac{\partial v}{\partial N}(\mathbf{z}) dS_z.$$

上式左边等于零。关于右边, 我们知道边界  $\partial V$  由两部分组成: 区域边界  $\partial\Omega$  和球面  $\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cup \partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)$ . 由于  $v, w$  在  $\partial\Omega$  恒为零, 所以有

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{z}) - v(\mathbf{z}) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_z = \int_{\partial B(\mathbf{y}, \varepsilon)} v(\mathbf{z}) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{z}) - w(\mathbf{z}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_z, \quad (5.2.6)$$

其中  $\nu$  是这两个球面的单位内法向量。而  $w$  在  $\mathbf{x}$  附近是光滑函数,  $v(\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \psi^x(\mathbf{z})$  中  $\psi^x(\mathbf{z})$  也是光滑函数, 所以模仿定理 5.1.1 的证明过程有

$$\left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} v(\mathbf{z}) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_z \right| \leq C\varepsilon^{d-1} \max_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} |v| = \begin{cases} C\varepsilon \ln \varepsilon & d = 2 \\ C\varepsilon & d \geq 3 \end{cases}.$$

另一方面, 由于  $v(\mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{z} - \mathbf{x}) - \psi^x(\mathbf{z})$ , 计算可得

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_z = \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) dS_z - \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial \psi^x}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_z.$$

由于  $\psi^x$  在  $\Omega$  内是光滑函数,  $w$  也在  $\mathbf{x}$  附近光滑, 所以上式第二项在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时收敛到零。因此我们有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\partial B(\mathbf{x}, \varepsilon)} w(\mathbf{z}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} = w(\mathbf{x}),$$

其中最后一步的证明仍然与定理5.1.1的证明类似。

至此, 我们证明了当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, (5.2.6)的左边收敛到  $w(\mathbf{x})$ . 类似可以证明(5.2.6)右边收敛到  $v(\mathbf{y})$ , 这就表明  $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .  $\square$

### 5.2.3 两个实例计算

本节我们在半空间和球体这两个特殊区域内计算格林函数的显式表达式。

**例 5.2.1** (半空间的格林函数). 在一些特殊区域内, 格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  的表达式可以显式计算出来。今考虑区域为半空间的情况

$$\Omega := \mathbb{R}_+^d = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$$

**记号 5.2.1.** 对点  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$ , 我们定义它关于  $\{x_d = 0\}$  的对称点为  $\bar{\mathbf{x}} := (x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d)$ .

从定理5.2.1的角度来看, 我们只需找到半空间  $\mathbb{R}_+^d$  对应的格林函数中那个“修正项”  $\psi^x$  的表达式, 而此时  $\psi^x$  的可以通过将基本解  $\Phi$  在  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$  处的奇性反射到下半空间的  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_-^d$ . 对  $\mathbf{y} \in \partial \mathbb{R}_+^d$ , 令  $\psi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})$ , 从而

$$\Delta \psi^x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^d, \quad \psi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{on } \partial \mathbb{R}_+^d.$$

这样  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})$  就应该是我们想要的格林函数的表达式。

**注记 5.2.2.** 上述寻找格林函数的方法实际上就是静电学中的“电像法”。以半空间的情况为例, 我们实际上就是在做下面这件事:

真空中有一带正电的点电荷放在  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$  处, 而  $\{x_d = 0\}$  是一个接地的导体平面, 求电势分布。

而我们在高中物理里面已经学过, 这样的电场分布应该等价于如下情况的电场分布: 真空中  $\mathbf{x}$  处有一带正电的点电荷,  $\bar{\mathbf{x}}$  处有一带负电、电量相同的点电荷。而格林函数中的  $-\Phi(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})$  就对应  $\bar{\mathbf{x}}$  处带负电的点电荷产生的电势分布。

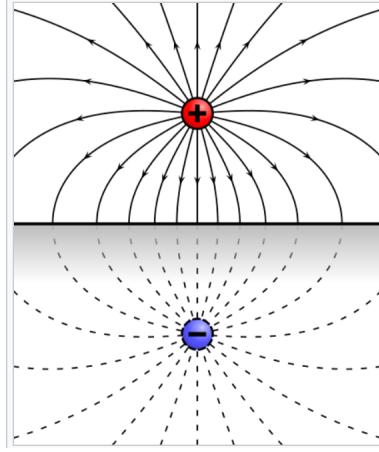


图 5.1: 半平面的“电像法”示意图

接下来计算半空间中位势方程解的表达式。据定理5.2.1, 我们只需计算格林函数在边界上的法向导数。现在外法向量是  $N = (0, 0, -1)$ , 所以

$$\frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_{x_d} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\Phi_{y_d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi_{y_d}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})) = -\frac{2x_d}{d\alpha(d)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d}.$$

现在设  $u$  是边界  $\partial\mathbb{R}_+^d$  上的函数  $g$  在半空间  $\mathbb{R}_+^d$  内的调和延拓, 即  $u$  满足如下方程

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^d, \quad u|_{\partial\mathbb{R}_+^d} = g.$$

据定理5.2.1, 我们期待如上方程的解由 上半空间的泊松公式给出

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_d}{d\alpha(d)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} d\mathbf{y}, \tag{5.2.7}$$

其中函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_d}{d\alpha(d)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d}$$

被称作上半空间的泊松核 (Poisson's kernel).

**定理 5.2.3.** 设  $g \in C(\mathbb{R}^{d-1})$  是给定的函数,  $u$  由表达式(5.2.7)给出, 则它满足

- (1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d)$  且有界;
- (2)  $\Delta u = 0$  在  $\mathbb{R}_+^d$  中恒成立;
- (3) (非切向极限) 对任意  $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}_+^d$ , 成立  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$ .

证明该定理之前, 我们先证明上半空间的泊松核的积分值为 1.

**引理 5.2.4.** 对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ , 成立  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ .

证明. 固定  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 则  $x_d > 0$ . 据 Poisson 核表达式, 我们有

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2x_d}{d\alpha(d)} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|^2 + x_d^2)^{d/2}} d\mathbf{y}'.$$

其中  $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$  分别表示  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的前  $(d-1)$  个分量构成的向量。今作变量替换  $\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{y}'}{x_d}$  得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|^2 + x_d^2)^{d/2}} d\mathbf{y}' = \frac{2}{d\alpha(d)} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}'}{(|\mathbf{z}'|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}}.$$

显见上面最后一个积分里的被积函数是径向函数, 于是用极坐标 (引理B.2.1) 计算积分, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mathbf{z}'}{(|\mathbf{z}'|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} = \underbrace{(d-1)\alpha(d-1)}_{\mathbb{S}^{d-2} \subset \mathbb{R}^{d-1} \text{ 的表面积}} \int_0^\infty \frac{\rho^{d-2}}{(\rho^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} d\rho.$$

令  $r = \rho^2$ , 得到

$$\text{上式} = \frac{(d-1)\alpha(d-1)}{2} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{d-3}{2}}}{(r+1)^{\frac{d}{2}}} dr = \frac{(d-1)\alpha(d-1)}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right),$$

其中  $B(p, q)$  为 Beta 函数, 其定义为

$$B(p, q) := \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \quad (p, q > 0).$$

现在, 我们利用  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ,  $\alpha(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$  以及  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  得到

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &= \frac{2x_d}{d\alpha(d)} \cdot \frac{(d-1)\alpha(d-1)}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) \\ &= \frac{(d-1)}{d} \frac{\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2}+1)} \Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \Gamma(\frac{d-1}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d-1}{d} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\ &= 1 \times \frac{d-1}{d} \cdot \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d-1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

其中 Gamma 函数的定义为  $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ ,  $s > 0$ .

□

**定理5.2.3的证明.** 首先我们注意到, 对任意的  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^d$ ,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  作为关于  $\mathbf{x}$  的函数是调和函数。事实上, 对任意固定的  $\mathbf{x}$ , 格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  作为  $\mathbf{y}$  的函数是调和函数(除了在  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  这一点). 据格林函数的对称性(命题5.2.2), 在给定  $\mathbf{y}$  时,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  作为  $\mathbf{x}$  变量的函数也是调和函数(除了在  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  这一点). 由于  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^d$ , 我们知道对任意固定的  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^d$ ,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  作为  $\mathbf{x}$  的函数必是调和函数。

今已知  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$  对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$  成立, 由于  $g$  有界, 所以表达式(5.2.7)给出的  $u$  也是有界的

$$|u(\mathbf{x})| \leq \max_{\partial\mathbb{R}_+^d} |g| \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \max_{\partial\mathbb{R}_+^d} |g|.$$

又因为对任意的  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^d$ ,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  作为  $\mathbf{x}$  的函数是调和函数(进而是光滑函数), 且  $g$  有界, 所以利用卷积的性质可得

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} \Delta_x K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d,$$

这说明  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ .

接下来证明非切向极限。固定  $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathbb{R}_+^d$  和常数  $\varepsilon > 0$ , 我们取  $\delta > 0$ , 使得只要  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \delta$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^d$ , 就有  $|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ . 这一点是利用  $g$  在  $\mathbf{x}_0$  附近的小邻域内的连续性得到的。我们这样取是为了将积分拆分成“靠近  $\mathbf{x}_0$  处”和“远离  $\mathbf{x}_0$  处”两部分分别估计, 因为当  $\mathbf{y}$  很靠近给定点  $\mathbf{x}_0$  时, 泊松核  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  本身的取值基本上都集中于  $\mathbf{x}_0$  附近。

考虑半空间中满足  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta/2$  的点  $\mathbf{x}$ , 我们有

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &\leq \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}_+^d \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| d\mathbf{y}} \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| d\mathbf{y} \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}_{=1} + 2 \max_{\partial\mathbb{R}_+^d} |g| \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

对积分  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , 由于  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{\delta}{2} \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$ , 进而  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|$ . 所以现在有

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \leq C x_d \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B(\mathbf{x}_0, \delta)} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|^{-d} d\mathbf{y}.$$

而最后一个积分式是有限数(积分区域远离奇点, 分母幂次高于空间维数时积分值收敛, 可用极

坐标证明), 所以当  $x_a \rightarrow 0$  时, 该积分式也趋于 0.  $\square$

**例 5.2.2** (球上的格林函数). 今考虑单位球  $B := B(\mathbf{0}, 1)$  上的调和延拓问题。与半空间问题类似, 我们也需要找到合适的“镜像”来定义格林函数, 而对球的情况而言, “对称点”要改成“反演点”。

记号 5.2.2. 对  $\mathbf{x} \neq 0$ , 点  $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$  被称作  $\mathbf{x}$  关于单位球面  $\partial B$  的反演点 (inversion point).

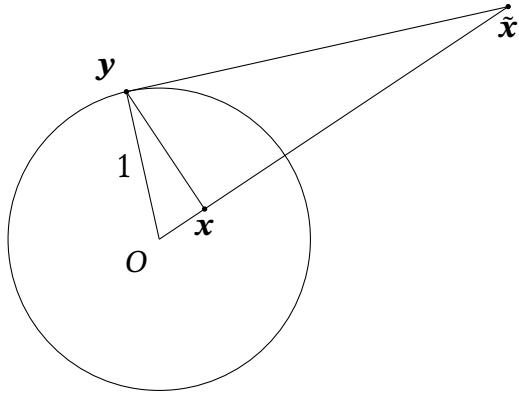


图 5.2: 反演点的几何关系

接下来我们需要寻找修正项  $\psi^x(\mathbf{y})$ , 使其满足

$$\Delta\psi^x = 0 \quad \text{in } B, \quad \psi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \mathbf{y} \in \partial B.$$

它的一个基本想法就是将球内点  $\mathbf{x} \in B$  处的奇性反演到球外的点  $\tilde{\mathbf{x}} \notin B$  处. 不妨设空间维数  $d \geq 3$ , 我们注意到  $\Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$  (作为  $\mathbf{y}$  的函数) 在  $\mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{x}}$  处是调和函数. 于是  $\Delta_y(\Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \mathbf{x}))) = 0$  对任意  $\mathbf{y} \neq \tilde{\mathbf{x}}$  成立, 从而  $\Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$  在  $B$  内是调和函数. 又因为  $\tilde{\mathbf{x}}$  是  $\mathbf{x}$  关于  $\partial B$  的反演点, 所以对任意  $\mathbf{y} \in \partial B$ , 我们有  $\Delta_{O\mathbf{x}\mathbf{y}} \sim \Delta_{O\mathbf{y}\tilde{\mathbf{x}}}$ , 因此  $|\mathbf{x}| |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \cdot 1 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ .

现在我们定义修正项为  $\psi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$ , 从而

$$-\Delta\psi^x(\mathbf{y}) = 0 \quad \mathbf{y} \in B, \quad \psi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \mathbf{y} \in \partial B.$$

所以单位球  $B$  对应的格林函数具有如下表达式

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

现在可以计算格林函数  $G$  在球面  $\partial B$  上的外法向导数了。注意到在  $\mathbf{y} \in \partial B$  处的单位外法向

量正好就是  $\mathbf{y}$  自己, 所以就有  $\frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \nabla G$ . 对任意  $1 \leq i \leq d$ , 现在有

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial_{y_i}} \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) = \frac{1}{d\alpha(d)} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^d} + \frac{|\mathbf{x}|^2(y_i - \tilde{x}_i)}{|\mathbf{x}|^d |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^d} \right) \\ &\stackrel{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2}{=} \frac{1}{d\alpha(d)} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^d} + \frac{y_i |\mathbf{x}|^2 - x_i}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^d} \right) \\ &= -\frac{y_i(1 - |\mathbf{x}|^2)}{d\alpha(d)|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^d}.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{d\alpha(d)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d}.$$

读者可以自证, 空间维数  $d = 2$  时也可以算出同样的结果。所以我们期待单位球  $B$  上边值为  $g$  的调和函数的显式表达式应当为如下积分式

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{d\alpha(d)} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} dS_y, \quad \forall \mathbf{x} \in B. \quad (5.2.8)$$

若将单位球改成半径为  $R$  的球  $B(\mathbf{0}, R)$ , 我们只需要作变量替换  $\bar{u}(\mathbf{x}) = u(R\mathbf{x})$  将其转化到单位球  $B$ . 最终的结论为

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{d\alpha(d)R} \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} dS_y, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R). \quad (5.2.9)$$

这里的函数  $K_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{d\alpha(d)R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d}$  被称作球  $B(\mathbf{0}, R)$  对应的泊松核. 类似地, 我们可以证明如下结论成立

**定理 5.2.5.** 设  $g \in C(\partial B(\mathbf{0}, R))$ . 函数  $u$  由表达式(5.2.9)给出, 则有

- (1)  $u \in C^\infty(B(\mathbf{0}, R))$ ;
- (2)  $\Delta u = 0$  in  $B(\mathbf{0}, R)$ ;
- (3) (非切向极限) 对任意  $\mathbf{x}_0 \in \partial B(\mathbf{0}, R)$ , 成立  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)$ .

## 习题 5.2

**习题 5.2.1.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) 是边界光滑的有界区域, 定义  $D := \sup\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\}$  为  $\Omega$  的直径。今固定  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 证明:

- (1) 格林函数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \psi^x(\mathbf{y})$  是唯一的, 且满足  $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial G}{\partial N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = -1$ ;
- (2) 当  $d \geq 3$  时, 对任意  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega$  有  $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  成立;
- (3) 当  $d = 2$  时, 对任意  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} \in \Omega$  有  $0 < G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{D}$  成立.

**习题 5.2.2.** 设  $\Omega := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 > 0\}$  是  $\mathbb{R}^2$  的第一象限。对边值问题

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u(0, x_2) = g(x_2), \quad u(x_1, 0) = h(x_1),$$

证明:  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y} + \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}) - \Phi(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}})$  是  $\Omega$  对应的格林函数. 其中  $\Phi(\mathbf{x}) := \frac{-1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|$  是基本解,  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, -x_2)$  是点  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  关于  $x_1$  轴的对称点。

**习题 5.2.3** (球上的 Harnack 不等式). 设  $u$  是闭球  $\overline{B(\mathbf{0}, R)} \subset \mathbb{R}^d$  上的非负调和函数。

(1) 结合公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2} \frac{R - |\mathbf{x}|}{(R + |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0}) \leq u(\mathbf{x}) \leq R^{d-2} \frac{R + |\mathbf{x}|}{(R - |\mathbf{x}|)^{d-1}} u(\mathbf{0})$$

(2) 用 (1) 证明:  $\forall r \in (0, R)$ , 成立不等式  $\sup_{B(\mathbf{0}, r)} u \leq (\frac{R+r}{R-r})^d \inf_{B(\mathbf{0}, r)} u$ .

**习题 5.2.4** (Schwarz 反射原理). 设  $B^+ := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in B(\mathbf{0}, 1) : x_d > 0\}$  单位球是上半部分。

(1) 设  $u \in C^2(\overline{B^+})$  是  $B^+$  内的调和函数,  $u|_{\partial B^+ \cap \{x_d=0\}} = 0$ . 令

$$v(\mathbf{x}) := \begin{cases} u(\mathbf{x}) & x_d \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d) & x_d < 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in B := B(\mathbf{0}, 1).$$

证明:  $v \in C^2(B)$ , 从而  $v$  是  $B$  上的调和函数。

(2) 如果现在只假设  $u \in C^2(B^+) \cap C(\overline{B^+})$ ,  $v$  还一定是  $B$  上的调和函数吗?

提示: 利用 Poisson 公式(5.2.9)可以给出满足  $w|_{x_d=0} = 0$  的调和函数, 然后用极大值原理证明  $w = u$  在  $\overline{B^+}$  上恒成立, 类似结论在下半球  $B^-$  也对。

**习题 5.2.5.** 证明定理5.2.5.

### 5.3 \* 位势方程解的 $C^{2,\alpha}$ 估计 (TBA)

### 5.4 \* 边值问题解的 Schauder 估计 (TBA)

## 5.5 \*Dirichlet 边值问题解的存在性 (TBA)

# 第六章 \* 变分法简介

在 $(-\Delta)$ 主特征值变分原理(定理3.4.4)的证明中, 我们已经用到了变分法的思想: 将特征值问题的解等价为某个位势能量泛函的极小化子。类似的思想则可以用于从“最小作用量原理”的角度出发推导出各种重要的偏微分方程。本章我们简要介绍欧拉-拉格朗日方程(最小作用量原理)及其简单应用。在本章末尾我们还介绍了诺特定理的数学表述, 它可以用来推导方程的各种守恒量、单调量, 这对非线性偏微分方程的研究起到重要作用。

## 6.1 一阶变分: 欧拉-拉格朗日方程(最小作用量原理)

今假设我们要求解某个微分方程  $A[u] = 0$ , 其中  $A[\cdot]$  是一个(非线性)微分算子,  $u$  是未知函数。显见, 我们很难找到一般性的理论来求解非线性微分方程。但是变分法的思想告诉我们: 对一部分微分方程问题(我们称作“变分问题”), 我们可以将微分方程的解视作某个“能量泛函”  $I[\cdot]$  的临界点, 即  $I'[u] = 0$ , 而能量泛函临界点的存在性往往可以通过泛函分析的方法求得。

本节简要介绍一阶变分的一般理论。设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是边界光滑(如果非空)的开集, 我们定义光滑函数  $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  为拉格朗日量(Lagrangian), 其具有形式

$$L = L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = L(p_1, \dots, p_d, z, x_1, \dots, x_d), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

其中  $\mathbf{p}, z$  变量往往取成  $\nabla w(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$ , 这里  $w(\mathbf{x})$  是一个标量函数。我们还定义如下记号

$$\nabla_{\mathbf{p}} L = (\partial_{p_1} L, \dots, \partial_{p_d} L), \quad \nabla_z L = \partial_z L, \quad \nabla_{\mathbf{x}} L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_d}).$$

今考虑形如下式的泛函

$$I[w] := \int_{\Omega} L(\nabla w(\mathbf{x}), w(\mathbf{x}), \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

其中  $w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  属于某个容许集(admissible set), 例如  $\mathcal{A} := \{w \in C^\infty(\overline{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = g\}$ , 其中  $g$  是给定的函数。

**定理 6.1.1.** 设  $\mathcal{A} := \{w \in C^\infty(\overline{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = g\}$ , 其中  $g$  是给定的光滑函数。若  $u \in \mathcal{A}$  是  $I[\cdot]$  的极小

化子 (如果存在), 即  $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$ , 则  $u$  满足如下欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange equation)

$$-\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (\partial_{p_i} L(\nabla u, u, \mathbf{x})) + \partial_z L(\nabla u, u, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (6.1.1)$$

证明. 任取  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , 我们知道  $u \in \mathcal{A} \Rightarrow u + \varepsilon v \in \mathcal{A}$ . 令

$$j(\varepsilon) := I[u + \varepsilon v], \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

由于  $u$  是  $I[\cdot]$  的极小化子, 所以  $j(\varepsilon)$  在  $\varepsilon = 0$  取到最小值, 所以  $j'(0) = 0$ .

现在计算  $j'(0)$ . 据

$$j(\varepsilon) = \int_{\Omega} L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

求导得

$$j'(\varepsilon) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \partial_{p_i} L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v + \partial_z L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) v \, d\mathbf{x}.$$

令  $\varepsilon = 0$ , 我们得到

$$0 = j'(0) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \partial_{p_i} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v + \partial_z L(\nabla u, u, \mathbf{x}) v \, d\mathbf{x}.$$

最后, 我们中第一项中分部积分一个  $\partial_{x_i}$  就得到想要的结论。  $\square$

### 6.1.1 若干实例: 各种基本方程的导出

**例 6.1.1** (Poisson 方程). 给定函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义其原函数为  $F(z) = \int_0^z f(y) \, dy$ . 我们现在考虑如下能量泛函

$$I[w] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - F(w) \, d\mathbf{x}.$$

讨论. 由  $L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 - F(z)$  知,

$$\partial_{p_i} L = p_i, \quad \partial_z L = -f(z).$$

所以欧拉-拉格朗日方程为

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \Omega.$$

一般来说,  $F(z)$  往往取成多项式形式, 例如  $F(z) = \pm \frac{1}{p+1} z^{p+1}$ , 它对应的欧拉-拉格朗日方程为  $-\Delta u =$

$\pm u^p$ . 若  $F \equiv 0$ , 则这就是 Laplace 方程的 Dirichlet 原理。  $\square$

**注记 6.1.1.** 我们同样也可以在能量泛函中引进时间变量  $t$ , 即将变量  $\mathbf{x}$  换为  $(t, \mathbf{x})$ , 梯度  $\nabla w$  换成  $(\partial_t w, \nabla w)$ , 这样就可以推导出波动方程。例如, 考虑

$$I[w] = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} w_t^2 - \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + F(w) \right) d\mathbf{x} dt,$$

它对应的欧拉-拉格朗日方程即为波动方程

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0.$$

**例 6.1.2 (极小曲面 (minimal surface)).** 考虑 Plateau 问题: 三维空间中给定一条闭曲线, 以它为边界的曲面的面积最小值何时取到?

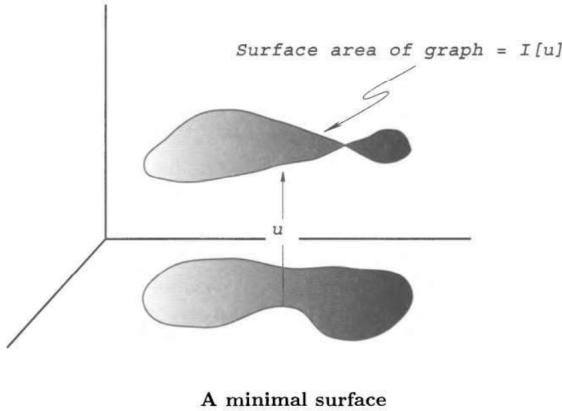


图 6.1: 极小曲面示例

讨论. 为了避免不必要的麻烦, 我们考虑参数曲面的面积最小值, 即计算如下泛函的极小化子

$$I[w] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla w|^2} d\mathbf{x}.$$

它对应的拉格朗日量为  $L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2}$ , 所以  $\partial_{p_i} L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}) = \frac{p_i}{\sqrt{1+|\mathbf{p}|^2}}$ ,  $\partial_z L = 0$ . 现在将  $(\mathbf{p}, z)$  换成  $(\nabla u, u)$ , 我们就得到极小化子  $u$  满足的方程

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) := \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \left( \frac{\partial_{x_i} u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

$\square$

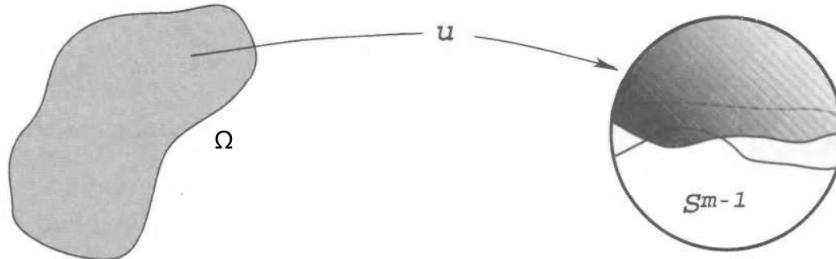
**注记 6.1.2.** 表达式  $\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$  实际上是函数  $u$  的图像的平均曲率的  $d$  倍，所以上面求得的极小曲面的平均曲率为零。此外，这个量也有物理意义：流体的表面张力是正比于其界面的平均曲率的。

**例 6.1.3 (调和映射 (harmonic map)).** 我们现在将标量函数  $w$  换成向量值函数  $\mathbf{w} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。考虑如下泛函

$$I[\mathbf{w}] := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{w}|^2 d\mathbf{x}$$

在容许集  $\mathcal{A} := \{\mathbf{w} \in C^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m) : w|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, |\mathbf{w}| = 1\}$  上的极小化子。这看上去是一个几何问题，但实际上该问题的变种还能用来刻画液晶运动的稳态。我们证明极小化子  $\mathbf{u}$  满足如下拟线性椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$



A harmonic map into a sphere

图 6.2: 到球面的调和映射

**证明.** 任取  $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m)$ , 由于  $|\mathbf{u}| = 1$ , 我们知道当  $\varepsilon$  很小时有  $|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}| \neq 0$ , 进而  $\mathbf{v}_\varepsilon := \frac{\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}|} \in \mathcal{A}$ .

现在我们定义  $j(\varepsilon) := I[\mathbf{v}_\varepsilon]$ , 则  $j$  在  $\varepsilon = 0$  取到最小值, 所以  $j'(0) = 0$ . 直接计算得

$$j'(0) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}'(0) d\mathbf{x},$$

这里的记号  $' := \frac{d}{d\varepsilon}$ ;  $A : B := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ .

接下来计算

$$\mathbf{v}'(\varepsilon) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}|} - \frac{((\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v})}{|\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}|^3} \Rightarrow \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}.$$

将其代入  $j'(0)$  的表达式，得到

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{u} : \nabla ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

由于  $|\mathbf{u}|^2 = 1$ ，我们求导得到  $\sum_{j=1}^m (\partial_i u_j) u_j = 0$  对任意  $1 \leq i \leq d$  都成立，即  $(\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . 据此算得

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} : \nabla ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}) &= \sum_i \sum_j \partial_i \mathbf{u}_j \partial_i (\sum_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_j) \\ &= |\nabla \mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \underbrace{\sum_i \sum_j \partial_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j \partial_i (\sum_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k)}_{=0} = |\nabla \mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

现在有

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m).$$

左边分部积分一次，最终得到如下恒等式

$$\int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m).$$

由  $\mathbf{v}$  的任意性得知，方程  $-\Delta \mathbf{u} = |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u}$  在  $\Omega$  中恒成立。  $\square$

### 6.1.2 二阶变分：凸性假设

若泛函  $I[w]$  在  $u$  达到极小值，则  $j(\varepsilon) := I[u + \varepsilon v]$  满足  $j'(0) = 0$ ，而进一步我们还有  $j''(0) \geq 0$ . 现在我们来看看二阶导数的信息能带来什么。回忆

$$j(\varepsilon) = \int_{\Omega} L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon \nabla v, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

求两次导数得到

$$\begin{aligned} j''(\varepsilon) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \partial_{p_i} \partial_{p_j} L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v \partial_{x_j} v \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^d \partial_{p_i} \partial_z L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v v \\ &\quad + \partial_z^2 L(\nabla u + \varepsilon \nabla v, u + \varepsilon v, \mathbf{x}) v^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

令  $\varepsilon = 0$ , 我们得到如下不等式对任意  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  都成立:

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \partial_{p_i} \partial_{p_j} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v \partial_{x_j} v + 2 \sum_{i=1}^d \partial_{p_i} \partial_z L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \partial_{x_i} v v + \partial_z^2 L(\nabla u, u, \mathbf{x}) v^2 d\mathbf{x}.$$

这实际上可以推出

$$\sum_{i,j=1}^d \partial_{p_i} \partial_{p_j} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.1.2)$$

该式被称作拉格朗日量  $L$  的**凸性假设**。证明的过程可以参见 Evans [3] 第八章第一节, 此处略去细节。其大致方法为: 选取形如下式的测试函数  $v$ ,

$$v(\mathbf{x}) = \varepsilon \rho \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \xi}{\varepsilon} \right) \eta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

其中  $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个定义如下的“锯齿状”函数:  $\rho(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$  且满足  $\rho(x+1) = \rho(x)$   $x \in \mathbb{R}$ .

可见, 凸性假设(6.1.2)应当成为极小化子存在性的必要条件之一, 具体可参见 [3, 第 8.2, 8.4 节].

## 习题 6.1

**习题 6.1.1.** 求如下能量泛函的欧拉拉格朗日方程

$$I[w] := \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} w_t^2 - \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - \frac{m^2}{2} w^2 d\mathbf{x} dt,$$

其中  $w(t, \mathbf{x}) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ ,  $m > 0$  是给定的常数。

**习题 6.1.2.** 定义

$$I[w] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} w_t^2 - \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \frac{1}{6} w^6 \right) d\mathbf{x} dt,$$

其中  $w(t, \mathbf{x})$  属于容许集  $\mathcal{A} = \{w \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3) : w(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \quad \forall t \in [0, T]\}$ . 求  $I[w]$  在  $\mathcal{A}$  上的极小化子  $u$  满足的方程，并证明

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} (u_t)^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{6} u^6 d\mathbf{x}$$

是守恒量。

**习题 6.1.3.** 寻找拉格朗日量  $L = L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x})$ , 使得方程  $-\Delta u + \nabla \varphi \cdot \nabla u = f$  in  $\Omega$  是  $I[w] := \int_\Omega L(\nabla w, w, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  对应的欧拉-拉格朗日方程. (提示：考虑带指数项的拉格朗日量。)

**习题 6.1.4.** 设  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega_T := (0, T] \times \Omega$ . 证明：存在拉格朗日量  $L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x}, t)$  ( $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{d+1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ), 使得如下椭圆正则化的热传导方程

$$\partial_t u - \Delta u - \varepsilon \partial_t^2 u = 0$$

是能量泛函  $I_\varepsilon[w] := \iint_{\Omega_T} L(\partial_t w, \nabla w, w, t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt$  对应的欧拉-拉格朗日方程. (提示：考虑带指数项且依赖时间  $t$  的拉格朗日量。)

**习题 6.1.5.** 设  $L(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  是光滑函数, 且对  $\mathbf{p}$ -分量是一致凸的, 即存在  $\theta > 0$  使得

$$\sum_{i,j=1}^d \partial_{p_i} \partial_{p_j} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \Omega).$$

证明  $I[w] := \int_\Omega L(\nabla u, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  在  $\mathcal{A} := \{w \in C^\infty(\bar{\Omega}) : w|_{\partial\Omega} = g\}$  上的极小化子是唯一的, 其中  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是给定的光滑函数。

提示：若  $u_1, u_2$  是两个不同的极小化子, 证明  $2I[\frac{u_1+u_2}{2}] < I[u_1] + I[u_2]$ , 进而导出矛盾。

**习题 6.1.6** (变分法推导 Hamilton 方程组). 本题用变分法考虑例 1.3.3 的另证。设拉格朗日量  $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  是给定的光滑函数, 并记为  $L = L(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ . 固定  $t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , 定义作用量为

$$I[\mathbf{w}] := \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s), \mathbf{w}(s)) ds, \quad \mathbf{w} \in \mathcal{A} := \{\mathbf{w}(\cdot) \in C^2([0, t]; \mathbb{R}^d) : \mathbf{w}(0) = \mathbf{y}, \mathbf{w}(t) = \mathbf{x}\}.$$

今假设曲线  $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{A}$  是  $I[\cdot]$  在  $\mathcal{A}$  上的极小化子, 即  $I[\mathbf{x}(\cdot)] = \inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{A}} I[\mathbf{w}(\cdot)]$ .

(1) 证明: 极小化子  $\mathbf{x}(\cdot)$  满足常微分方程组

$$-\frac{d}{ds}[\nabla_{\mathbf{v}}L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))] + \nabla_{\mathbf{x}}L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)) = 0, \quad \forall s \in [0, t].$$

(2) 令  $\mathbf{p}(s) := \nabla_{\mathbf{v}}L(\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s))$  为对应于位置  $\mathbf{x}(s)$  和速度  $\dot{\mathbf{x}}(s)$  的广义动量, 并假设对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ , 方程  $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}}L(\mathbf{v}, \mathbf{x})$  有唯一的光滑解  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ . 令与拉格朗日量  $L$  相关联的 Hamilton 量  $H$  为

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) := \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - L(\mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{x}), \mathbf{x}).$$

证明:  $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot))$  是如下 Hamilton 方程的解

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \nabla_{\mathbf{p}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad \dot{\mathbf{p}}(s) = -\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s)), \quad s \in [0, t].$$

且  $s \mapsto H(\mathbf{p}(s), \mathbf{x}(s))$  是常值映射。

**注记 6.1.3.** 特别地, 若令  $L(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - \phi(\mathbf{x})$ ,  $m > 0$ . 则对应的欧拉-拉格朗日方程为  $m\ddot{\mathbf{x}}(s) = -\nabla\phi(\mathbf{x}(s))$ , 即为牛顿第二定律, 其中右端项为势能  $\phi$  决定的力场。对应的  $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}m|\mathbf{p}|^2 + \phi(\mathbf{x})$  即为总能量, 拉格朗日量即为动能、势能之差。

**习题 6.1.7.** 今不再固定习题6.1.6中的起点  $\mathbf{y}$ , 即容许集  $\mathcal{A} := \{\mathbf{w}(\cdot) \in C^2([0, t]; \mathbb{R}^d) : \mathbf{w}(t) = \mathbf{x}\}$ .

- (1) 证明习题6.1.6的 (1) 仍然成立, 以及  $\nabla_{\mathbf{v}}L(\dot{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}(0)) = 0$ .
- (2) 若  $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{A}$  是作用量  $J[\mathbf{w}] := \int_0^t L(\dot{\mathbf{w}}(s), \mathbf{w}(s)) ds + g(\mathbf{w}(0))$  的极小化子, 证明:  $\mathbf{x}(\cdot)$  是欧拉拉格朗日方程的解, 并确定  $s = 0$  处的边界条件。

## 6.2 变分不等式: 椭圆自由边界问题

现在我们再来看看 Dirichlet 原理: 如果我们把限制条件  $w|_{\partial\Omega} = g$  换成一个单侧的不等式  $w \geq g$  in  $\Omega$  ( $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$  被称作障碍函数), 即我们定义容许集为

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{\Omega}) : w \geq g \text{ in } \Omega, w|_{\partial\Omega} = 0\},$$

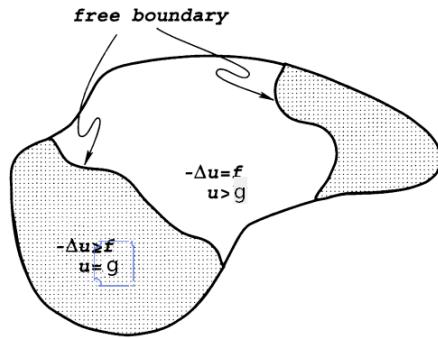
并考虑同样的能量泛函  $I[w] := \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf \, dx$ . 该能量泛函在  $\mathcal{A}$  上的极小化子的存在唯一性需要使用泛函分析的方法证得, 所以这里我们目前假设它是存在的。我们同样还假设  $\mathcal{A}$  是凸集(这个也是可以证明的). 然而, 我们会发现现在的极小化子不再是位势方程边值问题的解吗, 而是满足所谓的变分不等式 (variational inequality):

- 如果  $u$  “超越了” 障碍物, 即当  $u(x) > g(x)$  时, 我们仍有位势方程  $-\Delta u = f$  成立;
- 一般地, 只有  $u \geq g$  和  $-\Delta u \geq f$  在  $\Omega$  上恒成立。

**定理 6.2.1** (变分不等式). 设  $u \in \mathcal{A}$  是  $I[w]$  在  $\mathcal{A}$  上的唯一极小化子. 则

$$\forall w \in \mathcal{A}, \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla(w - u)) \, dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) \, dx.$$

该不等式的证明并不困难，我们在本小节末尾再写出详细过程。更重要的则是如何理解该不等式。首先引进记号  $\mathcal{O} := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ ,  $\mathcal{C} := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\}$ .



The free boundary for the obstacle problem

图 6.3: 障碍物问题中的自由边界

由于  $u, g$  是连续函数，所以  $\mathcal{O}$  是开集， $\mathcal{C}$  是(相对)闭集。

**断言 1:**  $-\Delta u = f$  在  $\mathcal{O}$  中恒成立。

**断言 1 的证明.** 任取测试函数  $v \in C_c^\infty(\mathcal{O})$ , 由于在  $\mathcal{O}$  中有  $u(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})$ , 所以当  $|\varepsilon|$  充分小时, 我们仍有  $w(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$ , 进而  $w \in \mathcal{A}$ . 据变分不等式, 我们有

$$\varepsilon \int_{\mathcal{O}} (\nabla u) \cdot (\nabla v) - fv \, dx \geq 0.$$

由于该不等式对任意小的  $\varepsilon > 0$  和  $\varepsilon < 0$  都成立, 那么该式的不等号就只能变成等号了, 这说明  $u$  满足  $-\Delta u = f$  在  $\mathcal{O}$  中恒成立。  $\square$

**断言 2:**  $u \geq g$  和  $-\Delta u \geq f$  在  $\Omega$  上恒成立。

**断言 2 的证明.** 一般情况下, 我们选取  $v$  是非负测试函数, 且  $\varepsilon \in (0, 1]$  充分小。在变分不等式中分部积分可得

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)v \, dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega), v \geq 0,$$

所以  $-\Delta u \geq f$  在  $\Omega$  上恒成立。  $\square$

**注记 6.2.1.** 集合  $F := \partial\Omega \cap \Omega$  被称作自由边界 (free boundary), 这里的“自由”一词是指我们并不知道这个交界面的具体位置在哪。而椭圆方程的自由边界问题在最优传输问题、空气动力学的定常冲击喷流问题等许多实际模型中都有出现。

在本小节的最后, 我们来证明变分不等式。

**变分不等式的证明.** 固定  $w \in \mathcal{A}$ , 则对任意  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , 由集合  $\mathcal{A}$  的凸性, 我们有

$$u + \varepsilon(w - u) = (1 - \varepsilon)u + \varepsilon w \in \mathcal{A}.$$

所以如果令  $j(\varepsilon) = I[u + \varepsilon(w - u)]$ , 就会得到  $j(\varepsilon) \geq j(0)$  对任意  $\varepsilon \in [0, 1]$  恒成立, 这说明  $j'(0) \geq 0$ .

现在我们用导数定义计算  $j'(0)$ . 对  $\varepsilon \in (0, 1]$ , 我们有

$$\begin{aligned} \frac{j(\varepsilon) - j(0)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u + \varepsilon \nabla(w - u)|^2 - |\nabla u|^2}{2} - f(u + \varepsilon(w - u) - u) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) + \frac{\varepsilon |\nabla(w - u)|^2}{2} - f(w - u) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , 结合  $j'(0) \geq 0$  可得

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) - f(w - u) d\mathbf{x} \geq 0.$$

□

## 习题 6.2

**习题 6.2.1.** 证明  $I[w] := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf d\mathbf{x}$  在容许集  $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : w \geq g \text{ in } \Omega, w|_{\partial\Omega} = 0\}$  上的极小化子是唯一的, 其中  $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$  是给定的函数。

**习题 6.2.2.** 证明: 定理6.2.1中的变分不等式也可写作  $-\Delta u + \beta(u - g) \ni f$ , 其中  $\beta(\cdot)$  为如下定义的多值函数

$$\beta(z) := \begin{cases} 0 & z > 0 \\ (-\infty, 0] & z = 0 \\ \emptyset & z < 0 \end{cases}$$

**习题 6.2.3.** 给定  $f \in L^2(\Omega)$ , 设  $u$  是泛函  $I[w] := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf d\mathbf{x}$  在容许集  $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\bar{\Omega}) : |\nabla w| \leq 1 \text{ in } \Omega, w|_{\partial\Omega} = 0\}$  上的极小化子。证明:  $u$  满足不等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} (w - u)f d\mathbf{x} \quad \forall w \in \mathcal{A}.$$

## 6.3 诺特定理

我们现在考虑能量泛函在适当的区域/函数变化下的不变性，并证明相应的欧拉-拉格朗日方程的解可以自动推出某些散度型守恒定律，这就是诺特定理 (Noether's theorem) 的实质内容。特别地，利用诺特定理，我们可以得到一些“乘子”，它能帮助我们推导出方程中不易观察到的一些守恒量、单调量。

本节我们假设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  是开集，并记  $I[w] = \int_{\Omega} L(\nabla w, w, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ，其中  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L = L(\mathbf{p}, z, \mathbf{x})$  都是光滑函数。

### 6.3.1 定理的叙述与证明

在叙述定理之前，我们需要引进区域变分和函数变分的概念。

**记号 6.3.1** (区域变分 (domain variation)). 设  $\mathfrak{X} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathbf{x}, \tau)$  是一组随参数光滑变化的光滑向量场，且对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  都有  $\mathfrak{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ . 对充分小的参数  $\tau$ , 映射  $\mathbf{x} \mapsto \mathfrak{X}(\mathbf{x}, \tau)$  被称作区域变分 (domain variation). 同时我们记  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathfrak{X}_\tau(\mathbf{x}, 0)$ ,  $\Omega(\tau) := \mathfrak{X}(\Omega, \tau)$ .

**记号 6.3.2** (函数变分 (function variation)). 给定  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们考虑函数  $u$  的一族光滑的函数变分 (function variation)  $w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $w = w(\mathbf{x}, \tau)$  满足  $w(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x})$  对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  成立。我们记  $m(\mathbf{x}) := w_\tau(\mathbf{x}, 0)$ , 并称之为一个乘子 (multiplier).

**定义 6.3.1.** 我们称泛函  $I[\cdot]$  在区域变分  $\mathfrak{X}$  和函数变分  $w$  下具有不变性，是指如下恒等式对任意的小参数  $\tau$  和任意开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  都成立：

$$\int_{\Omega} L(\nabla w(\mathbf{x}, \tau), w(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega(\tau)} L(\nabla w, w, \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.3.1)$$

接下来我们叙述并证明诺特定理，其表明能量泛函在区域变分和函数变分下的不变性可以让我们从欧拉-拉格朗日方程中推出散度形式的恒等式。

**定理 6.3.1** (诺特定理). 设  $I[\cdot]$  在区域变分  $\mathfrak{X}$  和 (对应函数  $u$  的) 函数变分  $w$  下具有不变性，则

1. 如下恒等式成立

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (m \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) - L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \mathbf{v}) = m (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) - \partial_z L(\nabla u, u, \mathbf{x})).$$

2. 特别地，若  $u$  是  $I[\cdot]$  的临界点，并满足欧拉-拉格朗日方程  $-\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{p}} L) + \partial_z L = 0$ ，则有如下散度形式的恒等式成立

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (m \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) - L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \mathbf{v}) = 0.$$

证明. 我们只需在恒等式(6.3.1)中对  $\tau$  求导, 再令  $\tau = 0$  即可。据此, 得到等式

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{p}} L \cdot \nabla_{\mathbf{x}} m + \partial_z L m \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} L(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) \, dS_{\mathbf{x}}$$

左边第一项分部积分, 得到

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{p}} L \cdot \nabla_{\mathbf{x}} m \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} m \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} m \nabla_{\mathbf{p}} L \cdot \mathbf{N} \, dS_{\mathbf{x}}$$

再用散度定理, 得到

$$\int_{\partial\Omega} L(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) \, dS_{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega} m \nabla_{\mathbf{p}} L \cdot \mathbf{N} \, dS_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (L\mathbf{v} - m \nabla_{\mathbf{p}} L) \, d\mathbf{x}.$$

二者联立, 得到

$$\int_{\Omega} m (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) - \partial_z L(\nabla u, u, \mathbf{x})) = \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (m \nabla_{\mathbf{p}} L(\nabla u, u, \mathbf{x}) - L(\nabla u, u, \mathbf{x})\mathbf{v}).$$

由于上式对任意开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  都成立, 所以左右两边的被积函数必定处处相等。  $\square$

### 6.3.2 几个实例

在实际使用诺特定理的时候, 我们需要先“预测”使用何种区域变分  $\mathfrak{X}$  和函数变分  $w$  以求得能量泛函的变分不变性, 进而可以用极小化子  $u$  表示出我们想要的乘子  $m$ . 本节介绍两个简单实例, 更复杂的例子参见习题和问题部分, 它们大多选自 Evans [3, 第 8.6 节].

**例 6.3.1 (平移不变性).** 设  $L = L(\mathbf{p}, z)$  不依赖  $\mathbf{x}$  变量, 则  $I[w] := \int_{\Omega} L(\nabla w, w) \, d\mathbf{x}$  是平移不变的。给定  $k \in \{1, \dots, d\}$ , 定义  $\mathfrak{X}(\mathbf{x}, \tau) := \mathbf{x} + \tau e_k$  和  $w(\mathbf{x}, \tau) := u(\mathbf{x} + \tau e_k)$ . 然后我们可以按照区域变分和函数变分的定义算出

$$\mathbf{v} = e_k, \quad m = \partial_{x_k} u.$$

因此, 如果  $u$  是  $I[\cdot]$  的一个临界点, 则定理6.3.1可以推出

$$\sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (\partial_{p_i} L \partial_{x_k} u - L \delta_{ik}) = 0, \quad k = 1, \dots, d. \quad (6.3.2)$$

**应用.** 例如, 我们将该结论应用到波动方程上, 考虑

$$I[w] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} (\partial_t w)^2 - \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + F(w) \, d\mathbf{x} \, dt$$

并设  $u$  为极小化子。我们之前已经算过  $u$  满足半线性波动方程

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0, \quad f = F'.$$

对此泛函，我们记  $\mathbf{p} = (\partial_t w, \partial_1 w, \dots, \partial_d w)$ ,  $\mathbf{x} = (t, x_1, \dots, x_d)$  并取  $k = 0$  (时间变量). 则  $L(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{2} p_0^2 - \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_d^2) + F(z)$ , 对应  $\mathbf{v} = e_0, m = \partial_t u$ . 据诺特定理，我们得到

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla u u_t) + \partial_t \left( u_t^2 - \frac{1}{2}(u_t^2 - |\nabla u|^2) + F(u) \right) = 0.$$

这表明  $e := \frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u)$  满足  $e_t - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (u_t \nabla u) = 0$ . 若  $u$  充分光滑，则可以推出能量守恒  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ .

类似地如果取  $k \in \mathbb{N}^*$ (对应空间变量)，则  $\mathbf{v} = e_k, m = \partial_k u$ . 据诺特定理我们得到

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \nabla u \partial_k u - e_k \left( \frac{1}{2}(u_t^2 - |\nabla u|^2) - F(u) \right) \right) + \partial_t (\partial_k u \partial_t u) = 0.$$

对该式积分，并用散度定理知  $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_k u \partial_t u = 0$  对任意  $1 \leq k \leq d$  成立，这是波方程的动量守恒。□

**例 6.3.2** (波动方程的伸缩不变性). 回忆线性波动方程  $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$  对应如下泛函的极小化子

$$I[w] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t w)^2 - |\nabla w|^2 d\mathbf{x} dt.$$

我们不难证明，波动方程在如下伸缩变换  $(\mathbf{x}, t) \mapsto (\lambda \mathbf{x}, \lambda t)$ ,  $u \mapsto \lambda^{\frac{d-1}{2}} u(\lambda \mathbf{x}, \lambda t)$  下具有不变性，其中  $\lambda > 0$ . 今假设  $\lambda = e^\tau$  并定义如下区域变分和函数变分

$$\mathfrak{X}(t, \mathbf{x}, \tau) = (e^\tau t, e^\tau \mathbf{x}), \quad w(t, \mathbf{x}, \tau) := e^{\frac{(d-1)\tau}{2}} u(e^\tau t, e^\tau \mathbf{x}).$$

则据定义可以算出

$$\mathbf{v} = (t, \mathbf{x}), \quad m = tu_t + \mathbf{x} \cdot \nabla u + \frac{d-1}{2} u.$$

据诺特定理，经过漫长的无聊计算，我们可以求得散度型恒等式  $\partial_t p - \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ , 其中

$$\begin{aligned} p &:= \frac{t}{2}((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2) + (\mathbf{x} \cdot \nabla u) \partial_t u + \frac{d-1}{2} u u_t, \\ \mathbf{q} &:= \left( t u_t + \mathbf{x} \cdot \nabla u + \frac{d-1}{2} u \right) \nabla u + \frac{1}{2} (u_t^2 - |\nabla u|^2) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

该恒等式中证明三维能量临界波动方程的整体解存在性时起到了关键性的作用, 具体证明见 Evans [3, 第 12.4 节].

### 习题 6.3

**习题 6.3.1** ( $p$ -拉普拉斯算子的伸缩不变性). 给定  $p > 0$ , 考虑  $I[w] = \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx$ . 证明:

- (1) 极小化子 (假设存在)  $u$  满足  $p$ -Laplacian 方程  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$ .
- (2)  $I[w]$  在变换  $x \mapsto \lambda x$ ,  $u \mapsto \lambda^{\frac{d-p}{p}} u(\lambda x)$  ( $\lambda > 0$ ) 下保持不变. 令  $\lambda = e^\tau$  并用诺特定理证明

$$\nabla \cdot \left[ \left( x \cdot \nabla u + \frac{d-p}{p} u \right) p |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u|^p x \right] = 0. \quad (6.3.3)$$

**习题 6.3.2** (单调性公式). 设  $B(\mathbf{0}, r)$  落在区域  $\Omega$  内部.

- (1) 将恒等式(6.3.3)在球  $B(\mathbf{0}, r)$  上积分, 并用 Gauss-Green 公式证明:

$$(d-p) \int_{B(\mathbf{0},r)} |\nabla u|^p dx = r \int_{\partial B(\mathbf{0},r)} |\nabla u|^p - p |\nabla u|^{p-2} (\partial_r u)^2 dS_x,$$

其中  $\partial_r u := \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u$  是  $u$  的径向导数.

- (2) 证明:  $r \rightarrow \frac{1}{r^{d-p}} \int_{B(\mathbf{0},r)} |\nabla u|^p dx$  关于  $r$  不减.

**习题 6.3.3** (Derrick-Pohozaev 恒等式). 设  $u$  是方程  $-\Delta u = |u|^{p-1} u$  in  $\Omega$  在边界条件  $u|_{\partial\Omega} = 0$  下的解, 其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 3$ ) 是边界  $C^1$  的星型域 (即区域中任一点与原点的连线都完整落在区域内),  $p > \frac{d+2}{d-2}$ . 证明:

- (1)  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$ .
- (2)  $\int_{\Omega} ((x \cdot \nabla) u) |u|^{p-1} u dx = -\frac{d}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$ . 其中  $(x \cdot \nabla) = x_1 \partial_{x_1} + \cdots + x_d \partial_{x_d}$ .
- (3)  $\frac{d-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{d}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$ , 从而结合 (1) 得到  $u$  在  $\Omega$  内恒为零.

提示:  $u = 0$  在  $\partial\Omega$  恒成立实际上表明  $\nabla u(x)$  在边界  $\partial\Omega$  上与单位外法向量  $N(x)$  平行。

### 问题 6.3

**问题 6.3.1** (Almgren 单调性公式). 设  $u$  是区域  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  上的调和函数, 且满足  $B(\mathbf{0}, R) \subset \Omega$ ,  $u(\mathbf{0}) = 0$ ,  $u \not\equiv 0$ . 对  $0 < r < R$ , 定义

$$a(r) := \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{0},r)} u^2 dS_x, \quad b(r) := \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(\mathbf{0},r)} u^2 dx.$$

在习题6.3.2的单调性公式中取  $p = 2$ , 可以得到  $b'(r) = \frac{2}{r^{d-2}} \int_{\partial B(\mathbf{0}, r)} (\partial_r u)^2 dS_x$ .

- (1) 证明:  $a'(r) = \frac{2}{r^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{0}, r)} u \partial_r u dS_x = \frac{2}{r} b$ .
- (2) 证明:  $b(r)^2 \leq \frac{r}{2} a(r) b'(r)$ .
- (3) 定义频率函数  $f := \frac{b}{a}$ , 证明 Almgren 单调性公式  $f'(r) \geq 0$  恒成立. (提示: 用 (1) 的结论.)
- (4) 证明:  $\frac{a'(r)}{a(r)} \leq \frac{\beta}{r}$ , 进而  $a(r) \geq \gamma r^\beta$  对任意  $0 < r < R$  成立. 此处  $\beta := \frac{2b(R)}{a(R)}$ ,  $\gamma := \frac{a(R)}{R^\beta}$ . 该结论给出了非常值调和函数在零点附近增长速率的下界估计. (提示: 先用 (3), 再用 (1).)

**问题 6.3.2** (波动方程的共形能量和 Morawetz 恒等式). 定义双曲反演 (hyperbolic inversion) 如下

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto (\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) := \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2 - t^2}, \frac{t}{|\mathbf{x}|^2 - t^2} \right), \quad \forall |\mathbf{x}| \neq t. \quad (6.3.4)$$

据此定义双曲 Kelvin 变换  $\mathcal{K}u = \bar{u}$  为  $\bar{u}(t, \mathbf{x}) := u(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) ||\bar{\mathbf{x}}|^2 - \bar{t}^2|^{-\frac{d-1}{2}}$ .

- (1) 证明: 若  $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ , 则  $\partial_t^2 \bar{u} - \Delta \bar{u} = 0$ .
- (2) 考虑如下区域变分和函数变分

$$\mathfrak{X}(t, \mathbf{x}, \tau) := \gamma(t + \tau(|\mathbf{x}|^2 - t^2), \mathbf{x}), \quad w(t, \mathbf{x}, \tau) := \gamma^{\frac{d-1}{2}} u(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}, \tau)),$$

其中  $\gamma := \frac{|\mathbf{x}|^2 - t^2}{|\mathbf{x}|^2 - (t + \tau(|\mathbf{x}|^2 - t^2))^2}$ . 这个过程相当于是对变量  $(t, \mathbf{x})$  作双曲反演, 然后再加上  $\tau e_0$ , 最后再作双曲反演. 证明: 对应的速度  $\mathbf{v}$  和乘子  $m$  分别为

$$\mathbf{v} = (|\mathbf{x}|^2 + t^2, 2t\mathbf{x}), \quad m = (|\mathbf{x}|^2 + t^2) \partial_t u + 2t\mathbf{x} \cdot \nabla u + (d-1)tu.$$

- (3) 证明 Morawetz 恒等式  $c_t - \operatorname{div} \mathbf{r} = 0$ , 其中

$$\mathbf{r} := (|\mathbf{x}|^2 + t^2) \partial_t u + 2t\mathbf{x} \cdot \nabla u + (d-1)tu \quad (6.3.5)$$

$$\begin{aligned} c := & \frac{(t+|\mathbf{x}|)^2}{4} \left( \partial_t u + \partial_r u + \frac{d-1}{2|\mathbf{x}|} u \right)^2 + \frac{(t-|\mathbf{x}|)^2}{4} \left( \partial_t u - \partial_r u - \frac{d-1}{2|\mathbf{x}|} u \right)^2 \\ & + \frac{t^2 + |\mathbf{x}|^2}{2} \left( |\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2 + \frac{(d-3)(d-1)}{4|\mathbf{x}|^2} u^2 \right) - (d-1) \operatorname{div} \left( \frac{|\mathbf{x}|^2 + t^2}{|\mathbf{x}|^2} u \mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Evans [3, 第 8.6 节] 原话是 “After a longish calculation, we derive Morawetz's identity.”

**问题 6.3.3** (波动方程的局部能量衰减). 设  $u$  是如下波动方程的光滑解

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, \quad u(t, \mathbf{x}) = 0 \text{ on } (0, \infty) \times \partial\Omega, \quad (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) \in C_c^\infty(\Omega). \quad (6.3.7)$$

其中  $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus \overline{O}$ ,  $O \subset \mathbb{R}^d$  是有界开集, 且关于原点是星型域。

回忆当  $d = 3, \Omega = \mathbb{R}^3, O = \emptyset$  时, 线性波动方程的解具有  $O(t^{-1})$  的衰减速率。本题的目的是在  $\Omega$  的有界子区域内建立  $O(t^{-2})$  的衰减估计, 这被称作波动方程的局部能量衰减 (local energy decay). 今假设  $O \subset B(\mathbf{0}, R)$ , 维数  $d = 3$ .

(1) 证明: 由问题6.3.2(3) 给出的  $c$  和  $\mathbf{r}$  满足如下关系, 其中  $\nu$  是  $\partial O$  的单位内法向量:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \, d\mathbf{x} = \int_{\partial O} \mathbf{r} \cdot \nu \, dS_{\mathbf{x}} \leq 0.$$

(2) 利用 (1) 和  $c$  的表达式, 证明: 对任意  $t > 0$  都有

$$\begin{aligned} & \int_{B(\mathbf{0}, R) \setminus O} \frac{(t + |\mathbf{x}|)^2}{4} \left( \partial_t u + \partial_r u + \frac{d-1}{2|\mathbf{x}|} u \right)^2 + \frac{(t - |\mathbf{x}|)^2}{4} \left( \partial_t u - \partial_r u - \frac{d-1}{2|\mathbf{x}|} u \right)^2 \\ & + \frac{|\mathbf{x}|^2 + t^2}{2} (|\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2) \, d\mathbf{x} \leq C. \end{aligned}$$

(3) 证明: 当  $t \geq 2R$  时, 有估计

$$\int_{B(\mathbf{0}, R) \setminus O} |\nabla u|^2 - (\partial_r u)^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{t^2}, \quad (6.3.8)$$

$$\int_{B(\mathbf{0}, R) \setminus O} (\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 + \frac{d-1}{|\mathbf{x}|} u \partial_r u + \frac{(d-1)^2}{4|\mathbf{x}|^2} u^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{t^2}. \quad (6.3.9)$$

(4) 利用  $\frac{u}{|\mathbf{x}|} \partial_r u = \operatorname{div} \left( \frac{u^2}{2|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \right) - \frac{d-2}{2} \frac{u^2}{|\mathbf{x}|^2}$  和 (3) 的第二个不等式证明:

$$\int_{B(\mathbf{0}, R) \setminus O} (\partial_t u)^2 + (\partial_r u)^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{t^2}, \quad t \geq 2R.$$

# 附录 A 常用记号

附录的第一部分记录了本讲义中常用的记号。

## A.1 常用符号

- $\mathbb{R}^d = d$  维实欧几里德空间  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ .
- $\mathbb{R}^d$  中的点  $\mathbf{x}$  的坐标记为  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ .
- 给定集合  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , 我们记  $\partial\Omega = \Omega$  的边界,  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega$  的闭包.
- $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^d$  : 以  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  为球心,  $r > 0$  为半径的开球.  $\bar{B}(\mathbf{x}, r) =$  开球  $B(\mathbf{x}, r)$  的闭包,  $\check{B}(\mathbf{x}, r) = B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\} =$  以  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  为球心、 $r > 0$  为半径的去心开球.
- $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B(\mathbf{0}, 1) = \mathbb{R}^d$  中的  $(d-1)$  维单位球面.
- $\alpha(d) = \mathbb{R}^d$  中的单位球体积  $= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}$ .  $d\alpha(d) = \mathbb{S}^{d-1}$  的表面积.
- $\mathbb{R}_+^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} =$  上半空间 (不含边界).
- $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) =$  第  $i$  个标准坐标向量.
- 设  $U, V$  是  $\mathbb{R}^d$  中的两个开集, 我们记  $V \Subset U$  是指  $V \subset \overline{V} \subset U$  且  $\overline{V}$  是  $U$  的紧子集. 此时我们称  $V$  紧包含于  $U$ .
- 给定  $T > 0$  和开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , 我们定义  $\Omega$  对应的抛物圆柱为  $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ 、抛物边界为  $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$ .

## A.2 函数相关的记号

- 函数  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  又写作  $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_d)$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ). 我们称  $u$  是  $\Omega$  内的光滑函数, 是指  $u$  在  $\Omega$  内无穷阶连续可微.
- 设  $u, v$  是两个函数, 我们记  $u \equiv v$  是指  $u$  恒等于  $v$ . 我们记  $u := v$  是指定义函数  $u$  与  $v$  相等.
- 函数  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  的支集记作  $\text{Spt } u := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \neq 0\}}$ .

- 函数  $u$  的正部 (负部) 定义为  $u^+ := \max\{u, 0\}$  ( $u^- := -\min\{u, 0\}$ ). 则有  $u = u^+ - u^-$  以及  $|u| = u^+ + u^-$  成立. 符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

- 对向量值函数  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 我们记  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$  ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ).
- 若  $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^d$  中的  $(d-1)$  维超曲面, 我们记  $\int_{\Sigma} f(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}$  为函数  $f$  在  $\Sigma$  上关于  $(d-1)$  维曲面测度的积分, 其中下标  $\mathbf{x}$  表示的是对  $\mathbf{x}$  变量作积分, 在讲义中我们常常忽略它 (除非出现多个变量). 设  $C$  是  $\mathbb{R}^d$  中的曲线, 我们记  $\int_C f d\ell$  为函数  $f$  沿着  $C$  的 (第一型) 曲线积分.
- 平均值:

$$\oint_{\Omega} f d\mathbf{x} = \frac{1}{\operatorname{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\oint_{\partial\Omega} f dS_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\operatorname{Area}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}.$$

- 集合  $E \subset \mathbb{R}^d$  的示性函数记作  $\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in E \\ 0 & \mathbf{x} \notin E \end{cases}$ .
- 函数  $f, g$  在  $\mathbb{R}^d$  上的卷积记为  $f * g$ , 其定义为积分式 (如果收敛)

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

- 我们说当  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  时有  $f = O(g)$ , 是指存在常数  $C$  使得  $|f(\mathbf{x})| \leq C|g(\mathbf{x})|$  对任意充分靠近  $\mathbf{x}_0$  的点  $\mathbf{x}$  成立.
- 我们说当  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  时有  $f = o(g)$ , 是指  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x})|}{|g(\mathbf{x})|} = 0$ .

### A.3 求导相关的记号

设有函数  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

- 偏导数定义为  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x} + h e_i) - u(\mathbf{x})}{h}$  (如果极限存在). 我们常将其简记为  $\partial_{x_i} u$ ,  $\partial_i u$ ,  $u_{x_i}$ . 类似地, 我们可以定义高阶偏导数.
- 高阶偏导数的记号:

1. 设  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  是多重指标，长度定义为  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ ，则偏导数  $\partial^\alpha u$  定义为

$$\partial^\alpha u(\mathbf{x}) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} u.$$

2. 给定非负整数  $k$ ，记  $\partial^k u(\mathbf{x}) := \{\partial^\alpha u(\mathbf{x}) : |\alpha| = k\}$  为  $u$  的全体  $k$  阶偏导数构成的集合，同时我们把  $\partial^k u(\mathbf{x})$  视作  $\mathbb{R}^{d^k}$  中的点，其到原点的距离为

$$|\partial^k u| = \left( \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. 若  $k = 1$ ，我们将  $\partial u$  视作向量，并用梯度作为记号

$$\nabla u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u) = \text{梯度向量}.$$

4.  $u_r := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \nabla u$  是指  $u$  的径向导数。

5. 若  $k = 2$ ，则

$$\nabla^2 u := \begin{bmatrix} u_{x_1 x_1} & \cdots & u_{x_1 x_d} \\ & \cdots & \\ u_{x_d x_1} & \cdots & u_{x_d x_d} \end{bmatrix}$$

表示  $u$  的 Hessian 矩阵。 $\Delta u = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i} = \text{Tr}(\nabla^2 u)$  是 Laplace 算子作用在  $u$  上。

- 设  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  是向量值函数，其偏导数定义如下。

1. 设  $\alpha$  为多重指标，则定义  $\partial^\alpha \mathbf{u} = (\partial^\alpha u_1, \dots, \partial^\alpha u_m)$ . 类似我们定义  $\partial^k \mathbf{u}$  和  $|\partial^k \mathbf{u}|$ .

2. 若  $k = 1$ ，我们记  $\nabla \mathbf{u} := \begin{bmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \cdots & \partial_{x_d} u_1 \\ & \cdots & \\ \partial_{x_1} u_m & \cdots & \partial_{x_d} u_m \end{bmatrix}$  为  $\mathbf{u}$  的梯度矩阵。

3. 若  $m = d$ ，我们定义向量值函数  $\mathbf{u}$  的散度为

$$\text{div } \mathbf{u} := \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{Tr } \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u_i.$$

4. 若  $m = d = 3$ ，我们定义向量值函数  $\mathbf{u}$  的旋度为  $\text{curl } \mathbf{u} := \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)$ . 若  $m = d = 2$ ，向量值函数  $\mathbf{u}$  的旋度则是标量，定义为  $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = -\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2$ .

## A.4 函数空间的记号

设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$  中的开集.

- $C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u \text{ 是连续函数.}\}$
- $C(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\Omega) : u \text{ 在 } \Omega \text{ 的任何有界子集中都一致连续.}\}$ .
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \partial^\alpha u \text{ 存在, 且在 } \Omega \text{ 上是一致连续的, } \forall 0 \leq |\alpha| \leq k\}$ .
- $C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : \partial^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 的任何有界子集中都一致连续, } \forall 0 \leq |\alpha| \leq k\}$ .
- $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u \text{ 在 } \Omega \text{ 上是无穷阶连续可微的.}\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ .  $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{\Omega})$ .
- $C_c(\Omega), C_c^k(\Omega), C_c^\infty(\Omega)$  分别表示  $C(\Omega), C^k(\Omega), C^\infty(\Omega)$  中具有紧支集的函数全体.
- $C_1^2(I \times \Omega) = \{u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} \partial_{x_j} u, \partial_t u \in C(I \times \Omega), \forall 1 \leq i, j \leq d\}$ . 这里  $I \subset \mathbb{R}$  是(时间)区间,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是区域. 变量一般记为  $t \in I$  和  $\mathbf{x} \in \Omega$ .
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u \text{ 是 } \Omega \text{ 上的 Lebesgue 可测函数, } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$  其中

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u \text{ 是 } \Omega \text{ 上的 Lebesgue 可测函数, } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$  其中

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \text{ess sup}_{\Omega} u := \inf\{M \in \mathbb{R} | \text{集合}\{\mathbf{x} | u(\mathbf{x}) > M\} \text{ 的 Lebesgue 测度为零.}\}.$$

- $L_{\text{loc}}^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u \in L^p(V), \forall V \Subset U\}$ .
- $\|\partial^k u\|_{L^p(\Omega)} = \||\partial^k u|\|_{L^p(\Omega)}$ .
- 函数空间  $C(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m), L^p(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m)$  的元素是向量值函数  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 且它的每个分量属于标量函数对应的那个函数空间.
- Schwartz 空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{(N,\alpha)} < \infty \ \forall N \in \mathbb{N} \text{ 和多重指标 } \alpha\}.$$

该空间上可以定义一族半范数如下

$$\|u\|_{(N,\alpha)} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{x}|)^N |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|.$$

则  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{(N,\alpha)})$  是 Fréchet 空间.

# 附录 B 多变量微积分的常用公式

记号: 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是  $\mathbb{R}^d$  中的开集, 其边界  $\partial\Omega$  是  $C^1$  的 (即局部可以写成  $C^1$  函数图像),  $\bar{\Omega}$  是  $\Omega$  的闭包. 记  $N = (N_1, \dots, N_d)$  是  $\partial\Omega$  的单位外法向量. 记  $\nabla := (\partial_1, \dots, \partial_d)$  为梯度算子、 $\Delta := \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2 = \nabla \cdot \nabla$  为 Laplace 算子. 设  $u, v, w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  为标量函数,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  为向量值函数.  $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^d$  是以  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  为圆心,  $r > 0$  为半径的  $d$  维开球.

## B.1 分部积分公式

本节将承认如下事实成立, 谁爱证谁去证。

引理 B.1.1. 设  $u \in C^1(\Omega)$ , 则有

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u N_i \, dS, \quad 1 \leq i \leq d.$$

据此引理, 我们可得如下结论。

命题 B.1.2. 下述等式成立

1. (散度定理) 设有向量值函数  $\mathbf{u} \in C^1(\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d)$ , 则

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot N \, dS.$$

2. (分部积分) 设有函数  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , 则下式成立

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v N_i \, dS - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v \, d\mathbf{x}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

回忆  $\Delta u := \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u$ . 结合散度定理, 我们可证明如下恒等式成立。

命题 B.1.3 (高斯-格林公式及其推论). 设  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . 则有 Gauss-Green 公式的如下形式成立.

1.  $\int_{\Omega} \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \, dS.$
2.  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial N} \, dS.$
3.  $\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \, dS.$

若  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , 我们就称  $u$  是  $\Omega$  中的调和函数. 对调和函数, 命题 B.1.3 可以导出下述结论

**推论 B.1.4.** 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  是  $\Omega$  中的调和函数, 则

1.  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \, dS = 0.$
2.  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial N} \, dS.$

当空间维数  $d = 3$ , 我们定义旋度为  $\operatorname{curl} \mathbf{u} := \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)$ . 这个量在物理模型中的很多偏微分方程里都会出现, 尤其是与流体力学、电磁学相关的方程。

**命题 B.1.5** (向量积的微积分恒等式). 设  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in C^2(\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ ,  $f \in C^1(\bar{\Omega})$ , 则有

1.  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ ,  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ .
2.  $\nabla \times (f \mathbf{u}) = f(\nabla \times \mathbf{u}) + (\nabla f) \times \mathbf{u}$ . 特别地,  $\nabla \times (f(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  对任意  $f \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$  都成立。  
(因此, 静电场是无旋场)
3. 设  $\Omega$  是单连通集. 若  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  in  $\Omega$ , 则存在势函数  $\varphi$  使得  $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ .
4.  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$ .
5.  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$
6.  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v})$ .
7.  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$ .
8.  $\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{N}) \, dS_x$ .
9.  $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{N} \, dS_x + \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ .

## B.2 积分的极坐标表示、移动区域上的积分

下述引理讲了如何把  $d$  维空间的积分转化为极坐标下的球面积分和对半径的积分, 证明参见 Stein 实分析 [15] 第六章。

**引理 B.2.1** (积分的极坐标表示). 设  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  在  $\mathbb{R}^d$  上是 Lebesgue 可积的, 则有

1. 对任意点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ , 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \, d\mathbf{x} = \int_0^\infty \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, \rho)} u(\mathbf{x}) \, dS_x \right) d\rho.$$

2. 对任意正数  $R > 0$  和点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ , 成立

$$\int_{B(\mathbf{x}_0, R)} u \, d\mathbf{x} = \int_0^R \left( \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, \rho)} u(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \right) d\rho.$$

积分的极坐标表示实际上是如下“余面积公式”的特例, 当然如下定理所述的余面积公式也只是几何测度论中的一个特例, 原始版本参见 Evans-Gariepy [4] 的第三章。

**定理 B.2.2** (余面积公式). 设  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lipschitz 连续函数, 且假设对几乎处处的  $r \in \mathbb{R}$ , 水平集  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | u(\mathbf{x}) = r\}$  都是光滑的  $(d - 1)$  维超曲面. 又假设  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lebesgue 可积函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) |\nabla u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{\{u=r\}} f(\mathbf{x}) \, dS_{\mathbf{x}} \right) dr.$$

引理 B.2.1 可由定理 B.2.2 中取  $u(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  直接证得. 定理 B.2.2 的证明见 [4] 的第三章。

接下来我们介绍如何对移动区域上的积分式求导。今考虑一族边界光滑的区域  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$ , 且光滑 ( $C^\infty$ ) 依赖于参数  $t \in \mathbb{R}$ . 设  $\mathbf{v}$  是边界  $\partial\Omega(t)$ ,  $N$  是  $\partial\Omega(t)$  的单位外法向量。

**定理 B.2.3.** 设  $f = f(t, \mathbf{x})$  是光滑函数, 则有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega(t)} f(\mathbf{v} \cdot N) \, dS_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega(t)} \partial_t f \, d\mathbf{x}.$$

## B.3 卷积与光滑化

本节讲述: 给定一个  $L^p$  函数  $f$  (不知道它的连续性、可微性), 如何利用卷积构造一族光滑函数  $f_\varepsilon$  来逼近  $f$ . 该构造在现代偏微分方程研究中仍然是常用技巧。

**定义 B.3.1.** 首先我们需要引进下面这些记号:

- 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  是开集, 实参数  $\varepsilon > 0$ , 我们记  $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .
- 定义隆起函数 (bump function)  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  如下

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2 - 1}\right) & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases},$$

其中常数  $C > 0$  保证积分值  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta \, d\mathbf{x} = 1$ . 这里我们称  $\eta$  为标准光滑子 (standard mollifier).

- (光滑子) 对每个实参数  $\varepsilon > 0$ , 我们定义

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

并称  $\eta_\varepsilon$  是参数为  $\varepsilon > 0$  的光滑子. 利用变量替换公式可以证明  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon d\mathbf{x} = 1$  以及  $\text{Spt } \eta_\varepsilon \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ .

给定  $f \in L^p(\Omega)$ , 其中  $1 \leq p \leq +\infty$ , 我们利用卷积和光滑子引进它的一种光滑逼近  $f_\varepsilon(\mathbf{x}) := (\eta_\varepsilon * f)(\mathbf{x})$ . 如下定理记录了卷积光滑逼近的若干常用性质.

**定理 B.3.1** (光滑子的性质). 设  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是局部可积函数(即在  $\Omega$  的任意紧子集上都是 Lebesgue 可积的). 则有

1.  $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ . (这个  $\Omega_\varepsilon$  不可以换成  $\Omega$ ! 这是因为作卷积后,  $\text{Spt } f_\varepsilon$  会比  $\text{Spt } f$  “膨胀出”一圈厚度为  $\varepsilon$  的区域, 这可以通过卷积定义看出来)
2.  $f_\varepsilon \rightarrow f$  a.e., as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
3. 若  $f \in C(\Omega)$ , 则在  $\Omega$  的任意紧子集上都有一致收敛  $f_\varepsilon \Rightarrow f$ .
4. 若  $1 \leq p < \infty$  且  $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ , 则  $f_\varepsilon \rightarrow f$  in  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ .

**证明.** 首先证明光滑性, 实际上这只要证明一阶导数的存在性, 再用数学归纳法递推到任意阶导数即可. 固定点  $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$ 、分量  $i \in \{1, \dots, d\}$ , 则可以取充分小的实数  $h$ , 使得  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i \in \Omega_\varepsilon$ . 接下来我们计算差商

$$\begin{aligned} \frac{f_\varepsilon(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f_\varepsilon(\mathbf{x})}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \left( \eta \left( \frac{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_V \frac{1}{h} \left( \eta \left( \frac{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

这里  $V \Subset \Omega$ . 而现在我们有如下一致收敛的结论:

$$\frac{1}{h} \left( \eta \left( \frac{\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) - \eta \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) \right) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \partial_{x_i} \eta \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) \text{ in } V \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

这就表明上述差商的积分数是收敛的, 我们记  $h \rightarrow 0$  时上述积分式的极限函数为  $\partial_{x_i} f_\varepsilon(\mathbf{x})$ , 其满足

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

这就证明了一阶导数存在性, 且证明了  $\partial_i f_\varepsilon = \partial_i(f * \eta_\varepsilon) = (\partial_i f) * \eta_\varepsilon$ .

接下来证明点态收敛, 据卷积光滑逼近的定义, 我们可以作如下化简:

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})(f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})) d\mathbf{y} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right) |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{y} \\ &\leq C \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{y} \rightarrow 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

上述过程中的最后一步是由 Lebesgue 微分定理得到（见 Stein 实分析 [15] 第三章）。进一步，如果  $f$  是连续函数，则对任意紧子集  $V \Subset \Omega$ ，我们可以插入一个开集  $W$  使得  $V \Subset W \Subset \Omega$ 。此时  $f$  在  $\overline{W}$  上是一致连续的，且由 Lebesgue 微分定理得到的收敛性对每个  $\mathbf{x} \in \overline{V}$  都成立，这样就证明来结论 (3)。

最后证明 (4)。仍然按照上面的方法选取开集  $V \Subset W \Subset \Omega$ ，首先要证明  $f_\varepsilon \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ )。为此，固定  $\mathbf{x} \in V$ ，用 Hölder 不等式可算出

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(\mathbf{x})| &= \left| \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \leq \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}} \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 1 \cdot \left( \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

接下来，两边取  $p$  次方并在  $V$  上积分，利用积分 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned} \int_V |f_\varepsilon(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} &\leq \int_V \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_W |f(\mathbf{y})|^p \left( \int_{B(\mathbf{y}, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_W |f|^p < \infty. \end{aligned}$$

在  $L^p$  范数 ( $1 \leq p < \infty$ ) 下的收敛则可以由连续函数逼近得到，即给定  $V, W$  as above 和误差  $\delta > 0$ ，我们可以找到  $g \in C(W)$  使得  $\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$ 。则

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

利用 (3)，我们有  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$ 。  $\square$



# 附录 C 傅立叶级数与傅立叶变换

本章介绍傅立叶 (Fourier) 变换和傅立叶级数的基本性质，部分定理的证明被跳过（因为需要更多的实变函数技巧）。傅立叶变换部分主要参考了 Stein 的傅立叶分析 [14] 第六章和 Folland 实分析 [5] 第八章，傅立叶级数部分则参考常庚哲、史济怀数学分析 [1] 第 17 章。

## C.1 傅立叶变换

给定  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ，定义  $f$  的傅立叶变换为如下复值函数

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad (\text{C.1.1})$$

其中  $i = \sqrt{-1}$ ,  $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_d \xi_d$ .  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$  被称作“频率变量”。我们同样可以定义  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  的傅立叶逆变换

$$\check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (\text{C.1.2})$$

傅立叶变换及其逆变换（作为算子）一般分别被记作  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{F}^{-1}$ .

为什么我们能把 (C.1.2) 称作傅立叶“逆”变换呢？这是因为我们有如下反演公式。

**命题 C.1.1** (傅立叶反演公式). 设  $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 则存在  $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$  (连续函数，且在无穷远处趋于零) 使得  $f = f_0$  a.e. 以及  $f_0 = (\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge$ .

该性质的证明依赖于 Riemann-Lebesgue 引理和 Gauss 核的恒等逼近（类似于前一节的卷积光滑逼近，只是紧支光滑函数  $\eta$  换成标准正态分布的密度函数），这里暂时跳过且证明不作要求。

从定义 (C.1.1) 看出， $f \in L^1$  未必蕴含了  $\hat{f} \in L^1$ . 人们因此想找到一个更好的函数类，不妨记为  $X$ ，使得傅立叶变换把  $X$  里面的元素映射到  $X$  里面的元素，而且傅立叶变换在  $X$  上可逆。这

样的函数空间是存在的，其中一个例子为 **Schwartz** 函数空间，其定义如下：

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{(N,\alpha)} < \infty \ \forall N \in \mathbb{N} \text{ 和多重指标 } \alpha\}. \quad (\text{C.1.3})$$

这里的  $\|u\|_{(N,\alpha)}$  是半范数，定义为

$$\|u\|_{(N,\alpha)} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{x}|)^N |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|.$$

据此， $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{(N,\alpha)})$  是 Fréchet 空间。

粗略地说，Schwartz 函数是光滑函数，并且它和它的导数在无穷远处的衰减速率比任意阶多项式衰减都快，比如正态分布高斯核里面的  $e^{-|\mathbf{x}|^2}$  就是一个 Schwartz 函数。

**命题 C.1.2** (Folland [5, Prop. 8.3 and 8.17]). 对 Schwartz 函数空间，成立如下结论：

1. 若  $f \in C^\infty$ ，则  $f \in \mathcal{S}$  当且仅当  $\mathbf{x}^\beta \partial^\alpha f$  对任意多重指标  $\alpha, \beta$  都是有界的，当且仅当  $\partial^\alpha(\mathbf{x}^\beta f)$  对任意多重指标  $\alpha, \beta$  都是有界的。这里  $\mathbf{x}^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d}$ .
2.  $C_c^\infty$  和  $\mathcal{S}$  都在  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) 和  $C_0$  中稠密。

如上定义很难看出傅立叶变换和偏微分方程有什么关系。然而，接下来我们证明傅立叶变换能把导数和乘子互相转化（对应把常系数线性偏微分方程和常微分方程互相转化），把卷积和乘积相互转化（从而用傅立叶变换求得的解往往具有卷积形式）。下面的各个性质中对函数  $f, g$  有不同的要求，但是为了行文上的简便，我们在证明这些结论时假设所有函数都是 Schwartz 函数，一般情况基本可以用  $\mathcal{S}$  在  $L^p$  空间中的稠密性证得。

**命题 C.1.3.** 设  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ，则有

1. (导数  $\leftrightarrow$  乘子) 若  $f \in C^k$ ,  $\partial^\alpha f \in L^1$  对任意  $|\alpha| \leq k$  成立，且  $\partial^\alpha f \in C_0$  对任意  $|\alpha| \leq k-1$  成立，那么有  $\widehat{(\partial_x^\alpha f)(\xi)} = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ . 类似地，若  $\mathbf{x}^\alpha f \in L^1$  对任意  $|\alpha| \leq k$  成立，则  $\hat{f} \in C^k$  且  $((-i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x}))^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ .
2. 若  $T$  是  $\mathbb{R}^d$  上的可逆线性变换，且  $S = (T^*)^{-1}$  是  $T$  的转置的逆，则  $\widehat{f \circ T} = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ S$ . 特别地，我们有
  - (平移)  $(f(\mathbf{x} - \mathbf{h}))^\wedge(\xi) = e^{-i\mathbf{h} \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$  对任意  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  成立.
  - (伸缩)  $(f(\lambda \mathbf{x}))^\wedge(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\xi/\lambda)$  对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$  成立.
  - (对称性) 若  $f, \hat{f} \in L^1$ ，则  $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ . 进而有  $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$ .
3. (卷积  $\leftrightarrow$  乘积)  $\widehat{f * g}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^d \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$ . 这里  $(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$  表示  $f, g$  的卷积. 卷积定义中的积分式收敛一般只需要  $f, g$  有一个是  $L^1$  的，另一个是  $L^\infty$  的.
4. (Riemann-Lebesgue 引理) 对任意  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$  且满足  $|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$  as  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

证明. (1): 为了简便, 我们只对一阶偏导数  $\partial^\alpha = \partial_j$  证明, 其中  $j \in \{1, \dots, d\}$ , 一般情况可以反复利用一阶导数的结果得到. 据傅立叶变换的定义和分部积分可得

$$\begin{aligned}\widehat{(\partial_{x_j} f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\partial_j}{=} -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \partial_{x_j} (e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi}) d\mathbf{x} = (i\xi_j) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

(1) 中第二个恒等式可以类似证得

$$(-ix_j f(\mathbf{x}))^\wedge(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} (-ix_j) f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \partial_{\xi_j} (e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi}) d\mathbf{x} = \partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi).$$

(2): 利用傅立叶变换的定义和变量替换  $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$ , 我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f \circ T}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(T\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = |\det T|^{-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot T^{-1}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= |\det T|^{-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i(S\xi) \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = |\det T|^{-1} \hat{f}(S\xi).\end{aligned}$$

(3): 不妨假设  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 于是下面证明过程中的积分式全是收敛的, 且可以直接换序。一般情况可由命题 C.1.2 的逼近性质给出.

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)}_{(f * g)(\mathbf{x})} e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) e^{-i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \xi} e^{-i\mathbf{y} \cdot \xi} d\mathbf{x} \\ &= (\sqrt{2\pi})^d \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{-i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \xi} d\mathbf{x} \right)}_{\hat{f}(\xi)} g(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{y} \cdot \xi} d\mathbf{y} \\ &= (\sqrt{2\pi})^d \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

(4): 再次回忆傅立叶变换的定义:  $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x}$ . 若  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 则可以通过如

下计算证得连续性：

$$|\hat{f}(\xi - \mathbf{h}) - \hat{f}(\xi)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi} (e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}} - 1) d\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| |e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}} - 1| d\mathbf{x}.$$

由于  $|e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}} - 1| \leq 2$  以及  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , 那么对任意  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , 上式最后一个积分里面的被积函数可被  $2|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$  (不依赖  $\mathbf{h}$ ) 逐点控制。据控制收敛定理, 我们可以交换  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0}$  和  $\int_{\mathbb{R}^d}$  的顺序从而证得该积分式收敛到零。

下面证明 Lebesgue 可积函数的傅立叶变换在频率空间无穷远处收敛到零。这个证明有一个小技巧：在相函数中作变量替换  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$ , 把  $\hat{f}(\xi)$  用  $\mathbf{y}$  变量重写, 得到

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\mathbf{y} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\right) e^{-i(\mathbf{y} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2})\cdot\xi} d\mathbf{y} \stackrel{e^{-i\pi} = -1}{=} -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\mathbf{y} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\right) e^{-i\mathbf{y}\cdot\xi} d\mathbf{y}.$$

两式相加得到

$$2\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\right) \right) e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi} d\mathbf{x},$$

从而

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x} + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}\right) \right| d\mathbf{x} \rightarrow 0 \quad \text{as } \xi \rightarrow \infty.$$

最后一步取极限用到了  $L^1$  范数的平移连续性, 即对任意  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  有  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0$ , 而这里  $\pi\xi/|\xi|^2 \rightarrow 0$  就充当了  $\mathbf{h}$  的角色。□

**注记 C.1.1.** 上述性质中的(1)和(3)在求解常系数线性偏微分方程时非常重要。例如, 给定如下形式的方程  $u_t + \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial_x^\alpha u = f(t, \mathbf{x})$  ( $t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ), 如果我们对  $\mathbf{x}$  变量作傅立叶变换, 并记  $u(t, \mathbf{x})$  的傅立叶变换为  $\hat{u}(t, \xi)$ , 则原偏微分方程就转化成一个关于时间变量  $t$  的常微分方程:

$$\hat{u}_t(t, \xi) + \sum_{k=0}^N a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi),$$

这样我们可以 (利用积分因子法等等) 显式解出  $\hat{u}(t, \xi)$ , 最终通过傅立叶逆变换求解  $u$  本身。

需注意的是, 最后一步的实施往往对函数本身要求很高 (例如是 Schwartz 函数等), 而我们要求解的方程的初值或是源项并不一定是非常好的函数。因此傅立叶变换方法更多地是用来“预判”解的表达式 (因为如果一个表达式对“很差的”情况成立, 那么同样的表达式对“很好的”情况肯定也是对的), 然后再利用分析的手段证明这个表达式可以推广到更一般的情况。

显见, 命题C.1.3(1) 蕴含如下结果

**推论 C.1.4** ([5, 推论 8.23]).  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{F}^{-1}$  都将  $\mathcal{S}$  连续地映射到  $\mathcal{S}$  自身。

下一个引理表明：傅立叶变换保持  $L^2$  内积。

**引理 C.1.5.** 若  $f, g \in L^1$ , 则  $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{g}(\xi) d\xi$ .

证明. 由 Fubini 定理, 直接代入定义计算可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} \right) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\stackrel{\text{Fubini 定理}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})\hat{g}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明定理 C.1.1, 即傅立叶反演公式。(本课程对此不作要求)

**定理 C.1.1 的证明.** 令  $\Phi(\mathbf{x}) = e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$ . 给定  $t > 0$ , 我们考虑对  $(\hat{f})^\vee$  作卷积光滑逼近:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\sqrt{2t}\xi) e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

接下来化简左边, 据命题 C.1.3 和引理 2.4.1, 函数  $\varphi(\xi) := e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} e^{-t|\xi|^2}$  的傅立叶变换可以写成

$$\hat{\varphi}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Phi(\sqrt{2t}\xi) d\xi = \frac{1}{(\sqrt{2t})^d} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\sqrt{2t}}\right).$$

现在, 可以使用引理 C.1.5 得到如下的卷积形式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{2t})^d} \Phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\sqrt{2t}}\right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= (\eta_{\sqrt{2t}} * f)(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

这里  $\eta(\cdot) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \Phi(\cdot) \in \mathcal{S}$ ,  $\eta_\varepsilon(\cdot) := \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ . 而习题 2.1.1 表明  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta = 1$ , 从而  $\eta_{\sqrt{2t}}$  是一族恒等逼近。

现在我们用定理 B.3.1(4) 的类似版本 (见 Folland [5, 引理 8.25]) 可以证得  $f * \eta_{\sqrt{2t}} \xrightarrow{L^1} f$  in  $L^1$ , 进而存在子序列几乎处处收敛到  $f$ . 另一方面, 因为  $\hat{f} \in L^1$ , 所以我们用控制收敛定理就可得到想

要的极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|\xi|^2} e^{i\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi = (\hat{f})^\vee(x).$$

这就说明  $f = (\hat{f})^\vee$  a.e. 最后, Riemann-Lebesgue 引理表明二者都是  $C_0$  函数, 证毕。  $\square$

**推论 C.1.6** ([5, 推论 8.27]). 若  $f \in L^1$  且  $\hat{f} = 0$ , 则  $f = 0$  a.e.

**推论 C.1.7** ([5, 推论 8.28]).  $\mathcal{F}$  是  $\mathcal{S}$  上的自同胚。

我们最后以 Plancherel 定理结束这一小节, 它表明傅立叶变换是  $L^2$ -等距同构。

**定理 C.1.8** (Plancherel 定理). 若  $f \in L^1 \cap L^2$ , 则  $\hat{f} \in L^2$ ; 且  $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$  可以唯一地延拓为  $L^2$  上的酉等距同构。

**证明.** 令  $\mathfrak{X} := \{f \in L^1 | \hat{f} \in L^1\}$ . 由于  $\hat{f} \in L^1$  蕴含  $f \in L^\infty$ , 于是我们知道  $\mathfrak{X} \subset L^2$ . 又因为  $\mathcal{S} \subset \mathfrak{X}$ , 所以  $\mathfrak{X}$  在  $L^2$  中是稠密的. 现给定  $f, g \in \mathfrak{X}$ , 令  $h = \bar{g}$ . 则由傅立叶反演公式知  $\hat{h}(\xi) = \overline{g(\xi)}$ , 再用引理 C.1.5 就可得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} h = \int \hat{f} \bar{g}.$$

因此,  $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}}$  保持了  $L^2$  内积。特别地, 令  $g = f$  就得到  $\mathcal{F}$  是  $L^2$  酉等距的, 即  $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$  (Plancherel 恒等式). 反演公式表明  $\mathcal{F}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ , 由 B.L.T. 定理 (有界线性泛函的连续延拓定理) 得知  $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}}$  可以唯一地延拓为  $L^2$  上的酉等距同构. 最后, 我们只要证明这个延拓之后的算子与  $\mathcal{F}$  在  $\mathfrak{X}$  是一样的, 这一步与定理 C.1.1 的证明类似, 此处不再赘述。  $\square$

## 习题 C.1

**习题 C.1.1.** 是否存在  $\mathbb{R}^d$  上的非零调和函数  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ?

**习题 C.1.2.** 给定  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 设  $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  是  $-\Delta u + u = f$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  的光滑解.

(1) 计算  $u$  的傅立叶变换.

(2) 证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x})|^2 + 2|\nabla u(\mathbf{x})|^2 + |\nabla^2 u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

$$\text{此处 } |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} u)^2, |\nabla^2 u|^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (\partial_{x_j} \partial_{x_k} u)^2.$$

**习题 C.1.3.** 在  $\mathbb{R}^d$  中我们有极坐标表示  $\mathbf{x} = r\theta$ , 其中  $r = |\mathbf{x}|, \theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ . 我们称  $f$  是径向函数是指  $f(\mathbf{x})$  的取值只依赖于  $r$ , 不依赖  $\theta$ . 证明: 若  $f$  是径向 Schwartz 函数, 则它的傅立叶变换也是。

### 问题 C.1

**问题 C.1.1.** 设  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  是可测函数, 满足  $|\varphi| = 1$  以及  $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})$  对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  成立。证明: 存在  $\xi \in \mathbb{R}^d$  使得  $\varphi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{x} \cdot \xi}$ .

**问题 C.1.2** (\* 海森堡不确定性原理). 给定点  $\mathbf{x}_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$  以及函数  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 证明如下海森堡不确定性原理:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{d^2}{4} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^2. \quad (\text{C.1.4})$$

这个不等式表明动量和位置不可能同时在给定的动量  $\xi_0$  和给定的位置  $\mathbf{x}_0$  附近被确定。

提示: 只需证明  $\xi_0 = \mathbf{x}_0 = 0$  的情况即可, 否则考虑  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi_0}$  并利用命题 C.1.3(2) 约化到这一特殊情况。利用 Plancherel 恒等式可得  $|\xi \hat{f}(\xi)|^2 = |\widehat{\nabla f}(\xi)|^2$ , 之后再用 Plancherel 恒等式和 Cauchy-Schwarz 不等式证明左边  $\geq (\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} \cdot \nabla f)f| d\mathbf{x})^2$ , 最后用  $(\nabla f)f = \frac{1}{2}\nabla(f^2)$ , 然后分部积分一次。

**问题 C.1.3.** 本题是习题 C.1.3 的后继, 计算径向函数傅立叶变换与原始函数的关系。设  $\sigma$  是单位球面  $\mathbb{S}^{d-1}$  上的曲面测度 (具体的球坐标表示可参见数学分析教材 [1] 第 10.8 节)。令  $J(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} d\sigma(\mathbf{x})$ . 证明如下结论。

- (1)  $J$  是径向函数, 并记  $j(|\xi|) = J(\xi)$ , 定义  $g(\rho) = \int_0^\infty j(2\pi r\rho)f(r)r^{d-1} dr$ .
- (2)  $J$  和  $j$  分别满足方程  $\Delta J + J = 0$  和  $\rho j''(\rho) + (d-1)j'(\rho) + \rho j(\rho) = 0$ . 后者被称作 Bessel 方程。  
(实际上可以证明  $j(\rho) = (2\pi)^{d/2}\rho^{(2-d)/2}J_{(d-2)/2}(\rho)$ , 其中  $J_\alpha$  是  $\alpha$  阶第一类 Bessel 函数)
- (3) 计算  $d = 3$  时,  $j$  的表达式。

**问题 C.1.4.** 本题是问题 C.1.3 的后继, 讨论第一类 Bessel 函数的基本性质。对整数  $n$ , 定义阶为  $n$  的第一类 Bessel 函数

$$J_n(\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta.$$

- (1) 若  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  是径向函数, 用带有  $J_0(\cdot)$  的积分表达式写出  $\hat{f}(\xi)$ .
- (2) 证明: 若  $\rho \in \mathbb{R}$ , 则  $J_n(\rho) \in \mathbb{R}$ .
- (3) 证明如下恒等式

1.  $J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$ .
2.  $2J'_n(\rho) = J_{n-1}(\rho) - J_{n+1}(\rho)$ .
3.  $\left(\frac{2n}{\rho}\right) J_n(\rho) = J_{n-1}(\rho) + J_{n+1}(\rho)$ .
4.  $(\rho^{-n} J_n(\rho))' = -\rho^{-n} J_{n+1}(\rho)$ .
5.  $(\rho^n J_n(\rho))' = \rho^n J_{n-1}(\rho)$ .

6.  $J_n(\rho)$  满足如下二阶常微分方程

$$J_n''(\rho) + \rho^{-1} J_n'(\rho) + (1 - n^2/\rho^2) J_n(\rho) = 0.$$

(4) 证明:

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\rho^{2m}}{2^{2m} m!(n+m)!}.$$

(5) 证明: 对任意  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  有

$$J_n(a+b) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} J_\ell(a) J_{n-\ell}(b).$$

**问题 C.1.5.** 本题是问题C.1.4的后继, 讨论分数阶第一类 Bessel 函数的基本性质。对非整数值  $n, (n > -1/2)$ , 定义 Bessel 函数为

$$J_n(\rho) = \frac{(\rho/2)^n}{\Gamma(n+1/2)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{i\rho t} (1-t^2)^{n-(1/2)} dt$$

- (1) 证明: 对非负整数  $n$ , 上述积分式定义的  $J_n(\rho)$  与问题C.1.4里面的定义是等价的。(提示: 先对  $n=0$  验证, 然后再套用问题C.1.4里面的递推式。)  
(2) 证明  $J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{-1/2} \sin \rho$ , 并满足

$$\lim_{n \rightarrow -1/2} J_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{-1/2} \cos \rho$$

- (3) 设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  是径向函数, 即  $f(\mathbf{x}) = f_0(r)$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ . 计算  $\hat{f}$  写成径向函数形式的表达式 (用含  $J_{(d/2)-1}, f_0$  积分式表示)。

**问题 C.1.6.** 本题与 Hermite 函数的基本性质相关。在  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  上我们定义算子  $T, T^*$  为

$$Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(xf(x) - f'(x)), \quad T^*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(xf(x) + f'(x)).$$

证明如下结论:

- (1)  $\int(Tf)\bar{g} = \int f \overline{T^*g}$ , 且  $T^*T^k - T^kT^* = kT^{k-1}$ .  
(2) 设  $h_0 = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$ ,  $h_k = (k!)^{-1/2} T^k h_0$ .  $h_k$  称作第  $k$  个正则化 Hermite 函数。证明:  $Th_k = \sqrt{k+1}h_{k+1}$ ,  $T^*h_k = \sqrt{k}h_{k-1}$  从而  $TT^*h_k = kh_k$ .  
(3) 令  $S = 2TT^* + I$  为 Hermite 算子, 证明  $Sf(x) = x^2 f(x) - f''(x)$ ,  $Sh_k = (2k+1)h_k$ .

(4)  $\{h_k\}_{k \geq 0}$  是复  $L^2(\mathbb{R})$  空间的标准正交集。

(5) 用归纳法证明对任意正整数  $k$  有

$$T^k f(x) = (-1)^k 2^{-k/2} e^{x^2/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^k (e^{-x^2/2} f(x)), \quad h_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^k k!}} e^{x^2/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^k e^{-x^2/2}.$$

(6) 令  $H_k(x) = e^{x^2/2} h_k(x)$ . 证明  $H_k$  是  $k$  次多项式 (被称作第  $k$  个正则化 Hermite 多项式), 以及  $\{H_0, \dots, H_m\}$  的全体线性组合恰是全体  $\leq m$  次的多项式。

(7) 证明:  $\{h_k\}_{k \geq 0}$  是复  $L^2(\mathbb{R})$  空间的标准正交基。(提示: 假设  $(f, h_k)_{L^2} = 0$  对任意  $k$  成立, 令  $g(x) = e^{x^2/2} f(x)$ , 通过展开  $e^{-ix\xi}$  以及用 (6) 去证明  $\hat{g} = 0$ .)

(8) 算子  $A : L^2 \rightarrow L^2$  定义为  $Af(x) = (2\pi)^{1/4} f(\sqrt{2\pi}x)$ . 证明: 对任意  $f \in L^2$  都有  $\hat{f} = A^{-1} \mathcal{F} A f$ ,  $\widehat{Tf} = -iT(\hat{f})$ ,  $\hat{h}_0 = h_0$ ,  $\hat{h}_k = (-i)^k h_k$ . 从而如果  $\phi_k = Ah_k$ , 则  $\{\phi_k\}$  是  $L^2$  的标准正交基, 且它由  $\mathcal{F}$  的特征函数组成。

**问题 C.1.7** ( $L^\infty$  空间的 Sobolev 嵌入定理). 对  $s \in \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 我们定义范数  $\|f\|_s := \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ , 其中  $\langle \xi \rangle := \sqrt{1 + |\xi|^2}$ . 今假设  $s > \frac{d}{2}$ , 证明:

(1) 存在常数  $C > 0$  使得对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  成立  $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_s$ .

(2) 存在常数  $C > 0$  使得对任意  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  成立  $\|fg\|_s \leq C \|f\|_s \|g\|_s$ .

提示: (1) 将  $f$  写成  $f = (\hat{f})^\vee$  并用傅立叶逆变换的定义写成积分, 然后乘以  $\langle \xi \rangle^s$  和  $\langle \xi \rangle^{-s}$ , 然后利用  $s > \frac{d}{2}$  得出  $\langle \xi \rangle^{-s} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , 用 Cauchy-Schwarz 不等式即得。(2) 注意到  $\widehat{fg} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} (\hat{f} * \hat{g})$ , 把卷积写成积分式并利用  $\langle \xi \rangle^s \leq C(\langle \xi - \eta \rangle^s + \langle \eta \rangle^s)$  即可。

本题的最一般形式为 Moser 不等式, 可以视作非整数阶的 Leibniz 法则, 即  $\partial^s(fg)$  的本质最高阶项必为  $(\partial^s f)g + f(\partial^s g)$ , 具体结论为: 对任意  $s \geq 0$  有  $\|fg\|_s \leq C(\|f\|_s \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_s)$ . 其证明要用到调和分析中的 Littlewood-Paley 分解, 此处无法介绍。

## C.2 傅立叶级数

设  $f$  是周期  $2\pi$  的函数, 且在  $[-\pi, \pi]$  可积. 我们定义  $f$  对应的傅立叶级数 (二者未必相等) 为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{C.2.1}$$

其中  $a_n, b_n$  被称作  $f$  的傅立叶系数, 表达式为

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \tag{C.2.2}$$

显见, 若  $f$  是奇函数, 则  $a_n = 0$ ; 若  $f$  是偶函数, 则  $b_n = 0$ .

傅立叶系数满足如下性质

**引理 C.2.1** (Riemann-Lebesgue 引理). 若  $f \in L^1([a, b])$ , 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

**引理 C.2.2** (正交性). 如下等式可以直接计算出来

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \delta_{kl}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \delta_{kl}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0,$$

其中  $\delta_{kl} = 1$  if  $k = l$ ,  $\delta_{kl} = 0$  if  $k \neq l$ .

### C.2.1 $C^1$ 函数傅立叶级数的逐点收敛

本节回答问题:  $f$  的傅立叶级数什么时候 (点态) 收敛? 极限函数是什么?

**定理 C.2.3** (逐点收敛定理). 设  $f$  是周期  $2\pi$  且在  $[-\pi, \pi]$  可积的函数并且在  $[-\pi, \pi]$  上是分段<sup>1</sup>  $C^1$  的. 则  $f$  对应的傅立叶级数在  $x = x_0$  处收敛到左、右极限的平均值  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ . 这里  $f(x_0 \pm 0)$  是指  $f$  在  $x = x_0$  处的左、右极限. 特别地, 若  $f$  在  $x = x_0$  处连续, 则它对应的傅立叶级数在  $x = x_0$  处收敛到  $f(x_0)$ .

**证明.** 记  $S_N(f)(x_0)$  为  $f$  的傅立叶级数在  $x = x_0$  处的部分和,

$$S_N(f)(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

在证明  $S_N(f)(x_0) \rightarrow s := \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$  之前, 我们需要化简  $S_N(f)(x_0)$ . 代入  $a_n, b_n$  的定义, 并利用三角恒等式  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  得到

$$S_N(f)(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(x - x_0)) \right) dx.$$

然后用下面这个恒等式对部分和作进一步化简。

**引理 C.2.4.** 设  $\alpha \neq 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 则有  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n\alpha) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

---

<sup>1</sup>即除去有限个间断点外,  $f$  都是  $C^1$  的

证明. 只需注意

$$\cos(n\alpha) = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(n\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\alpha) - \sin((n - \frac{1}{2})\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

□

据此引理, 部分和可以被进一步化简

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(x - x_0)}{2 \sin \frac{x-x_0}{2}} dx \stackrel{x-x_0=t}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0 + t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &\stackrel{f \text{ 2}\pi\text{-周期}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

接下来我们把上面最后一个积分  $\int_{-\pi}^{\pi}$  划分为  $\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$  两部分

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x_0 + t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 - t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

现在可以证明逐点收敛了, 对引理C.2.4中的恒等式两边在  $[0, \pi]$  积分可得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

这样  $S_N(f)(x_0) - s$  就写成

$$S_N(f)(x_0) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

现在我们想用 Riemann-Lebesgue 引理证明收敛性。注意到，若

$$(f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

在  $[-\pi, \pi]$  上是可积的，则 R-L 引理直接蕴含  $S_N(f)(x_0) - s \rightarrow 0$ ，这正是我们想要的结论。然而当  $t \rightarrow 0$  时，分母  $2 \sin \frac{t}{2}$  会趋于零。因此，我们把靠近原点这一部分单独隔离出来，即将  $\int_0^\pi$  划分为  $\int_0^\delta + \int_\delta^\pi$ ，其中  $\delta \ll 1$  是一个很小的数。这样，R-L 引理表明远离原点的部分趋于零

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

对靠近原点的部分  $\int_0^\delta$ ，我们注意到在  $|t| \ll 1$  时有  $2 \sin \frac{t}{2} \approx t$ ，这就使得我们去“强行构造”出  $f$  的导数。我们现在进行如下操作

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \underbrace{\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{t}}_{\text{可积?}} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\approx 1} \cdot \sin(N + \frac{1}{2})t dt.$$

然后把  $s = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$  代入得到

$$\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t}.$$

因为  $f$  是分段  $C^1$  的，所以  $f$  在  $x_0$  处的单侧导数存在且有界

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{\pm t} \text{ 存在且有界.}$$

这样的话  $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t}$  在  $\delta \ll 1$  时就是有界的，从而可积。

现在再对函数  $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t} \cdot \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$  用 Riemann-Lebesgue 引理，就得到

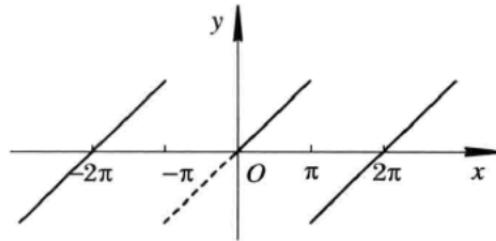
$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

□

**推论 C.2.5 (Dini 判别法).** 设  $f$  是周期  $2\pi$  函数, 且在  $[-\pi, \pi]$  可积. 给定  $s \in \mathbb{R}$ , 令  $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s$ . 若存在  $\delta > 0$  使得  $\frac{\varphi(t)}{t}$  在  $[0, \delta]$  上是可积的, 则  $f$  的傅立叶级数在  $x = x_0$  处收敛到  $s$ . 特别地, 若  $f$  在  $x_0$  附近是  $C^{0,\alpha}$ -Hölder 连续的, 或者  $f$  在  $x_0$  处的单侧导数  $f'_\pm(x_0)$  存在且有限, 则  $f$  的傅立叶级数在  $x = x_0$  收敛到  $s = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ .

现在计算一些例子。

**例 C.2.1.** 计算  $f(x) = \begin{cases} x & -\pi \leq x < \pi \\ -\pi & x = \pi \end{cases}$  的傅立叶级数。



解. 首先注意  $f$  是  $(-\pi, \pi)$  上的奇函数, 则  $a_n = 0 \forall n$ . 而  $b_n$  可以直接计算

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) \right) dx \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx - \frac{1}{\pi} \frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  的傅立叶级数是  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin(nx)$ . 它在  $-\pi < x < \pi$  时等于  $x$ , 但在端点  $x = \pm\pi$ , 该傅立叶级数收敛到  $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$ .  $\square$

**例 C.2.2.** 计算  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2\pi \\ 0 & x = 2\pi \end{cases}$  的傅立叶级数。

解. 由于  $f$  是  $2\pi$ -周期的, 所以可以等价地考虑  $(0, 2\pi)$  上的积分, 而不一定是  $(-\pi, \pi)$ . 首先, 我们仍有  $a_n = 0$  对  $n \geq 1$  成立以及  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$ . 对  $b_n$ , 我们可以算出  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n}$ . 所以傅立叶级数是  $\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$ . 在  $(0, 2\pi)$  上, 我们得到

$$x = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx), \quad 0 < x < 2\pi,$$

但在端点处, 傅立叶级数收敛到  $\frac{0+2\pi}{2} = \pi$ .

上面两个例子表明，傅立叶级数可以计算一些无穷求和。例如在例C.2.1中令  $x = \frac{\pi}{2}$  就有

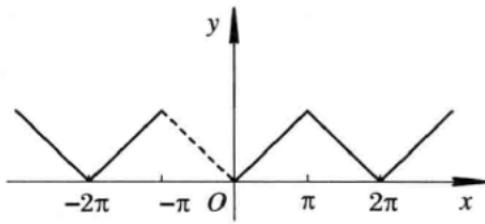
$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

在例C.2.2中令  $x = 1$  就得到

$$\frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

□

**例 C.2.3.** 计算  $f(x) = |x|$ ,  $(-\pi \leq x \leq \pi)$  的傅立叶级数。



解. 首先注意到  $f$  是  $(-\pi, \pi)$  上的偶函数，所以  $b_n = 0 \forall n$ . 然后可以计算  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$  以及

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} & n = 2k-1. \end{cases}$$

因此  $|x|$  在  $[-\pi, \pi]$  上的傅立叶级数是  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$ . 因为  $|x|$  是分段  $C^1$  且点点连续，所以在  $[-\pi, \pi]$  上  $|x|$  等于该傅立叶级数。□

**注记 C.2.1.** 当  $0 < x < \pi$  时，上面三个傅立叶级数全都等于  $x$ ，但是它们的形式各自不同。这是因为我们只对  $2\pi$  周期函数定义了傅立叶级数，如果只在长度为  $\pi$  的区间上给定  $f(x) = x$ ，我们就有不同的方式将其延拓为  $\mathbb{R}$  上的  $2\pi$ -周期函数，上面三个例子就是三种不同的延拓方式。

## C.2.2 Cesàro 平均收敛

Dini 判别法 (推论 C.2.5) 表明傅立叶级数的点态收敛不仅对函数的连续性有要求，而且对函数的一阶导数 (至少是单侧导数) 有额外要求。我们自然地会问，如果现在只知道  $f$  是连续函数，那么它对应的傅立叶级数是否还有逐点收敛到  $f$  的性质。1876 年，Du Bois-Reymond 给出了反例，构造了一个连续函数，其傅立叶级数点点都不收敛到函数本身。

另一方面，我们也可以修改收敛的方式以求得级数的收敛性。以数项级数为例， $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  显然不是收敛级数。本节介绍的“Cesàro 求和”就是一种比传统求和更弱的求和方式。可以证明收敛级数必定在 Cesàro 意义下收敛，但反过来未必。

**定义 C.2.1 (Cesàro 收敛).** 给定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，记  $S_N$  是它前  $N$  项的部分和，定义部分和的算术平均（又称 Cesàro 平均）为

$$\sigma_N := \frac{S_1 + \dots + S_N}{N}, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

若  $\{\sigma_N\}$  是收敛序列，且极限为  $\sigma$ ，则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在 Cesàro-可和的，或者等价地说级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在 Cesàro 意义下收敛，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma \quad (C)$$

.  $\sigma$  称作级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的 Cesàro 平均。

据 Stolz 定理，我们可以直接证明  $\{S_N\}$  的收敛必然蕴含  $\{\sigma_N\}$  的收敛，且二者极限值也相同。另一方面， $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  就是一个在 Cesàro 意义下收敛（极限值为  $1/2$ ），但是本身并不收敛的级数。

本节的主要任务是证明 Fejér 定理，它表明连续函数的傅立叶级数必然在 Cesàro 意义下收敛到函数本身。

**定理 C.2.6 (Fejér).** 设  $f$  是周期  $2\pi$  函数，在  $[-\pi, \pi]$  上可积。若  $f$  在  $x = x_0$  处的单侧极限  $f(x_0 \pm 0)$  存在，则在  $x = x_0$  处， $f$  的傅立叶级数在 Cesàro 意义下收敛到  $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ 。特别地，若  $f$  在  $x_0$  处是连续的，则在  $x = x_0$  处， $f$  的傅立叶级数的 Cesàro 平均就等于  $f(x_0)$ 。

证明. 与定理 C.2.3 的证明类似，我们先化简  $\sigma_N$  的表达式。给定  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ，我们已经有

$$S_N(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

于是就可以计算它的算术平均值

$$\begin{aligned} \sigma_N(x_0) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(x_0) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt, \end{aligned}$$

此处我们再次用到三角恒等式

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

特别地，在  $[-\pi, \pi]$  上令  $f = 1$  可得积分恒等式

$$\frac{1}{N\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = 1.$$

其中的函数  $F_N(t) := \frac{1}{n\pi} \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$  被称作 Fejér 核.

下面证明  $\sigma_N(x_0) \rightarrow s := \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ . 据上面的化简结果，有

$$\sigma_N(x_0) - s = \frac{1}{2N\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

其中  $\varphi(t) = f(x_0 + t) - f(x_0 - t) - 2s$ . 由于  $f$  在  $x_0$  处的单侧极限存在，所以给定任意的  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $\delta \in (0, \pi)$  使得

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| < \varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta) \Rightarrow |\varphi(t)| < 2\varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta).$$

这再次暗示我们把积分区域划分为两块： $\int_0^\delta + \int_\delta^\pi$ . 第一部分可以用被积函数  $\varphi$  的小性控制

$$\left| \int_0^\delta \right| \leq \frac{1}{2N\pi} \int_0^\delta |\varphi(t)| \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt < \frac{\varepsilon}{N\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \varepsilon.$$

第二部分，我们需要用到  $\frac{1}{N}$  的衰减性和  $\varphi$  的可积性

$$\left| \int_\delta^\pi \right| \leq \frac{1}{2N\pi} \int_0^\pi |\varphi(t)| \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} dt = \frac{C}{N}$$

其中  $A = (2\pi \sin^2 \frac{\delta}{2})^{-1} \int_0^\pi |\varphi(t)| dt < \infty$ . 这样，当  $N > A/\varepsilon$  时，我们就有

$$|\sigma_N(x_0) - s| < 2\varepsilon.$$

□

**注记 C.2.2.** 至此，我们可以看见傅立叶级数与泰勒级数的一个不同之处在于：函数  $f$  的傅立叶级数在  $x_0$  处（如果在某种意义下收敛）必然等于  $f$  在该点处的左右极限的平均值，但是泰勒级数可能会收敛到其它的值，例如考虑函数  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  ( $x \neq 0$ ),  $f(0) = 0$ , 它在原点处展开得到的泰勒级数只有在  $x = 0$  时才收敛到  $f(x)$ .

我们把形如  $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$  的函数称作  $n$  次三角多项式. Fejér 定理的一个重要推论就是：周期连续函数可由三角多项式一直逼近。

**定理 C.2.7** (Weierstrass 逼近定理). 任意满足  $f(-\pi) = f(\pi)$  的连续函数  $f \in C[-\pi, \pi]$  可以被三角多项式在  $[-\pi, \pi]$  上一致逼近。即给定这样的函数  $f$ , 对任意误差  $\varepsilon > 0$ , 都存在三角多项式  $P(x)$  使得  $\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$ .

**证明.** 我们可以首先把  $f$  延拓为  $\mathbb{R}$  上的周期  $2\pi$  的连续函数. 据 Fejér 定理,  $f$  可被它的 Cesàro 部分和  $\{\sigma_N(x)\}$  一致逼近。而傅立叶级数的部分和  $S_k(x)$  是  $k$  次三角多项式, 所以  $\sigma_N(x)$  必然是  $N$  次三角多项式。□

### C.2.3 傅立叶级数的 $L^2$ 理论

本节回答问题：傅立叶级数是否具有唯一性？前面两节我们实际上已经对  $f$  具有较好的连续性、可微性的情况作了回答，而本节则考虑一般的可积函数。特别地，Weierstrass 逼近定理不再成立，这是因为一致逼近不允许有任何一个点例外，而连续函数在邻近点处的值相差较小，从而不能出现问题。但是对一般可积函数，逐点值可以在零测集上进行修改，因此不可能有一致逼近的结论。退而求其次，我们考虑在  $L^2$  意义下的收敛性。

以上只是讨论  $L^2$  理论的一个非主要动机，更重要的则是  $L^p$  空间只有在  $p = 2$  时才是内积空间，进而我们可以建立一组“正交基”，说明傅立叶级数实际上是在对函数在  $L^2$  里面作正交分解。需指出的是，“正交性”是现代调和分析（傅立叶分析）的核心思想，这一点待同学们到高年级或者研究生阶段就会有所体会。

首先，我们引进如下函数空间

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue 可测} \left| \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right. \right\}.$$

实际上，它是一个实内积空间，其内积  $(\cdot, \cdot)$  可以按如下方式定义：

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad f, g \in L^2([a, b]),$$

满足

- $(f, g) = (g, f), \forall f, g \in L^2([a, b])$
- (双线性)  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1(f_1, g) + c_2(f_2, g)$
- (范数)  $\|f\|_{L^2} := \sqrt{(f, f)} = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$  定义了  $L^2([a, b])$  上的一个范数, 即:
  - $\|f\|_{L^2} = 0 \Leftrightarrow f = 0$  (在相差一个零测集的意义下).
  - $\|cf\|_{L^2} = |c|\|f\|_{L^2}, \forall c \in \mathbb{R}$ .
  - $\|f + g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$ .

**注记 C.2.3.** 如果考虑复值函数的  $L^2$  空间, 则要把内积定义为  $(f, g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$ , 对应的性质也要作出改动。

现在我们引进若干术语。我们说函数  $f, g \in L^2([a, b])$  是正交的, 是指它们的  $L^2$  内积满足  $(f, g) = 0$ . 我们称  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset L^2[a, b]$  是  $L^2[a, b]$  的一组标准正交集 (不是“基”), 是指它满足  $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$ . 今给定  $L^2[a, b]$  的一组标准正交集  $\{\varphi_n\}$ , 我们定义

- $f$  的傅立叶系数:  $c_k := (f, \varphi_k)$ ,
- $f$  的傅立叶级数:  $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ .

此设定下, 我们通过简单计算得知, 下面这列三角函数

$$\mathcal{T} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

就构成了  $L^2(-\pi, \pi)$  中的一个标准正交集, 它也是我们定义  $2\pi$  周期函数在  $[-\pi, \pi]$  上的傅立叶级数时使用的“基”。

现在我们致力于回答下面这个问题:

给定  $f \in L^2[a, b]$ , 是否存在  $\{c_k\}$  使得  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \right\|_{L^2} = 0$ ? 如果是, 那么  $\{c_k\}$  取何值时, 所得的部分和是  $f$  的“最佳逼近”?

首先, 我们证明贝塞尔 (Bessel) 不等式, 其表明: 给定  $f \in L^2$ , 如果在  $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$  的线性组合里面选取元素在  $L^2$  范数下逼近  $f$ , 那么  $f$  的傅立叶级数的部分和就是最佳逼近元

**定理 C.2.8 (Bessel 不等式).** 设  $\{\varphi_k\}$  是  $L^2([a, b])$  的一组标准正交集. 设  $f \in L^2[a, b]$  关于  $\{\varphi_k\}$  的傅立叶系数为  $\{c_k\}$ , 即  $(f, \varphi_k) = c_k \forall k \in \mathbb{N}$ . 则对任意  $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$  和任意  $N \in \mathbb{N}^*$ , 必有不等式

$$\left\| f - \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \right\|_{L^2} \leq \left\| f - \sum_{k=0}^N \alpha_k \varphi_k \right\|_{L^2},$$

等号成立当且仅当对任何的  $0 \leq k \leq N$  都有  $c_k = \alpha_k$ .

证明. 令  $S_N = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k$ ,  $T_N = \sum_{k=0}^N \alpha_k \varphi_k$ . 然后直接计算误差即可

$$\begin{aligned} \|f - T_N\|_{L^2}^2 &= \int_a^b (f - T_N)^2 dx = \int_a^b f^2 dx - 2 \int_a^b f T_N dx + \int_a^b T_N^2 dx \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2 \sum_{k=0}^N \alpha_k \underbrace{\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx}_{=c_k} + \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_k \alpha_j \underbrace{\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx}_{=\delta_{kj}} \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2 \sum_{k=0}^N \alpha_k c_k + \sum_{k=0}^N \alpha_k^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=0}^N c_k^2 + \underbrace{\sum_{k=0}^N (c_k - \alpha_k)^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=0}^N c_k^2. \end{aligned}$$

显见, 上面的等号成立当且仅当  $\alpha_k = c_k$  对  $0 \leq k \leq N$  都正确. 在等号成立时, 我们得到

$$\left\| f - \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=0}^N c_k^2 \geq 0.$$

上式的等号部分成立是因为  $f - \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k$  与  $\sum_{k=0}^N c_k \varphi_k$  是正交的.  $\square$

**注记 C.2.4.** 事实上, 这也给出了 Riemann-Lebesgue 引理的另一个证明  $\sum c_k^2 < \infty \Rightarrow |c_k| \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .

进一步, 我们想知道是否有  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|_{L^2}^2$ ? 如果它正确那就说明  $\{\varphi_k\}$  实际上是  $L^2[a, b]$  的一组标准正交基, 该等式就可以视作  $L^2[a, b]$  上的勾股定理. 我们实际上有如下结论

**定理 C.2.9** ( $L^2[a, b]$  空间的“勾股定理”). 给定  $2\pi$ -周期函数  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , 设它的傅立叶系数是  $a_n, b_n$ , 则有

- (完备性)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right\|_{L^2} = 0$ .
- (Parseval 恒等式)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .

证明概要 (细节见数学分析教材 [1] 第 17 章). 我们难以直接对  $L^2$  函数证明这个结论, 但是如

果  $f$  只是一个形如  $A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos nx + B_n \sin nx$  三角多项式, 那么结论就由三角函数的正交性自动得出, 因为对这样的  $f$ , 我们直接取  $a_n = A_n$  和  $b_n = B_n$  就好了。

因此, 我们现在需要把这个对全体  $L^2[-\pi, \pi]$  函数证明的命题约化成“只需要对三角多项式证明”, 这实际上蕴含了两个逼近步骤

$$L^2 \text{ 函数} \xleftarrow{L^2 \text{ 逼近}} \text{连续函数} \xleftarrow{\text{一致收敛}} \text{三角多项式}$$

第一步是实变函数里面的标准结论

**引理 C.2.10.** 给定  $f \in L^2[a, b]$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在函数  $g \in C_c[a, b]$  使得  $\|g - f\|_{L^2} < \varepsilon$ .

据此引理, 固定  $\varepsilon > 0$ , 我们选取这样一个  $g \in C_c[a, b]$  满足  $\|g - f\|_{L^2} < \varepsilon$ . 接下来再对  $g$  用定理 C.2.7, 得到存在三角多项式  $T_{n_0}(x)$  满足  $\sup_{[-\pi, \pi]} |g(x) - T_{n_0}(x)| < \varepsilon$ , 从而  $\|g - T_{n_0}\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2 \leq 2\pi\varepsilon^2$ . 由定理 C.2.8, 我们知道  $g$  的傅立叶级数部分和  $S_N(g)$  满足  $\|g - S_{n_0}(g)\|_{L^2}^2 \leq \|g - T_{n_0}\|_{L^2}^2 < 2\pi\varepsilon^2$ , 并且该不等式对所有的  $S_N(g)$  ( $N > n_0$ ) 都对。这样就知道  $g$  的傅立叶级数  $L^2$  收敛到  $g$  本身, 从而证得 Parseval 恒等式对全体  $g \in C_c[a, b]$  都成立。

最后, 对一般的  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , 上述逼近过程表明  $\|f - T_{n_0}\|_{L^2}^2 < (2\pi + 1)\varepsilon^2$ , 从而我们对  $f$  可以证明同样的结论。  $\square$

Parseval 恒等式有如下推论:

**推论 C.2.11** (傅立叶级数的唯一性). 对  $2\pi$ -周期函数  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , 若它的全体傅立叶系数都是 0, 则  $f = 0$ .

**推论 C.2.12** (广义 Parseval 恒等式). 给定  $2\pi$ -周期函数  $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ , 其傅立叶系数分别为  $a_n, b_n; \alpha_n, \beta_n$ , 则有等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

证明. 只需注意  $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$ , 然后分别对  $f+g$  和  $f-g$  用 Parseval 恒等式, 作差即可。  $\square$

特别地, 如果我们在广义 Parseval 恒等式中取  $g(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & x \in [-\pi, a) \cup (b, \pi] \end{cases}$ , 那么就可以得到一个令人比较惊讶的结果: 即使  $f$  的傅立叶级数并不点态收敛到  $f$ , 但在  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$  上积分之后必定相等。

**推论 C.2.13** (逐项积分定理). 给定  $2\pi$ -周期函数  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , 其傅立叶系数为  $a_n, b_n$ , 则对任意

区间  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , 成立如下积分恒等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

例 C.2.4. 之前我们已经证过

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad -\pi < x < \pi.$$

现在用 Parseval 恒等式又得到

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6} = \sum_n \frac{1}{n^2},$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \sum_n \frac{1}{n^2} - 2 \sum_n \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

然后我们还可以对第一个式子求积分, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^2 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{\sin(ny)}{n} dy = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(ny)}{n^2} \Big|_{y=0}^{y=x} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx) + (-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi^2}{6} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx). \end{aligned}$$

再用一次 Parseval 恒等式, 可计算出

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} = \sum_n \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

注记 C.2.5. 事实上,  $L^2[a, b]$  也有其它类型的正交集, 以  $[0, 1]$  区间为例, 我们考虑 Rademacher 函数列

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi t), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

可以证明它是  $L^2[0, 1]$  的一组标准正交集, 但不是一组标准正交基 (完备性不成立). 它在频谱分析中的“Walsh 变换”起到了重要作用. 数学上, 借助这类函数还可以给出大数定律的一个证明, 以及调和分析中的 Littlewood-Paley 平方函数定理的证明。

本节的最后, 我们列举一般的周期  $2L$  ( $L > 0$ ) 函数的傅立叶级数的结论。设  $f$  在  $[-L, L]$  可

积，则对应傅立叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

其中

$$a_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx, \quad b_n := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

对应的 Parseval 恒等式为

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

## 习题 C.2

**习题 C.2.1.** 设  $f$  是奇函数，具有  $2\pi$  周期，且有表达式  $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi-x}{2} & 1 < x \leq \pi. \end{cases}$

计算  $f$  在  $(-\pi, \pi)$  上的傅立叶级数，并据此计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

**习题 C.2.2.** 设  $f \in C^k(\mathbb{R})$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) 是  $2\pi$  周期函数，傅立叶系数为  $a_n, b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). 证明： $n \rightarrow \infty$  时， $a_n, b_n = O(n^{-k})$ . 进一步地，是否还有  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k b_n = 0$ ? 证明结论或者举反例。

**习题 C.2.3.** 计算  $\cos(px)$  ( $p \notin \mathbb{Z}$ ) 在  $[-\pi, \pi]$  上的傅立叶级数，并据此证明如下等式

$$\frac{\pi}{\sin(p\pi)} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2p}{p^2 - n^2}. \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**习题 C.2.4.** 证明如下结论。

(1) 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

(2) 若  $f \in L^1[a, b]$ , 则  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\cos \lambda x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \, dx$ .

**习题 C.2.5.** 证明如下恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} = \ln(2 \cos \frac{x}{2}), \quad x \in (-\pi, \pi); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln(2 \sin \frac{x}{2}), \quad x \in (0, 2\pi).$$

习题 C.2.6. 设  $x \in (0, 2\pi)$ , 证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

并据此证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

习题 C.2.7. 设  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  是  $2\pi$ -周期函数, 傅立叶系数为  $a_n, b_n (n \in \mathbb{N})$ . 证明  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$  和  $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n}$  都是收敛的.

习题 C.2.8. 证明: 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  在任何不包含  $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$  的闭区间里都一致收敛, 但它不是任何一个  $L^2[-\pi, \pi]$  中的函数的傅立叶级数。

习题 C.2.9. 设  $f \in C[-\pi, \pi]$  是  $2\pi$ -周期函数且满足  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ , 又假设  $f'$  存在且满足  $f' \in L^2[-\pi, \pi]$ . 证明不等式  $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx$ , 等号成立当且仅当  $f(x) = A \cos x + B \sin x$ , 其中  $A, B$  是常数。

习题 C.2.10. 证明: 任何 Cesàro-可和的级数  $\sum_n a_n$  必定满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

习题 C.2.11. 假设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径是 1, 我们称数项级数  $\sum_n a_n$  在 Abel 意义下收敛 (或称“Abel-可和”), 是指极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} a_n x^n = s$  存在, 并有记号  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$  (A). 证明如下结论。

- (1) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛, 则它必定在 Abel 意义下收敛到同一个值。
- (2) 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  是 Cesàro-可和的, 则它必定是 Abel-可和的, 且收敛到同一个值。
- (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = \frac{1}{4}$  (A), 但不在 Cesàro 意义下收敛。
- (4)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln n = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$  (C).

习题 C.2.12. 给定常数  $p \in [1, \infty)$  以及有界的可积函数  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们定义  $\|f\|_p = (\int_0^2 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ . 证明: 如果恒等式  $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2)$  对任何有界的可积函数  $f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  都成立, 那么  $p$  必须等于 2.

习题 C.2.13 (Rademacher 函数). 对非负整数  $n \in \mathbb{N}$ , 我们定义 Rademacher 函数系  $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$ , 其中  $t \in [0, 1]$ . 证明:  $\{r_n(t)\}_{n \geq 0}$  构成  $L^2[0, 1]$  中的标准正交集, 但不是标准正交基。

提示: 考虑  $r_1(t)r_2(t)$  和任意  $r_n(t)$  的  $L^2$  内积。

## 问题 C.2

**问题 C.2.1** (奈奎斯特-香农 (Nyquist-Shannon) 采样定理). 令  $\text{sinc } x := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  以及  $\text{sinc } 0 = 1$ .

- (1) 给定  $a > 0$ , 用 sinc 函数写出  $\hat{\chi}_{[-2\pi a, 2\pi a]}(x) = \check{\chi}_{[-2\pi a, 2\pi a]}(x)$  的表达式。
- (2) 令  $H_a = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall |\xi| > 2\pi a\}$ . 证明:  $H_a$  是 Hilbert 空间, 并证明存在常数  $C_a > 0$  使得  $\{C_a \text{sinc}(2ax - k)\pi |k \in \mathbb{Z}\}$  是  $H_a$  的一组标准正交基。
- (3) 证明: 若  $f \in H_a$ , 则  $f \in C_0$  (在相差一个零测集的意义下) 而且有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2a}\right) \text{sinc}((2ax - k)\pi).$$

进一步证明该级数在  $L^2$  意义下收敛, 而且一致收敛。

本定理表明: 在信号分析的术语中, 带宽为  $2\pi a$  的信号完全是通过在一系列点  $\{k/2a\}$  上采样其值来确定的, 这些点的间距与带宽的倒数成正比。

**问题 C.2.2** (Poisson 求和公式). 设  $f \in C(\mathbb{R}^d)$  是  $2\pi$  周期函数, 且存在  $C, \varepsilon > 0$  使得  $|f(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|)^{-d-\varepsilon}$  和  $|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-d-\varepsilon}$ . 证明如下等式成立, 且左右两边都是绝对一致收敛的

$$(2\pi)^{d/2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{h}) e^{i\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}}.$$

特别地, 令  $\mathbf{x} = 0$ , 有

$$(2\pi)^{d/2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} f(2\pi\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{h}).$$

**问题 C.2.3** (格点估计, Hlawka 定理). 记  $B_r \subset \mathbb{R}^d$  为球心在原点、半径为  $r > 0$  的球。设  $N(\lambda)$  是  $B_\lambda$  中的格点 (lattice point, 即每个坐标分量都是整数的点) 的个数。按如下方法证明  $N(\lambda) = \alpha(d)\lambda^d + O(\lambda^{d-2+\frac{2}{d+1}})$ , 其中  $\alpha(d)$  为  $B_1$  的体积。

设  $\eta_\varepsilon$  为 B.3 节定义的卷积光滑子, 定义  $\tilde{\chi}_\lambda(\varepsilon, \mathbf{x}) := (\eta_\varepsilon * \chi_\lambda)(\mathbf{x})$ , 其中  $\chi_\lambda$  为  $B_\lambda$  的示性函数,  $\tilde{N}(\varepsilon, \lambda) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\chi}(\varepsilon, \mathbf{m})$

- (1) 证明:  $\tilde{N}(\varepsilon, \lambda - \varepsilon) \leq N(\lambda) \leq \tilde{N}(\varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ .
- (2) 证明:  $\tilde{N}(\varepsilon, \lambda) = \alpha(d)\lambda^d + \lambda^d \sum_{\substack{\mathbf{m} \neq 0 \\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d}} \hat{\chi}(2\pi\lambda\mathbf{m}) \hat{\eta}(2\pi\varepsilon\mathbf{m})$ .
- (3) 用问题 2.6.2 的结论证明:  $\tilde{N}(\varepsilon, \lambda) = \alpha(d)\lambda^d + O(\lambda^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon^{-\frac{d-1}{2}})$ , 进而得到  $N(\lambda)$  的估计, 再取  $\varepsilon = \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}}$  得到结论。

# 附录 D 二阶线性偏微分方程的分类

这门课中，我们主要学习了如下类型的二阶偏微分方程

- 波动方程:  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = f$ .
- 热方程:  $\partial_t u - k \Delta u = f$ .
- 位势方程:  $-\Delta u = f$ .

在欧氏空间  $\mathbb{R}^m$  中, 二阶偏微分方程的一般形式可以写作

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^m b_i \partial_{x_i} u + cu = f, \quad (\text{D.0.1})$$

其中  $a_{ij}, b_i, c, f$  都是连续函数。我们记系数矩阵  $\{a_{ij}\}$  为  $\mathbf{A}$ . 令  $m = d + 1$  以及时间变量  $t = x_{d+1}$ , 那么波动方程就对应  $\mathbf{A} = \text{diag}(-c^2, \dots, -c^2, 1)$  和  $b_i = c = 0$ ; 热方程对应  $\mathbf{A} = \text{diag}(-k, \dots, -k, 0)$  的  $b_{d+1} = 1$ . 对位势方程, 令  $m = d$ , 则  $\mathbf{A} = -I_d$ .

## D.1 分类方法

由线性代数理论指导, 若  $\mathbf{A}$  是常系数的实对称阵, 则必存在正交方阵  $\mathbf{T}$  使得  $\mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T}$  成为对角阵, 对角元为  $\mathbf{A}$  的全体特征值。据此, 我们可以对二阶偏微分方程作如下分类。

**定义 D.1.1** (二阶线性偏微分方程的分类). 固定  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ . 我们称方程 (D.0.1)

- 在  $\mathbf{x}_0$  处是椭圆的, 是指  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$  的全体特征值都为正 (或都为负) ;
- 在  $\mathbf{x}_0$  处是抛物的, 是指  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$  恰有一个特征值是零, 其它特征值全为正 (或全为负) ;
- 在  $\mathbf{x}_0$  处是双曲的, 是指  $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$  恰有一个特征值为负 (或正), 其它特征值全为正 (或负)。

给定集合  $\Omega$ , 若对任意  $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ , (D.0.1)都是椭圆/抛物/双曲的, 则称(D.0.1)是  $\overline{\Omega}$  内的椭圆/抛物/双曲方程。

**定义 D.1.2** (退化性). 设有子集  $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ . 若方程(D.0.1)在  $\overline{\Omega} \setminus \Gamma$  是椭圆/抛物/双曲的, 且对任意  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ ,  $\text{rank } \mathbf{A}(\mathbf{x}_0) < m/m - 1/m$ , 则称方程(D.0.1)在  $\overline{\Omega}$  内是 退化椭圆/退化抛物/退化双曲方程.  $\Gamma$  被称作(D.0.1)的退化曲面/曲线/点。

于是我们有如下定理

**定理 D.1.1.** 如果方程(D.0.1)的系数矩阵  $\{a_{ij}\}$  是常系数的, 且方程(D.0.1)是椭圆/抛物/双曲的, 则存在一个非奇异的线性变换, 使得(D.0.1)被化成位势方程/热方程/波动方程。

如果  $\{a_{ij}\}$  不是常系数矩阵, 则不一定在整个区域  $\bar{\Omega}$  把方程(D.0.1)通过线性变换约化为上述三个“典则形式”(canonical form)之一, 但是我们在固定的单点还是可以做上述约化。另一种可能的方法则是寻找非线性变量替换  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $i = 1, \dots, m$  将(D.0.1)约化为典则形式, 然而在  $m > 3$  时未必存在这样的非线性变换。

## 习题 D.1

**习题 D.1.1.** 证明定理D.1.1.

## D.2 具有非负特征的二阶偏微分方程

### D.2.1 问题的提出

除了我们学到的三类方程以外, 各类退化方程也有重要应用, 本节将介绍金融数学中的 Black-Scholes 方程这个例子。除此之外, 流体力学里面也有非常多的退化偏微分方程来刻画物理模型, 例如跨音速激波的模型刻画。本节讨论一个基本问题: 如何定解二阶线性偏微分方程? 尤其是边值问题(或者退化曲面上), 到底给多少个边界条件, 给怎样的边界条件才是合理的? 本届我们对具有非负特征的二阶线性偏微分方程给出这个问题的答案。

考虑方程 (D.0.1)

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^m b_i \partial_{x_i} u + cu = f, \quad (\text{D.2.1})$$

其中  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\{a_{ij}\}$  是实对称方阵.

**定义 D.2.1.** 我们称方程 (D.2.1) 在  $\bar{\Omega}$  内具有非负特征, 是指对任意  $x \in \bar{\Omega}$  和  $\xi \in \mathbb{R}^m$ , 成立下式:

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (\Leftrightarrow \{a_{ij}\} \text{ 在 } \bar{\Omega} \text{ 内是半正定方阵}). \quad (\text{D.2.2})$$

具有非负特征的二阶方程有很多, 包括椭圆、抛物方程和所有的一阶线性偏微分方程、退化椭圆/抛物方程。对此类偏微分方程, 有两个关于适定性的问题需要注意:

1. 如何给出适当的定解条件使得定解问题是适定的？特别地，若  $\partial\Omega$  的一部分是  $\Gamma \subset \partial\Omega$  是退化曲面/线/点， $\Gamma$  上要不要给边界条件？
2. 解在到达或通过退化区域时，正则性如何变化？

本问题的系统性讨论，可以参见 Olešnik-Radkevič 的书 [12]。这里我们只关注退化问题的定解，1951 年前苏联数学家 M. V. Keldyš 给出了一个判定准则来说明是否需要在退化区域加边界条件。而一般理论则在 1956 年由意大利数学家 G. Fichera 给出。

### D.2.2 Fichera 定理与例子

假设方程 (D.2.1) 具有非负特征，令  $N = (N_1, \dots, N_m)$  为  $\partial\Omega$  的单位内法向量。我们现在把  $\partial\Omega$  分成四个部分  $\Gamma_0, \Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_*$ ，定义如下

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^m a_{ij}(\mathbf{x}) N_i N_j &> 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_*, \\ \sum_{i,j}^m a_{ij}(\mathbf{x}) N_i N_j &= 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-. \end{aligned}$$

此处  $\Gamma_0, \Gamma_\pm$  可以通过如下 Fichera 函数定义

$$B(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m \left( b_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \partial_{x_j} a_{ij}(\mathbf{x}) \right) N_i,$$

以及

$$\Gamma_0 := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega | B(\mathbf{x}) = 0\}, \quad \Gamma_\pm := \{\mathbf{x} \in \partial\Omega | B(\mathbf{x}) \gtrless 0\}.$$

据此划分，Fichera 证明了如下结论。

**定理 D.2.1 (Fichera 定理).** 方程 (D.2.1) 在  $\Gamma_- \cup \Gamma_*$  上带边界条件  $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$  时，在  $\overline{\Omega}$  内存在唯一解。

Fichera 定理表明，在区域边界上，方程不退化的部分、以及方程退化但 Fichera 函数为负的部分，我们必须加边界条件；而在边界上方程退化的区域中，Fichera 函数非负的部分一定不能给边界条件。证明可以参见 [12, pp. 26-28]。

最后我们举两个例子

**例 D.2.1 (Black-Scholes 方程).** 考虑 Black-Scholes 方程

$$\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 V + (r - q) S \partial_S V - rV = 0, \quad (\text{D.2.3})$$

区域为  $\bar{\Omega} = \{(S, t) : S \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ . 此处  $\sigma, r, q > 0$  是给定的常数。

解. 我们可以看出这是一个倒向退化抛物方程, 且边界  $\partial\Omega$  上有退化区域  $\{S = 0, 0 \leq t \leq T\}$ . 现在令  $x_1 = S, x_2 = t$ , 则有  $a_{11} = \sigma^2 S^2 / 2, a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0, b_1 = (r - q)S$  以及  $b_2 = 1$ .

- 在  $\{t = 0\}$  上, 我们有  $N = (0, 1)$ , 从而  $\sum a_{ij}N_iN_j = 0$ , Fichera 函数  $B(S, 0) = b_2 = 1 > 0$ , 所以  $\{t = 0\}$  上不能给边界条件。
- 在  $\{t = T\}$  上, 我们有  $N = (0, -1)$ , 从而  $\sum a_{ij}N_iN_j = 0$ , Fichera 函数  $B(S, T) = -b_2 = -1 < 0$ , 所以  $\{t = T\}$  上需要加边界条件。
- 在  $\{S = 0\}$  上, 我们有  $N = (1, 0)$ , 从而  $\sum a_{ij}N_iN_j = 0$ , Fichera 函数  $B(0, t) = ((r - q)S - \partial_S(\sigma^2 S^2 / 2))|_{S=0} = 0$ , 所以  $\{S = 0\}$  上不能给边界条件。

因此,  $\Omega$  上 Black-Scholes 方程边值问题的一个正确提法应该是:

$$\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 V + (r - q)S \partial_S V - rV = 0, \quad V(S, T) = g(S).$$

这个例子也说明了为什么倒向热方程给定  $t = 0$  处的初值时是不适当的。  $\square$

**例 D.2.2** (传输方程). 考虑传输方程

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad (a \neq 0) \quad (\text{D.2.4})$$

区域为  $\bar{\Omega} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq M, 0 \leq t \leq T\}$ .

解. 令  $x_1 = x, x_2 = t$  从而有  $a_{ij} = 0, b_1 = b_2 = a$ .

- 在  $\{t = 0\}$  上, 我们有  $N = (0, 1)$  以及 Fichera 函数  $B(x, 0) = b_2 = a$ .
- 在  $\{t = T\}$  上, 我们有  $N = (0, -1)$  以及 Fichera 函数  $B(x, T) = -b_2 = -a$ .
- 在  $\{x = 0\}$  上, 我们有  $N = (1, 0)$  以及 Fichera 函数  $B(0, t) = b_1 = a$ .
- 在  $\{x = M\}$  上, 我们有  $N = (1, 0)$  以及 Fichera 函数  $B(M, t) = -b_1 = -a$ .

因此, 若  $a > 0$ , 我们就需要在  $\{t = T\}$  和  $\{x = M\}$  而不是  $\{t = 0\}$  或  $\{x = 0\}$  加边界条件; 若  $a < 0$ , 我们就需要在  $\{t = 0\}$  和  $\{x = 0\}$  而不是  $\{t = T\}$  或  $\{x = M\}$  加边界条件。

另一方面, 我们也可以把方程写成  $-\partial_t u - a \partial_x u = 0$ , 然后会得到完全相反的结果。这事实上取决于我们要解(时间)正向还是倒向的传输方程。以  $a > 0$  为例, 如果我们把方程写作  $u_t + au_x = 0$ , 那么边界条件应该加在  $\{t = T\}$  和  $\{x = M\}$  上, 从而得到的解是  $\bar{\Omega}$  内的时间倒向解; 如果我们把方程写作  $-u_t - au_x = 0$ , 那么边界条件应该加在  $\{t = 0\}$  和  $\{x = 0\}$  上, 从而得到的是时间正向解。特别地, 若  $M = T = +\infty$ , 则除了  $\{t = 0\}$  的初值条件以外, 我们需要  $\{x = 0\}$  是的边界条件当且仅当  $a > 0$ . 这与第1.2节的结论符合。  $\square$

# 参考文献

- [1] 常庚哲、史济怀. 数学分析教程（第三版）下册. 中国科学技术大学出版社.
- [2] 陈亚浙、吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 科学出版社.
- [3] Evans, L. C. Partial Differential Equations, 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics 19, AMS.
- [4] Evans, L. C., Gariepy, R. F. Measure Theory and Fine Properties of Functions, 2nd edition. CRC press, 2015.
- [5] Folland, G. B. Real analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 1999.
- [6] Han Qing (韩青). A Basic Course in Partial Differential Equations Graduate Studies in Mathematics 120, AMS.
- [7] Han Qing (韩青), Lin Fanghua(林芳华). Elliptic Partial Differential Equations Courant Lecture Notes, no. 1, AMS & CIMS.
- [8] 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐. 数学物理方程讲义（第三版）. 高等教育出版社.
- [9] 姜礼尚、孔德兴、陈志浩. 应用偏微分方程讲义. 高等教育出版社.
- [10] 柳彬. 常微分方程. 北京大学出版社.
- [11] Oh, Sung-Jin. Lecture Notes for MATH 222A, UC Berkeley. <https://math.berkeley.edu/~sjoh/pdfs/notes-math222a.pdf>
- [12] Olešnik, O. A., Radkevič, E. V. Second order equations with nonnegative characteristic form. Springer New York, NY, 1973.
- [13] Muscalu, C., Schlag, W. Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Vol. 1. Cambridge studies in advanced mathematics 137, Cambridge University Press, 2013.

- [14] Stein, E. M., Shakarchi, R. Fourier Analysis: An Introduction. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 1. Princeton University Press.
- [15] Stein, E. M., Shakarchi, R. Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert spaces. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 3. Princeton University Press.
- [16] Stein, E. M., Shakarchi, R. Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis. Princeton Lectures in Analysis, Vol. 4. Princeton University Press.
- [17] Strauss, W. Partial Differential Equations: An Introduction, 2nd edition. John Wiley & Sons, Ltd.
- [18] Tao, T. Nonlinear Dispersive and Wave Equations: Local and Global Analysis. CBMS, No. 106, AMS.
- [19] 于品. 数学分析之课程讲义. 清华大学数学系、丘成桐数学科学中心. 链接为 <https://www.bananaspaces.org/wiki/%E8%AE%B2%E4%B9%89:%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%88%86%E6%9E%90>