常微分方程课程讲义

章俊彦

中国科学技术大学　数学科学学院

Email: yx3x@ustc.edu.cn

最后更新时间: 2026 年 10 月 24 日

前言

本讲义主体由 ChatGPT 5.6-Sol Ultra生成。最初由我上传详细的教学大纲（具体到每一节讲什么内容、什么定理、选取什么例子），然后按照我的要求和具体修改意见，使用 ChatGPT 重构讲义两轮，最终再由我从头到尾手动修改并设置习题而完成。

讲义内容很多，60课时的常微分方程课程肯定讲不完。打星号的章节都不作要求，但可能选取少量放在课上作为补充内容讲授。但为了完整性，还是把它们写进讲义吧。而习题的内容摘自丁同仁、柳彬的教材，往年考题和少量我自己加进来的题目，在课程教学过程中将会不断完善。这个讲义从7月21号开始起草，7月30日定稿第一版本，整个准备过程只花了9天。尽管我已逐页校对，但部分章节的行文难免有“人机感”，疏漏之处还请批评指正。

世界在不断演化着，我们也应该研究带t的方程，因此这本讲义里面所有方程的自变量都改成了t。

章俊彦
2026年7月

目录

第零章 常微分方程基本概念 **1**

0.1 微分方程及其解 1

0.2 从实际问题到微分方程 4

0.3 适定性与解的存在区间 5

0.4 线素场与积分曲线的几何解释 6

第一章 常微分方程的初等解法 **9**

1.1 变量分离方程 9

1.2 一阶线性方程 13

1.3 Bernoulli 方程与 Riccati 方程 19

1.3.1 Bernoulli 方程 19

1.3.2 Riccati 方程 20

第二章 一阶微分方程解的适定性 **27**

2.1 Picard存在唯一性定理 27

2.1.1 Picard迭代的直接证明 28

2.1.2 压缩映射原理 33

2.1.3 非唯一性与Osgood条件 35

2.2 Peano存在性定理 39

2.2.1 Arzelà–Ascoli引理 39

2.2.2 Peano存在性定理: Euler折线法 41

2.3 解的延拓与极大存在区间 45

2.4 比较定理及其应用 49

2.4.1 第一比较定理 50

2.4.2 *最大解, 最小解与第二比较定理 54

2.5 解对初值和参数的连续依赖性 58

2.5.1 有界闭区间上的连续依赖 58

2.5.2 *极大存在时间的半连续性 63

2.6 解对初值和参数的连续可微性 65

2.6.1 可微依赖性定理与计算实例 66
2.6.2 自治流的单调性 77

第三章 一阶线性常微分方程组 79
3.1 常系数齐次线性方程组 79
3.1.1 先从Jordan标准型出发 79
3.1.2 一般常矩阵的Jordan化 81
3.1.3 矩阵指数与一般理论 85
3.1.4 *计算矩阵指数的几种办法 88
3.2 非齐次线性方程组 91
3.2.1 基解矩阵与Wronski行列式 91
3.2.2 常数变易法、传播子与增长估计 92
3.3 *周期系数线性方程组 97
3.3.1 两个反例 98
3.3.2 单值矩阵与Floquet定理 100
3.3.3 Mathieu方程与参数共振 103
3.3.4 周期非齐次方程组的相容条件 106

第四章 定性理论初步 109
4.1 2×2 线性方程组的零解稳定性 113
4.2 非线性平面动力系统平衡点的定性分析 122
4.2.1 双曲平衡点的线性稳定性 122
4.2.2 *局部稳定流形与不稳定流形 126
4.2.3 *Hartman–Grobman定理、Sternberg线性化定理 134
4.3 Lyapunov函数法 137
4.4 *全局相图的零等倾线方法 143
4.5 *ω-极限集与周期轨道 147

第五章 高阶线性常微分方程 157
5.1 常系数高阶线性方程的求解 157
5.1.1 约化到一阶线性方程组 157
5.1.2 Wronski行列式与降阶法 159
5.1.3 常数变易法 161
5.1.4 待定系数法 164
5.1.5 Cauchy–Euler方程 165
5.2 *幂级数解法 168
5.2.1 常点附近的幂级数 169
5.2.2 正则奇点与Frobenius方法 173

5.2.3 Bessel方程与Bessel函数 . . . 177
5.2.4 Legendre方程: 另一个几何来源 . . . 182

第六章 Sturm–Liouville理论 187
6.1 Sturm比较定理 . . . 190
6.1.1 零点的孤立性 . . . 190
6.1.2 Sturm分离定理 . . . 191
6.1.3 Sturm比较定理 . . . 192
6.1.4 两个振荡判别法 . . . 194
6.2 正则Sturm–Liouville特征值问题 . . . 195
6.2.1 实特征值, 正交性与单重性 . . . 197
6.2.2 Rayleigh商与第一特征值 . . . 198
6.2.3 逐次正交约束与全体特征值 . . . 207
6.2.4 Sturm振荡定理 . . . 209
6.2.5 *极小极大公式与特征函数展开 . . . 212
6.3 *周期边值问题 . . . 215
6.3.1 周期解与周期边值条件 . . . 215
6.3.2 非共振情形的小参数周期解 . . . 216
6.3.3 整数频率与精确共振 . . . 219
6.3.4 拟周期边值问题一瞥 . . . 220

第零章　常微分方程基本概念

微积分建立以后, 人们很快发现, 许多自然规律最直接的数学表达并不是一个函数的显式公式, 而是未知函数与它的导数之间的关系. Newton 第二定律给出位置的二阶导数, 种群模型给出数量的一阶导数, 电路定律则把电流, 电压及其变化率联系起来. 这样的关系称为微分方程. 研究一个实际问题时, 通常先根据其中的局部变化规律建立微分方程, 再研究方程有没有解, 解是否唯一, 能够存在多久, 以及它对初值是否稳定. 本章先把后文所需的基本概念说明清楚.

0.1　微分方程及其解

凡是联系自变量 t, 未知函数 $x = x(t)$ 以及未知函数的若干阶导数 $x'(t)$, $x''(t)$, $\cdots$, $x^{(m)}(t)$ 的方程, 都称为**常微分方程**. 一般的 m 阶常微分方程可以写成

$$F\big(t, x, x', \cdots, x^{(m)}\big) = 0. \tag{0.1.1}$$

这里 F 是已知函数, 而 $x = x(t)$ 是待求函数. 在常微分方程中实际出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 称为这个方程的**阶数**.

例如, $x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = t^3$ $(t \neq 0)$ 是一阶方程; $x''(t) + x(t)x'(t) = t$ 是二阶方程. 若方程(0.1.1)能够解出最高阶导数, 则可将它写成

$$x^{(m)}(t) = f\big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(m-1)}(t)\big). \tag{0.1.2}$$

本课程主要研究这种形式的方程.

定义 0.1.1　线性方程与非线性方程

若一个常微分方程方程可以写成

$$a_m(t)x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{0.1.3}$$

其中 $a_0, \cdots, a_m, g$ 都是只依赖于 t 的已知函数, 而且 a_m 不恒为零, 则称它为**m阶线性常微分方程**. 不能写成上述形式的常微分方程称为**非线性常微分方程**.

线性一词的要点是:未知函数 x 及其各阶导数都只以一次幂出现, 它们之间也不相乘;系数只能

依赖于自变量 t. 例如 $x''+tx'+(1+t^2)x=\sin t$ 是线性方程, 而 $x''+xx'=0$, $x''+(x')^2+x=0$ 都是非线性方程.

定义 0.1.2 标量方程的解

设 $J\subset\mathbb{R}$ 是一个区间, 函数 $\varphi: J\to\mathbb{R}$ 具有直到 m 阶的连续导数. 若 $F\big(t,\varphi(t),\varphi'(t),\cdots,\varphi^{(m)}(t)\big)=0$ 对全体 $t\in J$ 都成立, 则称 $x=\varphi(t)$ 是方程(0.1.1) 在区间 J 上的一个**解**.

常微分方程的解不仅仅是函数本身, 而且应该附带其定义的区间. 比如方程 $x'(t)=-x(t)^2$ 有形如 $x(t)=\frac{1}{t-C}$ 的解. 对固定的$C\in\mathbb{R}$, 这个公式分别在 $(-\infty,C)$ 与 $(C,+\infty)$ 上给出解, 却不能给出定义在跨过$t=C$ 的区间上的解.

一个 m 阶常微分方程的解族通常含有 m 个任意常数. 为了准确说明这里的"任意"与"独立", 我们需引进如下定义.

定义 0.1.3 通解与特解

设 $x=\varphi(t,C_1,\cdots,C_m)$ 是 m 阶方程(0.1.1)的一族解. 若 $C_1,\cdots,C_m$ 是**相互独立的**任意常数, 即相应的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(m-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_m)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_m}\\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial C_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(m-1)}}{\partial C_m}\end{pmatrix}$$

在所讨论的范围内不为零, 则称这族解为方程的**通解**. 不含任意独立常数的解称为方程的**特解**. 通解中的任意常数一旦取定, 所得的解就是一个特解; 方程也可能存在未被某个通解公式包括的特解.

例如, 方程 $x''(t)+a^2x(t)=0\ (a>0)$ 的通解为 $x(t)=C_1\cos at+C_2\sin at$. 事实上, 对 t 求导两次, 得到

$$x'(t)=-aC_1\sin at+aC_2\cos at,\qquad x''(t)=-a^2C_1\cos at-a^2C_2\sin at=-a^2x(t).$$

所以 $x''+a^2x=0$. 此外,

$$\det\begin{pmatrix}\cos at & \sin at\\ -a\sin at & a\cos at\end{pmatrix}=a\neq 0.$$

而取一组特殊的C_1,C_2, 例如 $C_1=3,C_2=0$, 就得到特解 $x(t)=3\cos at$.

而高阶常微分方程往往可以化为一阶方程组. 对方程(0.1.2), 令

$$x_1 = x, \qquad x_2 = x', \qquad \cdots, \qquad x_m = x^{(m-1)},$$

便得到

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad \vdots \\ x_{m-1}' = x_m, \\ x_m' = f(t, x_1, \cdots, x_m). \end{cases}$$

因此一阶向量值方程

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^d, \tag{0.1.4}$$

是常微分方程理论的重点讨论对象.

定义 0.1.4 一阶方程组的解

设 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$, 并设 $J \subset \mathbb{R}$ 是区间. 若 $\boldsymbol{x} \in C^1(J; \mathbb{R}^d)$ 满足

$$(t, \boldsymbol{x}(t)) \in D, \qquad \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$$

对每一个 $t \in J$ 都成立, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是方程(0.1.4)在 J 上的解.

只给出微分方程, 通常不能确定唯一的特解. 还需要给出未知函数在某一时刻的状态.

定义 0.1.5 初值问题

给定 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$, 问题

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{0.1.5}$$

称为一阶方程组的***初值问题***. 若解的定义区间含有 t_0, 并且解满足 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, 则称它为初值问题(0.1.5)的解.

对 m 阶标量方程, 通常要给出 m 个初值:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \quad \cdots, \quad x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}.$$

例如, 二阶常微分方程的定解往往要给出零阶导数和一阶导数的初值, 否则求得的解可能不唯一. 与初值问题不同, 若条件分别给在区间的两个端点, 就得到边值问题. 方程 $-x''(t) = \lambda x(t)$, $x(0) = x(\pi) = 0$ 就是一个边值问题. 第六章将说明, 边值问题会自然引出微分算子的特征值理论 (Sturm–Liouville理论).

最后给出一阶标量方程的几何语言. 考虑

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{0.1.6}$$

定义 0.1.6 积分曲线与线素场

若 $x = \varphi(t), t \in J$, 是方程(0.1.6)的解, 则平面曲线 $\Gamma = \{(t, \varphi(t)) : t \in J\}$ 称为该方程的一条**积分曲线**. 在平面区域中的每一点 $P = (t, x)$ 处, 取一条斜率为 $f(t, x)$ 的短直线段, 并把全体这样的短直线段称为方程的**线素场**或**方向场**. 若一条连续可微曲线在每一点都与该点的线素相切, 则称这条曲线与线素场吻合.

由定义知, 方程的每一条积分曲线都与它的线素场吻合. 反过来, 一条可表示成函数图像的连续可微曲线若与线素场吻合, 那么它的斜率在每一点都等于 $f(t, x)$, 所以它也是方程的积分曲线.

0.2 从实际问题到微分方程

微分方程的建立通常来自一个局部变化规律. 首先选择能够描述系统状态的量, 然后分析它在很短时间内如何改变, 最后令时间增量趋于零. 下面三个例子说明这一过程.

例 0.2.1 种群的指数增长模型 (J型曲线)

设 $x(t)$ 表示时刻 t 的种群数量. 设食物和生存空间充足, 个体之间的竞争可以忽略, 单位时间内每个个体造成的平均净增长量保持为常数 r. 求 $x(t)$ 的演化方程.

解. 从时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的种群净增长量可以写成 $x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t + o(\Delta t)$.两端除以 Δt, 再令 $\Delta t \to 0$, 得到 $x'(t) = rx(t)$. 若 $x(0) = x_0$, 则方程的解为 $x(t) = x_0 e^{rt}$. 代回方程, 有 $x'(t) = rx_0 e^{rt} = rx(t), x(0) = x_0$, 所以它确实是所给初值问题的解. 这里 r 的量纲是时间的倒数, 因而指数 rt 没有量纲. 指数模型只适用于资源限制尚未显现的阶段;它并不是种群能够永远按指数规律增长的断言. □

例 0.2.2 Newton 冷却定律

设 $x(t)$ 表示物体在时刻 t 的温度, 周围环境的温度保持为常数 T_e. 在温差不太大, 传热条件保持不变时, Newton 冷却定律认为, 物体温度的变化率与物体和环境的温差成正比, 并且变化方向总使温差减小. 求 $x(t)$ 的演化方程.

解. 设 $k > 0$ 是题中所述的比例，则 $x'(t) = -k\big(x(t) - T_e\big)$. 令 $z(t) = x(t) - T_e$, 则 $z'(t) = -kz(t)$.. 若再给定初值 $x(0) = x_0$, 那么 $z(0) = x_0 - T_e$, 从而

$$x(t) = T_e + \big(x_0 - T_e\big)e^{-kt}. \tag{0.2.1}$$

当 $x_0 > T_e$ 时, 式(0.2.1)表明 $x(t) > T_e$, 并且 $x'(t) = -k\big(x_0 - T_e\big)e^{-kt} < 0$; 物体温度从环境温度上方单调下降. 当 $x_0 < T_e$ 时, 同一公式给出 $x(t) < T_e$ 与 $x'(t) > 0$, 物体温度从环境温度下方单调上升. 两种情形都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = T_e$. □

例 0.2.3 带阻尼的弹簧振子

把一根质量可以忽略的弹簧水平放置, 弹簧的一端固定, 另一端连接一个质量为 $m > 0$ 的小物块. 取弹簧处于自然长度时小物块的位置为原点, 以弹簧伸长的方向为正方向. 令 $x(t)$ 表示小物块在时刻 t 相对于平衡位置的位移, 并令 $v(t) = x'(t)$ 表示它的速度. 设弹簧的弹性系数为 $k > 0$, 再假设小物块受到与速度大小成正比, 方向与速度相反的阻力, 并把比例常数记为 $c \geqslant 0$.

解. 根据 Hooke 定律, 弹簧对小物块的回复力是 $F_s(t) = -kx(t)$, 则小物块受到的阻尼力为 $F_d(t) = -cv(t) = -cx'(t)$. 若不计其他外力, 则由牛顿第二定律给出 $mx''(t) = F_s(t) + F_d(t)$, 即

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0. \tag{0.2.2}$$

这里 m 是小物块的质量, x 是位移, $v = x'$ 是速度, k 是弹簧常数, c 是阻尼系数.

现在定义系统的机械能 $E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2$. 其中第一项是动能, 第二项是弹簧的弹性势能. 求导后得到

$$E'(t) = mv(t)v'(t) + kx(t)x'(t) = x'(t)\big(mx''(t) + kx(t)\big) = -c\,x'(t)^2 = -c\,v(t)^2 \leqslant 0.$$

因此, 当 $c > 0$ 时, 阻尼不断耗散机械能;当 $c = 0$ 时, 机械能保持不变. 这个结论是在**没有写出解的显式公式**时得到的, 第四章的 Lyapunov 函数法将把这种思想推广到一般系统; 而在偏微分方程中, 这个方法叫做**能量法**. □

0.3 适定性与解的存在区间

一个微分方程模型若要对实际问题作出可靠预测, 至少应当满足所谓的适定性.

定义 0.3.1 适定性 (well-posedness)

我们称常微分方程的初值问题在指定的初值范围与时间区间上是**适定的**, 是指它满足:

(i) ***存在性***: 初值给定时, 方程的解是存在的;
(ii) ***唯一性***: 初值给定时, 方程的解是唯一的;
(iii) ***对初值的连续依赖性***: 对初值进行允许范围内的小扰动, 方程对应的解在其存在的时间区间上只发生小变化.

若其中一项不成立, 则称这个问题在相应意义下是不适定的 (ill-posed).

有限维常微分方程的初值之间的距离一般就用欧氏距离来刻画; 而方程的解则是某个区间上具有一定连续可微性的函数, 它们之间的“距离”往往用一致范数来刻画。即对有界闭区间 J 上两个解 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$, 它们之间的距离通常由如下度量给出

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{C(J)}=\max_{t\in J}|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|.$$

本讲义的第二章将给出连续依赖性的严格表述和证明.

即使方程右端处处光滑, 解也不一定对所有时间存在. 例如初值问题 $x'(t)=x(t)^2$, $x(0)=1$ 的解为 $x(t)=\frac{1}{1-t}$. 它只能向右存在到 $t=1$, 并且 $\lim\limits_{t\uparrow 1}x(t)=+\infty$. 因此在求解常微分方程之后, 还需讨论解的存在区间.

定义 0.3.2 局部解与整体解

若初值问题的解定义在含初始时刻 t_0 的某个非退化区间上, 则称它为一个**局部解 (local solution)**. 若解在整个实轴 $\mathbb{R}$ 上都有定义, 则称它为**整体解 (global solution)**. 若只讨论正向时间, 则把定义在 $[t_0,+\infty)$ 上的解称为正向整体解.

定义 0.3.3 延拓与极大解

设 $\boldsymbol{x}_1:I_1\to\mathbb{R}^d$ 与 $\boldsymbol{x}_2:I_2\to\mathbb{R}^d$ 是同一初值问题的解. 若 $I_1\subset I_2, \boldsymbol{x}_2|_{I_1}=\boldsymbol{x}_1$, 则称 $\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{x}_1$ 的**延拓**. 若一个解没有定义在更大区间上的真延拓, 则称它为**极大解**, 并把它的定义区间称为**极大存在区间**.

我们在第二章将证明, 在解的局部存在唯一性定理的条件下, 每个初值对应唯一的极大解; 它的极大存在区间必然形如 (T_-,T_+), 其中 $-\infty\leqslant T_-<t_0<T_+\leqslant+\infty$.

0.4 线素场与积分曲线的几何解释

对方程(0.1.6), 点 $P=(t_0,x_0)$ 处的线素斜率是 $f(t_0,x_0)$. 若$x=\varphi(t)$ 是一个解, 则相应积分曲线在 $P=(t_0,\varphi(t_0))$ 处的切线方程为 $x=\varphi(t_0)+f\big(t_0,\varphi(t_0)\big)(t-t_0)$. 即使尚不知道积分曲线的公式, 线素场也已经给出了它在每一点应当沿哪个方向前进. 实际作图时, 我们常常先画出由 $f(t,x)=k$ 确定的曲线. 在同一条这样的曲线上, 各点线素的斜率都等于 k, 所以这些曲线称为线素场的**等斜线 (isocline)**.

例 0.4.1

考虑方程 $x'(t)=\frac{x(t)}{t}$, $(t\neq 0)$ 的积分曲线.

解. 它的等斜线由 $x/t=k$ 给出, 也就是直线 $x=kt$. 直线 $x=kt$ 本身的斜率也是 k, 所以它与线素场吻合. 令 $x(t)=Ct$, 于是 $x'(t)=C=x(t)/t$, 这条直线是方程的积分曲线. 由于右端在 $t=0$ 时没有定义, 所以其线素场应当分别在半平面 $t>0$ 与 $t<0$ 中讨论, 相应的积分曲线也是直线

$x = Ct$ 在这些半平面中的部分. □

例 0.4.2

考虑方程 $x'(t) = -\frac{t}{x(t)}$ 的积分曲线.

解. 在点 (t, x) 处, 连接原点与该点的直线斜率是 x/t, 而线素斜率是 $-t/x$; 两者乘积为-1, 所以线素与径向方向垂直. 于是积分曲线应当是以原点为圆心的圆弧. 将方程乘以 $x(t)$ 便得到 $x(t)x'(t) = -t$. 对 t 积分, 有 $\frac{1}{2}x(t)^2 = -\frac{1}{2}t^2 + C$, 即 $t^2 + x(t)^2 = C_1$. 因此其积分曲线确实是“圆在能够写成函数图像时, 并且满足 $x \neq 0$ 的”各段圆弧. 由于方程的右端在 $x = 0$ 时没有定义, 所以这些圆弧的两个端点不属于相应积分曲线. □

线素场还给出初值问题的几何解释: 求解初值问题 $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ 就是寻找一条经过 (t_0, x_0) 并且处处与线素场吻合的光滑曲线. 线素画得足够密时, 积分曲线的大致走向通常可以直接看出. 第二章的 Euler 折线法正是把这种几何图像变成存在性证明: 从初值出发, 先沿该点的线素走一小段, 到达新点后再按照新点的线素改变方向, 并研究步长趋于零时这些折线的极限.

当方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$ 的右边不显式含有变量t, 即方程组可表示为 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 时, 我们称该方程组是**自治方程组 (autonomous system)**. 对该自治系统而言, 向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在相空间的每一点给出演化方向.

定义 0.4.1 轨道与平衡点

设 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^d$ 是自治方程组的解. 集合 $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}(t) : t \in I\}$ 被称为这个解在相空间(即$\boldsymbol{x}$取值的空间)中的**轨道 (orbit)**. 若 $\boldsymbol{x}_* \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{0}$, 则常值函数 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_*$ 是该方程组的解, $\boldsymbol{x}_*$ 被称为系统的 **平衡点**, 相应的常值解也称为**平衡态**或**稳态解**.

积分曲线记录扩展空间中的点 $(t, \boldsymbol{x}(t))$, 轨道则只记录相空间中的点 $\boldsymbol{x}(t)$. 这两个概念不能混淆.

第一章　常微分方程的初等解法

本章讨论几类能够通过初等积分或变量代换求解的一阶方程. 学习这些方法的目的不只是得到若干显式公式. 通过这些例子, 我们将看到四种彼此不同的现象:解可以整体存在并趋向平衡态; 解可以在无限时间内不断增长; 解也可能在有限时间内趋于无穷; 即使方程右端连续, 同一初值也可能对应不止一个解. 这些现象正是下一章研究存在性, 唯一性与延拓问题的出发点.

1.1　变量分离方程

考虑一阶方程 $x'(t) = a(t)b(x(t))$. 它的右端是一个只依赖于 t 的函数与一个只依赖于 x 的函数的乘积, 因此称为变量分离方程. 在 $b(x(t)) \neq 0$ 的区间上, 可以把方程写成 $\frac{x'(t)}{b(x(t))} = a(t)$. 如果 B 是 $1/b$ 的一个原函数, 那么据复合函数求导法则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x(t)) = B'(x(t))x'(t) = \frac{x'(t)}{b(x(t))} = a(t) \;\Rightarrow\; B(x(t)) - B(x_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \tag{1.1.1}$$

这就是变量分离法的基本公式.

命题 1.1.1　变量分离型的方程

设 $I, J \subset \mathbb{R}$ 都是开区间, $t_0 \in I$, $x_0 \in J$, 并设 $a \in C(I), b \in C(J)$ 且 $b(x) \neq 0$ 对任意 $x \in J$ 都成立。今固定一点 $x_* \in J$, 对 $x \in J$ 定义 $B(x) = \int_{x_*}^{x} \frac{1}{b(y)}\,\mathrm{d}y$, 则

- B 在 J 上严格单调.
- 设$I_0 \subset I$ 是包含 t_0 的开区间，则取值始终属于 J 的函数 $x \in C^1(I_0)$ 是初值问题

$$x'(t) = a(t)b(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

的解, 当且仅当

$$B(x(t)) = B(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I_0. \tag{1.1.2}$$

证明. 因为 b 在区间 J 上连续而且没有零点, 所以 b 在 J 上不能改变符号. 否则存在 $y_1, y_2 \in J$ 使 $b(y_1)b(y_2) < 0$, 介值定理便给出位于 y_1 与 y_2 之间的 $y_3 \in J$, 使 $b(y_3) = 0$, 这与假设矛盾. 因此 $1/b$

在 J 上或者处处为正, 或者处处为负. 由微积分基本定理知, $B'(x)=\frac{1}{b(x)}$ 对任意 $x\in J$ 成立, 所以 B 在 J 上严格单调.

下设 $x(t)$ 是所给初值问题的解. 对任意 $t\in I_0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x(t))=B'(x(t))x'(t)=\frac{x'(t)}{b(x(t))}=a(t).$$

从 t_0 到 t 积分可得 $B(x(t))-B(x(t_0))=\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s$. 再代入 $x(t_0)=x_0$ 便得到(1.1.2).

反过来, 设 $x\in C^1(I_0)$ 的取值属于 J, 并满足(1.1.2). 则令 $t=t_0$ 得到 $B(x(t_0))=B(x_0)$. 由于 B 严格单调, 所以 $x(t_0)=x_0$. 再对(1.1.2)关于 t 求导, 得到 $B'(x(t))x'(t)=a(t)$, 代入 $B'(x(t))=1/b(x(t))$ 再把等式两端乘以 $b(x(t))$, 就得到 $x'(t)=a(t)b(x(t))$. 所以 $x(t)$ 满足微分方程与初值条件. □

注记 1.1.1. *在很多常微分方程教材中, 变量分离的过程通常简写成*

$$\frac{x'(t)}{b(x(t))}=a(t)\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{b(x)}=a(t)\,\mathrm{d}t\ \Rightarrow\ \int\frac{\mathrm{d}x}{b(x)}=\int a(t)\,\mathrm{d}t.$$

这里并不是把等式两端当作代数式, 再把一个数 $\mathrm{d}t$ 约去或乘回来. 事实上, 对给定的可微函数 $x=x(t)$, 记 $\mathrm{d}x$ 为它关于参数 t 的微分, 即 $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $\frac{\mathrm{d}x}{b(x)}=\frac{x'(t)}{b(x(t))}\,\mathrm{d}t$. 若 $B'(x)=1/b(x)$, 那么链式法则给出

$$\frac{x'(t)}{b(x(t))}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x(t))\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\big(B(x(t))\big).$$

所以所谓"两边除以 $\mathrm{d}t$"或"把 $\mathrm{d}t$ 乘到两边", 只是链式法则与复合函数积分法的简写. 严格地说, 求解变量分离型的方程的依据是命题1.1.1中从 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(x(t))=a(t)$ 到积分恒等式 (1.1.2) 的推导.

注记 1.1.2. *求解变量分离型的方程时, 必须先找出 b 的零点. 若 $b(x_*)=0$, 则常值函数 $x(t)\equiv x_*$ 是一个平衡态. 由于分离变量时除以了 $b(x)$, 这些常值解不会出现在 (1.1.1)中, 必须另行验证是否满足方程.*

例 1.1.1 logistic 方程:有环境容量的种群增长 (S型曲线)

设 $x(t)$ 表示时刻 t 的种群数量, $r>0$ 表示种群数量很少时的内禀增长率, $K>0$ 表示环境所能长期容纳的种群数量, 通常称为环境容量. 指数模型假定每个个体造成的平均净增长率恒为 r. 当食物, 生存空间等资源有限时, 种群越接近环境容量, 平均净增长率就应当越小. 最简单的线性修正是假设平均净增长率为 $r(1-\frac{x(t)}{K})$. 于是总增长率满足 logistic 方程

$$x'(t)=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right),\qquad x(0)=x_0. \tag{1.1.3}$$

下面假设 $0<x_0<K$, 求出解并研究它的长期行为.

解. 方程右端关于 x 的两个零点是 0 与 K, 所以 $x(t)\equiv 0$ 和 $x(t)\equiv K$ 是两个平衡态. 对于取值位于

$(0,K)$ 的解, 方程可以写成

$$\frac{x'(t)}{x(t)(1-x(t)/K)} = r.$$

化简方程左边得到 $\frac{1}{x(1-x/K)} = \frac{K}{x(K-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}$. 所以分离变量后, 将方程两边从 0 到 t 积分得到

$$rt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{K}{y(K-y)}\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x(t)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)\mathrm{d}y = \log\frac{x(t)}{K-x(t)} - \log\frac{x_0}{K-x_0}.$$

移项并取指数, 得到

$$\frac{x(t)}{K-x(t)} = \frac{x_0}{K-x_0}e^{rt} \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{K}{1+(K/x_0-1)e^{-rt}}. \tag{1.1.4}$$

由于 $0 < x_0 < K$, 对每一个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $K - x_0 + x_0e^{rt} > 0$. 因此式(1.1.4)在整个实轴上都有定义. 再据 $K - x(t) = \frac{K(K-x_0)}{K-x_0+x_0e^{rt}} > 0$ 和 $x(t) > 0$ 可知这个函数的取值始终位于 $(0,K)$, 所以前面的分离变量过程是合理的.

最后, 把(1.1.4)代入方程及初值条件, 也可逐项验证它确实是(1.1.3)的解.

因为 $0 < x(t) < K$, 从方程本身可以看出 $x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) > 0$, 所以种群数量严格递增. 由解的显式表达式可以看出 $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = K$. 这说明该解整体存在, 并且种群数量在正向时间中逐渐接近环境容量 K. 若 $x_0 = K$, 解就是平衡态 $x(t) \equiv K$. 若 $x_0 > K$, 则同样的解的表达式仍然对全体 $t \geqslant 0$ 可定义, 并给出了从K 上方单调下降到 K 的时间正向整体解. □

例 1.1.2 J 型曲线:资源不受限制时的种群增长

在一个较短的时间段内, 如果食物和生存空间充足, 个体之间的竞争可以忽略, 并且单位时间内每个个体造成的平均净增长量为常数 $r > 0$, 那么总增长率与现有种群数量成正比. 令 $x(t)$ 表示时刻 t 的种群数量, 便得到

$$x'(t) = rx(t), \qquad x(0) = x_0 > 0. \tag{1.1.5}$$

这种模型的图像先增长较慢, 随后越来越陡, 高中生物课本上将其称为 J 型增长曲线.

解. 由于 $x_0 > 0$, 在正值分支上可以把方程写成 $\frac{x'(t)}{x(t)} = r$. 从 0 到 t 积分, 再对等式两边取指数函数得到

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^t r\,\mathrm{d}s \;\Rightarrow\; \log x(t) - \log x_0 = rt \;\Rightarrow\; x(t) = x_0e^{rt}. \tag{1.1.6}$$

表达式(1.1.6)对每一个 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义, 所以它是整体解. 另一方面, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$. 所以这是一个随着时间无限增长(而非收敛到某个稳态解)的整体解的例子. □

前两个例子都是常微分方程的整体解, 但很多情况下, 即使方程中的各项都光滑, 解也可能只

存在有限长的时间; 即使方程右端连续, 初值也未必唯一确定解. 下面举两个例子分别说明这两种现象.

例 1.1.3 有限时间爆破

考虑初值问题

$$x'(t) = x(t)^2, \qquad x(0) = 1. \tag{1.1.7}$$

解. 在 $x(t) \neq 0$ 的区间上分离变量, 得到 $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1$. 从 0 到 t 积分并作变量替换可得

$$t = \int_1^{x(t)} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=1}^{y=x(t)} = 1 - \frac{1}{x(t)} \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

这个函数在区间 $(-\infty, 1)$ 上满足方程和初值条件, 但是 $\lim\limits_{t\uparrow 1} x(t) = +\infty$. 所以它不能作为有限值连续函数延伸到 $t = 1$, 更不能越过 $t = 1$ 延伸为原初值问题的解. 这里的方程右端 x^2 是光滑函数, 解却仍然在有限时间内趋于无穷. 这种现象称为**有限时间爆破**. □

例 1.1.4 同一初值对应无穷多个解

考虑

$$x'(t) = x(t)^{1/3}, \qquad x(0) = 0, \tag{1.1.8}$$

解. 首先, 常值函数 $x(t) \equiv 0$, 所以它是该初值问题的一个解. 再任取 $a \geqslant 0$, 并考虑

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a, \\ \left(\dfrac{2}{3}(t-a)\right)^{3/2}, & t > a. \end{cases}$$

当 $t < a$ 时, $x_a'(t) = 0 = x_a(t)^{1/3}$. 当 $t > a$ 时, 直接计算可得

$$x_a'(t) = \left(\frac{2}{3}(t-a)\right)^{1/2} = x_a(t)^{1/3}.$$

在连接点 $t = a$ 处, 左导数等于 0, 而右差商为

$$\frac{x_a(a+h) - x_a(a)}{h} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} h^{1/2}, \qquad h > 0.$$

令 $h \downarrow 0$, 右差商趋于 0. 所以 $x_a'(a) = 0$, 并且 x_a' 在 $t = a$ 连续. 于是 $x_a \in C^1(\mathbb{R})$, 方程在 $t = a$ 处也成立. 又因为 $a \geqslant 0$, 有 $x_a(0) = 0$.

据此可见, 不同的 a 给出了不同的解: 解可以在平衡态 0 停留任意长的时间, 然后再离开. 因此同一初值可以得到无穷多个解. 下一章我们将说明, 造成非唯一性的关键是函数 $x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 附近不满足局部 Lipschitz 条件. □

习题 1.1

习题 1.1.1. 解方程 $x'(t)=\dfrac{\ln|t|}{1+x^2}$, $x(1)=0$.

习题 1.1.2. 解方程 $\sqrt{1+t^2}x'(t)=tx(t)^3$, $x(0)=1$.

习题 1.1.3. 解方程 $x'(t)=1-x(t)^2$, 并作出相应积分曲线族的草图.

习题 1.1.4. 解方程 $x'(t)=x(t)^a$, 其中 $a=1/5,1,2$, 并分别作出相应积分曲线族的草图.

习题 1.1.5. 令牵引点 A 沿 x 轴正向运动，并以 A 沿 x 轴的位移 s 为参数，$A(s)=(s,0), s\geqslant 0$. 质点 B 从 $B(0)=(0,b)$, $(b>0)$ 出发。假设绳长保持不变，即 $\|A(s)-B(s)\|=b$，并且 B 的轨迹切向始终沿着由 B 指向 A 的方向。求质点 B 的轨迹方程。

问题 1.1

问题 1.1.1. 设 $-\infty\leqslant\alpha<x_0<\beta\leqslant+\infty$, $a\in C([t_0,+\infty))$, $b\in C((\alpha,\beta))$ 且 a,b 都恒大于零, 对初值问题 $x'(t)=a(t)b(x(t))$, $x(t_0)=x_0$. 定义

$$A(t)=\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s,\qquad B(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{b(y)},\qquad A_+=\lim_{t\to+\infty}A(t),\qquad B_+=\lim_{x\uparrow\beta}B(x).$$

(1) 证明：在正向极大存在区间上有$x(t)=B^{-1}(A(t))$，正向极大存在时间 $T_+=\sup\{t\geqslant t_0:A(t)<B_+\}$.

(2) 证明：若 $A_+\leqslant B_+$，则 $T_+=+\infty$；若 $A_+>B_+$，则存在唯一的有限时刻 T_+ 使得 $A(T_+)=B_+$ 且当 $t\uparrow T_+$ 时有 $x(t)\to\beta$.

1.2 一阶线性方程

一阶线性方程具有如下形式

$$x'(t)+p(t)x(t)=q(t),\tag{1.2.1}$$

其中 p,q 是已知函数. 当 $q\equiv 0$ 时, 称它为齐次 (homogeneous) 方程; 当 q 不恒为零时, 称它为非齐次方程. 求解非齐次方程的基本想法是: 先求齐次方程, 再把齐次解中的常数改成待定函数. 这就是**常数变易法 (variation of parameters)**.

定理 1.2.1 一阶线性方程的解公式

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是区间, $p,q\in C(I)$, 且 $t_0\in I$. 则初值问题 $x'(t)+p(t)x(t)=q(t)$, $x(t_0)=x_0$ 在整个区间 I 上有唯一解, 而且

$$x(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(r)\,\mathrm{d}r}\left[x_0+\int_{t_0}^{t}e^{\int_{t_0}^{s}p(r)\,\mathrm{d}r}q(s)\,\mathrm{d}s\right].\tag{1.2.2}$$

常数变易法的证明. 第一步：求解齐次方程. 先考虑齐次方程 $x'(t)+p(t)x(t)=0$ 设 h 是齐次方程不恒为零的解, 设在 $t_*\in I$ 处有 $h(t_*)\neq 0$. 由连续性, h 在 t_* 的一个邻域内不为零. 记 J 为开集 $\{t\in I:h(t)\neq 0\}$中含有 t_* 的连通分支. 在 J 上可以把齐次方程两边除以 $h(t)$, 得到

$$\frac{h'(t)}{h(t)}=-p(t)\xRightarrow{h在J上不变号}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log|h(t)|=\frac{h'(t)}{h(t)}$$

从 t_* 到 $t\in J$ 积分, 得到

$$\log|h(t)|-\log|h(t_*)|=-\int_{t_*}^{t}p(s)\,\mathrm{d}s\ \Rightarrow\ h(t)=h(t_*)\exp\left(-\int_{t_*}^{t}p(s)\,\mathrm{d}s\right),\qquad t\in J.\tag{1.2.3}$$

接下来说明 $J=I$, 即说明齐次方程的一个解只要在某一点不为零, 就在整个区间I 上不为零. 若不然, 不妨设 J 的右端点 $c\in I$, 则 p 在连接 t_* 与 c 的紧区间上连续, 由 (1.2.3) 可得

$$\lim_{t\uparrow c}h(t)=h(t_*)\exp\left(-\int_{t_*}^{c}p(s)\,\mathrm{d}s\right)\neq 0.$$

据连续性知 $h(c)\neq 0$, 进而存在包含 c 的开邻域, 使得 h 在这个邻域内不为零, 这与 c 是分支 J 的端点矛盾. 对左端点使用从 $t\downarrow c$ 的同一计算, 也得到相同的矛盾. 因此 $J=I$.

现在回到式(1.2.3), 取 $t_*=t_0$, 得到

$$h(t)=C\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(s)\,\mathrm{d}s\right),\qquad C=h(t_0)\neq 0.$$

此外, 常值函数 $h(t)\equiv 0$ 也满足齐次方程. 若齐次方程的一个解没有任何非零点, 它就是这个零解. 因此把 $C=0$ 也包括进来以后, 齐次方程的全部解为

$$h(t)=C\phi(t),\qquad \phi(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}p(s)\,\mathrm{d}s\right),\qquad C\in\mathbb{R}.$$

同时也可验证它满足齐次情况的初值问题.

第二步：常数变易法. 现在求非齐次方程. 所谓常数变易法是指我们将齐次方程通解中的 C 换成(连续可微的)待定函数 $C(t)$, 即假设方程的解具有形式 $x(t)=C(t)\phi(t)$, 求导可得 $x'(t)=C'(t)\phi(t)+C(t)\phi'(t)$. 将其代入非齐次方程, 并利用 $\phi'(t)+p(t)\phi(t)=0$, 就得到

$$x'(t)+p(t)x(t)=C'(t)\phi(t)+C(t)\big(\phi'(t)+p(t)\phi(t)\big)=C'(t)\phi(t).$$

因此待定函数 C 应满足

$$C'(t)\phi(t)=q(t)\ \Rightarrow\ C'(t)=\phi(t)^{-1}q(t)=e^{\int_{t_0}^{t}p(r)\,\mathrm{d}r}q(t).$$

由于 $\phi(t_0)=1$, 初值条件 $x(t_0)=x_0$ 等价于 $C(t_0)=x_0$. 将 C' 的表达式从 t_0 到 t 积分, 得到

$$C(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} p(r)\,\mathrm{d}r} q(s)\,\mathrm{d}s.$$

将它代入 $x=C\phi$, 便得到(1.2.2). 由于 p,q 连续, (1.2.2)右端在整个 I 上有定义并且连续可微. 上面的逐步推导同时表明, 它满足微分方程和初值条件, 所以解存在.

第三步：唯一性. 最后证明唯一性. 若 x_1,x_2 都满足所给初值问题, 令 $z=x_1-x_2$, 则

$$z'(t)+p(t)z(t)=0,\qquad z(t_0)=0.$$

齐次方程的通解已经求出, 所以 $z(t)=C\phi(t)$. 又因为 $\phi(t_0)=1$, 所以 $C=0$. 因此 $z(t)=0$ 对任意 $t\in I$ 恒成立, 所以 $x_1\equiv x_2$. □

除了常数变易法之外，我们也可以用积分因子法求解一阶线性方程。

积分因子法的证明. 积分因子法可以视作“凑微分”, 也就是我们待定一个处处非零的连续可微函数$\mu(t)$, 使方程乘以 $\mu(t)$ 后左端成为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mu(t)x(t)\big)=\mu(t)x'(t)+\mu'(t)x(t)$, 而方程本身的左边在乘以 μ 之后又等于 $\mu(t)x'(t)+\mu(t)p(t)x(t)$, 所以待定函数 μ 必须满足 $\mu'(t)=p(t)\mu(t)$.

不妨取 $\mu(t_0)=1$, 求解变量分离方程得到

$$\mu(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{1.2.4}$$

于是原方程可以直接求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mu(t)x(t)\big)=\mu(t)q(t)\ \Rightarrow\ \mu(t)x(t)-\mu(t_0)x(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mu(s)q(s)\,\mathrm{d}s.$$

代入 $\mu(t_0)=1$, $x(t_0)=x_0$ 以及(1.2.4), 仍然可以得到(1.2.2). 函数 μ 称为方程的**积分因子**. □

现实中的许多实际系统受到周期性外力作用. 例如, 环境条件可以随时间作周期变化, 交流电源产生周期性的电压, 机械系统也可能受到周期性的外力. 因此, 当方程的系数和非齐次项都是周期函数时, 一个自然的问题是: 方程是否存在与外力具有相同周期的响应? 即使这样的周期响应存在, 任意初值产生的解也未必是周期函数, 因为通解中还含有由初值决定的齐次部分. 下面先从一个最简单的方程看清这两个部分各自所起的作用.

例 1.2.1　周期外力与唯一周期响应

考虑

$$x'(t)+x(t)=\sin t,\qquad x(0)=x_0. \tag{1.2.5}$$

系数与非齐次项都是 2π-周期的, 但这并不意味着每一个解都是周期函数. 下面求出解, 并找出

周期解所对应的初值.

解. 在表达式(1.2.2)中取 $p(t)=1, q(t)=\sin t$ 与 $t_0=0$, 得到

$$x(t)=e^{-t}\left[x_0+\int_0^t e^s\sin s\,\mathrm{d}s\right].$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)\right]=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t)=e^t\sin t,$$

所以（下式的计算也可通过把 e^s 写成它自己的导数然后分部积分两次算出）

$$\int_0^t e^s\sin s\,\mathrm{d}s=\left[\frac{1}{2}e^s(\sin s-\cos s)\right]_{s=0}^{s=t}=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+\frac{1}{2}.$$

因此

$$x(t)=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)+\left(x_0+\frac{1}{2}\right)e^{-t}. \tag{1.2.6}$$

第一项是 2π-周期函数. 若 $x_0=-1/2$, 第二项消失, 得到周期解 $x_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)$. 若 $x_0\neq -1/2$, 则

$$x(t+2\pi)-x(t)=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-(t+2\pi)}-e^{-t}\right)=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)e^{-t}(e^{-2\pi}-1)\neq 0.$$

所以此时解不是 2π-周期函数. 尽管如此, 据(1.2.6), 我们仍然可以证明

$$x(t)-x_{\mathrm{p}}(t)=\left(x_0+\frac{1}{2}\right)e^{-t}\longrightarrow 0\qquad (t\to+\infty).$$

所以每一个解都最终趋向唯一的周期解. □

上一例的结论可以推广到任意一阶线性周期方程.

命题 1.2.2 一阶线性周期方程

设 $p,q\in C(\mathbb{R})$ 都以 $T>0$ 为周期, 并记

$$P=\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s,\qquad Q=\int_0^T e^{\int_0^s p(r)\,\mathrm{d}r}q(s)\,\mathrm{d}s.$$

则有以下结论:

(1) 若 $P\neq 0$, 则方程 $x'(t)+p(t)x(t)=q(t)$ 恰有一个 T-周期解;

(2) 若 $P=0$, 则 T-周期解存在当且仅当 $Q=0$. 当 $Q=0$ 时, 每个初值都给出一个 T-周期解.

证明. 对任意初值 $x(0) = x_0$, 据(1.2.2) 有 $x(T) = e^{-P}(x_0 + Q)$. 解为 T-周期函数的必要条件是 $x(T) = x(0) = x_0$, 所以初值必须满足

$$x_0 = e^{-P}(x_0 + Q). \tag{1.2.7}$$

若 $P \neq 0$, 则 $e^P - 1 \neq 0$. 把(1.2.7)两端乘以 e^P, 得到 $e^P x_0 = x_0 + Q$, 从而初值被唯一确定为 $x_0 = \frac{Q}{e^P - 1}$.

若 $P = 0$, 则 $e^{-P} = 1$, 式(1.2.7)化为 $Q = 0$. 因此在$Q \neq 0$ 时不存在满足端点条件的初值, 在 $Q = 0$ 时每一个 x_0 都满足端点条件.

然后我们还要证明端点条件 $x(T) = x(0)$ 确实推出整个解是周期解. 定义 $y(t) = x(t + T)$, 则由于 p, q 都是 T-周期函数, 我们得到

$$y'(t) + p(t)y(t) = x'(t + T) + p(t)x(t + T) = x'(t + T) + p(t + T)x(t + T) = q(t + T) = q(t).$$

所以 x 与 y 满足同一个微分方程. 若 $x(T) = x(0)$, 则 $y(0) = x(T) = x(0)$. 由定理1.2.1中的唯一性知 $y(t) = x(t)$ 对全体 $t \in \mathbb{R}$ 成立, 即 $x(t + T) = x(t)$. □

本节末尾我们介绍Grönwall不等式，它是演化型微分方程研究中不可或缺的工具。

定理 1.2.3　Grönwall不等式的微分版本

设$\eta : [0, T] \to \mathbb{R}$是非负的绝对连续函数[a]并满足微分不等式 $\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$. 其中 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是 $[0, T]$上非负的Lebesgue可积函数，则有

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right], \qquad \forall t \in [0, T].$$

特别地，若在$[0, T]$上成立$\eta' \leqslant \phi\eta$且$\eta(0) = 0$, 则η在$[0, T]$上恒为零。

[a]我们说η在$[0, T]$上是绝对连续的，是指对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$满足：对于$[0, T]$内的任何有限个彼此不交的开区间$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$，只要$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, 就有$\sum_{i=1}^n |\eta(b_i) - \eta(a_i)| < \varepsilon$恒成立。该条件比“连续性”和“一致连续性”更强。事实上，绝对连续函数是几乎处处可微的（即去掉一个零测集），且函数的绝对连续性是有界闭区间上牛顿-莱布尼茨公式成立的充分必要条件。

证明. 从微分不等式中，我们得知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\eta(s)e^{-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r}\right) = e^{-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r}\left(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)\right) \leqslant e^{-\int_0^s \phi(r)\,\mathrm{d}r}\psi(s)$$

对几乎处处的$0 \leqslant s \leqslant T$成立。因此对任意的$0 \leqslant t \leqslant T$, 由微积分基本定理知

$$\eta(t)e^{-\int_0^t \phi(r)\,\mathrm{d}r} \leqslant \eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \phi(r)dr}\psi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

□

等价地，我们也有积分形式的Grönwall不等式。

定理 1.2.4 Grönwall不等式的积分形式

设$\xi(t)$是$[0,T]$上的非负Lebesgue可积函数，且存在非负常数C_1, C_2使得对几乎处处的$t \in [0,T]$满足积分不等式 $\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s + C_2$. 则有

$$\xi(t) \leqslant C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right), \quad \text{a.e. } t \in [0,T].$$

特别地，若对几乎处处的$t \in [0,T]$有$\xi(t) \leqslant C_1 \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$, 则$\xi$在$[0,T]$上几乎处处等于零。

证明. 令 $\eta(t) := \int_0^t \xi(s)\,\mathrm{d}s$, 则有 $\eta' \leqslant C_1\eta + C_2$ 对几乎处处的$t \in [0,T]$成立。据微分版本的Grönwall不等式有

$$\eta(t) \leqslant e^{C_1 t}\left(\eta(0) + C_2 t\right) = C_2 t e^{C_1 t},$$

于是得到

$$\xi(t) \leqslant C_1\eta(t) + C_2 \leqslant C_2\left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right).$$

□

注记 1.2.1. 如上两个不等式（尤其是第二个）常用于建立演化方程（尤其是非线性方程）的各类能量估计。特别地，我们在考虑一个演化方程解的长时间存在性时，往往需要对方程建立所谓的“延拓准则”，即类似于“方程的解在T_*时刻还能继续演化下去当且仅当某个量在T_*时刻仍然保持有界”这样的论断。此外，如果$\phi(t)$关于时间t具有衰减性，则我们也可以用Grönwall不等式计算演化方程解的寿命。在实际应用到诸多非线性问题的场景时，尤其是求解非线性方程的过程中对逼近解做一致估计取极限时，我们往往需要更一般形式的Grönwall型不等式，即

$$E(t) \leqslant P(E(0)) + P(E(t)) \int_0^t P(E(s))\,\mathrm{d}s \Rightarrow \exists T > 0, \text{ 使得 } \sup_{t\in[0,T]} E(t) \leqslant P(E(0)),$$

其中 $P(\cdots)$ 表示一个关于括号内各分量的（具有非负系数的）多项式.

下面这个连续函数版本是最常用的简单版本.

推论 1.2.5 Grönwall不等式的标准积分形式

设 $u : [t_0, T] \to [0, +\infty)$ 连续, 并且存在常数 $A, B \geqslant 0$, 使

$$u(t) \leqslant A + B\int_{t_0}^t u(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

则对任意 $t \in [t_0, T]$ 有 $u(t) \leqslant Ae^{B(t-t_0)}$.

习题 1.2

习题 1.2.1. 解方程 $tx'(t)+2x(t)=\sin t,\ x(\pi)=1/\pi$.

习题 1.2.2. 解方程 $x'(t)+2x(t)=te^{-t}$.

习题 1.2.3. 解方程 $x'(t)=\frac{1}{\cos x(t)}+t\tan x(t)$.

习题 1.2.4. 求微分方程 $x'(t)\sin 2t=2(x(t)+\cos t)$ 满足 $t\to\pi/2$ 时仍有界的解。

习题 1.2.5. 考虑微分方程 $x'(t)+x(t)=f(t)$, 其中 f 是周期为 2π 且在 $\mathbb{R}$ 上连续的函数。

(1) 求出该方程的 2π-周期解。

(2) 证明该方程在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有一个有界解，且一定是 (1) 中所得的2π-周期解。

习题 1.2.6. 设 p,q 都是 T-周期连续函数, 并且 $\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s>0$. 证明: 方程 $x'+p(t)x=q(t)$ 的任意解与其唯一 T-周期解之差在 $t\to+\infty$ 时趋于零.

习题 1.2.7. 设正值光滑函数$E(t)$满足不等式 $E'(t)\leqslant CE(t)^p$, $E(0)\leqslant\varepsilon^2$, 其中 $p>1,C>0,0<\varepsilon\ll 1$. 定义 $T_\varepsilon:=\inf\left\{t>0:E(t)=10\varepsilon^2\right\}$，证明 $T_\varepsilon\gtrsim\varepsilon^{-2(p-1)}$.

习题 1.2.8. 设正值光滑函数$E(t)$满足不等式 $E'(t)\leqslant C(1+t)^{-\sigma}E(t)^p$, $E(0)\leqslant\varepsilon^2$, 其中 $\sigma>0,p>1,C>0,0<\varepsilon\ll 1$. 定义 $T_\varepsilon:=\inf\left\{t>0:E(t)=10\varepsilon^2\right\}$，试讨论 T_ε 的下界，分情况 $\sigma>1,\sigma=1,0<\sigma<1$ 讨论。

1.3 Bernoulli 方程与 Riccati 方程

之前我们只讨论了一阶方程中的变量分离型方程和线性方程的求解. 对某些非线性方程, 它们经过适当代换后可以化为线性方程求解. Bernoulli 方程是最早受到系统研究的非线性方程之一; 它通过未知函数的幂次代换化为一阶线性方程. Riccati 方程则是一阶方程中形式最简单的二次非线性方程. 一般的Riccati 方程不能只靠有限次初等积分求解, 但一旦知道一个特解, 就能通过代换降为一阶线性方程. Riccati 方程还会从二阶线性方程, 几何光学, 控制理论以及非线性偏微分方程中自然出现, 并且它是现代偏微分方程研究中构造爆破解所使用的基本方程.

1.3.1 Bernoulli 方程

我们称具有如下形式的方程为 Bernoulli 方程

$$x'(t)+p(t)x(t)=q(t)x(t)^\alpha,\qquad \alpha\neq 0,1, \tag{1.3.1}$$

其中 α 是常数.

在 $x(t)\neq 0$ 且$x(t)^{1-\alpha}$ 有定义的区间上, 在方程两端同时乘以 $(1-\alpha)x(t)^{-\alpha}$ 可得到

$$(1-\alpha)x(t)^{-\alpha}x'(t)+(1-\alpha)p(t)x(t)^{1-\alpha}=(1-\alpha)q(t).$$

令$z(t)=x(t)^{1-\alpha}$, 则 $z'(t)=(1-\alpha)x(t)^{-\alpha}x'(t)$, 因此 z 满足一阶线性方程

$$z'(t)+(1-\alpha)p(t)z(t)=(1-\alpha)q(t). \tag{1.3.2}$$

解出 z 后, 再由 $x^{1-\alpha}=z$ 还原出 x. 这个代换只适用于 $x\neq 0$ 的分支; 若原方程允许 $x\equiv 0$, 必须把这个解另行补回.

例 1.3.1 Bernoulli 方程的求解

求方程 $x'(t)+\frac{1}{t}x(t)=tx(t)^2$, $(t>0)$ 的解.

解. 首先, $x(t)\equiv 0$ 是方程的一个解. 下面在 $x(t)\neq 0$ 的区间上令 $z(t)=x(t)^{-1}$, 由 $z'(t)=-x(t)^{-2}x'(t)$ 以及原方程 $x'(t)=tx(t)^2-t^{-1}x(t)$ 得到

$$z'(t)=-x(t)^{-2}\left(tx(t)^2-\frac{1}{t}x(t)\right)=-t+\frac{1}{t}x(t)^{-1}=-t+\frac{1}{t}z(t).$$

所以 z 满足 $z'(t)-\frac{1}{t}z(t)=-t$, 该线性方程的积分因子为 $\mu(t)=\exp\left(\int-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{t}$, $(t>0)$. 所以在线性方程两边乘以$1/t$, 得到

$$\frac{1}{t}z'(t)-\frac{1}{t^2}z(t)=-1\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{z(t)}{t}\right)=-1\ \Rightarrow\ \frac{z(t)}{t}=-t+C.$$

所以 $z(t)=Ct-t^2$, 进而在满足 $Ct-t^2\neq 0$ 的区间上, 有 $x(t)$ 的表达式.

$$x(t)=\frac{1}{Ct-t^2}. \tag{1.3.3}$$

因此, 方程的解包括 $x\equiv 0$, 以及式(1.3.3)在 $t>0$ 且分母不为零的各个区间上的限制. 分母的零点决定每个非零解能够存在的区间. □

1.3.2 Riccati 方程

具有如下形式的方程被称作 Riccati 方程

$$x'(t)=a(t)x(t)^2+b(t)x(t)+c(t) \tag{1.3.4}$$

其中 a,b,c 是已知连续函数, 并且 a 不恒为零. 它的右端关于未知函数 x 是二次多项式. 若 $a\equiv 0$, 方程就退化为一阶线性方程.

命题 1.3.1 已知一个特解时的 Riccati 降阶

设 $x_p(t)$ 是 Riccati 方程(1.3.4)在区间 I 上的一个已知特解. 对任何不恒等于 x_p 重合的解 $x(t)$, 在 $x(t)\neq x_p(t)$ 的区间上令 $x(t)=x_p(t)+\frac{1}{z(t)}$, 则 z 满足一阶线性方程

$$z'(t)+\big(2a(t)x_p(t)+b(t)\big)z(t)=-a(t). \tag{1.3.5}$$

证明. 先令 $u(t)=x(t)-x_p(t)$. 因为 x 与 x_p 分别满足

$$x'=ax^2+bx+c,\qquad x_p'=ax_p^2+bx_p+c,$$

两式相减, 得到

$$u'=a(x^2-x_p^2)+b(x-x_p)=a(x-x_p)(x+x_p)+bu=au(u+2x_p)+bu=\big(2ax_p+b\big)u+au^2.$$

这是关于 u 的 Bernoulli 方程. 在 $u\neq 0$ 的区间上令$z=1/u$, 于是 $z'=-\frac{u'}{u^2}$. 代入 u' 的方程之后可得到

$$z'=-\frac{(2ax_p+b)u+au^2}{u^2}=-(2ax_p+b)\frac{1}{u}-a=-(2ax_p+b)z-a.$$

移项便得到(1.3.5).

反过来, 若 z 是(1.3.5)的解并且 $z\neq 0$, 令 $u=1/z$ 与 $x=x_p+u$, 把上述等式从后向前代入, 即有 $u'=(2ax_p+b)u+au^2$ 以及

$$x'=x_p'+u'=a(x_p+u)^2+b(x_p+u)+c=ax^2+bx+c.$$

所以 x 确实满足原 Riccati 方程. □

例 1.3.2 利用一个特解求 Riccati 方程

求解 $x'(t)=x(t)^2-\frac{2}{t^2}\ (t>0)$.

解. 首先函数 $x_p(t)=\frac{1}{t}$是一个特解, 这是可以直接验证的. 接下来令

$$x(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{z(t)}.$$

在命题1.3.1中取 $a=1,b=0$, 得到 $z'(t)+\frac{2}{t}z(t)=-1$, 该线性方程的积分因子为 $\mu(t)=\exp\left(\int\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right)=t^2$. 方程两端乘以 t^2, 得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^2z(t)\big)=-t^2$, 两边积分后有 $t^2z(t)=C-\frac{1}{3}t^3$,即

$$z(t)=\frac{C}{t^2}-\frac{t}{3}.$$

因此, 除已知特解 $x_p(t)=1/t$ 外, 其余解写成

$$x(t)=\frac{1}{t}+\frac{3t^2}{3C-t^3}. \tag{1.3.6}$$

对任一常数 C, 式(1.3.6)应限制在 $t>0$ 且 $3C-t^3\neq 0$ 的区间上. 若 $C>0$, 分母在 $t=(3C)^{1/3}$ 处为零, 解不能跨过这个时刻; 若 $C\leqslant 0$, 分母对所有 $t>0$ 都不为零. □

Riccati 方程与二阶线性方程之间存在一个重要联系. 这个联系也解释了为什么 Riccati 方程会在许多线性问题的对数导数中出现.

命题 1.3.2 Riccati 方程与二阶线性方程

设 $a\in C^1(I)$ 在区间 I 上处处不为零, 并设 $b,c\in C(I)$. 设 $u\in C^2(I)$ 在所讨论的子区间上不为零, 作代换 $x(t)=-\frac{u'(t)}{a(t)u(t)}$. 则函数 x 满足 Riccati 方程 $x'=ax^2+bx+c$ 当且仅当 u 满足二阶**线性**方程

$$u''-\left(b+\frac{a'}{a}\right)u'+ac\,u=0. \tag{1.3.7}$$

证明. 先设 x 满足 Riccati 方程, 并令 u 满足 $u'=-axu$. 对这个等式求导, 得到 $u''=-a'xu-ax'u-axu'$. 分别代入

$$x'=ax^2+bx+c,\qquad u'=-axu$$

可得

$$u''=-a'xu-a(ax^2+bx+c)u+a^2x^2u=-a'xu-abxu-acu.$$

再由 $xu=-u'/a$, 得到 $-a'xu=\frac{a'}{a}u'$ 和 $-abxu=bu'$. 因此 $u''=\left(b+\frac{a'}{a}\right)u'-acu$, 移项即得(1.3.7).

反过来, 设 u 满足(1.3.7)且 $u\neq 0$, 并定义$x=-\frac{u'}{au}$, 直接计算可得

$$x'=-\frac{u''au-u'(a'u+au')}{a^2u^2}=-\frac{u''}{au}+\frac{a'u'}{a^2u}+\frac{u'^2}{au^2}.$$

由(1.3.7)得$u''=\left(b+\frac{a'}{a}\right)u'-acu$, 代入上式得到

$$x'=-\frac{bu'}{au}-\frac{a'u'}{a^2u}+c+\frac{a'u'}{a^2u}+\frac{u'^2}{au^2}=-\frac{bu'}{au}+c+\frac{u'^2}{au^2}.$$

而 $x=-u'/(au)$, 所以前两项可以分别写成 $-\frac{bu'}{au}=bx$, $\frac{u'^2}{au^2}=ax^2$, 所以 $x'=ax^2+bx+c$. □

例 1.3.3 *Burgers 方程中的 Riccati 方程

一维无粘 Burgers 方程是最简单的非线性输运方程之一:

$$\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x). \tag{1.3.8}$$

这里 t 是时间, x 是一维空间变量, $u(t,x)$ 可以看成流体在位置 x 处的速度. 假设u 在一段时间内充分光滑. 我们说明: 速度的空间导数沿特征线满足一个 Riccati 方程, 并由此看出梯度项 $\partial_x u$ 怎样在有限时间内趋于无穷.

分析. 固定初始位置 α, 定义从 α 出发的**特征线** $X(t;\alpha)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t;\alpha) = u\big(t, X(t;\alpha)\big), \qquad X(0;\alpha) = \alpha. \tag{1.3.9}$$

沿这条曲线对 u 求导, 据链式法则与特征线方程(1.3.9)可算出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\big(t,X(t;\alpha)\big) &= \partial_t u\big(t,X(t;\alpha)\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t;\alpha)\partial_x u\big(t,X(t;\alpha)\big)\\ &= \partial_t u\big(t,X(t;\alpha)\big) + u\big(t,X(t;\alpha)\big)\partial_x u\big(t,X(t;\alpha)\big) = 0.\end{aligned}$$

因此速度沿特征线保持不变: $u\big(t,X(t;\alpha)\big) = u_0(\alpha)$. 再代回特征线方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t;\alpha) = u_0(\alpha)$, 结合初值 $X(0;\alpha) = \alpha$, 积分后有

$$X(t;\alpha) = \alpha + tu_0(\alpha). \tag{1.3.10}$$

接下来考察速度梯度. 令 $w(t,x) = \partial_x u(t,x)$, 并对 Burgers 方程(1.3.8)关于 x 求偏导可得

$$\partial_x\big(u\partial_x u\big) = (\partial_x u)^2 + u\partial_x^2 u,$$

所以 w 满足

$$\partial_t w + u\partial_x w = -w^2. \tag{1.3.11}$$

定义梯度沿特征线的取值 $W(t;\alpha) = w\big(t,X(t;\alpha)\big)$, 仿照前面的步骤可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t;\alpha) &= \partial_t w\big(t,X(t;\alpha)\big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t;\alpha)\partial_x w\big(t,X(t;\alpha)\big)\\ &= \partial_t w\big(t,X(t;\alpha)\big) + u\big(t,X(t;\alpha)\big)\partial_x w\big(t,X(t;\alpha)\big) = -W(t;\alpha)^2.\end{aligned}$$

这正是一个 Riccati 方程, 初值为 $W(0;\alpha) = u_0'(\alpha)$. 若 $u_0'(\alpha) = 0$, 则 $W(t;\alpha) \equiv 0$. 若 $u_0'(\alpha) \neq 0$, 变量分离给出 $\frac{W'(t;\alpha)}{W(t;\alpha)^2} = -1$, 从 0 到 t 积分后可得 W 的表达式

$$-\frac{1}{W(t;\alpha)} + \frac{1}{u_0'(\alpha)} = -t \;\Rightarrow\; W(t;\alpha) = \frac{u_0'(\alpha)}{1 + tu_0'(\alpha)}. \tag{1.3.12}$$

现在，若存在 α_0 使 $u_0'(\alpha_0) < 0$, 则分母在有限时间 $0 < T_{\alpha_0} = -\frac{1}{u_0'(\alpha_0)} < +\infty$ 趋于零, 并且

$$\lim_{t \uparrow T_{\alpha_0}} W(t;\alpha_0) = -\infty.$$

与此同时, 速度本身沿这条特征线始终等于有限值 $u_0(\alpha_0)$. 因此 Burgers 方程的光滑解可能不是由于 u 本身变得无界而失效, 而是由于空间梯度 $\partial_x u$ 在有限时间内趋于无穷.

从特征线公式(1.3.10)也能看到同一件事: $\partial_\alpha X(t;\alpha) = 1 + t u_0'(\alpha)$. 当这个量变为零时, 不同的特征线开始相交, 经典解不再能保持单值光滑. 表达式(1.3.12)中的Riccati方程准确描述了这一梯度爆破机制.

下面用两组具体初值对比这两种不同的演化. 第一组取 $u_0(x) = -\tanh x = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 此时 $u_0'(x) = -\cosh^{-2} x$, $u_0'(0) = -1$.

对 $0 \leqslant t < 1$, 特征线满足

$$\partial_\alpha X(t;\alpha) = 1 - t\,\operatorname{sech}^2 \alpha \geqslant 1 - t > 0.$$

此外, $\lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} \big(\alpha - t\tanh\alpha\big) = \pm\infty$, 所以对任意 $t \in [0,1)$, 映射 $\alpha \longmapsto X(t;\alpha) = \alpha - t\tanh\alpha$, 把 $\mathbb{R}$ 一一映到 $\mathbb{R}$. 记其逆映射为 $\alpha = A(t,x)$. 据反函数定理以及$\partial_\alpha X > 0$得知, 函数 A 在 $0 \leqslant t < 1$ 上光滑, 且满足隐式方程 $x = A(t,x) - t\tanh A(t,x)$.

在该隐式方程中分别对 x 与 t 求导, 得到

$$\partial_x A = \frac{1}{1 - t\,\operatorname{sech}^2 A}, \qquad \partial_t A = \frac{\tanh A}{1 - t\,\operatorname{sech}^2 A} = \tanh A\,\partial_x A.$$

定义 $u(t,x) = -\tanh A(t,x)$, 则可验证它就是 Burgers 方程的解. 事实上因为 $A(0,x) = x$, 这个函数满足初值 $u(0,x) = -\tanh x$; 对方程本身，由链式法则直接计算可得

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\partial_x u &= -\operatorname{sech}^2 A\,\partial_t A + (-\tanh A)\big(-\operatorname{sech}^2 A\,\partial_x A\big) \\ &= \operatorname{sech}^2 A\big(-\partial_t A + \tanh A\,\partial_x A\big) = 0. \end{aligned}$$

所以这确实给出了时间区间 $0 \leqslant t < 1$ 上的经典解. 而从 $\alpha = 0$ 出发的特征线满足 $X(t;0) = 0$, 表达式 (1.3.12)可推出 $\partial_x u(t,0) = W(t;0) = -\frac{1}{1-t}$, 因此 $\partial_x u(t,0) \to -\infty$ as $t \uparrow 1$, 同时 $\partial_\alpha X(t;0) = 1 - t$在 $t = 1$ 时变为零. 初始时相邻的特征线在这里聚集, 这正是压缩型初值发展成激波 (shock wave) 的最简单模型.

第二组初值则取成 $u_0(x) = \tanh x$, 仿照如上过程可解得 $u(t,x) = \tanh B(t,x)$ 是Burgers方程的解, 其中B由反函数定义所得到的隐式方程 $x = B(t,x) + t\tanh B(t,x)$ 确定. 此时可计算出

$$\partial_x u\big(t, X(t;\alpha)\big) = \frac{\operatorname{sech}^2 \alpha}{1 + t\,\operatorname{sech}^2 \alpha},$$

所以速度和速度梯度在每个有限时间区间上都保持光滑有界, 解在时间正向是整体存在的. 在这个例子中相邻特征线不断分开, 它是稀疏波 (rarefaction wave) 的最简单模型. 这两组初值说明, 对同一个 Burgers 方程, 初始速度梯度的符号会决定特征线是聚集还是散开, 从而决定经典解发生有限时间梯度爆破还是正向整体存在. □

习题 1.3

习题 1.3.1. 已知 Riccati 方程 $x' = x^2 - 2tx + t^2 - 1$ 有特解 $x_p(t) = t$. 令 $x = x_p + 1/z$, 求出 z 满足的线性方程, 并写出原方程的解.

习题 1.3.2. 求解齐次方程 $x'(t) = \dfrac{t+x}{t-x}$. （提示：令 $x = ut$ 可化作变量分离的方程）

习题 1.3.3. 求解方程 $x'(t) = -x(t)^2 - \dfrac{1}{4t^2}$. （提示：找形如 $x = C/t$ 的特解）

问题 1.3

问题 1.3.1. 考虑 Riccati 方程 $x'(t) = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t)$, 其中 a, b, c 在区间 I 上连续。设 x_1, x_2, x_3, x_4 是 I 上的四个解，并假设相应交比 (如下面(1)定义) 的分母在 I 上不为零。

(1) 证明：交比 $\dfrac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}$ 与 t 无关。

(2) 设 x_1, x_2, x_3 是三个两两不同的已知解。若已知存在常数 κ 使得函数 $x(t)$ 满足

$$\frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x)}{(x_1 - x)(x_2 - x_3)} = \kappa$$

解出 x，并证明所得函数仍是 Riccati 方程的解。

第二章　一阶微分方程解的适定性

第一章所讨论的方程都能用某种特殊的代换化为可积的形式. 不过, 对一般的非线性方程, 这样的代换通常并不存在. 即使不能写出解的显式表达式, 我们仍要回答几个最基本的问题: 给定一个初值, 解是否存在？若存在, 是否唯一？解能够延拓到多大的区间？当对初值或方程中的参数做小扰动时, 解的变化是否保持这种“小性”？本章将依次回答这些问题.

我们考虑如下形式的一阶常微分方程的初值问题

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{2.0.1}$$

其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是含有 t_0 的区间, 未知函数$\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^d$, 给定函数 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 的定义域D 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 中的开集, 并且 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$.

2.1　Picard存在唯一性定理

我们先将微分方程(2.0.1)化作一个积分方程并证明他们的等价性. 若 $\boldsymbol{x}$ 是(2.0.1)的解, 则对等式 $\boldsymbol{x}'(s) = \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))$ 的两端从 t_0 到 t 积分. 微积分基本定理给出

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s. \tag{2.1.1}$$

积分方程的右端不再含有未知函数的导数, 这一点使我们能够从一个简单的函数出发, 反复把右端代入自身, 从而构造一列近似解. 不过, 在这样做以前, 必须先把微分方程与积分方程的等价性说清楚.

命题 2.1.1　微分方程与积分方程等价

设 $\boldsymbol{f}$ 连续, I 是包含 t_0 的区间. 函数 $\boldsymbol{x} \in C(I; \mathbb{R}^d)$ 满足对任意 $t \in I$ 都有 $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in D$. 则 $\boldsymbol{x}$ 满足积分方程 (2.1.1) 当且仅当 $\boldsymbol{x} \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ 且满足初值问题(2.0.1).

证明. 若 $\boldsymbol{x} \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ 满足(2.0.1), 则对每个 $t \in I$,

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{x}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s,$$

所以(2.1.1)成立. 反过来, 设连续函数 $\boldsymbol{x}$ 满足(2.1.1). 由于映射 $s \longmapsto (s, \boldsymbol{x}(s))$, $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续, 所以复合函数 $s \longmapsto \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))$ 也连续. 据微积分基本定理, 函数

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s$$

属于 $C^1(I;\mathbb{R}^d)$, 并且其导数等于 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$. 由积分方程可知

$$\boldsymbol{x} \in C^1(I;\mathbb{R}^d), \qquad \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)).$$

最后, 在积分方程中令 $t = t_0$, 得到 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. 因此 $\boldsymbol{x}$ 是初值问题 (2.0.1)的解. □

定义 2.1.1 关于$\boldsymbol{x}$-变量的局部Lipschitz条件

设 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 是开集. 称 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 局部Lipschitz连续, 是指对每个 $(t_*, \boldsymbol{x}_*) \in D$, 存在其邻域 $U \subset D$ 和常数 $L_U > 0$, 使得只要$(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in U$, 就有

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leqslant L_U |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

下面推导一个经常使用的充分条件: $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 连续. 今假设该条件成立, 并取闭矩形$Q \subset D$. 对固定的 t 以及满足 $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in Q$ 的两点, 定义 $\boldsymbol{g}(\theta) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 若 Q 关于$\boldsymbol{x}$-变量是凸的, 则整条线段$\boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ 都留在 Q 内. 据链式法则可得

$$\boldsymbol{g}'(\theta) = D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

对这个等式从 0 到 1 积分, 便得到

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\theta,$$

由于连续函数 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 在紧集 Q 上有界, 若 $L = \max_{(t,\boldsymbol{z})\in Q} |D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z})|$, 则 $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leqslant L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. 这就说明: 若 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 连续, 则 $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 局部Lipschitz连续.

2.1.1 Picard迭代的直接证明

我们首先叙述初值问题(2.0.1)局部解的存在唯一性定理。

定理 2.1.2 Picard-Lindelöf 局部存在唯一性定理

设 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 连续, 并且关于 $\boldsymbol{x}$ 局部Lipschitz. 则对每个$(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$, 初值问题(2.0.1)在 t_0 的某个邻域内存在唯一解.

先把如上定理转化成定量的叙述。由局部 Lipschitz 条件，存在 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 的邻域 $U \subset D$ 和常数

$L>0$, 使得对任意的 $(t,\boldsymbol{x}(t)),(t,\boldsymbol{y}(t))\in U$ 都有

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})|\leqslant L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|. \tag{2.1.2}$$

然后取 $a,b>0$ 使得闭矩形矩形

$$R=\{(t,\boldsymbol{x}):|t-t_0|\leqslant a,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant b\}\subset U. \tag{2.1.3}$$

并假设在 R 上存在 $M>0,L>0$ 使得

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant M,\qquad \forall(t,\boldsymbol{x})\in R. \tag{2.1.4}$$

因为 R 是紧集而 $\boldsymbol{f}$ 连续, 第一个上界中的 M 总可以取为$\max\limits_{R}|\boldsymbol{f}|$. 第二个上界是关于$\boldsymbol{x}$-变量的一致Lipschitz条件. 取 $0<h\leqslant\min\{a,\frac{b}{M}\}$，我们期待证明 (2.0.1) 在区间 $I_h=[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一解。

在证明定理之前我们先简要叙述一下想法。我们在区间 $I_h=[t_0-h,t_0+h]$ 上递归定义Picard迭代序列

$$\boldsymbol{x}^{(0)}(t)=\boldsymbol{x}_0,\qquad \boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(k)}(s))\,\mathrm{d}s. \tag{2.1.5}$$

形式上看，若$k\to\infty$时，序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 如果有极限，则上式取极限后的方程正好就是积分方程。所以证明该定理的核心步骤就是验证该逼近序列的收敛性，而事实上我们只需要证明累计迭代误差之和是有限的，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\max_{|t-t_0|\leqslant h}\left|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(k)}(t)\right|<\infty.$$

为什么要估计相邻两次迭代之差？这就涉及到逼近解序列极限的构造。我们在证明序列收敛之前并不知道极限函数具有怎样的形式。所以一种比较自然的想法就是把第 N 个逼近解写成起始逼近解加上各步迭代作差所得函数的累积。对任意正整数 N, 我们总有如下恒等式

$$\boldsymbol{x}^{(N)}(t)=\boldsymbol{x}^{(0)}(t)+\sum_{k=0}^{N-1}\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(k)}(t)\right) \tag{2.1.6}$$

因此, 若函数项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ 在 I_h 上一致收敛, 那么(2.1.6)的右端就有一个连续的极限, Picard序列也随之一致收敛. 于是存在性证明的核心, 不是直接猜出极限函数, 而是为相邻迭代之差建立一个可求和的上界. 下面两个引理依次保证迭代有定义, 并给出这个上界.

引理 2.1.3 迭代始终留在矩形内

在(2.1.2)–(2.1.4)的条件下, 对由 (2.1.5)定义的 Picard 迭代, 对所有 $k \geqslant 0$ 和 $|t-t_0| \leqslant h$, 均有

$$|\boldsymbol{x}^{(k)}(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant M|t-t_0| \leqslant b.$$

证明. 当 $k=0$ 时, $\boldsymbol{x}^{(0)}(t) = \boldsymbol{x}_0$, 所以结论成立. 假设结论对某个 k 成立. 于是对每个 $s \in I_h$, 都有

$$|s-t_0| \leqslant h \leqslant a, \qquad |\boldsymbol{x}^{(k)}(s) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant b,$$

从而 $(s, \boldsymbol{x}^{(k)}(s)) \in R$. 若 $t \geqslant t_0$, 则

$$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^{(k)}(s))| \,\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t} M \,\mathrm{d}s = M(t-t_0).$$

若 $t \leqslant t_0$, 则改写成

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t) - \boldsymbol{x}_0 = -\int_{t}^{t_0} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^{(k)}(s)) \,\mathrm{d}s \;\Rightarrow\; |\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant\leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

两种情形合在一起得到

$$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant M|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

因此结论对 $k+1$ 成立. □

引理 2.1.4 相邻迭代的阶乘估计

在(2.1.2)–(2.1.4)的条件下, 对由 (2.1.5)定义的 Picard 迭代, 当 $k \geqslant 0$ 且 $|t-t_0| \leqslant h$ 时,

$$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t) - \boldsymbol{x}^{(k)}(t)| \leqslant \frac{ML^k|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.1.7}$$

证明. 当 $k=0$ 时, 由Picard迭代的定义以及上一个引理,

$$|\boldsymbol{x}^{(1)}(t) - \boldsymbol{x}^{(0)}(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_0) \,\mathrm{d}s \right| \leqslant M|t-t_0|,$$

这正是(2.1.7)在 $k=0$ 时的结论.

现在设 $k \geqslant 1$, 并假设

$$|\boldsymbol{x}^{(k)}(t) - \boldsymbol{x}^{(k-1)}(t)| \leqslant \frac{ML^{k-1}|t-t_0|^k}{k!}$$

在 I_h 上成立. 下面考察 $k+1$ 的情况. 若 $t \geqslant t_0$, 则由局部Lipschitz条件得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(k)}(t)| &\leqslant L\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{x}^{(k)}(s)-\boldsymbol{x}^{(k-1)}(s)|\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant L\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{k-1}(s-t_0)^k}{k!}\,\mathrm{d}s=\frac{ML^k(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

若 $t \leqslant t_0$, 则同理有

$$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(k)}(t)| \leqslant \frac{ML^k(t_0-t)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

因此(2.1.7)对所有 $t \in I_h$ 成立. 数学归纳法完成证明. □

定理2.1.2的证明. 先证明存在性. 由恒等式(2.1.6)和引理 2.1.4,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\max_{|t-t_0|\leqslant h}|\boldsymbol{x}^{(k+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(k)}(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{ML^kh^{k+1}}{(k+1)!}<+\infty.$$

右端数项级数是收敛的指数级数的一部分. Weierstrass判别法说明函数项级数

$$\boldsymbol{x}^{(0)}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

在 I_h 上一致收敛. 因此存在连续函数 $\boldsymbol{x}: I_h \to \mathbb{R}^d$, 使 (两个箭头就是一致收敛的意思)

$$\boldsymbol{x}^{(N)} \rightrightarrows \boldsymbol{x} \quad \text{on } [t_0-h, t_0+h].$$

而由局部Lipschitz条件又得到 $|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(N)}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))| \leqslant L|\boldsymbol{x}^{(N)}(s)-\boldsymbol{x}(s)|$, 所以

$$\max_{s\in I_h}|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(N)}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))| \leqslant L\max_{s\in I_h}|\boldsymbol{x}^{(N)}(s)-\boldsymbol{x}(s)| \longrightarrow 0.$$

也就是说, 被积函数在 I_h 上一致收敛. 对每个固定的 $t \in I_h$, 有

$$\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(N)}(s))\,\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\right| \leqslant |t-t_0|\max_{s\in I_h}|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(N)}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))| \to 0.$$

在Picard迭代式中令 $N\to\infty$, 得到 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s$. 所以命题2.1.1表明 $\boldsymbol{x}$ 是解.

再证明唯一性. 设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 是初值问题(2.0.1)在 I_h 上的两个解, 并且两个解的图像都位于矩形 R 内. 令 $C=\max\limits_{t\in I_h}|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|$. 这个最大值存在是因为 I_h 是紧区间而且两个解都连续. 现在把两

个积分方程相减可知, 当 $t \geqslant t_0$ 时,

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| \leqslant L \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)| \, \mathrm{d}s.$$

再由 Grönwall 不等式就得到 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$. 因此我们证明了，在图像均位于矩形 R 的解类中，解在 I_h 上唯一. 下面再利用局部唯一性和开闭集论证，证明任意两条具有相同初值的解在其共同存在区间上都相同。

若两个解定义在同一个更大的区间 J 上, 令 $E = \{t \in J : \ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)\}$, 则 $t_0 \in E$ 表明集合 E 非空. 由解的连续性可知该集合是 J 中的闭集. 而对任意 $t_* \in E$, 以 $(t_*, \boldsymbol{x}(t_*)) = (t_*, \boldsymbol{y}(t_*))$ 为新的初值点, 我们可以用刚刚证明的局部存在唯一性, 得到 t_* 在J 中的某个邻域包含于 E, 所以 E 也是 J 中的开集. 又因为区间 J 是连通的, 所以$E = J$. 这就证明了共同存在区间上的唯一性. □

推论 2.1.5 Picard迭代的误差

在定理2.1.2的条件下, 设 $\boldsymbol{x}$ 是 Picard 迭代的极限解. 则对任意非负整数 N 都有

$$\max_{|t-t_0| \leqslant h} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{(N)}(t)| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{ML^k h^{k+1}}{(k+1)!}.$$

在本小节的最后, 我们指出 Picard 定理中区间长度的选取 $h \leqslant \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ 可以从几何上作如下理解. 条件 $h \leqslant a$ 保证 t 不会超出所取矩形的时间范围. 另一方面, 由于 $|f(t, \boldsymbol{x})| \leqslant M$, 解在长度为 h 的时间内至多改变 Mh. 因此, 条件 $h \leqslant b/M$ 保证解不会超出 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant b$ 的范围. 这里得到的 h 只是根据 f 在整个矩形上的一致上界所确定的一个“安全的”存在时间, 一般并不是解的极大存在时间. 例如, 对初值问题 $x'(t) = x(t)^2$, $x(0) = 1$, 其解为 $x(t) = \frac{1}{1-t}$, 所以它的正向最大存在时间为 1. 但若在应用 Picard 定理时取矩形 $|t| \leqslant \frac{1}{2}$, $|x - 1| \leqslant 1$, 则在该矩形内有 $0 \leqslant x \leqslant 2$, 从而可以取 $M = 4$. 此时定理只能保证

$$h \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}.$$

这并不意味着解只能存在到 $t = 1/4$. Picard 定理在这里使用的只是 x^2 在整个矩形的一致上界, 得到这个 $t = 1/4$ 的过程并未利用解的具体表达式. 得到这段区间上的局部解以后, 可以在区间端点附近重新选取矩形并再次应用局部存在定理, 从而逐步延拓该解, 最终得到它的极大存在区间.

接下来看几个Picard迭代的计算与误差估计实例。

例 2.1.1 指数函数的Picard迭代

*求初值问题 $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$ 的*Picard迭代序列.

解. 取 $x^{(0)}(t) = 1$. 由Picard迭代的定义, $x^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t 1 \, \mathrm{d}s = 1 + t$. 于是

$$x^{(2)}(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) \, \mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2!}.$$

并且有数学归纳法可以证得

$$x^{(N)}(t)=\sum_{j=0}^{N}\frac{t^j}{j!}.$$

那么当 $N\to\infty$ 时, 右端在任意有界区间上一致收敛到 e^t. 因此Picard迭代的极限为 e^t, 这也与直接求解方程所得的结果一致. □

例 2.1.2 非线性方程的前几次Picard迭代

考虑 $x'=t+x^2$, $x(0)=0$ 的 Picard 迭代序列.

解. 从 $x^{(0)}(t)=0$ 出发, 计算可得 $x^{(1)}(t)=\int_0^t s\,\mathrm{d}s=\frac{t^2}{2}$. 第二、三次迭代为

$$x^{(2)}(t)=\int_0^t\left(s+\frac{s^4}{4}\right)\mathrm{d}s=\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20},\quad x^{(3)}(t)=\int_0^t\left[s+\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s^5}{20}\right)^2\right]\mathrm{d}s=\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20}+\frac{t^8}{160}+\frac{t^{11}}{4400}.$$

即使方程没有比较初等的显式表达式, 迭代仍给出了可计算的逼近解. 且每次积分都会提高已知 Taylor 系数的阶数, 而推论 2.1.5 给出在固定小区间上的余项控制. □

例 2.1.3 用误差界决定迭代次数

仍看 $x'=x$, $x(0)=1$, 在 $|t|\leqslant 1$ 上有

$$e^t-\sum_{j=0}^{N}\frac{t^j}{j!}=\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{t^j}{j!}.$$

取绝对值并使用 $j!=(N+1)!(N+2)\cdots j$, 得到

$$\left|e^t-\sum_{j=0}^{N}\frac{t^j}{j!}\right|\leqslant\frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{e}{(N+1)!}.$$

例如 $N=9$ 时右端小于 10^{-6}. 因此, 如果要求误差不超过给定的正数 δ, 只要逐个检验 $e/(N+1)!\leqslant\delta$, 便可确定一个足够的迭代次数 N.

2.1.2 压缩映射原理

本节我们展示如何使用压缩映射原理证明解的存在性的方法，这在现代微分方程的研究中仍然常用。本节最后，我们会看到之前我们用 Picard 迭代序列求解的方法是本节所述方法的特例。

定理 2.1.6 压缩映射原理

设 (X,d) 是完备度量空间, 存在常数 $q\in(0,1)$ 使得映射 $T:X\to X$ 满足 $d(Tx,Ty)\leqslant qd(x,y)$, 则 T 有唯一不动点 x_*. 由 $x_{k+1}=Tx_k$ 确定的递推序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x_*, 且 $d(x_k,x_*)\leqslant \frac{q^k}{1-q}d(x_1,x_0)$.

证明. 由压缩性递推可得 $d(x_{k+1},x_k)\leqslant q^k d(x_1,x_0)$. 若 $m>k$, 则

$$d(x_m,x_k)\leqslant\sum_{j=k}^{m-1}d(x_{j+1},x_j)\leqslant\frac{q^k}{1-q}d(x_1,x_0).$$

所以 $\{x_k\}$ 是Cauchy列, 由完备性知存在 $x_*\in X$ 使得 $x_k\to x_*$. 又因为 T 连续, 所以 $Tx_*=\lim\limits_{k\to\infty}Tx_k=x_*$.

在上面的估计中固定 k, 再令 $m\to\infty$. 利用距离函数的连续性, 我们得到误差估计

$$d(x_k,x_*)=\lim_{m\to\infty}d(x_k,x_m)\leqslant\frac{q^k}{1-q}d(x_1,x_0),$$

不动点的唯一性是显然的. 事实上, 若 y_* 也是不动点, 则 $d(x_*,y_*)\leqslant qd(x_*,y_*)$, 所以二者相等. □

现在我们来看如何用压缩映射原理去证明定理 2.1.2.

定理2.1.2的另证. 在闭集 $X=\{\boldsymbol{x}\in C([t_0-h,t_0+h];\mathbb{R}^d):\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_C\leqslant b\}$ 上定义解算子

$$(\mathcal{T}\boldsymbol{x})(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^t\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

第一步：验证 X 是完备度量空间. 若$\{\boldsymbol{x}_n\}\subset C([t_0-h,t_0+h];\mathbb{R}^d)$ 在一致范数下是Cauchy列, 则对每个固定的 t, $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的Cauchy列, 从而作为 $\mathbb{R}^d$ 中的序列有极限; 记逐点极限为 $\boldsymbol{x}(t)$. 给定$\varepsilon>0$, 存在 N, 使 $m,n\geqslant N$ 时

$$\max_{|t-t_0|\leqslant h}|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}_m(t)|<\varepsilon.$$

固定 $n\geqslant N$, 令 $m\to\infty$, 得到

$$\max_{|t-t_0|\leqslant h}|\boldsymbol{x}_n(t)-\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\varepsilon.$$

所以 $\boldsymbol{x}_n\rightrightarrows\boldsymbol{x}$ 是一致收敛; 而连续函数列的一致极限连续, 故 $C([t_0-h,t_0+h];\mathbb{R}^d)$ 完备. 又若 $\boldsymbol{x}_n\in X$ 且 $\boldsymbol{x}_n\rightrightarrows\boldsymbol{x}$ 一致, 则

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_C\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\|_C+\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0\|_C\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\|_C+b.$$

令 $n \to \infty$, 得到 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_C \leqslant b$, 所以 X 是闭集, 因而也完备.

第二步：$\mathcal{T}$ 是 X 到自身的映射. 若 $\boldsymbol{x} \in X$, 则对$|s - t_0| \leqslant h$, 有 $(s, \boldsymbol{x}(s)) \in R$. 因此

$$|(\mathcal{T}\boldsymbol{x})(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))| \, \mathrm{d}s \right| \leqslant M|t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

这证明了 $\mathcal{T}\boldsymbol{x} \in X$.

第三步：$\mathcal{T}$ 是 X 上的压缩映射. 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, 由局部Lipschitz条件可得

$$|(\mathcal{T}\boldsymbol{x})(t) - (\mathcal{T}\boldsymbol{y})(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))| \, \mathrm{d}s \right| \leqslant L|t - t_0| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_C \leqslant Lh \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_C.$$

对 t 取上确界得到 $\|\mathcal{T}\boldsymbol{x} - \mathcal{T}\boldsymbol{y}\|_C \leqslant Lh \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_C$. 现在把 h 取得充分小, 使得 $Lh < 1$, 那么压缩映射原理就表明 $\mathcal{T}$ 在 X 中存在唯一不动点. 由命题2.1.1, 这个不动点正是初值问题的解. □

把这一证明与前面的直接证明逐项比较, 可以看出两者使用的是同一构造.

(1) 直接证明中的递推式 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathcal{T}\boldsymbol{x}^{(k)}$, 就是Banach定理中的逐次迭代.
(2) 引理2.1.3保证每一次迭代的图像留在矩形内; 在Banach证明中, 它正好对应于验证 $\mathcal{T}(X) \subset X$.
(3) 直接证明利用反复积分得到阶乘分母, 因而不要求 $Lh < 1$; Banach证明用 $\|\mathcal{T}\boldsymbol{x} - \mathcal{T}\boldsymbol{y}\|_C \leqslant Lh\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_C$, 必须进一步缩短区间使 $Lh < 1$.
(4) 直接证明中函数项级数的一致收敛, 对应于Banach定理中迭代序列是Cauchy列; 把极限代入积分方程, 对应于证明极限是不动点.
(5) 直接证明用阶乘估计证明唯一性; Banach证明则用压缩不等式证明不动点唯一.

因此, 压缩映射证明的优点是把共同的论证提炼成一个抽象定理; 直接证明的优点是适用的安全区间可以不受 $Lh < 1$ 的限制, 并且能够保留更精细的阶乘型误差估计.

2.1.3 非唯一性与Osgood条件

若去掉关于$\boldsymbol{x}$-变量的局部Lipschitz条件, 连续性仍能保证解的存在, 却不再保证唯一性. 先看一个典型例子.

例 2.1.4 连续右端所产生的非唯一性

讨论初值问题 $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = 0$ 的解是否唯一.

解. 把 $x(t) \equiv 0$ 代入方程, 等式两端都等于零, 所以它是一个解. 对任意常数 $a \geqslant 0$, 定义

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \dfrac{(t-a)^2}{4}, & t > a. \end{cases}$$

当 $0 < t < a$ 时, $x_a'(t) = 0 = \sqrt{|x_a(t)|}$; 当 $t > a$ 时,

$$x_a'(t) = \frac{t-a}{2} = \sqrt{\frac{(t-a)^2}{4}} = \sqrt{|x_a(t)|}.$$

在连接点 $t = a$ 处, 左导数与右导数都等于零, 故 $x_a \in C^1([0,+\infty))$, 并且微分方程在 $t = a$ 处也成立. 此外 $x_a(0) = 0$. 因此每个 $a \geqslant 0$ 都给出一个解; 解可以在平衡态 $x = 0$ 停留任意长的时间以后再离开. 右端函数虽然连续, 却不是局部Lipschitz连续的. □

Lipschitz条件并不是唯一性的必要条件. Osgood条件用一个比线性函数更一般的连续模来控制右端的变化.

定义 2.1.2 Osgood连续模

称函数 $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为一个Osgood连续模, 如果它满足:

(1) ω 连续且单调不减;
(2) $\omega(0) = 0$, 并且对每个 $r > 0$ 都有 $\omega(r) > 0$;
(3) 对任意 $r_0 > 0$, 都有

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)} = +\infty. \tag{2.1.8}$$

一个重要的非Lipschitz例子是

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(r) = \begin{cases} r|\log r|, & 0 < r \leqslant e^{-1}, \\ e^{-1}, & r \geqslant e^{-1}. \end{cases}$$

函数 $r|\log r| = r\log(1/r)$ 在 $(0, e^{-1}]$ 上单调递增, 并且当 $r \downarrow 0$ 时趋于零, 所以上述 ω 连续且单调不减. 又因为当 $r \downarrow 0$ 时 $\frac{\omega(r)}{r} = |\log r| \to +\infty$, 所以它在原点附近不能由 Lr 控制, 因而不是Lipschitz模. 另一方面, 对$0 < \varepsilon < e^{-1}$, 作代换 $q = -\log r$ 可得

$$\int_{\varepsilon}^{e^{-1}} \frac{\mathrm{d}r}{r|\log r|} = \int_{1}^{-\log\varepsilon} \frac{\mathrm{d}q}{q} = \log(-\log\varepsilon) \longrightarrow +\infty \qquad (\varepsilon \downarrow 0).$$

因此这个 ω 是Osgood连续模. 这个例子说明, Osgood条件允许右端项的一致范数在零点附近大于任意固定的线性函数，所以它所要求的正则性可以严格弱于 Lipschitz 连续性。

另一方面, Lipschitz条件对应于 $\omega(r) = Lr$, 而

$$\int_{\varepsilon}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{Lr} = \frac{1}{L}\log\frac{r_0}{\varepsilon} \longrightarrow +\infty.$$

因此这种情况下的 ω 也是Osgood连续模. 而当 $0<\alpha<1$ 时,

$$\int_0^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^\alpha}=\frac{r_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}<+\infty,$$

所以 r^α 不是Osgood连续模. 这与方程 $x'=|x|^\alpha$ 在 $x=0$ 处的非唯一性相吻合.

引理 2.1.7 Osgood不等式

设 ω 是Osgood连续模, $u\in C([t_0,t_0+T];[0,+\infty))$, 并且

$$u(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}\omega(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_0+T.$$

则 $u(t)=0$ 在 $[t_0,t_0+T]$ 恒成立. 同理, 若 $u\in C([t_0-T,t_0];[0,+\infty))$ 并满足

$$u(t)\leqslant\int_{t}^{t_0}\omega(u(s))\,\mathrm{d}s,\qquad t_0-T\leqslant t\leqslant t_0,$$

则 $u(t)=0$ 在 $t\in[t_0-T,t_0]$ 恒成立. 这个不等式又称 Bihari–LaSalle 不等式.

证明. 先证明右侧区间上的结论. 固定 $\varepsilon>0$, 定义 $v_\varepsilon(t)=\varepsilon+\int_{t_0}^{t}\omega(u(s))\,\mathrm{d}s$. 据引理假设有 $u(t)\leqslant v_\varepsilon(t)$ 以及 $v_\varepsilon(t)\geqslant\varepsilon$. 而函数 ω 单调不减, 所以 $v_\varepsilon'(t)=\omega(u(t))\leqslant\omega(v_\varepsilon(t))$.

对 $r\geqslant\varepsilon$, 令 $G_\varepsilon(r)=\int_\varepsilon^r\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega(\theta)}$. 由于分母在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上为正, G_ε 可微, 由复合函数求导即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_\varepsilon(v_\varepsilon(t))=\frac{v_\varepsilon'(t)}{\omega(v_\varepsilon(t))}\leqslant 1.$$

又因为 $v_\varepsilon(t_0)=\varepsilon$, 所以从 t_0 到 t 积分后得到 $G_\varepsilon(v_\varepsilon(t))\leqslant t-t_0$.

今反设存在 $t_1\in(t_0,t_0+T]$ 使得 $u(t_1)>0$, 并记 $c=u(t_1)$. 当 $0<\varepsilon<c$ 时, $v_\varepsilon(t_1)\geqslant u(t_1)=c$, 从而

$$\int_\varepsilon^{c}\frac{\mathrm{d}r}{\omega(r)}\leqslant G_\varepsilon(v_\varepsilon(t_1))\leqslant t_1-t_0\leqslant T.$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$, 左端由Osgood条件趋于 $+\infty$, 右端却不超过有限数 T, 矛盾. 所以 u 在右侧区间上恒为零. 左侧区间是同理的, 证明略去. □

注记 2.1.1. 为什么在定理证明里面引入 ε 这个扰动项呢？若不加，则对 $v(t):=\int_{t_0}^{t}\omega(u(s))\,\mathrm{d}s$ 同样得到 $\dfrac{v'(t)}{\omega(u(t))}\leqslant 1$。但此时这个式子在 $t=t_0$ 处不再成立，而且 Osgood 条件表明左边的函数不是绝对可积的，因此无法像上面证明一样直接对两边积分。

定理 2.1.8 Osgood条件下的局部唯一性

设 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 连续, 并给定 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$. 假设存在闭矩形

$$Q = \{(t, \boldsymbol{x}) : |t - t_0| \leqslant a,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant b\} \subset D$$

以及Osgood连续模 ω, 使得只要 $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in Q$, 就有 $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leqslant \omega(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)$.
若初值问题(2.0.1)的两个解定义在同一个含 t_0 的区间上, 并且两个解的图像都包含在 Q 中, 则这两个解在该区间上完全相同.

下一节的Peano存在性定理还将说明$\boldsymbol{f}$的连续性就能保证局部解存在; 因此在上述Osgood条件下, 初值问题在 t_0 的某个邻域内存在唯一解.

证明. 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个具有相同初值的解. 任取共同定义区间中的 $t_0 + T > t_0$, 则两个解在 $[t_0, t_0 + T]$ 上的图像都位于 Q 内. 两个积分方程相减, 得到

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \big(\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\big)\, \mathrm{d}s.$$

令 $u(t) = |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)|$, 则

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))|\, \mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{t} \omega(|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)|)\, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \omega(u(s))\, \mathrm{d}s.$$

由引理2.1.7, u 在该右侧区间上恒为零.

同样, 任取共同定义区间中的 $t_0 - T < t_0$, 则在 $[t_0 - T, t_0]$ 上有

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) = -\int_{t}^{t_0} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s))\, \mathrm{d}s \ \Rightarrow\ u(t) \leqslant \int_{t}^{t_0} \omega(u(s))\, \mathrm{d}s.$$

引理的左侧结论给出 $u = 0$. 由于右侧的 T 和左侧的 T 都可以在共同定义区间内任意选取, 所以两个解在整个共同区间上完全相等. □

习题 2.1

习题 2.1.1. 计算初值问题 $x'(t) = t + x + 1$, $x(0) = 0$ 的 Picard 序列, 并对此序列取极限求解方程。

习题 2.1.2. 对初值问题(2.0.1), 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足的条件改为: $\boldsymbol{f}$ 连续, 且存在 $[t_0, t_0 + a]$ 上的可积函数 (即绝对值的积分是收敛的) $k(t)$ 使得

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant k(t)(1 + |\boldsymbol{x}|), \quad |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)| \leqslant k(t)|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|.$$

证明: 存在区间 $[t_0, t_0+\delta]$ 使得对应的 Picard 序列在该区间上一致收敛到(2.0.1)的解.

习题 2.1.3. 对初值问题(2.0.1)，设空间维数 $d=1$, 且 $f(t,x)$ 连续，并且关于 x 变量是单调递减的。证明：该初值问题在 $t \geqslant t_0$ 的解是唯一的。并问：在 $t \leqslant t_0$ 上的解是否唯一？证明结论或者构造反例。

问题 2.1

问题 2.1.1. 设 $g: \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ 连续，并满足 $g|_{x\leqslant 0}=0, g|_{x>0}>0$. 考虑初值问题

$$x'(t)=g(x(t)), \qquad x(0)=0.$$

(1) 证明零解在时间正向唯一，当且仅当对某个充分小的 $r_0>0$ 有 $\int_{0+}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{g(r)}=+\infty$.

(2) 若上述积分有限，定义

$$H(r):=\int_{0+}^{r}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}, \qquad H_+:=\lim_{r\to+\infty}H(r).$$

证明：对每个等待时间 $\tau \geqslant 0$，都有解

$$x_\tau(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant \tau,\\ H^{-1}(t-\tau), & \tau<t<\tau+H_+.\end{cases}$$

2.2 Peano存在性定理

Picard方法利用局部Lipschitz条件同时得到存在性和唯一性. 上一小节的例子表明, 若右端只有连续性, 则唯一性可能不成立. 本节要证明的是: $\boldsymbol{f}$的连续性仍足以保证至少有一个局部解. 证明方法称为Euler折线法. 顾名思义, 我们先用许多短线段逐段逼近线素场, 再利用紧性从这些折线中取得一个一致收敛的函数列. 为此需要先介绍下面的Arzelà–Ascoli引理.

2.2.1 Arzelà–Ascoli引理

首先我们引进“一致有界”和“等度连续”两个概念，它们都是对一族函数（而非一个函数）定义的。

定义 2.2.1 一致有界与等度连续

设 $I=[a,b]$, 函数列 $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m\geqslant 1}\subset C(I;\mathbb{R}^d)$. 称这个函数列在$I$ 上**一致有界**, 是指存在 $C>0$, 使

$$|\boldsymbol{x}_m(t)|\leqslant C, \qquad m\geqslant 1, \quad t\in I.$$

称它在 I 上**等度连续**, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对每个正整数 m 以及任意 $s,t\in I$, 只要 $|t-s|<\delta$, 就有 $|\boldsymbol{x}_m(t)-\boldsymbol{x}_m(s)|<\varepsilon$. 这里 δ 的选取既不依赖于 m, 也不依赖s,t 的具体位置.

注记 2.2.1. 一致连续性是对一个函数提出的要求: 给定 $\varepsilon>0$ 后, 可以选取同一个 $\delta>0$ 控制定义域中所有点对 s,t. 等度连续性则是“对一族函数一致的”一致连续性: 除了不依赖于 s,t 外, δ 还不能依赖函数列的指标 m. 因此, 等度连续必然推出每个 $\boldsymbol{x}_m$ 都一致连续, 但仅仅知道每个 $\boldsymbol{x}_m$ 分别一致连续, 不能推出函数列等度连续. 例如在区间 $[0,1]$ 上我们考虑 $x_m(t)=t^m$, 该序列中的每个函数都在 $[0,1]$ 上一致连续, 但这个函数列并不等度连续. 事实上, 取 $s_m=1-\frac{1}{m}$, $t_m=1$, 则 $|t_m-s_m|=1/m\to 0$, 而

$$|x_m(t_m)-x_m(s_m)|=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\to 1-e^{-1}>0.$$

这与等度连续性要求的同一个 δ 同时适用于全部 m 相矛盾.

定理 2.2.1 Arzelà-Ascoli引理

设 $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m\geqslant 1}\subset C([a,b];\mathbb{R}^d)$ 一致有界并且等度连续. 则存在子列在 $[a,b]$ 上一致收敛. 更具体地, 存在严格递增的正整数列 $m_1<m_2<\cdots$ 以及函数 $\boldsymbol{x}\in C([a,b];\mathbb{R}^d)$, 使

$$\max_{t\in[a,b]}|\boldsymbol{x}_{m_j}(t)-\boldsymbol{x}(t)|\longrightarrow 0.$$

证明. 第一步：构造在单点处收敛的子列. 取 $[a,b]$ 的一个可数稠密集 $\{q_1,q_2,q_3,\ldots\}$. 由于函数列一致有界, 所以向量序列 $\{\boldsymbol{x}_m(q_1)\}_{m\geqslant 1}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中有界. 据Bolzano–Weierstrass定理知, 存在子列 $\{m_j^{(1)}\}_{j\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{N}^*$, 使得 $\{\boldsymbol{x}_{m_j^{(1)}}(q_1)\}_{j\geqslant 1}$ 作为 $\mathbb{R}^d$ 中的序列收敛. 进一步地, 对$\mathbb{R}^d$ 中的序列 $\{\boldsymbol{x}_{m_j^{(1)}}(q_2)\}_{j\geqslant 1}$ 再用Bolzano–Weierstrass定理, 可以从指标列 $\{m_j^{(1)}\}$ 中选出严格递增的指标子序列 $\{m_j^{(2)}\}$, 使 $\{\boldsymbol{x}_{m_j^{(2)}}(q_2)\}$ 收敛. 因为第二列指标来自第一列, 所以$\{\boldsymbol{x}_{m_j^{(2)}}(q_1)\}$ 仍然收敛.

第二步：对角线法则找出函数列的子列. 不断重复如上步骤完成第 r 步后, 得到严格递增的指标列 $\{m_j^{(r)}\}_{j\geqslant 1}$, 它是前一步指标列的一部分, 并且 $\boldsymbol{x}_{m_j^{(r)}}(q_1),\ldots,\boldsymbol{x}_{m_j^{(r)}}(q_r)$ 在 $j\to\infty$ 时各自作为$\mathbb{R}^d$中的序列都收敛.

现在取对角指标 $m_j=m_j^{(j)}$ 并令向量值函数 $\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{x}_{m_j}$, 则对固定的 r, 当 $j\geqslant r$ 时, 指标 m_j 属于第 r 步所保留的指标列, 所以 $\{\boldsymbol{y}_j(q_r)\}_{j\geqslant 1}$ 收敛.

第三步：验证对角线序列的一致收敛性. 下面证明 $\{\boldsymbol{y}_j\}$ 在一致范数下是Cauchy列. 给定 $\varepsilon>0$. 由等度连续性, 存在$\delta>0$, 使得对任意正整数 j, 只要 $|t-s|<\delta$, 就有 $|\boldsymbol{y}_j(t)-\boldsymbol{y}_j(s)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 而开区间族 $\{(q_r-\delta,q_r+\delta):r\geqslant 1\}$ 覆盖 $[a,b]$. 由 $[a,b]$ 的紧性质, 存在有限子覆盖, 我们把这些区间的中心记为 $q_{r_1},\ldots,q_{r_N}$. 对每个 $1\leqslant l\leqslant N$, 数列 $\{\boldsymbol{y}_j(q_{r_l})\}$ 收敛, 因而是Cauchy列. 故存在正整数 J_l, 使得当 $i,j\geqslant J_l$ 时,

$$|\boldsymbol{y}_i(q_{r_l})-\boldsymbol{y}_j(q_{r_l})|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $J=\max\{J_1,\dots,J_N\}$. 任取 $t\in[a,b]$, 可以找到某个 l 使$|t-q_{r_l}|<\delta$. 当 $i,j\geqslant J$ 时, 由三角不等式可得

$$|\boldsymbol{y}_i(t)-\boldsymbol{y}_j(t)|\leqslant|\boldsymbol{y}_i(t)-\boldsymbol{y}_i(q_{r_l})|+|\boldsymbol{y}_i(q_{r_l})-\boldsymbol{y}_j(q_{r_l})|+|\boldsymbol{y}_j(q_{r_l})-\boldsymbol{y}_j(t)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

这个估计对所有 $t\in[a,b]$ 同时成立, 故 $\{\boldsymbol{y}_j\}$ 在一致范数下是Cauchy列.

对每个固定的 t, 向量序列 $\{\boldsymbol{y}_j(t)\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的Cauchy列, 故存在极限, 记为 $\boldsymbol{x}(t)$. 在上面的不等式估计中, 固定 i 并令 $j\to\infty$ 可知 $\boldsymbol{y}_i\rightrightarrows\boldsymbol{x}$ 是一致收敛. 而连续函数列一致收敛的极限函数仍然连续, 所以 $\boldsymbol{x}\in C([a,b];\mathbb{R}^d)$. □

2.2.2 Peano存在性定理: Euler折线法

定理 2.2.2 Peano局部存在性定理

设 $D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^d$ 连续, 并给定 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in D$. 取 $a,b>0$, 使闭矩形

$$Q=\{(t,\boldsymbol{x}):|t-t_0|\leqslant a,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant b\}\subset D.$$

令 $M=\max_{(t,\boldsymbol{x})\in Q}|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|$. 当 $M>0$ 时取 $h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$; 当 $M=0$ 时取 $h=a$. 则初值问题(2.0.1)在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上至少存在一个解.

证明. 先证明右半区间 $[t_0,t_0+h]$ 上存在解. 若 $M=0$, 则 $\boldsymbol{f}=0$ 在 Q 上成立, 常值函数 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0$ 就是解. 以下设 $M>0$.

第一步: 构造Euler折线. 给定正整数 N, 定义步长 $h_N=\frac{h}{N}$ 以及分割点 $t_k=t_0+kh_N$, 其中 $k=0,1,\cdots,N$. 然后定义连续折线 $\boldsymbol{x}_N:[t_0,t_0+h]\to\mathbb{R}^d$ 如下: 先令 $\boldsymbol{x}_N(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, 再对 $k=0,1,\cdots,N-1$ 依次归纳定义

$$\boldsymbol{x}_N(t)=\boldsymbol{x}_N(t_k)+(t-t_k)\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{x}_N(t_k)),\qquad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}.\tag{2.2.1}$$

图2.1画出一维情形的构造. 在节点 $P_k=\big(t_k,x_N(t_k)\big)$ 处, 第 k 段折线的斜率取为该节点处线素场的斜率 $f\big(t_k,x_N(t_k)\big)$. 沿这个方向走时间步长 h_N 到达下一节点 P_{k+1}, 再按照新节点处的线素改变方向.

这一递归只有在所有节点都落在 Q 中时才有意义, 下面验证这一点. 对 $t\in[t_k,t_{k+1}]$, 把前面各段的增量相加可得

$$\boldsymbol{x}_N(t)=\boldsymbol{x}_0+\sum_{j=0}^{k-1}h_N\boldsymbol{f}(t_j,\boldsymbol{x}_N(t_j))+(t-t_k)\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{x}_N(t_k)).$$

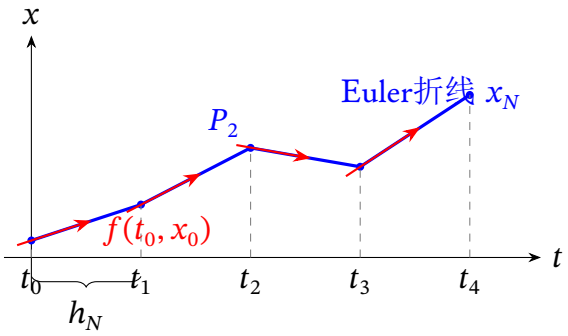


图 2.1: Euler折线的逐段构造示意图. 图中的短线表示各节点处线素场给出的方向.

假设前 k 个节点都在 Q 中, 则

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_N(t)-\boldsymbol{x}_0| &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} h_N|\boldsymbol{f}(t_j,\boldsymbol{x}_N(t_j))| + (t-t_k)|\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{x}_N(t_k))| \\ &\leqslant M\big(kh_N + t - t_k\big) = M(t-t_0) \leqslant Mh \leqslant b.\end{aligned}$$

同时 $|t-t_0| \leqslant h \leqslant a$, 所以 $(t,\boldsymbol{x}_N(t)) \in Q$. 从 $k=0$ 开始作数学归纳, 得到折线在整个右半区间上都有定义, 并且图像始终留在 Q 中.

第二步: 抽取一致收敛的折线序列.

在每个小区间 (t_k, t_{k+1}) 上, 折线的斜率为 $\boldsymbol{f}(t_k,\boldsymbol{x}_N(t_k))$, 其长度不超过 M. 若 $s<t$, 设网格点 $t_{k_1},\cdots,t_{k_r}$ 是位于 (s,t) 内的全部网格点. 把 $[s,t]$ 分成这些网格点所决定的小区间, 并在每段使用斜率上界, 得到

$$|\boldsymbol{x}_N(t)-\boldsymbol{x}_N(s)| \leqslant M(t_{k_1}-s) + M\sum_{l=1}^{r-1}(t_{k_{l+1}}-t_{k_l}) + M(t-t_{k_r}) = M(t-s).$$

当 (s,t) 内没有网格点时, 上式直接由斜率上界得到. 因此对任意 s,t 有$|\boldsymbol{x}_N(t)-\boldsymbol{x}_N(s)| \leqslant M|t-s|$. 这样的话函数列 $\{\boldsymbol{x}_N\}$ 等度连续; 而 $|\boldsymbol{x}_N(t)-\boldsymbol{x}_0| \leqslant b$ 又保证了函数列一致有界. 据Arzelà–Ascoli引理, 存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{N_j}\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ 以及极限函数 $\boldsymbol{x} \in C([t_0,t_0+h];\mathbb{R}^d)$, 使得

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+h} |\boldsymbol{x}_{N_j}(t)-\boldsymbol{x}(t)| \longrightarrow 0.$$

由 $|\boldsymbol{x}_{N_j}(t)-\boldsymbol{x}_0| \leqslant b$ 并令 $j\to\infty$, 得到$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_0| \leqslant b$, 所以极限函数的图像也在 Q 中.

第三步: 证明极限函数满足积分方程. 当 $s\in[t_k,t_{k+1})$ 时定义 $\theta_N(s)=t_k$, 并令$\theta_N(t_0+h)=t_{N-1}$. 根据每段折线的定义, 对每个 $t\in[t_0,t_0+h]$, 有

$$\boldsymbol{x}_N(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\theta_N(s),\boldsymbol{x}_N(\theta_N(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{2.2.2}$$

对每个 s, 有 $|s-\theta_N(s)|\leqslant h_N$. 再利用折线的Lipschitz估计, 得到

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_{N_j}(\theta_{N_j}(s))-\boldsymbol{x}(s)| &\leqslant |\boldsymbol{x}_{N_j}(\theta_{N_j}(s))-\boldsymbol{x}_{N_j}(s)|+|\boldsymbol{x}_{N_j}(s)-\boldsymbol{x}(s)|\\ &\leqslant Mh_{N_j}+\max_{t_0\leqslant r\leqslant t_0+h}|\boldsymbol{x}_{N_j}(r)-\boldsymbol{x}(r)|\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

这个收敛关于 s 是一致的, 并且 $|\theta_{N_j}(s)-s|\leqslant h_{N_j}\to 0$. 函数 $\boldsymbol{f}$ 在紧集 Q 上一致连续, 故

$$\max_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+h}\left|\boldsymbol{f}(\theta_{N_j}(s),\boldsymbol{x}_{N_j}(\theta_{N_j}(s)))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\right|\longrightarrow 0.$$

于是对每个 $t\in[t_0,t_0+h]$,

$$\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\theta_{N_j}(s),\boldsymbol{x}_{N_j}(\theta_{N_j}(s)))\,\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant h\max_{t_0\leqslant s\leqslant t_0+h}\left|\boldsymbol{f}(\theta_{N_j}(s),\boldsymbol{x}_{N_j}(\theta_{N_j}(s)))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\right|\longrightarrow 0.$$

在(2.2.2)中令 $j\to\infty$, 得到 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s$. 据命题2.1.1 知 $\boldsymbol{x}$ 是右半区间上的 C^1 解.

最后构造左半区间上的解. 对 $0\leqslant\tau\leqslant h$, 考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\tau}=-\boldsymbol{f}(t_0-\tau,\boldsymbol{y}(\tau)),\qquad \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0.$$

它的右端连续, 且在相应闭矩形上仍以 M 为上界, 所以上面已经证明的右侧存在性给出 $[0,h]$ 上的解 $\boldsymbol{y}$. 对 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$, 定义 $\boldsymbol{x}_-(t)=\boldsymbol{y}(t_0-t)$, 据链式法则有

$$\boldsymbol{x}_-'(t)=-\boldsymbol{y}'(t_0-t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t_0-t))=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_-(t)),$$

并且 $\boldsymbol{x}_-(t_0)=\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}_0$. 把 $\boldsymbol{x}_-$ 与右半区间上的 $\boldsymbol{x}$ 在 t_0 处拼接. 两侧函数值都等于 $\boldsymbol{x}_0$, 两侧导数都等于 $\boldsymbol{f}(t_0,\boldsymbol{x}_0)$, 故拼接函数属于$C^1([t_0-h,t_0+h];\mathbb{R}^d)$, 并且在整个区间上满足初值问题. □

注记 2.2.2. Peano存在性定理并不能得出解的唯一性。这是因为我们在对逼近解序列取极限时使用的是 Arzelá–Ascoli 引理，而它只保证了一致有界且等度连续的函数族必然存在某个收敛子列，但并没有说明极限点是唯一的，更不能得到两条积分曲线之间的误差估计。

例 2.2.1 右端不连续时经典解可能不存在

考虑一维初值问题

$$x'(t)=f(t,x(t)),\qquad x(0)=0,\tag{2.2.3}$$

其中

$$f(t,x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(t), & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

函数 f 与 x 无关, 但它在 $t=0$ 处不连续. 这个初值问题在任何含有 0 的开区间上都没有经典解.

证明. 反设存在 $\delta>0$ 和经典解 $x\in C^1((-\delta,\delta))$. 当 $0<t<\delta$ 时, 由方程可得 $x'(t)=1$. 在闭区间 $[0,t]$ 上使用微积分基本定理, 得到 $x(t)-x(0)=\int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^t 1\,\mathrm{d}s=t$, 所以 $x(t)=t$. 同理当 $-\delta<t<0$ 时, 可以算得 $x(t)=-t$. 因此连续性和方程在 $t\neq 0$ 处已经迫使唯一可能的函数为 $x(t)=|t|$, 但它在原点处是不可微的, 进而不是 C^1 解, 也不满足 $x'(0)=f(0,x(0))=0$. 所以初值问题(2.2.3)不存在经典解. 这个例子说明, Peano定理中右端$\boldsymbol{f}$ 的连续性假设确实起到了保证极限函数可微并满足微分方程的作用. □

推论 2.2.3 Osgood条件下的存在唯一性

若 $\boldsymbol{f}$ 连续并满足定理2.1.8中的Osgood条件, 则初值问题 (2.0.1)局部存在且唯一.

证明. Peano定理只使用 $\boldsymbol{f}$ 的连续性, 因而给出至少一个局部解. 由解在 t_0 处的连续性, 可以把其定义区间缩短, 使图像包含在定理2.1.8中的矩形 Q 内.

若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是两个具有相同初值的局部解, 则把它们的共同定义区间再缩短一次, 可以使两个图像都包含在 Q 中. 定理2.1.8说明 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 在这个共同区间上成立. 因此局部解存在且唯一. □

注记 2.2.3 (Peano定理不含唯一性). Peano定理只断言至少存在一个解, 并不包含唯一性. 其证明的三个环节分别是: 用Euler折线构造近似解; 用一致有界性和等度连续性得到一致收敛的函数列; 利用 $\boldsymbol{f}$ 的一致连续性把极限传入积分方程. 连续性足以完成这三个环节, 而Lipschitz条件或Osgood条件的作用是进一步排除两个解从同一点分开的可能性.

习题 2.2

习题 2.2.1. 验证 Picard 序列满足 Arzelà–Ascoli 引理的条件。问：是否可以用 Picard 序列而非 Euler 折线法去证明 Peano 存在性定理，为什么？

习题 2.2.2. 设空间维数 $d=1$, 在区间 $I=[t_0,t_0+h]$ 上 (h定义与 Peano 存在性定理相同) 构造 Tonelli 序列如下：任给正整数 n, 令 $t_k=t_0+k\dfrac{h}{n}$, 然后我们从 $[t_0,t_1]$ 到 $[t_1,t_2]$, 再从 $[t_1,t_2]$ 到 $[t_2,t_3]$ 最终从 $[t_{n-2},t_{n-1}]$ 到 $[t_{n-1},t_n]$ 分段递归定义逼近解

$$x_n(t)=\begin{cases} t_0 & t\in[t_0,t_1] \\ t_0+\int_{t_0}^{t-\frac{h}{n}} f(t,x_n(t))\,\mathrm{d}t & t\in[t_1,t_0+h] \end{cases}.$$

请用 Tonelli 序列和 Arzelà–Ascoli 引理证明 Peano 存在性定理。

2.3 解的延拓与极大存在区间

到目前为止, 存在性定理只保证解在初始时刻附近的一小段区间上存在. 本节要回答的是: 从一个局部解出发, 到底能够把它继续延长到多大的区间? 在本节中, 我们始终假设 $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 连续并关于 $\boldsymbol{x}$ 局部 Lipschitz.

定义 2.3.1 解的延拓与极大存在区间

设 $\boldsymbol{x}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ 与 $\boldsymbol{x}_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ 都是初值问题(2.0.1)的解, $I_1 \subset I_2$, 且 $\boldsymbol{x}_2|_{I_1} = \boldsymbol{x}_1$, 则称 $\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{x}_1$ 的**延拓**. 若一个解不存在定义在更大区间上的真延拓, 则称它为**极大解**, 它的定义区间称为**极大存在区间**.

定理 2.3.1 唯一极大解

对任意 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$, 初值问题(2.0.1)恰有一个极大解, 其定义域是开区间 (T_-, T_+), 其中 $-\infty \leqslant T_- < t_0 < T_+ \leqslant +\infty$.

证明. 记 $\mathcal{S}$ 为初值问题(2.0.1)在含 t_0 的开区间上定义的所有局部解的集合. Picard定理保证$\mathcal{S} \neq \varnothing$. 对属于 $\mathcal{S}$ 的任意两个解 $\boldsymbol{x}_I : I \to \mathbb{R}^d$ 与 $\boldsymbol{x}_J : J \to \mathbb{R}^d$, 我们知道 $t_0 \in I \cap J$, 而共同存在区间上的唯一性说明 $\boldsymbol{x}_I(t) = \boldsymbol{x}_J(t)$ 对任意 $t \in I \cap J$ 成立, 所以初值问题的两个解在它们定义域重叠的地方是相等的.

接下来我们把所有能定义局部解的区间“拼接”起来, 上面的步骤保证了解的存在性以及“拼接处”是可以将两段解“缝合起来”的. 令 $\mathcal{I} = \bigcup_{\boldsymbol{x}_I \in \mathcal{S}} I$, 其中每个 I 都是含有 t_0 的开区间. 若 $s, t \in \mathcal{I}$ 且 $s < t$, 则分别存在包含t_0, s 和包含 t_0, t 的区间 I_s, I_t. 它们的并集仍是区间并且包含 $[s, t]$, 所以 $[s, t] \subset \mathcal{I}$. 这证明了 $\mathcal{I}$ 本身是区间. 而它又是开集的并, 故是开区间. 因而存在 $-\infty \leqslant T_- < t_0 < T_+ \leqslant +\infty$, 使得 $\mathcal{I} = (T_-, T_+)$.

现在我们在并集$\mathcal{I}$上定义拼接后的函数. 对任意 $t \in \mathcal{I}$, 至少存在一个区间 I 包含了 t, 所以对这个 $t \in I$ 我们就定义 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_I(t)$. 若另一个区间 J 也含有 t, 则 $t \in I \cap J$, 前面的证明已经表明 $\boldsymbol{x}_I(t) = \boldsymbol{x}_J(t)$, 所以这个定义是良定的, 且与 I 的选择无关.

然后验证拼接后的函数确实是初值问题的解. 今固定 $t_* \in \mathcal{I}$, 则存在某个 I 使 $t_* \in I$, 进而在 t_* 的一个开邻域内恒有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_I$. 而 $\boldsymbol{x}_I$ 已经是原方程的局部解, 所以 $\boldsymbol{x}$ 在 t_* 的邻域内属于 C^1 并满足原微分方程. 由 t_* 的任意性得知, $\boldsymbol{x}$ 是 (T_-, T_+) 上的解.

最后我们验证拼接所得的解是唯一的极大解. 若 $\boldsymbol{x}$ 还能延拓到一个更大的区间 $\widetilde{I}$, 则这个延拓本身属于 $\mathcal{S}$, 从而 $\widetilde{I} \subset \mathcal{I}$, 这与 $\widetilde{I}$ 真包含 $\mathcal{I}$ 矛盾. 所以 $\boldsymbol{x}$ 是极大解. 若 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 是另一个极大解, 则它的定义区间包含在 $\mathcal{I}$ 内, 并且它与 $\boldsymbol{x}$ 在公共区间上相等; 因此它是 $\boldsymbol{x}$ 的限制. $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 的极大性迫使其定义区间等于 $\mathcal{I}$, 从而 $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$. 极大解唯一. □

下一个引理给出了一个直接的延拓准则. 设右端有限端点为 T_+. 若存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, 使解的图像上的点 $(t, \boldsymbol{x}(t))$ 在 $t \uparrow T_+$ 时收敛到点 $(T_+, \boldsymbol{y})$, 并且这个极限点属于向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的定义域 D, 那么

可以把 $(T_+, \boldsymbol{y})$ 作为新的初值点, 在 T_+ 附近求出局部解, 再与原解拼接. 请注意: 这个极限点必须属于 D; 若它落在 D 的边界上或落在 D 外, 局部存在性定理便不能在这个点应用.

引理 2.3.2 端点极限与延拓

设 $\boldsymbol{x} : (T_-, T_+) \to \mathbb{R}^d$ 是方程(2.0.1)的一个解, 并且 $T_+ < +\infty$. 它能够延拓到 $(T_-, T_+ + \varepsilon)$(其中ε是某个大于0的常数) 当且仅当存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\lim\limits_{t \uparrow T_+}(t, \boldsymbol{x}(t)) = (T_+, \boldsymbol{y}) \in D$. 左端点处亦有相应的结论.

证明. 若 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 是定义在 $(T_-, T_+ + \varepsilon)$ 上的延拓, 则 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 连续, 而且$\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ 对 $t < T_+$ 成立. 因此

$$\lim_{t \uparrow T_+}(t, \boldsymbol{x}(t)) = (T_+, \widetilde{\boldsymbol{x}}(T_+)) \in D.$$

反过来, 假设上述极限存在. 今以 $(T_+, \boldsymbol{y})$ 为初值, 据Picard存在唯一性定理知, 存在 $\varepsilon > 0$ 以及定义在 $(T_+ - \varepsilon, T_+ + \varepsilon)$ 上的局部解 $\boldsymbol{z}$, 满足 $\boldsymbol{z}(T_+) = \boldsymbol{y}$. 对 $t \in (T_+ - \varepsilon, T_+)$, 由积分方程取极限可得,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \int_t^{T_+} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s, \qquad \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \int_t^{T_+} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{z}(s))\,\mathrm{d}s.$$

在 $(T_+, \boldsymbol{y})$ 附近取一个闭矩形, 使 $\boldsymbol{f}$ 关于$\boldsymbol{x}$-变量的Lipschitz常数为 L. 所以只要把ε 选取得充分小, 那么两个解的图像在 $t \in (T_+ - \varepsilon, T_+]$ 的这段都停留在该矩形内; 这里把 $\boldsymbol{x}(T_+)$ 定义为极限值 $\boldsymbol{y}$, 从而 $\boldsymbol{x}$ 在这个闭区间上连续.

令$C = \max\limits_{T_+ - \varepsilon \leqslant t \leqslant T_+} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{z}(t)|$. 据积分方程可得,

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{z}(t)| \leqslant L \int_t^{T_+} |\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{z}(s)|\,\mathrm{d}s.$$

于是由 Grönwall 不等式以及 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{z}(t_0)$ 就得到 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z}(t)$. 因此下式给出了解$\boldsymbol{x}(t)$的延拓

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & T_- < t < T_+, \\ \boldsymbol{z}(t), & T_+ \leqslant t < T_+ + \varepsilon \end{cases}.$$

左端点结论由同一个论证得到. 具体地, 作反向时间变换 $\tau = -t$, $\widehat{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{x}(-\tau)$, 则 $t \downarrow T_-$ 等价于 $\tau \uparrow -T_-$, 而反向时间方程的右端为 $\widehat{\boldsymbol{f}}(\tau, \boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{f}(-\tau, \boldsymbol{z})$. 函数 $\widehat{\boldsymbol{f}}$ 仍连续并且关于 $\boldsymbol{z}$ 局部Lipschitz. 对 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 应用刚刚证明的右端点结论, 再换回变量 t, 就得到原解越过 T_- 延拓的充要条件. □

定理 2.3.3 紧集延拓准则

设 $\boldsymbol{x} : (T_-, T_+) \to \mathbb{R}^d$ 是方程(2.0.1)的一个解, $T_+ < +\infty$. 若存在紧集 $K \subset D$, 使 $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in K$, $t_0 \leqslant t < T_+$, 则 $\boldsymbol{x}$ 可以越过 T_+ 延拓.

同理, 若 $T_- > -\infty$, 并且存在紧集 $K \subset D$, 使 $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in K$, $T_- < t \leqslant t_0$, 则 $\boldsymbol{x}$ 可以越过 T_- 向左延拓.

证明. 这里只证明右端点的延拓, 现在我们只要验证引理2.3.2的条件是否满足即可.

由于K是紧集, $\boldsymbol{f}$连续, 所以$M = \max\limits_{(t,\boldsymbol{z})\in K} |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{z})| < +\infty$. 对 $t_0 \leqslant s < t < T_+$,

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(s)| = \left| \int_s^t \boldsymbol{f}(r, \boldsymbol{x}(r))\,\mathrm{d}r \right| \leqslant \int_s^t |\boldsymbol{f}(r, \boldsymbol{x}(r))|\,\mathrm{d}r \leqslant M(t-s).$$

取任意严格递增且趋于 T_+ 的序列 t_m. 上式说明 $\{\boldsymbol{x}(t_m)\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的Cauchy列, 故存在极限 $\boldsymbol{x}_+$. 这个极限与序列的选择无关: 事实上, 若 $s_m \uparrow T_+$ 是另一序列, 则必有 $|\boldsymbol{x}(t_m) - \boldsymbol{x}(s_m)| \leqslant M|t_m - s_m| \to 0$. 所以 $\lim\limits_{t\uparrow T_+} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_+$.

由于 $(t_m, \boldsymbol{x}(t_m)) \in K$ 而 K 是紧集, 所以令 $m \to \infty$ 可得到 $(T_+, \boldsymbol{x}_+) \in K \subset D$. 据引理2.3.2, 我们就得到了越过 T_+ 的延拓. □

推论 2.3.4 离开紧集

若初值问题(2.0.1)的极大解的右端点 $T_+ < +\infty$, 则当 $t \uparrow T_+$ 时, 积分曲线不可能会落在 D 中的任一紧集内.

证明. 反设存在紧集 $K \subset D$, 使解的图像在任意接近 T_+ 的时刻仍会进入 K. 于是可以递归选取严格递增的时刻 $t_m \uparrow T_+$, 使 $(t_m, \boldsymbol{x}(t_m)) \in K$. 由于 K 是开集 D 的紧子集, 所以存在 $r > 0$, 使 K 的闭 r-邻域仍包含在 D 中. 我们记这个闭邻域为 K_r, 并令 $M = \max\limits_{(t,\boldsymbol{z})\in K_r} |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{z})|$.

今从 K 中任一点 $(s, \boldsymbol{z})$ 出发, 取闭矩形 $R := \{(t, \boldsymbol{y}) : |t - s| \leqslant r/2, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| \leqslant r/2\}$. 这个矩形 R 包含在 K_r 中, 因而在这个矩形里面也有 $|\boldsymbol{f}| \leqslant M$. 据Peano存在性定理(在这里也可用Picard定理), 我们知道以 $(s, \boldsymbol{z})$ 为初值的解至少在右侧长度 $h = \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{r}{2M}\right\} > 0$ 的时间区间内存在; 若 $M = 0$, 则取 $h = r/2$. 这个 h 与 K 中初值点的选择无关.

现在取 m 足够大, 使 $T_+ - t_m < h$. 以 $(t_m, \boldsymbol{x}(t_m))$ 为初值的局部解便可以演化到T_+ 右侧. 局部唯一性说明它在与原极大解重叠的区间上等于原解, 因此二者拼接后给出原解越过T_+ 的延拓, 这与极大性矛盾. 所以解的图像不可能完全落在一个紧集里面. □

推论 2.3.5 全空间中的爆破准则

设 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 连续且关于 $\boldsymbol{x}$ 局部Lipschitz. 若初值问题(2.0.1)的极大解的右端点$T_+ < +\infty$, 则当$(t \uparrow T_+)$时有$|\boldsymbol{x}(t)| \to +\infty$.

证明. 反设 $|\boldsymbol{x}(t)|$ 不趋于 $+\infty$. 则存在常数 $R > 0$ 以及严格递增的时间序列$t_m \uparrow T_+$, 使 $|\boldsymbol{x}(t_m)| \leqslant R$. 在紧集 $K_0 = [t_0 - 1, T_+ + 1] \times \{\boldsymbol{z} : |\boldsymbol{z}| \leqslant R + 1\}$上, $\boldsymbol{f}$ 有界, 记 $M = \max\limits_{K_0} |\boldsymbol{f}|$. 从每个点 $(t_m, \boldsymbol{x}(t_m))$ 出发, 解的局部存在性定理保证继续往右求解至少 $h_0 = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$ 的时间区间; 当 $M = 0$ 时取 $h_0 = 1$.

这是因为当 m 充分大时, 闭矩形 $\{(t,\boldsymbol{y}):|t-t_m|\leqslant 1,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_m(t)|\leqslant 1\}$ 包含在 K_0 中, 且在该矩形上 $|\boldsymbol{f}|\leqslant M$.

今取 m 充分大, 使得 $T_+-t_m<h_0$, 这样以 $(t_m,\boldsymbol{x}(t_m))$ 为初值所得的局部解便可以延拓到 T_+ 之后; 唯一性使得它在 $[t_m,T_+)$ 上与原极大解相同, 于是构成原解的延拓, 矛盾. 因此必有$|\boldsymbol{x}(t)|\to+\infty$. □

下一定理是下一章的理论根基：当$\boldsymbol{f}$关于$\boldsymbol{x}$变量至多线性增长时, 对应的一阶常微分方程组的初值问题必有整体解.

定理 2.3.6 线性增长保证整体存在

设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 连续并关于 $\boldsymbol{x}$ 局部Lipschitz. 假设对任意实数 $T>0$, 存在非负常数 A_T,B_T, 使得对任意 $t\in[-T,T]$, 都有 $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant A_T+B_T|\boldsymbol{x}|$, 则初值问题(2.0.1)有整体解.

证明. 固定 $T>|t_0|$, 简记 $A=A_T$, $B=B_T$. 先考虑$t_0\leqslant t\leqslant T$ 且属于极大存在区间的情形. 据初值问题的积分方程表示可得

$$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant|\boldsymbol{x}_0|+\int_{t_0}^{t}\big(A_T+B_T|\boldsymbol{x}(s)|\big)\,\mathrm{d}s.$$

据Grönwall不等式, 我们可得 $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\big(|\boldsymbol{x}_0|+A_T(t-t_0)\big)e^{B_T(t-t_0)}$. 该不等式右端在 $[t_0,T]$ 上有界. 由于 T 任意, 据推论 2.3.5 知解不会发生时间正向的有限时间爆破. 对 $t\leqslant t_0$, 我们仍然可以通过考虑 $v(\tau)=|\boldsymbol{x}(t_0-\tau)|$ (其中$\tau=t_0-t$) 得到相同的结论, 过程不再赘述. □

推论 2.3.7 线性方程组的整体存在

若 $I\subset\mathbb{R}$ 是开区间, $A(t)$ 与 $\boldsymbol{g}(t)$ 在 I 上连续, 则一阶线性常微分方程组的初值问题

$$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t),\qquad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

在整个 I 上有唯一解.

证明. 若解在 I 中极大存在时间 $T_*<\sup I$, 则取区间 $[a,b]\subset I$ 使得 $a<t_0<T_+<b$. 由于连续函数在紧集上必然有界, 所以

$$L=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|A(t)|<+\infty,\ M=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\boldsymbol{g}(t)|<+\infty\ \Rightarrow\ |A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t)|\leqslant L|\boldsymbol{x}|+M.$$

据定理2.3.6和推论2.3.5得知解可以越过 T_+ 继续延拓, 矛盾, 所以 $T_+=\sup I$, 存在区间的左端点同理. 而唯一性可由如下不等式直接得到: 假设 $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)$ 是同一初值问题两个不同的解, 则由方程可得

$$|\boldsymbol{x}'(t)-\boldsymbol{y}'(t)|=|A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t)-A(t)\boldsymbol{y}-\boldsymbol{g}(t)|\leqslant|A(t)|\,|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|.$$

而$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{x}'(t)-\boldsymbol{y}'(t)|$, 代入上述不等式, 再由 Grönwall 不等式即得结论. □

注记 2.3.1. 方程 $x' = x$ 满足线性增长, 它的非零解只在无限时间趋于无穷; 方程 $x' = x^2$ 的右端超过线性增长, 解确实可能在有限时间爆破. 线性增长只是保证整体存在的充分条件, 并非必要条件. 例如$x' = -x^3$ 的右端具有三次增长, 但当 $|x|$ 较大时, 高次项的符号使 $|x|$ 减小, 所以解仍然整体存在.

习题 2.3

习题 2.3.1. 讨论方程 $x'(t) = x(x-1)$ 解的存在区间。

习题 2.3.2. 讨论方程 $x'(t) = x\sin(tx)$ 解的存在区间。

习题 2.3.3. 设初值问题 $x' = (x^2 - 2x - 3)e^{(x+t)^2}$, $x(t_0) = x_0$ 的解的最大存在区间为 (a, b). 证明: $a = -\infty$ 与 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

习题 2.3.4. 证明初值问题 $x' = t^3 - x^3$, $x(t_0) = x_0$ 的解在 $[t_0, +\infty)$ 上存在。

问题 2.3

问题 2.3.1. 设 $x' = (t^2 - x^2)f(t, x), x(t_0) = x_0$, 其中 f 在全平面连续，并满足当 $x \neq 0$ 时 $xf(t, x) > 0$. 证明：对任意 $t_0 < 0$，当 $|x_0|$ 适当小时，初值问题的解可以延拓到 $t \in (-\infty, \infty)$.

提示：取 $|x_0| < -t_0$, 令 $z(t) = x(t)^2$, 求出 $z(t)$ 满足的一阶方程, 然后分情况讨论 $t \leqslant t_0, t \geqslant t_0$, 对前者情况使用反证法证明 $z(t) < t^2$ 恒成立.

问题 2.3.2. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上是连续且单调递增的，C 是常数。考虑初值问题 $x'(t) = -f(x(t)) + C$, $x(t_0) = x_0$.

(1) 证明：对任意给定的常数 C, 该初值问题在 $[t_0, +\infty)$ 上存在解。

(2) 该方程在$[t_0, +\infty)$上的解是否唯一，证明你的结论。

提示：设时间正向的极大存在区间是 $[t_0, \beta)$, f 在 $\mathbb{R}$ 上的下确界、上确界为 m, M (可能为无穷). 分情况讨论 $C > M, C < m, m \leqslant C \leqslant M$. 对最后一种情况, 若存在 a 使得 $f(a) = C$, 则讨论 $|x(t) - a|^2$ 的单调性.

问题 2.3.3. 设 $f(t, x)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant a$, $-\infty < x < +\infty$ 上连续，且存在常数 $q \in (0, 1)$ 使得对任意的 $t \in (0, a]$ 都有 $|f(t, y) - f(t, z)| \leqslant \dfrac{q}{t}|y - z|$. 证明：初值问题 $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$ 在 $[0, a]$ 上存在唯一解。

2.4 比较定理及其应用

上一节的延拓定理说明：要估计解的极大存在区间, 必须判断解是否会在有限时间内变得无界, 或者是否会碰到方程定义域的边界. 但是延拓定理本身并不告诉我们怎样得到这种控制. 对标量方程 ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$中的空间维数$d = 1$时), 线素场的几何性质提供了一种有效办法: 把原方程解的

斜率与另一个较容易处理的方程比较, 再利用两条积分曲线“不能在错误的方向发生第一次相交”这一事实, 得到解的大小与存在时长的估计. 这就是比较定理的基本思想.

2.4.1 第一比较定理

定理 2.4.1 第一比较定理

设 f, F 在开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内连续, 并且对任意$(t,x) \in D$都有$f(t,x) < F(t,x)$. 设 φ, Φ 分别是

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \qquad x' = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

在 (a,b) 上的解, 且图像位于 D. 则

$$\varphi(t) < \Phi(t) \quad (t_0 < t < b), \qquad \varphi(t) > \Phi(t) \quad (a < t < t_0).$$

这里不要求任一方程满足唯一性条件.

证明. 令 $w(t) = \Phi(t) - \varphi(t)$. 在 t_0 处有 $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) = F(t_0, x_0) - f(t_0, x_0) > 0$. 由于 w' 连续, 故存在 $\delta > 0$, 使 $w'(t) > 0$ 对 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$ 成立. 因此

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} w'(s)\,\mathrm{d}s > 0, \qquad t_0 < t \leqslant t_0 + \delta.$$

反设右侧结论不成立, 则集合 $Z = \{t \in (t_0, b) : w(t) = 0\}$ 非空. 令 $\beta = \inf Z$, 由上面的局部正性知 $\beta \geqslant t_0 + \delta$. 在 Z 中利用连续性就可得到 $w(\beta) = 0$; 而由 β 的定义, $w(t) > 0$ 对 $t_0 < t < \beta$ 成立. 因此对每个充分小的 $h > 0$, 必有

$$\frac{w(\beta) - w(\beta - h)}{h} \leqslant 0.$$

再令 $h \downarrow 0$ 就得到 $w'(\beta) \leqslant 0$. 但是 $\Phi(\beta) = \varphi(\beta)$, 所以 $w'(\beta) = F(\beta, \varphi(\beta)) - f(\beta, \varphi(\beta)) > 0$, 矛盾. 这就证明 $\varphi(t) < \Phi(t)$ 对 $t_0 < t < b$ 成立.

对左侧区间, 令 $\tau = t_0 - t$, 并定义 $\widetilde{\varphi}(\tau) = \varphi(t_0 - \tau)$, $\widetilde{\Phi}(\tau) = \Phi(t_0 - \tau)$, 于是它们分别满足 $\widetilde{\varphi}' = -f(t_0 - \tau, \widetilde{\varphi})$, $\widetilde{\Phi}' = -F(t_0 - \tau, \widetilde{\Phi})$. 因为 $-F < -f$, 把已经证明的右侧结论应用于 $\widetilde{\Phi}$ 与 $\widetilde{\varphi}$, 得到 $\widetilde{\Phi}(\tau) < \widetilde{\varphi}(\tau)$ 对 $\tau > 0$ 成立. 换回变量 t, 即 $\varphi(t) > \Phi(t)$ 对 $a < t < t_0$ 成立. □

定义 2.4.1 上解与下解

对方程 $x' = f(t,x)$, 若 $\beta \in C^1(I)$ 满足 $\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))$, 则称 β 为上解; 若 $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$, 则称 α 为下解. 严格不等式则对应严格上、下解.

定理 2.4.2 上解与下解比较定理

考虑标量方程 $x' = f(t,x)$, 设 f 连续并关于 x 局部Lipschitz, $x(t)$ 是这个方程的解. 设 $x, \alpha, \beta \in C^1([t_0,T])$ 的图像均位于 D, 其中 α, β 分别是在 $[t_0,T]$ 上的下解和上解, 并且 $\alpha(t_0) \leqslant x(t_0) \leqslant \beta(t_0)$, 则 $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$.

证明. 先证明上界. 解 x 与函数 β 的图像在紧区间 $[t_0,T]$ 上都是紧的, 可以取一个包含这两条图像的小闭邻域, 使 f 在该邻域中关于x变量的Lipschitz常数为 L. 对 $\varepsilon > 0$, 构造辅助函数 $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t) + \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)}$ 当 ε 充分小时, β_ε 的图像仍在上述邻域中. 由 $\beta' \geqslant f(t,\beta)$, 我们得到

$$\beta_\varepsilon' - f(t,\beta_\varepsilon) \geqslant f(t,\beta) + (L+1)\varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} - f(t,\beta_\varepsilon) \geqslant \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} > 0.$$

所以 β_ε 是严格上解, 并且 $x(t_0) \leqslant \beta(t_0) < \beta_\varepsilon(t_0)$.

反设存在时刻t使得 $x(t) \geqslant \beta_\varepsilon(t)$. 由连续性, 存在第一个“接触时刻” $t_1 > t_0$, 使

$$x(t) < \beta_\varepsilon(t) \quad (t_0 \leqslant t < t_1),\ x(t_1) = \beta_\varepsilon(t_1).$$

令 $q = \beta_\varepsilon - x$. 则 $q(t) > 0$ 对 $t < t_1$ 成立而 $q(t_1) = 0$, 从而 $q'(t_1) \leqslant 0$. 另一方面, 严格上解性质给出

$$q'(t_1) = \beta_\varepsilon'(t_1) - f(t_1, x(t_1)) = \beta_\varepsilon'(t_1) - f(t_1, \beta_\varepsilon(t_1)) > 0,$$

矛盾. 因此 $x(t) < \beta_\varepsilon(t)$ 在整个区间上成立. 对每个固定的 t 令 $\varepsilon \downarrow 0$, 得到 $x(t) \leqslant \beta(t)$.

为证明下界, 构造辅助函数 $\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(t) - \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)}$. 由 $\alpha' \leqslant f(t,\alpha)$ 以及Lipschitz估计,

$$\alpha_\varepsilon' - f(t,\alpha_\varepsilon) \leqslant f(t,\alpha) - (L+1)\varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} - f(t,\alpha_\varepsilon) \leqslant -\varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} < 0.$$

所以 α_ε 是严格下解, 且$\alpha_\varepsilon(t_0) < \alpha(t_0) \leqslant x(t_0)$. 若它与 x 有第一个接触时刻, 令 $p = x - \alpha_\varepsilon$, 则在接触时刻一方面有 $p' \leqslant 0$, 另一方面有 $p' = f(t,x) - \alpha_\varepsilon' = f(t,\alpha_\varepsilon) - \alpha_\varepsilon' > 0$, 仍是矛盾. 因此 $\alpha_\varepsilon < x$. 令 $\varepsilon \downarrow 0$, 我们就得到 $\alpha \leqslant x$. □

注记 2.4.1 (辅助函数的构造). 证明过程中辅助函数的构造起到很大作用。首先，如果不构造辅助函数且仍然使用反证法，那我们只会在 $x(t)$ 与 $\beta(t)$ 积分曲线在时间正向首次接触的时刻 t_1 处得到 $\beta'(x_1) - x'(t_1) \geqslant 0$ (根据定理条件) 以及 $x'(t_1) \geqslant \beta'(t_1)$, 仍然无法导出矛盾. 而添加辅助函数恰好能把第一个不等号改成严格不等号，进而得到 $\beta_\varepsilon(t) > x(t)$ 恒成立，取极限后即得所求。

那为什么这样选取辅助函数呢？这可以算出来：记 $\beta_\varepsilon = \beta + \eta$, $\eta > 0$，代入条件可得

$$\beta_\varepsilon' - f(t,\beta_\varepsilon(t)) = \beta' + \eta' - f(t,\beta+\eta) \geqslant f(t,\beta) + \eta' - f(t,\beta+\eta) \geqslant \eta' - L\eta.$$

我们希望 $\eta' - L\eta > 0$，以及 η 本身很小，因此选取 $\eta(t) = \varepsilon e^{(L+\delta)(t-t_0)}$ $(\delta > 0)$ 是自然的。

推论 2.4.3 正性保持与不变区间

设 $x(t)$ 是标量方程$x'(t)=f(t,x(t))$的解, 其中 f 连续并关于 x 局部Lipschitz. 若 $f(t,0)\geqslant 0$ 且 $x(t_0)\geqslant 0$, 则解保持非负. 若常数 $m<M$ 满足 $f(t,m)\geqslant 0$, $f(t,M)\leqslant 0$ 且 $m\leqslant x(t_0)\leqslant M$, 则 $m\leqslant x(t)\leqslant M$.

证明. 先证正性. 常值函数 $\alpha(t)\equiv 0$ 满足 $\alpha'(t)=0\leqslant f(t,0)=f(t,\alpha(t))$, 所以它是下解. 任取解的正向存在区间中的紧区间 $[t_0,T]$. 因为 $\alpha(t_0)=0\leqslant x(t_0)$, 据上、下解比较定理得到对任意 $t\in[t_0,T]$ 都有 $x(t)\geqslant\alpha(t)=0$, 而T 可以任意选取, 所以解在整个正向存在区间上非负.

再证不变区间. 令 $\alpha(t)\equiv m$, $\beta(t)\equiv M$. 据推论的假设可得 $\alpha'(t)=0\leqslant f(t,m)=f(t,\alpha(t))$, 所以 α 是下解; 同时 $\beta'(t)=0\geqslant f(t,M)=f(t,\beta(t))$, 所以 β 是上解. 初值满足 $\alpha(t_0)\leqslant x(t_0)\leqslant\beta(t_0)$. 在任意正向紧时间区间上应用上解与下解比较定理, $m=\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)=M$, 因此 $[m,M]$ 是正向不变区间. □

例 2.4.1 Riccati比较与爆破

满足微分不等式$x'(t)\geqslant x(t)^2$, $x(0)=x_0>0$的正解不可能在包含闭区间 $[0,1/x_0]$ 的区间上存在.

证明. 考虑初值问题 $y'=y^2$, $y(0)=x_0$ 的解是 $y(t)=\frac{x_0}{1-x_0t}$, 其右侧极大存在区间为 $[0,1/x_0)$. 对任意 $0<T<1/x_0$, 把上、下解比较定理用在 $[0,T]$ 上, 就得到

$$x(t)\geqslant y(t)=\frac{x_0}{1-x_0t},\qquad \forall 0\leqslant t\leqslant T.$$

由于 T 可以任意接近 $1/x_0$, 所以这个不等式在$0\leqslant t<1/x_0$ 上成立. 若 x 能够存在到 $1/x_0$ 之后, 则 x 在 $[0,1/x_0]$ 上连续, 因而有界; 可是令 $t\uparrow 1/x_0$, 上式右端趋于 $+\infty$, 矛盾. □

接下来我们看一个利用比较定理去估计解的极大存在时间的例子. 这里尤其要注意, 在绝大部分情况下, 常微分方程解的显式表达式是求不出来的, 所以对解的极大存在时长只能通过各种方法作间接的估计.

例 2.4.2 极大存在区间的精细估计实例

设初值问题 $x'=t^2+(x+1)^2$, $x(0)=0$ 的右侧极大存在区间为 $[0,\beta)$. 则 $\frac{\pi}{4}<\beta<1$.

证明. 首先, 方程的右端关于 (t,x) 光滑, 因而初值问题有唯一极大解. 并且 $x'(t)=t^2+(x(t)+1)^2>0$, 所以 x 在 $[0,\beta)$ 上严格递增.

第一步: 证明 $\beta\in[\pi/4,1]$. 先考虑比较方程 $z_1'=(z_1+1)^2$, $z_1(0)=0$. 在 $z_1>-1$ 的范围内直接求解可得 $z_1(t)=\frac{t}{1-t}$, 它的右侧极大存在时间为 1. 而又因为 $(z_1+1)^2\leqslant t^2+(z_1+1)^2$, 所以据比较定理得, 在 $x(t),z_1(t)$ 都存在的区间上, 就有 $z_1(t)\leqslant x(t)$. 若 $\beta>1$, 则 x 在 $t=1$ 附近连续且有界; 但

另一方面, 这与下式矛盾, 所以$\beta \leqslant 1$.

$$x(t) \geqslant z(t) = \frac{t}{1-t} \to +\infty \qquad (t \uparrow 1),$$

这步相当于找了一个“更小的解”并证明它在 $t = 1$ 爆破，因此 $x(t)$ 的爆破时间至多为 $t = 1$.

下面证明 $\beta \geqslant \pi/4$. 先取比较方程，求解可得

$$w_1' = 1 + (w_1 + 1)^2, \quad w_1(0) = 0. \ \Rightarrow \ \arctan(w_1(t) + 1) - \frac{\pi}{4} = t, \quad w_1(t) + 1 = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

它的右侧极大存在时间为 $\pi/4$. 而在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上, 我们有不等式 $t^2 + (x+1)^2 \leqslant 1 + (x+1)^2$, 据比较定理可得 $x(t) \leqslant w_1(t)$. 若 $\beta < \pi/4$, 则 w_1 在 $[0, \beta]$ 上有界, 因而 x 在 $[0, \beta)$ 上有界, 再次由推论2.3.5得到矛盾. 于是 $\beta \geqslant \frac{\pi}{4}$. 这步相当于找了一个“更大的解”并证明它在 $t = \pi/4$ 爆破，因此 $x(t)$ 的爆破时间至少为 $t = \pi/4$.

第二步:证明 $\beta < 1$. 现在我们需要找一个“比 $x(t)$ 小”但又“比 $z_1(t)$ 严格大”的解来作比较。在原解上取一点 $(\xi, \eta) = (\xi, x(\xi))$, 其中 $0 < \xi < \beta$. 从该点出发的如下方程可以直接求解

$$z' = (z+1)^2, \qquad z(\xi) = \eta \ \Rightarrow \ z_\xi(t) + 1 = \frac{\eta + 1}{1 - (\eta+1)(t-\xi)},$$

它在 $C(\xi) = \xi + \frac{1}{\eta+1}$ 时刻爆破. 求导可得

$$C'(\xi) = 1 - \frac{\eta'}{(\eta+1)^2} = -\frac{\xi^2}{(\eta+1)^2} < 0.$$

而 $C(0) = 1$, 故 $C(\xi) < 1$. 在 $t > \xi$ 时, 原方程的右端严格大于 $(x+1)^2$, 据第一比较定理可得 $x(t) > z(t)$, 只要两个解同时存在. 因此原解不可能存活到 z 的爆破时间以后, 否则在 $t \uparrow C(\xi)$ 时会有 $x(t) > z(t) \to +\infty$, 与原解在 $C(\xi)$ 附近连续而有界矛盾. 故 $\beta \leqslant C(\xi) < 1$.

第三步:证明 $\beta > \pi/4$. 现在我们需要找一个“比 $x(t)$ 小”但又“比 $w_1(t)$ 严格小”的解来作比较。对 $0 < \lambda \leqslant 1$, 令 $C_\lambda = \frac{\arctan\lambda}{\lambda}$. 因为 $C_1 = \pi/4 < 1$, 由连续性可取 $\lambda < 1$ 充分接近 1, 使 $C_\lambda < \lambda$. 又

$$\frac{\mathrm{d}C_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\lambda/(1+\lambda^2) - \arctan\lambda}{\lambda^2}.$$

我们需要确定分子的正负, 令 $g(\lambda) = \arctan\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, 则 $g(0) = 0$, 且当$\lambda > 0$时有 $g'(\lambda) = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} > 0$, 所以 $g(\lambda) > 0$, 从而 $C_\lambda' < 0$. 因此上述$\lambda < 1$ 还满足 $\frac{\pi}{4} = C_1 < C_\lambda < \lambda$. 这样的话求解如下方程可得

$$w' = \lambda^2 + (w+1)^2, \qquad w(0) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\lambda}\arctan\frac{w(t)+1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\arctan\frac{1}{\lambda} = t.$$

由于 $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\lambda} = \arctan\lambda$, 所以这个解的右侧极大存在时间正是 C_λ. 由爆破准则知, 原方程的解可以越过 β 继续延拓, 与 β 的极大性矛盾. 因此 $\beta > C_\lambda > \frac{\pi}{4}$. □

注记 2.4.2. 若令 $y = x + 1$, 则得到 $y'(t) = t^2 + y(t)^2, y(0) = 1$. 作变换 $y = -u'/u$ 之后可得二阶变系数线性方程 $u'' + t^2 u = 0, u(0) = 1, u'(0) = -1$. 这个方程解的表达式要用 Bessel 函数表示, 数值计算表明其爆破时间约为 $\beta \approx 0.96981\cdots$

2.4.2 *最大解, 最小解与第二比较定理

当 f 只有连续性时, 初值问题可能有许多解. 此时要选择所有解中最上方或最下方的一条.

定义 2.4.2 最大解与最小解

考虑标量方程的初值问题 $x'(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$. 设这个初值问题的所有解都在区间 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在. 若其中一个解 Z 满足

$$x(t) \leqslant Z(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

对初值问题的每一个解 x 都成立, 则称 Z 为**右行最大解**. 若不等号改为 $Z(t) \leqslant x(t)$, 则称 Z 为**右行最小解**. 在 $[t_0 - h, t_0]$ 上分别用同样的逐点偏序定义左行最大解和左行最小解.
若一个解在整个 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上逐点不小于所有其他解, 则称它为该区间上的最大解; 逐点不大于所有其他解的解称为最小解.

由定义, 最大解和最小解若存在, 都是唯一的. 下面证明最大解和最小解的存在性.

定理 2.4.4 最大解和最小解的存在

设 f 在闭矩形 $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ 上连续, 并令

$$M = \max_R |f(t, x)|, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

其中 $M = 0$ 时令 $h = a$. 则存在 $0 < \sigma < h$, 使初值问题 $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$ 在 $[t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ 上有最大解和最小解.

证明. 取严格递减并趋于零的正数列 ε_m, 考虑扰动初值问题 $x_m' = f(t, x_m) + \varepsilon_m,\ x_m(t_0) = x_0$. 令 $h_m = \min\left\{a, \frac{b}{M+\varepsilon_m}\right\}$. 因为 $\varepsilon_m \to 0$, 所以 $h_m \to h$. 所以对固定的 $0 < \sigma < h$. 我们可以不妨假设对每个 m 都有 $h_m > \sigma$. 据Peano存在性定理, 我们得知扰动初值问题在 $[t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ 上存在一个解 x_m, 并且

$$x_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x_m(s)) + \varepsilon_m\big)\,\mathrm{d}s.$$

这些解满足$|x_m(t) - x_0| \leqslant b$. 而对任意 $s, t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$, 由积分方程可得 $|x_m(t) - x_m(s)| \leqslant (M + \varepsilon_1)|t - s|$, 因此 $\{x_m\}$ 一致有界且等度连续. 据Arzelà–Ascoli引理知, 存在子列 x_{m_j} 以及连续函

数 Φ, 成立一致收敛 $x_{m_j} \rightrightarrows \Phi$. 又因为函数 f 在 R 上一致连续, 故

$$\max_{|t-t_0|\leqslant\sigma} |f(t, x_{m_j}(t)) - f(t, \Phi(t))| \longrightarrow 0.$$

又有 $\varepsilon_{m_j} \to 0$. 在积分方程中令 $j \to \infty$, 得到

$$\Phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \Phi(s))\,\mathrm{d}s.$$

所以 Φ 是原初值问题的一个解.

接下来证明 Φ 是右行最大解和左行极小解. 若 x 是原问题任意解, 则由 $f < f + \varepsilon_m$ 和第一比较定理得到

$$x(t) < x_m(t) \quad (t > t_0), \qquad x(t) > x_m(t) \quad (t < t_0).$$

取 $m = m_j$ 并令 $j \to \infty$, 得到

$$x(t) \leqslant \Phi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma), \qquad x(t) \geqslant \Phi(t) \quad (t_0 - \sigma \leqslant t \leqslant t_0).$$

所以 Φ 是右行最大解和左行最小解.

把扰动问题改成 $z_m' = f(t, z_m) - \varepsilon_m$, $z_m(t_0) = x_0$, 同理由Peano定理可得到共同区间上的解, 并由 Arzelà–Ascoli 引理知存在子列一致收敛到某连续函数 Ψ, 其满足积分方程 $\Psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \Psi(s))\,\mathrm{d}s$, 所以 Ψ 是原问题的一个解. 由于 $f - \varepsilon_m < f$, 再用第一比较定理得到 Ψ 是右行最小解和左行最大解.

最后我们定义

$$Z(t) = \begin{cases} \Psi(t), & t_0 - \sigma \leqslant t \leqslant t_0, \\ \Phi(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma, \end{cases} \qquad W(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t_0 - \sigma \leqslant t \leqslant t_0, \\ \Psi(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \sigma. \end{cases}$$

两段在 t_0 处的函数值都是 x_0, 导数都是 $f(t_0, x_0)$, 故 $Z, W \in C^1$, 并且都是原初值问题的解. 按 Φ, Ψ 的单侧极值性质, Z 是整个区间上的最大解, W 是整个区间上的最小解. □

推论 2.4.5 第二比较定理

分别考虑具有相同初值的两个初值问题

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \qquad x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

设 f, F 在 (t_0, x_0) 的同一邻域内连续, 并且 $f(t, x) \leqslant F(t, x)$. 设$\sigma > 0$是定理2.4.4中选取的充分小的正数, 使两个方程在 $[t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ 上都有最大解和最小解. 令 φ 是 f-方程的右行最小、

左行最大解, Φ 是 F-方程的右行最大、左行最小解, 并令它们具有同一初值 $x(t_0)=x_0$. 则

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\sigma),\qquad \varphi(t)\geqslant\Phi(t)\quad(t_0-\sigma\leqslant t\leqslant t_0).$$

证明. 在 (t_0,x_0) 附近取闭矩形 $R=\{(t,x):|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$ 使 f,F 在 R 上都有定义, 并记 $M=\max\limits_R\{|f(t,x)|,|F(t,x)|\}$. 取一列 $\varepsilon_m\downarrow 0$, 并考虑扰动问题

$$y_m'=F(t,y_m)+\varepsilon_m,\qquad y_m(t_0)=x_0.$$

固定$0<\sigma<\min\left\{a,\frac{b}{M+\varepsilon_1}\right\}$, 据Peano存在性定理知, 该方程在 $[t_0-\sigma,t_0+\sigma]$ 上有解 y_m, 并且其图像停留在 R 内. 由积分方程可得 $|y_m(t)-x_0|\leqslant b$, 且对任意 $s,t\in[t_0-\sigma,t_0+\sigma]$ 都有 $|y_m(t)-y_m(s)|\leqslant(M+\varepsilon_1)|t-s|$, 所以 $\{y_m\}$ 一致有界且等度连续. 据Arzelà–Ascoli引理知存在子列y_{m_j}一致收敛到某个连续函数 Y. 然后在积分方程中取极限得到

$$y_{m_j}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\left(F(s,y_{m_j}(s))+\varepsilon_{m_j}\right)\mathrm{d}s\ \Rightarrow\ Y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}F(s,Y(s))\,\mathrm{d}s.$$

所以 Y 是 F-方程的一个解.

因为$f(t,x)<F(t,x)+\varepsilon_m$, 所以由第一比较定理得到

$$\varphi(t)<y_m(t)\quad(t>t_0),\qquad \varphi(t)>y_m(t)\quad(t<t_0).$$

令 $m=m_j\to\infty$, 得到

$$\varphi(t)\leqslant Y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\sigma),\qquad \varphi(t)\geqslant Y(t)\quad(t_0-\sigma\leqslant t\leqslant t_0).$$

在右侧, Φ 是 F-方程的右行最大解, 所以 $Y(t)\leqslant\Phi(t)$; 在左侧, Φ 是 F-方程的左行最小解, 所以 $Y(t)\geqslant\Phi(t)$. 综上所述, 我们证明了

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_0+\sigma),\qquad \varphi(t)\geqslant\Phi(t)\quad(t_0-\sigma\leqslant t\leqslant t_0).$$

□

习题 2.4

习题 2.4.1. 对初值问题 (2.0.1), 设空间维数 $d=1$, 矩形 R 与正数 h 的定义同 Picard 存在唯一性定理 (定理 2.1.2), 并设 W,Z 分别是 (2.0.1) 在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上的最小解与最大解. 证明: 若

$$|t_1-t_0|\leqslant h,\qquad W(t_1)\leqslant x_1\leqslant Z(t_1),$$

则存在 (2.0.1) 的一个解 u，使 $u(t_1) = x_1$.

习题 2.4.2. 求初值问题

$$x'(t) = 3|x(t)|^{2/3}, \qquad x(0) = 0$$

在 $[-1,1]$ 上的全部 C^1 解，并求出左右两侧及整个区间上的最大解和最小解。

问题 2.4

问题 2.4.1. 考虑初值问题 $x'(t) = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, 其中 $f(t,x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续并关于 x 局部 Lipschitz。设 $\alpha, \beta \in C^1([t_0, +\infty))$ 满足

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t), \qquad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)), \qquad \beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t)).$$

(1) 证明 $x_0 \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$ 时对应的解满足对任意 $t \geqslant t_0$ 都有 $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$

(2) 证明该解正向整体存在。

(3) 若$x_0 \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$, 条件中的所有不等式改为严格不等式, 则(1)的结论也变为严格不等式.

问题 2.4.2. 在定理 2.4.4 的条件下，取 $\varepsilon_m \downarrow 0$, 并从

$$x_m' = f(t, x_m) + \varepsilon_m, \qquad x_m(t_0) = x_0$$

在共同存在的对称区间上的解中任取一个。证明如下结论。

(1) 证明对任意正整数 m 成立：当 $t > t_0$ 时，$x_{m+1}(t) < x_m(t)$；当$t < t_0$ 时，$x_{m+1}(t) > x_m(t)$.

(2) 证明：整个序列$\{x_m(t)\}$一致收敛，其极限 (记作$X(t)$) 分别给出右行最大解和左行最小解。

(3) 试对扰动初值问题 $z_m'(t) = f(t) - \varepsilon_m, z_m(t_0) = x_0$ 证明相同的结论，并拼接出整个对称区间上的最大解和最小解。

问题 2.4.3. 设标量初值问题$x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ 的右端连续。假设所有解都在同一紧区间 $I = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ 上存在，且所有图像包含在同一个闭矩形内。记这些解组成的集合为 $\mathcal{S}$，证明如下结论。(有限个解的逐点最大值和最小值仍是解，本身各由一个解实现。)

(1) $\mathcal{S}$ 是 $C(I)$ 中的紧集.

(2) 上、下包络

$$Z(t) = \sup_{x \in \mathcal{S}} x(t), \qquad W(t) = \inf_{x \in \mathcal{S}} x(t)$$

都属于 $\mathcal{S}$.

提示：(2) 先取有限个点 $t_1, \cdots, t_N \in I$, 分别选取 $x_j \in A_{t_j} := \{x \in \mathcal{S} : x(t_j) = Z(t_j)\}$, 则 $x^*(t) = Z(t)$ 对全体 $t \in I$ 都成立.

2.5 解对初值和参数的连续依赖性

前面的存在唯一性定理把每个给定的初值对应到唯一一个极大解. 现在我们要研究这个对应关系本身是否连续. 这不仅是理论上的要求, 也与实际计算有关: 测量得到的初值和模型参数总有误差; 若一个小的误差都可能在固定的有限时间内造成解的巨大变化, 那么这个初值问题在 Hadamard 意义下的适定性就不再成立.

今考虑带参数的初值问题

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\lambda),\qquad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{2.5.1}$$

其中 m 是正整数, $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$ 是非空开集, $\lambda\in\Lambda$ 是参数. 函数 $\boldsymbol{f}$ 定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\Lambda$ 的一个开子集上. 若解唯一, 就把它记为 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$, 其极大存在区间记为$\big(T_-(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda),T_+(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)\big)$.

先将依赖性问题中进行简单的约化. 第一, 初始时刻和初值都可以看作参数. 作变换 $s=t-t_0$, $\mathbf{u}(s)=\boldsymbol{x}(s+t_0)-\boldsymbol{x}_0$, 则(2.5.1)化为

$$\mathbf{u}'(s)=\boldsymbol{f}(s+t_0,\mathbf{u}(s)+\boldsymbol{x}_0,\lambda),\qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{0}. \tag{2.5.2}$$

新方程的初始时刻和初值已经固定, 而 $(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 全部出现在右端, 成为参数.

第二, 参数也可以并入未知函数. 把 λ 看成满足 $\lambda'(t)=\mathbf{0}$, $\lambda(t_0)=\lambda_0$ 的附加未知量, 则 (2.5.1) 等价于求解 $\mathbb{R}^{d+m}$ 中的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\lambda)\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \lambda(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0\\ \lambda_0\end{pmatrix}. \tag{2.5.3}$$

因此, 关于初值的依赖和关于参数的依赖本质上是同一个问题. 下面先在初始时刻固定的形式下给出完整估计, 再利用(2.5.2)得到所有变量的连续依赖性.

2.5.1 有界闭区间上的连续依赖

定理 2.5.1 紧时间区间上的连续依赖

考虑带参数初值问题(2.5.1). *设* $E\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$ *是开集,* $\boldsymbol{f}:E\to\mathbb{R}^d$ *连续, 并且在* E *上关于* $\boldsymbol{x}$ *变量是局部*Lipschitz*的. 设参考初值和参数* $(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ *所对应的解* $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ *在紧区间* $J=[a,b]$ *上存在, 其中* $a<t_0<b$, *并且* $(t,\boldsymbol{x}(t),\lambda_0)\in E$, $a\leqslant t\leqslant b$. *则存在* $(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ *的邻域* U, *使每个* $(\boldsymbol{y}_0,\lambda)\in U$ *所对应的解也在整个* J *上存在, 并且当* $(\boldsymbol{y}_0,\lambda)\to(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$ *时,*

$$\max_{t\in J}|\varphi(t;t_0,\boldsymbol{y}_0,\lambda)-\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)|\to 0.$$

记参考解为$\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$, $t\in J=[a,b]$. 我们需要同时证明以下两点：

1. 当初值和参数充分接近$(\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$时，相应的解在整个区间$J=[a,b]$上存在;
2. 这些解在J上一致收敛于参考解.

需要注意的是，在证明一致收敛之前必须事先知道扰动解已经存在，并且没有离开方程具有一致 Lipschitz 控制的区域。因此，证明的关键是先在参考解周围选取一个“安全区域”（实际上是一个管状区域），再证明扰动解不会碰到管壁，并利用延拓准则保证扰动解始终留在其中。

证明. 首先, 参考解$\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda_0)$的增广图像 $\Gamma=\{(t,\boldsymbol{x}(t),\lambda_0):a\leqslant t\leqslant b\}$ 是 E 的紧子集. 由于 E 是开集, 所以存在 $\rho>0$, 使管状闭邻域

$$\mathcal{K}_\rho=\{(t,\boldsymbol{z},\lambda):a\leqslant t\leqslant b,\ |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\rho,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\rho\}$$

包含于 E. $d=1$ 且省略参数方向的情形下的示例可见图2.2.

参考解位于管状区域的中间; 初值和参数受到小扰动后, 我们一开始只知道扰动解在 t_0 附近存在, 接下来我们将利用 Grönwall 不等式说明扰动解不能先碰到管壁, 再利用延拓定理排除它在$[a,b]$ 内提前终止. 这一步的作用是选取一个共同区域方便后面使用比较定理. 只要扰动解没有离开这个管状区域, 方程右端的 Lipschitz 常数以及改变参数所产生的误差都可以被一致地控制(与时间无关). 同时由于闭管是方程的定义域的紧子集, 后面还可以在其中使用紧集延拓准则.

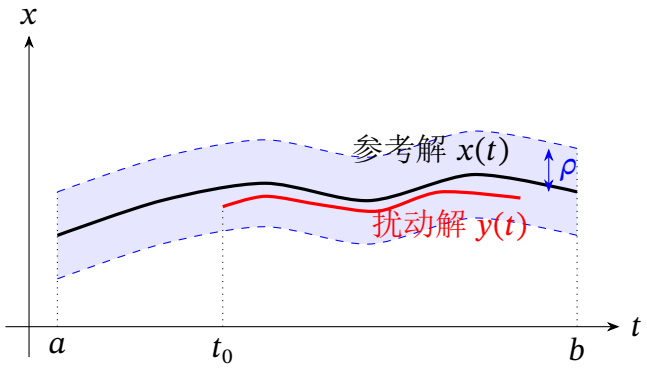


图 2.2: 连续依赖证明中的管状邻域和首次离开论证. 虚线表示与参考解相距 ρ 的管壁.

第二步：分别控制$\boldsymbol{x}$-变量的误差和参数误差。

(在后面的定量估计里面可以看出).

第1□一步：在扰动解尚未离开管状区域时的估计。

固定 $(\boldsymbol{y}_0,\lambda)\in U$, 其中开邻域 U 的选取待定. 今考虑扰动初值问题

$$\boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t),\lambda),\qquad \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0.$$

由于$(t_0,\boldsymbol{y}_0,\lambda)\in\mathcal{K}_\rho\subset E$. 据局部存在唯一性定理得知该初值问题在 t_0 的一个邻域中存在唯一的解, 然后将其延拓, 并记相应的极大解为 $\boldsymbol{y}(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{y}_0,\lambda)$, 极大存在区间为 $(T_-^{\boldsymbol{y}},T_+^{\boldsymbol{y}})$. 接下来我

们先考虑正向演化的解, 即先考虑 $t \geqslant t_0$, 定义

$$\mathcal{A}_+ := \{t \in [t_0, \min\{b, T_+^{\boldsymbol{y}}\}) : |\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s)| < \rho \text{ 对全体 } s \in [t_0, t] \text{ 成立}\}$$

则对任意 $t \in [t_0, \min\{b, T_+^{\boldsymbol{y}}\})$, 极大解 $\boldsymbol{y}$ 已经在 $[t_0, t]$ 上存在, 而由第二步知道 $|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| < \rho/2$, 再由 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的连续性知存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $t_0 + \varepsilon_0 < \min\{b, T_+^{\boldsymbol{y}}\}$, 并且 $|\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s)| < \rho$ 对全体 $s \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ 成立, 进而 $\mathcal{A}_+ \neq \emptyset$.

此时固定 $t \in \mathcal{A}_+$, 我们要考察的点全都落在 $\mathcal{K}_\rho$ 中. 在作误差估计之前, 我们先将已知条件定量地写出.

- 因为闭管 $\mathcal{K}_\rho$ 是紧集. 由假设, 存在 $L > 0$, 使 $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_1, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_2, \lambda)| \leqslant L|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|$ 对闭管中同一 (t, λ)-slice 上的任意两点成立.
- 对 $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \rho$, 定义
$$\eta(\lambda) = \max_{\substack{a \leqslant t \leqslant b \\ |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}(t)| \leqslant \rho}} |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}, \lambda_0)|.$$
它描述的是改变参数所带来的额外误差. 因为函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mathcal{K}_\rho$ 上一致连续, 所以当 $\lambda \to \lambda_0$ 时有 $\eta(\lambda) \to 0$.

现在我们把两个积分方程相减得到

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)| &\leqslant |\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| + \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s), \lambda) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s), \lambda)| \, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s), \lambda) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s), \lambda_0)| \, \mathrm{d}s \\ &\leqslant |\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| + L \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s)| \, \mathrm{d}s + (t - t_0)\eta(\lambda). \end{aligned}$$

据Grönwall不等式有

$$|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)| \leqslant \big(|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| + (b - t_0)\eta(\lambda)\big) e^{L(b - t_0)}. \tag{2.5.4}$$

现在取 $\delta_\lambda > 0$ 使得当 $|\lambda - \lambda_0| < \delta_\lambda$ 时成立 $\delta_\lambda < \rho, (b - a)e^{(b-a)L}\eta(\lambda) < \rho/4$. 再取 $\delta_x > 0$ 使得 $e^{L(b-a)}\delta_x < \rho/4$. 定义

$$U = \{(\boldsymbol{y}_0, \lambda) : |\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| < \delta_x, |\lambda - \lambda_0| < \delta_\lambda\},$$

于是对任意 $(\boldsymbol{y}_0, \lambda) \in U$ 都有 $e^{(b-a)L}(|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| + (b - a)\eta(\lambda)) < \rho/2$. 这一步是规定了对初值和参数扰动的小性, 使得扰动解和管状区域的“壁”之间仍然有空余的地方. **需要特别注意, 这个估计目前是有条件的: 它只在扰动解已经存在并且尚未离开半径为 ρ 的闭管时成立.**

第二步: 排除扰动解碰到管壁的可能性 设 $(t_0, T_+^{\boldsymbol{y}})$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的正向极大存在区间部分. 反设 $\boldsymbol{y}$ 不能在 $[t_0, b]$ 上始终存在并留在管状区域内. 定义“首次碰壁时间” $\tau = \sup \mathcal{A}_+$. 由解的局部存在性以及 $|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| < \rho/2$ 可得 $\tau > t_0$. 在$[t_0, \tau)$ 上, 我们有误差估计(2.5.4)成立, 进而 $|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)| < \frac{\rho}{2}$. 下面我们用反证法证明 $\tau = \min\{b, T_+^{\boldsymbol{y}}\}$.

若不然，则 $\tau < b$ 且 $\tau < T_+^{\boldsymbol{y}}$, 则两个解在 τ 处都有定义. 令$t \uparrow \tau$, 据连续性可得 $|\boldsymbol{y}(\tau) - \boldsymbol{x}(\tau)| \leqslant$

$\frac{\rho}{2} < \rho$, 进而这个严格不等式在 τ 右侧的一小段时间区间内仍成立, 与 τ 的上确界定义矛盾. 这一步排除了扰动解从闭管的侧面逃出去的可能性.

接下来**还要排除“扰动解的正向极大存在区间在到达到b之前就已经结束”的可能性.** 反设 $\tau = T_+^{\boldsymbol{y}} \leqslant b$, 则 $\boldsymbol{y}$ 在 $[t_0, \tau)$ 上的图像包含于紧集 $\{(t, \boldsymbol{z}) : t_0 \leqslant t \leqslant \tau,\ |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}(t)| \leqslant \rho/2\}$ 之中. 由紧集延拓准则(定理2.3.3)说明 $\boldsymbol{y}$ 可以越过 τ 继续延拓下去, 与 τ 是正向极大存在端点矛盾. 于是 $\tau = b$, 这表明扰动解在 $[t_0, b]$ 上存在并留在管内.

第三步: 反向时间处理 $t \leqslant t_0$ 的情况. 令 $\widehat{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{x}(t_0 - \tau)$, $\widehat{\boldsymbol{y}}(\tau) = \boldsymbol{y}(t_0 - \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant H := t_0 - a$. 在两条曲线尚未相距 ρ 以前, 它们满足反向时间方程

$$\widehat{\boldsymbol{x}}'(\tau) = -\boldsymbol{f}(t_0 - \tau, \widehat{\boldsymbol{x}}(\tau), \lambda_0), \qquad \widehat{\boldsymbol{y}}'(\tau) = -\boldsymbol{f}(t_0 - \tau, \widehat{\boldsymbol{y}}(\tau), \lambda).$$

同上可证明扰动解在区间 $[a, t_0]$ 上存在，且始终不逃离管状区域。据此, 扰动解在整个 J 上存在，正向与负向的两个估计合在一起, 给出

$$\max_{t \in J} |\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)| \leqslant e^{L(b-a)}\big(|\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0| + (b-a)\eta(\lambda)\big).$$

当 $(\boldsymbol{y}_0, \lambda) \to (\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)$ 时, 右端趋于零, 定理得证. □

注记 2.5.1 (为什么需要首次离开论证). Grönwall不等式得到的只能在邻近解仍存在, 并且它与参考解都位于共同Lipschitz区域时使用; 而这两件事恰好也是连续依赖定理需要证明的内容. 因此不能先验地把估计写到整个区间 $J = [a, b]$ 上. 证明过程中应该先在“尚未离开管状邻域”的时间段上作估计, 再排除扰动解首次碰到管壁和极大存在时间提前结束这两种可能.

例 2.5.1　含参数logistic方程的定量连续依赖

设常数 $r, K > 0$, 考虑初值问题 $x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $x(0) = x_0 > 0$, 参考参数和参考初值满足 $r_0, K_0, x_{00} > 0$, 对应的参考解记为 $x_0^*(t)$. 固定有限时间区间 $[0, T]$. 考察该问题解对初值和参数的连续依赖性.

证明. 由正性保持和区间不变性 (推论2.4.3), 可以先把与参数(x_{00}, r_0, K_0) 充分接近的参数 (x_0, r, K) 所对应的解 (记作 $x(t)$) 限制在同一区间 $0 \leqslant x \leqslant R$. 记 $f(x; r, K) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, 则在相应紧集上存在常数 $L, C > 0$, 使

$$|f(x; r, K) - f(y; r_0, K_0)| \leqslant L|x - y| + C\big(|r - r_0| + |K - K_0|\big).$$

因此两个解之差满足

$$|x(t) - x_0^*(t)| \leqslant |x_0 - x_{00}| + L\int_0^t |x(s) - x_0^*(s)|\,\mathrm{d}s + CT\big(|r - r_0| + |K - K_0|\big).$$

据Grönwall不等式可得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)-x_0^*(t)|\leqslant e^{LT}\left[|x_0-x_{00}|+CT\big(|r-r_0|+|K-K_0|\big)\right].$$

相比如上定理，该例子给出了有限时间内的定量估计. □

注记 2.5.2 (为什么只先断言有限时间连续依赖). 即使每个解都整体存在, 有限区间上的连续依赖也不能直接加强为整体的连续依赖性 $\sup_{t\geqslant 0}|\varphi(t;\boldsymbol{y}_0)-\varphi(t;\boldsymbol{x}_0)|\to 0$. 例如 $x'=x$ 的解为 x_0e^t. 任意小的初值误差都会乘上 e^t, 在足够长时间后变得很大. 若要在无限时间区间上得到一致控制, 必须再研究该方程/方程组是否具有耗散性、指数稳定性、衰减估计之类的长时间性质.

推论 2.5.2 解映射的连续性

对带参数初值问题(2.5.1), 令$\mathcal{D}=\{(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda):t$ 属于相应极大解的存在区间$\}$. 则 $\mathcal{D}$ 是开集, 并且 $(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)\longmapsto\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 在 $\mathcal{D}$ 上连续.

推论 2.5.2 表明，固定两个时刻以后，微分方程沿解曲线给出了状态空间(即$\boldsymbol{x}$-变量所在的空间)局部区域之间的可逆连续演化。这是后面引入解流概念的基础。

证明. 需注意, 定理2.5.1处理的是“初始时刻固定”的连续依赖性，而这里的初始时刻 t_0 和观察时刻 t 都在变化, 因此我们先将 t_0 时刻出发的解演化到“参考初始时间” t_{0*}, **使得初始时刻固定下来, 进而可以使用定理2.5.1的结论**。

今固定 $p_*=(t_*,t_{0*},\boldsymbol{x}_{0*},\lambda_*)\in\mathcal{D}$, 记参考解为 $\boldsymbol{x}_*(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_{0*},\lambda_*)$. 因为 $p_*\in\mathcal{D}$，所以 t_*,t_{0*}都属于参考解的极大存在区间。而极大存在区间是开区间，所以可取 a,b 使得 $a<t_+,t_{0,*}<b$ 并且参考解 $\boldsymbol{x}_*(t)$ 在整个闭区间 $[a,b]$ 存在。

第一步：先把变化的初始时刻接到固定时刻 t_{0*}. 由于 $(t_{0*},\boldsymbol{x}_{0*},\lambda_*)$ 位于 f 的定义域内部，可以在它附近取一个小闭柱体，使其仍包含在定义域内。在这个闭柱体上 f 有界，故可设 $|f(t,x,\lambda)|\leqslant M$. 同时，由 Picard–Lindelöf 局部存在定理中的统一时间估计，可以把这个柱体取得足够小，使得当 $(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 充分接近 $(t_{0*},\boldsymbol{x}_{0*},\lambda_*)$ 时，从 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 出发、参数为 λ 的解至少在连接 t_0 与 t_{0*} 的整个时间段上存在。因此 $\varphi(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 有定义，且满足

$$|\boldsymbol{\phi}(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-\boldsymbol{x}_{0*}|\leqslant|\varphi(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-\boldsymbol{x}_0|+|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_{0*}|.$$

由积分方程得，

$$\varphi(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-x_0=\int_{t_0}^{t_{0*}}\boldsymbol{f}\big(s,\varphi(s;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda),\lambda\big)\,\mathrm{d}s,$$

所以 $|\varphi(t_{0*};t_0,x_0,\lambda)-x_0|\leqslant M|t_0-t_{0*}|$. 因此

$$|\varphi(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-\boldsymbol{x}_{0*}|\leqslant M|t_0-t_{0*}|+|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_{0*}|. \tag{2.5.5}$$

于是当 $(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)\to(t_{0*},\boldsymbol{x}_{0*},\lambda_*)$ 时，我们有 $\varphi(t_{0*};t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)\to\boldsymbol{x}_{0*}$. 注意这里完全没有使用关于 t_0

的连续依赖，只是用了局部存在和 f 的有界性，所以不存在循环论证。

第二步：固定初始时刻 t_{0*} 使用连续依赖性定理. 对于给定的 $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$，令 $\boldsymbol{x}_1 = \varphi(t_{0*}; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$. 由上一步的结论知 $(\boldsymbol{x}_1, \lambda) \to (\boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*)$.

现在考虑以固定时刻 t_{0*} 为初始时刻的问题 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda)$, $\boldsymbol{x}(t_{0*}) = \boldsymbol{x}_1$. 参考问题是 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda_*)$, $\boldsymbol{x}(t_{0*}) = \boldsymbol{x}_{0*}$, 其解 $\boldsymbol{x}_*(t)$ 已知在 $[a, b]$ 上存在。于是由定理 2.5.1，当 $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 充分接近参考数据时，以 $(t_{0*}, \boldsymbol{x}_1)$ 为初值、参数为 λ 的解在整个 $[a, b]$ 上存在，并且

$$\max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \varphi(s; t_{0*}, \boldsymbol{x}_1, \lambda) - \varphi(s; t_{0*}, \boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*) \right| \to 0. \tag{2.5.6}$$

另由解的唯一性知，从 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 出发的原扰动解在 t_{0*} 时刻正好取值 $\boldsymbol{x}_1$。因此这两个解在公共存在区间上必然相同，即 $\varphi(s; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) = \varphi(s; t_{0*}, \boldsymbol{x}_1, \lambda)$，因此我们实际上得到

$$\max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \varphi(s; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \boldsymbol{x}_*(s) \right| \to 0. \tag{2.5.7}$$

特别地，附近初值对应的解都在整个 $[a, b]$ 上存在。

第三步：$\mathcal{D}$ 是开集. 由于$t_* \in (a, b)$,所以当 t 充分接近 t_* 时仍有$t \in (a, b)$. 又由第二步，当 $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 充分接近 $(t_{0*}, \boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*)$ 时，相应解在整个 $[a, b]$ 上存在。因此当 $(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 充分接近 p_* 时，t 属于相应解的存在区间，也就是说 $(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) \in \mathcal{D}$. 所以 p_* 是 $\mathcal{D}$ 的内点。由于 p_* 任意知$\mathcal{D}$是开集。

第四步：证明解映射在 p_* 处连续. 令$(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) \to (t_*, t_{0*}, \boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*)$. 对充分接近参考点的初值，由上面的证明知，与之对应的解都在共同的闭区间 $[a, b]$ 上存在，所以

$$\left| \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \varphi(t_*; t_{0*}, \boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*) \right| \leqslant \left| \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \boldsymbol{x}_*(t) \right| + \left| \boldsymbol{x}_*(t) - \boldsymbol{x}_*(t_*) \right|.$$

由第三步证明知，第一项一致趋于零：

$$\left| \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \boldsymbol{x}_*(t) \right| \leqslant \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \varphi(s; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \boldsymbol{x}_*(s) \right| \to 0.$$

第二项由于参考解 $\boldsymbol{x}_*$ 连续且$t \to t_*$, 也有 $|\boldsymbol{x}_*(t) - \boldsymbol{x}_*(t_*)| \to 0$. 因此 $\varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) \to \varphi(t_*; t_{0*}, \boldsymbol{x}_{0*}, \lambda_*)$. 所以解映射在 p_* 处连续。由于 $p_* \in \mathcal{D}$ 任意，所以解映射在整个 $\mathcal{D}$ 上连续。 □

2.5.2 *极大存在时间的半连续性

把初始时刻, 初值和参数合记为 p, 相应极大存在区间记为 $(T_-(p), T_+(p))$. 本节将证明 $T_\pm(p)$ 未必关于 p 连续, 而是只有半连续性. 首先我们看一个极大存在时间关于初值不连续的例子。

例 2.5.2 极大存在时间未必连续

考虑常微分方程组 $u'=u^2(1-v^2u^2)$, $v'=0$, 初值为 $(u(0),v(0))=(1,c)$, 解的正向极大存在时间记为 $T_+(c)$, 我们将证明 $T_+(0)=1$, 但当 $0<|c|<1$ 时 $T_+(c)=+\infty$.

证明. 当 $c=0$ 时, 求解方程可得$u=(1-t)^{-1}$, 所以 $T_+=1$.

当 $0<|c|<1$ 时, $v\equiv c$, 于是我们要求解方程 $u'(t)=u^2(1-c^2u^2)$, 记右边为 $g_c(u)$.当 $1\leqslant u<1/|c|$ 时 $g_c(u)>0$, 而 $u=1/|c|$ 是平衡态. 由解的唯一性知, 从 $u(0)=1$ 出发的解不能穿过这个平衡态; 故 $1\leqslant u(t)\leqslant \frac{1}{|c|}$ 在解的整个正向存在区间上都成立. 这个有界性和爆破准则说明解可以一直正向延拓到$t=+\infty$.

此外, $u'(t)\geqslant 0$, 所以 $u(t)$ 单调不减且有上界. 由单调有界原理, 极限 $\ell=\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)$ 存在且满足 $1\leqslant\ell\leqslant\frac{1}{|c|}$. 事实上, 若 $\ell<1/|c|$, 则 $g_c(\ell)>0$. 由连续性, 可以取 $\delta>0$ 和 $T>0$, 使 $g_c(u(t))\geqslant\delta$ 对任意 $t\geqslant T$ 恒成立. 于是

$$u(t)=u(T)+\int_T^t g_c(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant u(T)+\delta(t-T),$$

这与 $u(t)\leqslant 1/|c|$ 矛盾. 因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=\frac{1}{|c|}$. □

接下来我们回顾数学分析里面学过的“半连续”的定义. 如果你没学过, 那你现在学了.

定义 2.5.1 下半连续与上半连续

若函数 $T:P\to(-\infty,+\infty]$ 满足 $T(p)\leqslant\liminf\limits_{k\to\infty}T(p_k)$ 对任意的 $p_k\to p$ 都成立, 则称该函数是**下半连续的 (lower semi-continuous)**. 等价地, 对任意 $T(p)>c$, 以及充分接近 p 的点 q 都满足 $T(q)>c$.

若函数 $S:P\to[-\infty,+\infty)$ 满足$\limsup\limits_{k\to\infty}S(p_k)\leqslant S(p)$ 对任意的 $p_k\to p$ 都成立, 则称该函数是**上半连续的 (upper semi-continuous)**, 等价地, 对任意 $S(p)<c$, 以及充分接近 p 的点 q 都满足 $S(q)<c$.

命题 2.5.3 极大存在时间的下半连续性

对带参数初值问题(2.5.1), $T_+(p)$ 是下半连续的, $T_-(p)$ 是上半连续的; 等价地, $-T_-(p)$ 是下半连续的.

注记 2.5.3 (下半连续性的方向不能颠倒). 上一例中 $c\to 0$ 时,

$$T_+(0)=1<+\infty=\liminf_{c\to0,\ c\neq0}T_+(c).$$

这与下半连续性并不矛盾. 下半连续性的结论是:给定任意 $c<1$, 参数充分接近零时, 扰动解的正向存在时长大于 c; 它没有断言这些寿命必须接近 1. 本例中扰动解的寿命等于 $+\infty$, 恰好说明下半

连续函数可以在邻近点取比参考值大得多的值.

证明. 把参数 p 所含的初始时刻记为 $t_0(p)$. 先任取 $c < T_+(p)$, 若 $c < t_0(p)$, 则取 q 充分靠近 p, 使得 $|t_0(q) - t_0(p)| < \frac{t_0(p)-c}{2}$. 于是 $t_0(q) > c$, 而极大存在区间总含初始时刻, 所以 $T_+(q) > t_0(q) > c$.

若 $c = t_0(p)$, 则取 d 使 $c < d < T_+(p)$ 若 $t_0(p) < c < T_+(p)$, 则直接令 $d = c$. 在后两种情形中, 参考解都在同时包含$t_0(p)$ 与 d 的有界闭区间上存在. 而紧区间上的连续依赖定理说明: 当 q 充分接近 p时, 扰动解也存在到时刻 d, 从而 $T_+(q) > d \geqslant c$. 这证明了: 对任意的 $c < T_+(p)$ 以及充分接近 p 的 q, 都有 $T_+(q) > c$. 因此 T_+ 下半连续.

结论的另一半是同理的, 证明略去. □

问题 2.5

问题 2.5.1. 考虑 $[t_0, \infty)$ 上的含参初值问题 $\boldsymbol{x}'(t) = f(t, \boldsymbol{x}(t), \lambda)$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. 其中 $\boldsymbol{f} : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ 连续，并关于 $\boldsymbol{x}$ 局部 Lipschitz. 假设存在常数 $\alpha > 0$, $L \geqslant 0$, $C \geqslant 0$, 满足

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \lambda)) \leqslant -\alpha |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2,$$
$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \mu)| \leqslant L|\lambda - \mu|, \qquad |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}, \lambda)| \leqslant C(1 + |\lambda|).$$

(1) 证明：对每个固定的参数 $\lambda \in \mathbb{R}^m$, 该初值问题的解都在时间正向整体存在。

(2) 记 $\varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 是以 λ 为参数, t_0 时刻初值为 $\boldsymbol{x}_0$ 的解，证明

$$|\varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \varphi(t; t_0, \boldsymbol{y}_0, \mu)| \leqslant e^{-\alpha(t-t_0)}|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0| + \frac{L}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\right)|\lambda - \mu|.$$

并说明解对初值和参数的依赖为何关于 $t \in [t_0, \infty)$ 是一致的。

问题 2.5.2. 对定理2.5.1，如果我们不假设 $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是局部 Lipschitz 的，只假设其连续性；但同时仍然假设参考解和扰动解的唯一性。证明该定理的结论仍然成立。

提示：丢失 Lipschitz 条件后，需要用 Arzelà–Ascoli 引理去寻求紧性。

2.6 解对初值和参数的连续可微性

若初值问题的右端项 $\boldsymbol{f}$ 是可微的, 则解映射的导数满足沿原轨道的线性方程, 它称为变分方程. 它把非线性方程组的微小扰动问题转化成线性方程组.

2.6.1 可微依赖性定理与计算实例

定理 2.6.1 Peano C^1依赖定理与变分方程

设 $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ 是开集, $\boldsymbol{f} : E \to \mathbb{R}^d$ 连续, 并且 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 与 $D_\lambda \boldsymbol{f}$ 在 E 上连续. 记初值问题(2.5.1)的极大解为 $\boldsymbol{x}(t) = \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$, 并把它的开定义域记为

$$\mathcal{D} = \{(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) : (t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) \in E,\ T_-(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) < t < T_+(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)\}.$$

则 φ 在 $\mathcal{D}$ 上关于 $(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 连续可微. 对参考解, 记 $A(t) = D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t, \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda), \lambda)$, $B(t) = D_\lambda \boldsymbol{f}(t, \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda), \lambda)$. 则矩阵 $Y(t) = D_{\boldsymbol{x}_0}\varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 是如下一阶线性方程组初值问题的解

$$Y' = A(t)Y, \qquad Y(t_0) = I_d. \tag{2.6.1}$$

而矩阵$Z(t) = D_\lambda \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$是如下线性非齐次初值问题的解.

$$Z' = A(t)Z + B(t), \qquad Z(t_0) = 0 \tag{2.6.2}$$

此外, 还有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) = \boldsymbol{f}(t, \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda), \lambda), \tag{2.6.3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) = -Y(t)\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda). \tag{2.6.4}$$

注记 2.6.1. 若 $s \longmapsto \boldsymbol{x}(t, s)$ 是方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda)$ 的一族含参数的解, 并且关于(t, s) 连续可微, 那么对方程关于 s 求导可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s} = D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t, s), \lambda)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}.$$

因此, 线性方程 $\boldsymbol{z}' = A(t)\boldsymbol{z}$ 称为沿参考解的**变分方程**. 如上定理说明: 改变初值所产生的一阶变化, 恰好由这个变分方程传播.

证明结论之前，我们先来看一维情况的显式计算。设 $d = m = 1$，此时方程为 $x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$，$x(t_0) = x_0$，并记其解为 $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, \lambda)$。假设暂时可以对解关于 x_0, λ, t_0 求偏导。下面的计算说明这些偏导数如果存在，应当满足怎样的方程。

首先对初值 x_0 求导。令 $y(t) = \partial\varphi/\partial x_0(t; t_0, x_0, \lambda)$。而常微分方程本身为 $\partial_t \varphi = f(t, \varphi, \lambda)$，对该方程关于 x_0 求导并利用链式法则得到 $y'(t) = \partial_x f(t, \varphi(t), \lambda)y(t)$。另一方面，由初始条件 $\varphi(t_0; t_0, x_0, \lambda) = x_0$ 关于 x_0 求导可得 $y(t_0) = 1$。因此

$$y'(t) = \partial_x f(t, \varphi(t), \lambda)y(t), \qquad y(t_0) = 1.$$

这是一阶线性齐次方程，所以

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0,\lambda)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\partial_x f(s,\varphi(s;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

特别地，$\partial\varphi/\partial x_0(t;t_0,x_0,\lambda)>0$。这说明在一维情形，固定 t,t_0,λ 后，解关于初值 x_0 局部严格递增。

其次考虑参数 λ。令$z(t)=\partial\varphi/\partial\lambda(t;t_0,x_0,\lambda)$，对方程关于 λ 求导得 $z'(t)=\partial_x f(t,\varphi(t),\lambda)z(t)+\partial_\lambda f(t,\varphi(t),\lambda)$. 由于初值 x_0 与 λ 无关，所以 $z(t_0)=0$。因此

$$z'(t)=\partial_x f(t,\varphi(t),\lambda)z(t)+\partial_\lambda f(t,\varphi(t),\lambda),\qquad z(t_0)=0.$$

由一阶线性方程的常数变易公式，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t;t_0,x_0,\lambda)=\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_{s}^{t}\partial_x f(\tau,\varphi(\tau;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}\tau\right\}\partial_\lambda f(s,\varphi(s;t_0,x_0,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s.$$

这说明初值扰动和参数扰动有一个基本区别：对初值求导得到齐次线性方程，而对参数求导会多出非齐次项$\partial_\lambda f$。

对终止时刻 t，由微分方程本身直接有$\partial_t\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)=f(t,\varphi(t;t_0,x_0,\lambda),\lambda)$。

最后考虑初始时刻 t_0。令$w(t)=\partial\varphi/\partial t_0(t;t_0,x_0,\lambda)$。形式上对微分方程关于 t_0 求导，同样得到$w'(t)=\partial_x f(t,\varphi(t),\lambda)w(t)$。初值需要稍加注意，因为等式 $\varphi(t_0;t_0,x_0,\lambda)=x_0$ 的左边两个位置都含有 t_0，因此对 t_0 求导得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0;t_0,x_0,\lambda)+\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t_0;t_0,x_0,\lambda)=0.$$

又因为 $\partial_t\varphi(t_0;t_0,x_0,\lambda)=f(t_0,x_0,\lambda)$，所以 $w(t_0)=-f(t_0,x_0,\lambda)$。于是

$$w'(t)=\partial_x f(t,\varphi(t),\lambda)w(t),\qquad w(t_0)=-f(t_0,x_0,\lambda).$$

与 y 满足的方程比较可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0,\lambda)=-\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0,\lambda)f(t_0,x_0,\lambda).$$

接下来我们证明定理2.6.1，其中绝大部分篇幅是在证明上述过程中“求导的可行性”，即用差商严格一致逼近的完整证明。这里建议读者跳过这段又臭又长的无聊证明。

证明. 固定 $\mathcal{D}$ 中一点, 并取参考解存在的任意紧区间 $J=[a,b]$, 其中$a<t_0<b$. 定理2.5.1表明, 当初值和参数充分接近参考值时, 相应的解都在 J 上存在, 并且一致趋于参考解. 下面先在 $[t_0,b]$ 上写出差商估计; 在$[a,t_0]$ 上则令 $\tau=t_0-t$, 把每个积分方程明确改写为从 0 到 τ 的积分方程. 这一

步是必要的，因为它使得我们后面要定义的差商在整个 J 上都有定义, 且后面线性化所得的系数能够一致收敛.

下面我们对定理2.6.1的证明过程很长，但是其想法并不那么复杂：非线性解的差商满足一个“系数随 h 变化的线性积分方程”（此处的h是对初值扰动的大小）；再利用连续依赖性使得这些系数一致收敛，再用 Grönwall 不等式，就能证明差商一致收敛到变分方程的解。具体来说，就是假设某个差商 U_h 满足积分方程

$$U_h(t) = c_h + \int_{t_0}^{t} (A_h(s)U_h(s) + g_h(s))\,\mathrm{d}s$$

而 $c_h \to c, A_h \rightrightarrows A, g_h \rightrightarrows g$ 在相应空间中一致成立. 则对极限方程

$$U(t) = c + \int_{t_0}^{t} (A(s)U(s) + g(s))\,\mathrm{d}s$$

的解来说, 我们可以将两个方程作差用 Grönwall 不等式得到一致收敛 $\|U_h - U\|_{C(J)} \to 0$. 所以当我们扰动的变量是 x_0^j (即$\boldsymbol{x}_0$的第j分量) 时, 差商在 t_0 的值就是 $\mathbf{e}_j$, 极限方程就是 $Y_j' = AY_j$; 而当扰动的变量是 λ 时差商在 t_0 的值就是 0, 对应的极限方程形如 $Z_k' = AZ_k + B\mathbf{e}_k$.

正式证明以前, 先证明一个向量值函数的线段积分公式, 它是一元微积分中的Lagrange中值定理的高维替代; 向量值函数一般不能写成“在某一个共同中间点取导数”的形式.

引理 2.6.2 向量值函数的线段积分公式

设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是凸的开集, $F : (a,b) \times K \to \mathbb{R}^q$ 连续, 并且各偏导数 $\partial F/\partial x^j$ 连续. 定义

$$F_j(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x^j}\big(t, \boldsymbol{x}_1 + \theta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\big)\,\mathrm{d}\theta, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d.$$

则每个 F_j 都连续, 并且

$$F(t, \boldsymbol{x}_2) - F(t, \boldsymbol{x}_1) = \sum_{j=1}^{d} F_j(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)(x_2^j - x_1^j). \tag{2.6.5}$$

当 $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$ 时, $F_j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \partial F/\partial x^j(t, \boldsymbol{x})$.

证明. 由于 K 是凸集, 所以线段 $\gamma(\theta) = \boldsymbol{x}_1 + \theta(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ 完全包含在 K 中. 令 $G(\theta) = F(t, \gamma(\theta))$, 据链式法则有

$$G'(\theta) = D_{\boldsymbol{x}} F(t, \gamma(\theta))(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x^j}(t, \gamma(\theta))(x_2^j - x_1^j).$$

在 $[0,1]$ 上积分, 并使用微积分基本定理, 得到

$$F(t,\boldsymbol{x}_2)-F(t,\boldsymbol{x}_1)=G(1)-G(0)=\int_0^1 G'(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

把有限求和与积分交换后, 右端就是 (2.6.5). 最后证明 F_j 的连续性. 固定$(t_*,\boldsymbol{x}_{1*},\boldsymbol{x}_{2*})$. 在这个点附近, 积分中出现的所有线段都落在 $(a,b)\times K$ 的一个紧子集内; 偏导数在该紧集上一致连续. 因此当$(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\to(t_*,\boldsymbol{x}_{1*},\boldsymbol{x}_{2*})$ 时, 被积函数关于 $\theta\in[0,1]$ 一致收敛, 积分也随之收敛. 这就证明了 F_j 连续. 把 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}$ 代入定义, 最后一个等式立即成立. □

第一步: 对初值求偏导得到齐次变分方程. 固定第 j 个坐标向量 $\mathbf{e}_j$. 对充分小的非零实数 h, 令

$$\varphi_h(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0+h\mathbf{e}_j,\lambda),\qquad Q_h(t)=\frac{\varphi_h(t)-\varphi(t)}{h}.$$

连续依赖定理给出

$$\max_{t\in J}|\varphi_h(t)-\varphi(t)|\longrightarrow 0\qquad (h\to 0).\tag{2.6.6}$$

两个解的积分方程相减. 对$\boldsymbol{x}$-变量使用引理2.6.2的矩阵形式, 得到

$$Q_h(t)=\mathbf{e}_j+\int_{t_0}^{t}A_h(s)Q_h(s)\,\mathrm{d}s,\tag{2.6.7}$$

其中

$$A_h(s)=\int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\big(s,\varphi(s)+\theta(\varphi_h(s)-\varphi(s)),\lambda\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

由(2.6.6)以及 $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ 在对应的闭管状邻域上的一致连续性得到

$$\|A_h-A\|_{C(J)}\longrightarrow 0,\qquad A(s)=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(s,\varphi(s),\lambda).\tag{2.6.8}$$

特别地, 存在 $M>0$, 使得只要$|h|$充分小, 就有 $\|A_h\|_{C(J)}\leqslant M$ 成立. 由(2.6.7)和Grönwall不等式得,

$$|Q_h(t)|\leqslant e^{M|t-t_0|}\leqslant e^{M(b-a)},\qquad t\in J.\tag{2.6.9}$$

令 Y_j 是 $Y_j'=A(t)Y_j$, $Y_j(t_0)=\mathbf{e}_j$ 的唯一解. 把它的积分方程从(2.6.7)中减去, 得到

$$|Q_h(t)-Y_j(t)|\leqslant M\int_{t_0}^{t}|Q_h(s)-Y_j(s)|\,\mathrm{d}s+\|A_h-A\|_{C(J)}\int_{t_0}^{t}|Y_j(s)|\,\mathrm{d}s\qquad (t_0\leqslant t\leqslant b).$$

再用Grönwall不等式, 得到显式估计

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant b}|Q_h(t)-Y_j(t)|\leqslant (b-t_0)e^{M(b-t_0)}\|Y_j\|_{C(J)}\|A_h-A\|_{C(J)}\xrightarrow{(2.6.8)}0.$$

左侧区间则可考虑作反向时间变换

$$\widehat{Q}_h(\tau)=Q_h(t_0-\tau),\qquad \widehat{Y}_j(\tau)=Y_j(t_0-\tau),\qquad 0\leqslant\tau\leqslant t_0-a.$$

并用同样方法可以证明$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant t_0}|Q_h(t)-Y_j(t)|\to 0$. 现在与右侧区间的结论合并, 得到

$$\max_{t\in J}|Q_h(t)-Y_j(t)|\longrightarrow 0.$$

这证明 $\partial\varphi/\partial x_0^j=Y_j$. 把 d 个列向量 $Y_1,\dots,Y_d$ 排成矩阵, 便得到(2.6.1).

第二步: 对参数求偏导得到非齐次变分方程. 固定参数空间中的第 k 个坐标向量 $\mathbf{e}_k$, 并记

$$\psi_h(t)=\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda+h\mathbf{e}_k),\qquad P_h(t)=\frac{\psi_h(t)-\varphi(t)}{h}.$$

把右端之差准确地拆成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(s,\psi_h(s),\lambda+h\mathbf{e}_k)-\boldsymbol{f}(s,\varphi(s),\lambda)=&\boldsymbol{f}(s,\psi_h(s),\lambda+h\mathbf{e}_k)-\boldsymbol{f}(s,\varphi(s),\lambda+h\mathbf{e}_k)\\&+\boldsymbol{f}(s,\varphi(s),\lambda+h\mathbf{e}_k)-\boldsymbol{f}(s,\varphi(s),\lambda).\end{aligned}$$

分别沿$\boldsymbol{x}$变量线段和参数线段积分, 得到

$$P_h(t)=\int_{t_0}^{t}\big(A_h^{\lambda}(s)P_h(s)+B_h(s)\mathbf{e}_k\big)\,\mathrm{d}s,\tag{2.6.10}$$

其中

$$A_h^{\lambda}(s)=\int_0^1 D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\big(s,\varphi(s)+\theta(\psi_h(s)-\varphi(s)),\lambda+h\mathbf{e}_k\big)\,\mathrm{d}\theta,\quad B_h(s)=\int_0^1 D_{\lambda}\boldsymbol{f}\big(s,\varphi(s),\lambda+\theta h\mathbf{e}_k\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

由连续依赖性定理以及导数在紧集上的一致连续性得到

$$\|A_h^{\lambda}-A\|_{C(J)}\longrightarrow 0,\qquad \|B_h-B\|_{C(J)}\longrightarrow 0.\tag{2.6.11}$$

取 $M,N>0$, 使充分小的 $|h|$ 都满足$\|A_h^{\lambda}\|_{C(J)}\leqslant M$ 和 $\|B_h\|_{C(J)}\leqslant N$. 由(2.6.10)和Grönwall不等式得到 $\|P_h\|_{C(J)}\leqslant(b-a)Ne^{M(b-a)}$.

现在令 Z_k 是 $Z_k'=A(t)Z_k+B(t)\mathbf{e}_k$, $Z_k(t_0)=0$ 的解. 两积分方程相减, 并在 $[t_0,b]$ 上估计, 得

到

$$|P_h(t)-Z_k(t)|\leqslant M\int_{t_0}^{t}|P_h(s)-Z_k(s)|\,\mathrm{d}s+(b-a)\|A_h^{\lambda}-A\|_{C(J)}\|Z_k\|_{C(J)}+(b-a)\|B_h-B\|_{C(J)}.$$

所以

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant b}|P_h(t)-Z_k(t)|\leqslant(b-a)e^{M(b-a)}\cdot\left(\|A_h^{\lambda}-A\|_{C(J)}\|Z_k\|_{C(J)}+\|B_h-B\|_{C(J)}\right),$$

其右端由(2.6.11)趋于零.

在左侧区间则考察$\widehat{P}_h(\tau)=P_h(t_0-\tau)$, $\widehat{Z}_k(\tau)=Z_k(t_0-\tau)$. 同理可得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant t_0}|P_h(t)-Z_k(t)|\leqslant(t_0-a)e^{M(t_0-a)}\left(\|A_h^{\lambda}-A\|_{C(J)}\|Z_k\|_{C(J)}+\|B_h-B\|_{C(J)}\right)\to 0.$$

于是 $P_h\to Z_k$ 在 J 上一致成立. 让 k 遍历所有参数分量, 便得到(2.6.2).

第三步: 导数的连续性. 设 $(t_{0n},\boldsymbol{x}_{0n},\lambda_n)\to(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)$. 由连续依赖定理知, 当 n 充分大时, 对应的解 φ_n 都在 J 上存在 (可适当缩小 J 保证这件事情), 并有一致收敛$\varphi_n\rightrightarrows\varphi$. 因此在 J 上有如下一致收敛

$$A_n(t)=D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\varphi_n(t),\lambda_n)\rightrightarrows A(t),\qquad B_n(t)=D_{\lambda}\boldsymbol{f}(t,\varphi_n(t),\lambda_n)\rightrightarrows B(t)$$

所以存在 n 无关的常数 $M,N>0$, 使得$\|A_n\|_{C(J)}\leqslant M$, $\|B_n\|_{C(J)}\leqslant N$.

现在对积分方程 $Y_n(t)=I_d+\int_{t_{0n}}^{t}A_n(s)Y_n(s)\,\mathrm{d}s$ 分别在 $t\geqslant t_{0n}$ 和 $t\leqslant t_{0n}$ 两侧用Grönwall不等式, 得到 $\|Y_n\|_{C(J)}\leqslant e^{M(b-a)}$. 类似地, 对积分方程

$$Z_n(t)=\int_{t_{0n}}^{t}[A_n(s)Z_n(s)+B_n(s)]\,\mathrm{d}s$$

同理可以证得$\|Z_n\|_{C(J)}\leqslant(b-a)Ne^{M(b-a)}$.

记 I_t 为以 t_0,t 为两个端点的闭区间. 现在把移动初始时刻而产生的额外项单独写出, 放缩可得

$$|Y_n(t)-Y(t)|\leqslant|t_{0n}-t_0|M\|Y_n\|_{C(J)}+M\int_{I_t}|Y_n(s)-Y(s)|\,\mathrm{d}s+(b-a)\|A_n-A\|_{C(J)}\|Y\|_{C(J)}.$$

若 $t\geqslant t_0$, 就在 $[t_0,t]$ 上应用Grönwall不等式; 若 $t\leqslant t_0$, 令 $\tau=t_0-t$, 把中间的积分改写为从 0 到 τ 的积分, 再应用同一个不等式. 由此得到

$$\|Y_n-Y\|_{C(J)}\leqslant e^{M(b-a)}\left[|t_{0n}-t_0|Me^{M(b-a)}+(b-a)\|A_n-A\|_{C(J)}\|Y\|_{C(J)}\right]\longrightarrow 0.$$

对于 $Z_n - Z$, 两个积分方程相减后得到

$$|Z_n(t) - Z(t)| \leqslant |t_{0n} - t_0|\big(M\|Z_n\|_{C(J)} + N\big) + M\int_{I_t} |Z_n(s) - Z(s)|\,\mathrm{d}s + (b-a)\|A_n - A\|_{C(J)}\|Z\|_{C(J)} + (b-a)\|B_n - B\|_{C(J)}.$$

记

$$E_n = |t_{0n} - t_0|\big(M\|Z_n\|_{C(J)} + N\big) + (b-a)\|A_n - A\|_{C(J)}\|Z\|_{C(J)} + (b-a)\|B_n - B\|_{C(J)}.$$

则上面的不等式就是

$$|Z_n(t) - Z(t)| \leqslant E_n + M\int_{I_t} |Z_n(s) - Z(s)|\,\mathrm{d}s.$$

若 $t \geqslant t_0$, 在 $[t_0, t]$ 上应用Grönwall不等式; 若 $t \leqslant t_0$, 令 $\tau = t_0 - t$ 后应用该不等式. 于是

$$\|Z_n - Z\|_{C(J)} \leqslant E_n e^{M(b-a)} \longrightarrow 0.$$

这证明了导数关于 $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 的连续性. 若还让终止时刻 $t_n \to t$, 则

$$|Y_n(t_n) - Y(t)| \leqslant \|Y_n - Y\|_{C(J)} + |Y(t_n) - Y(t)| \longrightarrow 0,$$

$$|Z_n(t_n) - Z(t)| \leqslant \|Z_n - Z\|_{C(J)} + |Z(t_n) - Z(t)| \longrightarrow 0.$$

因此 $D_{\boldsymbol{x}_0}\varphi$ 与 $D_\lambda\varphi$ 对全部变量连续.

第四步: 对终止时刻和初始时刻求导. 由微分方程本身可得 $\partial_t\varphi = \boldsymbol{f}(t, \varphi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda), \lambda)$, 所以(2.6.3)成立, 且右端连续.

对充分小的非零 h, 定义 $\eta_h = \varphi(t_0; t_0 + h, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$, 它是以时刻 $t_0 + h$ 为初始时刻的解在 t_0 的取值. 由解的唯一性可得

$$\varphi(t; t_0 + h, \boldsymbol{x}_0, \lambda) = \varphi(t; t_0, \eta_h, \lambda). \tag{2.6.12}$$

又由积分方程得到,

$$\eta_h - \boldsymbol{x}_0 = -\int_{t_0}^{t_0+h} \boldsymbol{f}\big(s, \varphi(s; t_0 + h, \boldsymbol{x}_0, \lambda), \lambda\big)\,\mathrm{d}s.$$

当 $h \to 0$ 时, 被积函数在端点附近一致趋于 $\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$. 因此

$$\frac{\eta_h - \boldsymbol{x}_0}{h} \longrightarrow -\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda). \tag{2.6.13}$$

对恒等式(2.6.12)右端关于初值使用线段积分公式, 得到

$$\frac{\varphi(t;t_0+h,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)}{h}=\left[\int_0^1 D_{\boldsymbol{x}_0}\varphi\big(t;t_0,\boldsymbol{x}_0+\theta(\eta_h-\boldsymbol{x}_0),\lambda\big)\,\mathrm{d}\theta\right]\frac{\eta_h-\boldsymbol{x}_0}{h}.$$

括号内的矩阵(由第三步的连续性知)收敛于 $Y(t)$, 第二个因子由 (2.6.13) 给出收敛后的极限, 故

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}=-Y(t)\boldsymbol{f}(t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda).$$

这就得到(2.6.4). 右端连续, 所以这个偏导数也连续. 至此, 所有一阶偏导数均存在且连续. 而连续偏导数蕴含全微分存在，所以 $\varphi\in C^1(\mathcal{D})$. □

推论 2.6.3 初值Jacobi矩阵的行列式

在定理2.6.1的条件下,

$$\det D_{\boldsymbol{x}_0}\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(s,\varphi(s;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s\right\}>0. \tag{2.6.14}$$

特别地, 固定 (t,t_0,λ) 时, 初值解映射的Jacobi矩阵处处可逆.

注记 2.6.2. 这个推论回答一个很基本的问题: 常微分方程把“一坨初值”演化到时刻 t 后，这“一坨初值”在相空间中是如何变形的？它会不会被压扁到低维集合？体积如何变化？而该推论表明该方程的演化把“同胚”提升为了“微分同胚”. 前者实际上就是推论2.5.2的结论, 其表明固定两个时刻后，解映射是两个开集之间的同胚; 现在定理2.6.1给出了可微性, 说明解映射的微分处处可逆, 进而得到了两个开集之间的C^1-同胚. 同时这种非退化性说明该系统的演化不会把一个开集“压扁”. 进一步地, 表达式(2.6.14)表明, 相空间的体积元变化完全由右端项的散度 $\operatorname{tr}D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}=\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{f}$ 决定。它在现实模型中也是有对应的: 考虑流体的流动, 当我们取 $\boldsymbol{f}$ 为流体速度场, 对应的 $\boldsymbol{x}$ 为速度场确定的流映射 (flow map), 那么这就是流体力学里面拉格朗日坐标系的原始定义. 特别地, 当速度场的散度为零时, 这说明流体是不可压缩的 (incompressible).

证明推论之前，我们回顾一下行列式求导公式。“‘tex

引理 2.6.4 Jacobi公式

设 $Y(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是关于 t 的可微矩阵函数，$Y^*(t)$ 表示 $Y(t)$ 的伴随矩阵，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t)=\operatorname{tr}\big(Y^*(t)Y'(t)\big).$$

特别地，当 $Y(t)$ 可逆时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t)=\det Y(t)\operatorname{tr}\big(Y^{-1}(t)Y'(t)\big).$$

证明. 固定 t。我们分两种情形讨论。

情形一：$Y(t)$ 可逆。

由 Y 的可微性，有 $Y(t+h)=Y(t)+hY'(t)+o(h)$。由于 $Y(t)$ 可逆，可以写成

$$Y(t+h)=Y(t)\big(I+hY^{-1}(t)Y'(t)+o(h)\big)\ \Rightarrow\ \det Y(t+h)=\det Y(t)\,\det\big(I+hY^{-1}(t)Y'(t)+o(h)\big).$$

利用行列式在单位矩阵附近的一阶展开得 $\det(I+hA+o(h))=1+h\,\mathrm{tr}\,A+o(h)$, 取 $A=Y^{-1}(t)Y'(t)$，得到

$$\det Y(t+h)=\det Y(t)\left(1+h\,\mathrm{tr}\big(Y^{-1}(t)Y'(t)\big)+o(h)\right).$$

于是

$$\frac{\det Y(t+h)-\det Y(t)}{h}=\det Y(t)\,\mathrm{tr}\big(Y^{-1}(t)Y'(t)\big)+o(1).$$

令 $h\to 0$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t)=\det Y(t)\,\mathrm{tr}\big(Y^{-1}(t)Y'(t)\big).$$

另一方面，由 $Y(t)Y^*(t)=\det Y(t)I$以及 $Y(t)$ 可逆得

$$Y^*(t)=\det Y(t)Y^{-1}(t)\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t)=\mathrm{tr}\big(Y^*(t)Y'(t)\big).$$

情形二：$Y(t)$ 不可逆。 考虑矩阵 $Y(t)+\varepsilon I$。因为 $\det\big(Y(t)+\varepsilon I\big)$ 是关于 ε 的 n 次多项式，并且最高次项为 ε^n，所以它不恒为零。因此只有有限多个 ε 使得 $\det\big(Y(t)+\varepsilon I\big)=0$。

于是可以取一列 $\varepsilon_k\to 0$，使得对每一个 k，矩阵 $Y(t)+\varepsilon_k I$ 都可逆。由于可逆矩阵的集合是开集，所以对每一个固定的 k，当 s 充分接近 t 时，矩阵 $Y(s)+\varepsilon_k I$ 仍然可逆。

因此可以对矩阵函数 $Y(s)+\varepsilon_k I$ 应用情形一的结论，其中 $\varepsilon_k\to 0$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(Y(s)+\varepsilon_k I\big)=Y'(s)\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\det\big(Y(s)+\varepsilon_k I\big)\Big|_{s=t}=\mathrm{tr}\left(\big(Y(t)+\varepsilon_k I\big)^*Y'(t)\right).$$

令 $k\to\infty$。由于伴随矩阵的每一个元素都是原矩阵各元素的多项式，因此$\big(Y(t)+\varepsilon_k I\big)^*\to Y^*(t)$，从而$\mathrm{tr}\left(\big(Y(t)+\varepsilon_k I\big)^*Y'(t)\right)\to\mathrm{tr}\big(Y^*(t)Y'(t)\big)$.

另一方面，由于行列式是矩阵各元素的多项式，求导以后所得表达式仍连续依赖于 ε，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\det\big(Y(s)+\varepsilon_k I\big)\Big|_{s=t}\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\det Y(s)\Big|_{s=t}.$$

于是令 $k\to\infty$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t)=\mathrm{tr}\big(Y^*(t)Y'(t)\big).$$

□

证明. 下面的计算正是第三章Liouville公式(3.2.2)的一个特殊情形. 为了不预先使用后文的结论，

这里把标量行列式计算完整写出. 记 $Y = D_{\boldsymbol{x}_0}\varphi$ 与 $A = D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\varphi,\lambda)$. 在 $Y(t)$ 可逆的时刻, Jacobi公式和 $Y' = AY$ 给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det Y(t) = \det Y(t)\,\mathrm{tr}\big(Y(t)^{-1}Y'(t)\big) = \det Y(t)\,\mathrm{tr}\big(Y(t)^{-1}A(t)Y(t)\big) = \mathrm{tr}\,A(t)\det Y(t).$$

最后一个等号成立是因为相似矩阵具有相同迹. 由于 $Y(t_0) = I_d$, 在 t_0 的一个邻域内 Y 可逆. 设包含 t_0 的最大可逆时间区间为 I_0. 在 I_0 上, 上式是关于 $w(t) = \det Y(t)$ 的一阶线性方程, 且 $w(t_0) = 1$, 所以

$$w(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\,A(s)\,\mathrm{d}s\right\}, \qquad t \in I_0.$$

若 I_0 有一个仍位于参考解存在区间内部的有限端点 c, 则令 $t \to c$, 那么上式右端趋于一个严格正数. 这说明 $\det Y(c) > 0$, 因而 Y 在 c 附近仍可逆, 与 I_0 的最大性矛盾. 所以 I_0 就是参考解的整个存在区间, 式(2.6.14)处处成立. □

推论 2.6.5 混合导数

在定理2.6.1的条件下, 混合导数 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x_0^j}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial\lambda^k}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial t_0}$ 都存在且连续, 并且可以交换这里出现的两个求导次序.

对导数阶数归纳，我们实际上可以证明如下高阶可微依赖性，证明略去.

定理 2.6.6 *高阶可微依赖

设 μ 是只要求连续依赖的附加参数, $m \geqslant 1$, 并设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\lambda,\mu)$ 连续. 假设 $\boldsymbol{f}$ 关于 $(\boldsymbol{x},\lambda)$ 的所有不超过 m 阶偏导数都存在, 并且关于 $(t,\boldsymbol{x},\lambda,\mu)$ 连续. 则含参常微分方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\lambda,\mu)$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解 $\varphi(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda,\mu)$ 关于 $(\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 的所有不超过 m 阶偏导数都存在且连续; 这些导数对 t 的一阶导数也存在且连续. 对初始时刻 t_0 求至多一次偏导后, 只要再对 $(\boldsymbol{x}_0,\lambda)$ 所求偏导的总阶数不超过 $m-1$, 相应混合导数也存在且连续.

例 2.6.1 一阶线性方程的初值导数

设

$$x' + p(t)x = q(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

其中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 是连续函数, 解记为 $x = \varphi(t;t_0,x_0)$. 求它关于 t_0 和 x_0 的偏导数.

解. 方程右端是 $f(t,x) = q(t) - p(t)x$, 所以

$$f_x(t,x) = -p(t), \qquad -f(t_0,x_0) = p(t_0)x_0 - q(t_0).$$

令 $z(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)$, 则由初始时刻的变分方程知, z 满足

$$z'=-p(t)z,\ \ z(t_0)=p(t_0)x_0-q(t_0)\ \Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)=\big(p(t_0)x_0-q(t_0)\big)e^{-\int_{t_0}^t p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

再令 $w(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)$, 则它关于初值的变分方程是$w'=-p(t)w,\ w(t_0)=1$. 因此$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=e^{-\int_{t_0}^t p(s)\,\mathrm{d}s}$. 这里没有先写出 φ 的显式表达式, 而是直接求解变分方程. 对一般非线性方程, 即使原解没有初等函数表达式, 这种办法仍然适用. □

例 2.6.2 不显式求解而计算偏导数

设 $\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)$ 是 $x'=\sin(\lambda tx),\ x(t_0)=x_0$ 的解. 求在 $t_0=x_0=0$ 时, φ 关于 t_0,x_0,λ 的偏导数.

解. (1) 求关于初值的偏导数. 令$y(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0,\lambda)$., 则它满足 $y'(t)=\lambda t\cos\big(\lambda t\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)\big)y(t),\ y(t_0)=1$, 从而

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0,\lambda)=\exp\left\{\int_{t_0}^t\lambda s\cos\big(\lambda s\varphi(s;t_0,x_0,\lambda)\big)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

当 $t_0=x_0=0$ 时, 原初值问题有唯一解$\varphi(t;0,0,\lambda)\equiv 0$ (思考它为什么唯一？). 代入上式得到

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{t_0=x_0=0}=\exp\left(\int_0^t\lambda s\,\mathrm{d}s\right)=e^{\lambda t^2/2}.$$

(2) 求参数的偏导数. 因为$\partial_x f=\lambda t\cos(\lambda tx),\ \partial_\lambda f=tx\cos(\lambda tx)$, 所以函数 $z(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(t;t_0,x_0,\lambda)$ 满足非齐次变分方程

$$z'(t)=A(t)z(t)+t\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)\cos\big(\lambda t\varphi(t;t_0,x_0,\lambda)\big),\qquad z(t_0)=0.$$

在 $t_0=x_0=0$ 时, $\varphi\equiv 0$, 所以这个方程化为 $z'=\lambda tz,\ v(0)=0$. 其唯一解是 $z\equiv 0$, 所以 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right|_{t_0=x_0=0}=0$.

(3) 求初始时刻的偏导数, 令 $w(t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0,\lambda)$, 据(2.6.4)知, 它满足 $w'(t)=A(t)w(t),\ w(t_0)=-\sin(\lambda t_0x_0)$. 直接求解该一阶线性方程得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0,\lambda)=-\sin(\lambda t_0x_0)\exp\left\{\int_{t_0}^t\lambda s\cos\big(\lambda s\varphi(s;t_0,x_0,\lambda)\big)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

因此$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right|_{t_0=x_0=0}=0$. □

2.6.2 自治流的单调性

当方程的右端项$\boldsymbol{f}$不显示包含自变量t时，我们称 $\boldsymbol{x}'(t)=f(\boldsymbol{x}(t))$ 是自治方程组, 其对应的解映射被称作“流”.

定义 2.6.1 自治方程组的流

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ 局部Lipschitz, 并考虑自治方程组

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)). \tag{2.6.15}$$

对每个 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$, 记初值 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 所对应的唯一极大解为 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t;0,\boldsymbol{x}_0)$. 今定义$\mathcal{U}=\{(t,\boldsymbol{x}_0)\in\mathbb{R}\times\Omega:t$ 属于这个极大解的存在区间$\}$, 并令$\Phi(t,\boldsymbol{x}_0)=\varphi(t;0,\boldsymbol{x}_0)$, $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)=\Phi(t,\boldsymbol{x}_0)$. 则我们把映射 $\Phi:\mathcal{U}\to\Omega$ 称为自治方程组(2.6.15)的**局部流**, Φ_t 称为时刻 t 的**流映射** (flow map). 若每个初值的解都在整个实轴上存在, 从而 $\mathcal{U}=\mathbb{R}\times\Omega$, 则称 Φ 为**整体流**.

下面验证“流”这个名称所具有的代数性质. 由初值条件我们有 $\Phi_0=\mathrm{id}$. 下设各个解在所涉及的时间上都有定义. 固定 s, 并令 $\boldsymbol{y}(t)=\Phi_{t+s}(\boldsymbol{x}_0)$. 因为方程(2.6.15)的右端不显式含有时间 t, 所以方程可以写作

$$\boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{f}(\Phi_{t+s}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)),\qquad \boldsymbol{y}(0)=\Phi_s(\boldsymbol{x}_0).$$

另一方面, $\boldsymbol{z}(t)=\Phi_t(\Phi_s(\boldsymbol{x}_0))$ 满足同一方程和同一初值, 那么常微分方程解的唯一性给出流性质

$$\Phi_0=\mathrm{id},\qquad \Phi_{t+s}=\Phi_t\circ\Phi_s\qquad (\text{只要两边都有定义}). \tag{2.6.16}$$

这表示先沿系统演化时间 s, 再从到达的状态继续演化时间 t, 与一次演化时间 $t+s$ 得到同一个状态. 在一维情形, 变分方程还能说明每个流映射保持初值的大小顺序.

命题 2.6.7 一维自治流保持次序

设 $I\subset\mathbb{R}$ 是开区间, $f\in C^1(I)$, 并设 Φ_t 是一维自治方程$x'(t)=f(x(t))$按照定义2.6.1生成的局部流. 则

$$\frac{\partial\Phi_t}{\partial x_0}(x_0)=\exp\left(\int_0^t f'(\Phi_s(x_0))\,\mathrm{d}s\right)>0.$$

因此对每个固定 t, 映射 $x_0\longmapsto\Phi_t(x_0)$ 在其定义域的每个区间分支上严格递增.

证明. 由Peano C^1依赖性定理可知，对应的变分方程是 $Y'=f'(\Phi_t(x_0))Y$, $Y(0)=1$, 直接求解可得

$$Y(t)=\exp\left(\int_0^t f'(\Phi_s(x_0))\,\mathrm{d}s\right)>0.$$

最后固定 t, 并在该时刻解映射定义域的同一个区间分支内取 $x_0<y_0$. 初值解映射关于初值连续可

微, 而且整个闭区间 $[x_0, y_0]$ 都包含在这个分支中, 所以由微积分基本定理得到

$$\Phi_t(y_0) - \Phi_t(x_0) = \int_{x_0}^{y_0} \frac{\partial \Phi_t}{\partial \xi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi > 0 \ \Rightarrow\ x_0 \longmapsto \Phi_t(x_0) \text{ 严格递增.}$$

□

习题 2.6

习题 2.6.1. 对含参微分方程初值问题 $x'(t) = \lambda x(t) - x(t)^3$, $x(0) = x_0$ 写出关于 x_0 和 λ 的变分方程, 并证明 $\dfrac{\partial x(t)}{\partial x_0} > 0$.

习题 2.6.2. 对含参微分方程初值问题 $x'(t) = x(t) + \lambda(t + x(t)^2)$, $x(0) = 1$. 计算 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}$.

习题 2.6.3. 对含参微分方程初值问题 $x'(t) = 2x(t) + \lambda x(t)^2$, $x(0) = \lambda - 1$. 计算 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}$.

习题 2.6.4. 考虑微分方程 $x'(t) = \cos^2 x(t) + (\lambda + q(t))\sin^2 x(t)$, $x(0;\lambda) = x_0$, 其中 $q \in C(\mathbb{R})$.

(1) 证明: 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 该初值问题在 $t \in [0,1]$ 上存在唯一解 $x = \varphi(t;\lambda)$.
(2) 对任意 $t \in [0,1]$, 这个解$x = \varphi(t;\lambda)$是否关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是连续可微的, 证明你的结论.
(3) 令 $\omega(\lambda) = \varphi(1;\lambda)$, 证明: $\omega(\lambda)$ 关于 λ 严格单调递增.

习题 2.6.5. 考虑 $x''(t) + cx'(t) + g(x(t)) = p(t)$, 其中 $p(t)$ 是周期 2π 的连续函数, $g \in C^1$, $c \in \mathbb{R}$ 为常数. 假设对任意初值 $(x(0), x'(0)) \in \mathbb{R}^2$, 方程的解都在 $[0, 2\pi]$ 上存在, 今考虑 (x, x') 平面上的变换 $\boldsymbol{\Phi}$: $(x(0), x'(0)) \longmapsto (x(2\pi), x'(2\pi))$. 证明: 对$(x, x')$ 平面上任意有界区域 D, $\mathrm{Area}(\boldsymbol{\Phi}(D)) = \mathrm{Area}(D)e^{-2c\pi}$.

问题 2.6

问题 2.6.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是开集, $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$, 并令 $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \Omega$ 为自治方程 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 生成的最大局部流。对固定的 $t \in \mathbb{R}$, 定义 $D_t := \{\boldsymbol{x}_0 \in \Omega : (t, \boldsymbol{x}_0) \in \mathcal{U}\}$. 证明如下结论。

(1) D_t 是开集, 并且 $\Phi_t(D_t) = D_{-t}$.
(2) $\Phi_t : D_t \longrightarrow D_{-t}$ 是 C^1 微分同胚, 其逆映射是 Φ_{-t}.
(3) $[D\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)]$非退化, 且满足

$$\det D\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \exp\left\{\int_0^t \nabla \cdot \boldsymbol{f}(\Phi_s(\boldsymbol{x}_0))\,\mathrm{d}s\right\} > 0.$$

第三章　一阶线性常微分方程组

在第二章中, 我们已经看到非线性方程的解对初值的导数满足一个线性方程. 因此, 线性方程组不仅是一类可以较为完整地求解的方程, 也是研究一般常微分方程局部性质的基础. 本章讨论如何求解具有如下形式的一阶线性方程组

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t).$$

特别地，我们在前两节通常假设系数矩阵A是常系数的. 我们首先从Jordan块出发求解常系数齐次方程组, 然后引入矩阵指数; 接着用基解矩阵和常数变易法处理非齐次方程组; 最后讨论周期系数方程组. 这一顺序也说明了, 矩阵指数并不是一个突然写出的符号, 而是Jordan块解法的统一表示.

3.1　常系数齐次线性方程组

考虑常系数的一阶线性齐次常微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{3.1.1}$$

其中 A 是 $d \times d$ 常矩阵. 线性代数中的Jordan标准形定理告诉我们: 对任意复方阵 A, 存在可逆复方阵 P, 使得$P^{-1}AP = J$, 其中 J 是若干个Jordan块组成的分块对角矩阵. 令 $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, 则方程组(3.1.1)化为 $\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y}$.

因此, 一般常矩阵的问题可以归结为两步: 先求解一个Jordan块对应的方程, 再把各块的解组合起来. 这也说明了为什么在系数矩阵不可对角化时, 考虑Jordan块是自然的, 而不是一种为了计算方便而人为添加的特殊情形.

3.1.1　先从Jordan标准型出发

若 A 已经对角化为$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, 则$\boldsymbol{x}(t)$的各分量互不耦合, 求解 $x_j'(t) = \lambda_j x_j(t)$ 可得 $x_j(t) = e^{\lambda_j t}x_j(0)$. 而当 A 不能对角化时, 各分量不再完全分离, 解中会出现 t 的多项式因子. 为了看清这个现象, 先求解一个Jordan块对应的方程组.

定义 3.1.1 Jordan块

大小为 m, 特征值为 λ 的Jordan块是

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m, \qquad N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中N_m是仅有次对角线全为1, 其它位置全为零的幂零方阵, $N_m^m = 0$, 而 $N_m^{m-1} \neq 0$.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)^{\mathsf{T}}$, 则 $\boldsymbol{x}' = J_m(\lambda)\boldsymbol{x}$ 满足如下方程组

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2, \\ x_2' = \lambda x_2 + x_3, \\ \quad \vdots \\ x_{m-1}' = \lambda x_{m-1} + x_m, \\ x_m' = \lambda x_m. \end{cases}$$

最后一个方程先给出 $x_m(t) = e^{\lambda t} x_m(0)$. 把它代入倒数第二个方程, 再使用一阶线性方程的常数变易法, 得到

$$x_{m-1}(t) = e^{\lambda t}\big(x_{m-1}(0) + t x_m(0)\big).$$

继续向上代入, 每积分一次就会多出一次 t 的幂. 下面的命题把这个逐层计算写成矩阵形式.

命题 3.1.1 Jordan块的解

方程组 $\boldsymbol{x}' = J_m(\lambda)\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left(I_m + tN_m + \frac{t^2}{2!}N_m^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^{m-1}\right)\boldsymbol{x}_0. \tag{3.1.2}$$

证明. 记

$$P(t) = I_m + tN_m + \frac{t^2}{2!}N_m^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^{m-1}.$$

这是一个有限和, 因而可以逐项求导. 求导后,

$$P'(t) = N_m + tN_m^2 + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}N_m^{m-1}.$$

另一方面, 由 $N_m^m = 0$,

$$N_m P(t) = N_m + tN_m^2 + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}N_m^{m-1} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^m = P'(t).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{\lambda t}P(t)\boldsymbol{x}_0\big) = \lambda e^{\lambda t}P(t)\boldsymbol{x}_0 + e^{\lambda t}P'(t)\boldsymbol{x}_0 = e^{\lambda t}\big(\lambda I_m + N_m\big)P(t)\boldsymbol{x}_0 = J_m(\lambda)e^{\lambda t}P(t)\boldsymbol{x}_0.$$

这说明(3.1.2)满足微分方程. 再由 $P(0) = I_m$, 有 $e^{\lambda\cdot 0}P(0)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$, 所以它也满足给定的初值. □

例 3.1.1 二阶Jordan块

对

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

解为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

即使两个特征值都等于 2, 不可对角化性仍产生额外因子 t.

3.1.2 一般常矩阵的Jordan化

据Jordan标准形定理, 对任意给定的复方阵A, 存在复数域上的可逆矩阵 P, 使得 $A = PJP^{-1}$, 其中 J 是若干Jordan块构成的分块对角矩阵, 而过渡矩阵P则由A关于各个特征值的特征向量或者根向量(不可对角化的情况)作为各列构成. 令 $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y}$. 若 $J = \mathrm{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_s}(\lambda_s))$, 则 $\boldsymbol{y}$ 的每一个分块都由公式(3.1.2)给出. 把这些分块解依次排成 $\boldsymbol{y}(t)$, 原未知函数由 $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ 还原出来.

例 3.1.2 互异特征根

求如下微分方程组的通解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

解. 记系数矩阵为 A. 先计算特征多项式如下

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -28 & -18 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \\ 3 & -16 & -10-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -16 & -10-\lambda \end{vmatrix} + 28\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10-\lambda \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 3 & -16 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\big((5-\lambda)(-10-\lambda)+48\big) + 28(1+\lambda) - 18(1+3\lambda) \\ &= \lambda(1-\lambda^2).\end{aligned}$$

因此, A 的三个特征值是 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$.

分别求解 $(A-\lambda_j I_3)\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, 可取

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

为了核对这一步, 把三个向量分别乘以 A:

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \qquad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2, \qquad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_3.$$

它们对应互异的特征根, 因而线性无关. 这个时候我们令过渡矩阵$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, 则直接就得到$AP = PJ, J = \operatorname{diag}(0, 1, -1)$. 而我们求解Jordan化之后的方程组是容易的:

$$\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{y} = (C_1, C_2e^t, C_3e^{-t})^{\top}.$$

所以现在我们要求的$\boldsymbol{x}(t)$的通解如下, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数, 他们由$\boldsymbol{x}(t)$的初值确定.

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

例 3.1.3 一对共轭复特征根

求如下微分方程组的通解.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{3.1.3}$$

解. 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 计算特征多项式可得$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, 所以特征值为 $\lambda_1 = 1 + i$ 和 $\lambda_2 = 1 - i$. 对 λ_1, 方程

$$(A - (1+i)I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; -iv_1 + v_2 = 0 \;\Rightarrow\; \text{可取}\mathbf{v}_1 = (1, i)^{\mathsf{T}}$$

对λ_2, 类似的计算表明我们可取特征向量为 $\mathbf{v}_2 = (i, 1)^{\mathsf{T}}$. 于是可得

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t}.$$

也可以直接从第一列复解提取两个实解. 由

$$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix},$$

其实部和虚部分别是

$$e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

在 $t = 0$ 时, 这两个解的值分别是标准基向量, 所以它们线性无关. 方程组 (3.1.3)的实通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1' e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2' e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

□

注记 3.1.1. 一般地, 若二阶实矩阵具有复特征值 $\alpha \pm i\beta$, 对应的二阶实Jordan块为 $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. 因为该方程组等价于 $x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y$. 令 $z = x + iy$, 则 $z' = (\alpha + i\beta)z$. 因此 $z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}z(0)$. 分别比较实部和虚部, 得到

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \tag{3.1.4}$$

因此实部 α 控制伸缩, 虚部 β 控制旋转.

例 3.1.4 含一个二重特征值的三阶例子

求如下方程组的通解.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \tag{3.1.5}$$

解. 记系数矩阵为 A. 由于 A 是上三角矩阵, 它的特征多项式为$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. 因此 1 是二重特征值, -1 是单重特征值. 对于 $\lambda = 1$, 我们计算

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

求解方程 $(A - I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 会得到 $v_2 = v_3 = 0$, 所以对应的特征子空间只有一维, 可取特征向量$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^\mathsf{T}$. 但$\lambda = 1$是二重特征值, 我们只求出一个线性无关的特征向量, 因而 A 不可对角化, 我们还需要寻找一个根向量 $\mathbf{v}_2$ 作为根子空间 $\ker(A - I_3)^2$ 的另一个基向量. 所以现在这个 $\mathbf{v}_2$ 应该满足 $(A - I_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. 将 $\mathbf{v}_2 = (a, b, c)^\mathsf{T}$ 代入, 计算可得

$$(A - I_3)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ -2c \end{pmatrix} \Rightarrow \text{取}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对单重特征值 -1, 方程 $(A+I_3)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ 为

$$\begin{cases} 2v_{31}+v_{32}=0, \\ 2v_{32}+v_{33}=0. \end{cases} \xrightarrow{\text{不妨取}v_{31}=1} \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

这三个向量组成的矩阵

$$P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

的行列式等于 4, 因而 P 可逆, 它就是把 A 进行 Jordan 化的过渡矩阵. 由上面的计算知 $A\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $A\mathbf{v}_3=-\mathbf{v}_3$, 所以

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$, 并记 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathsf{T}}$, 则

$$y_1'=y_1+y_2,\ y_2'=y_2,\ y_3'=-y_3 \ \Rightarrow\ y_2=C_2e^t,\ y_1=e^t(C_1+C_2t),\ y_3=C_3e^{-t}.$$

最后由 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=y_1\mathbf{v}_1+y_2\mathbf{v}_2+y_3\mathbf{v}_3$ 得到方程组 (3.1.5)的通解

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} e^t(C_1+C_2t)+C_3e^{-t} \\ C_2e^t-2C_3e^{-t} \\ 4C_3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

其中的 te^t 正是二阶Jordan块产生的多项式因子. □

3.1.3 矩阵指数与一般理论

对一般理论, 我们需要引进“矩阵指数”这个概念.

定义 3.1.2 矩阵指数

对方阵 A, 定义其矩阵指数为 $e^{tA}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^kA^k}{k!}$.

先说明这个定义的确给出了一个矩阵. 固定 $R>0$. 当 $|t|\leqslant R$ 时, 对任意相容矩阵范数,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{t^kA^k}{k!}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k|A|^k}{k!}\leqslant e^{R|A|}.$$

因此矩阵级数在 $[-R,R]$ 上一致绝对收敛. 它的逐项导数级数满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{kt^{k-1}A^k}{k!}\right|\leqslant|A|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{R^j|A|^j}{j!}=|A|e^{R|A|},$$

也在该区间上一致收敛, 所以可以逐项求导.

命题 3.1.2 矩阵指数的基本性质

对常矩阵 A 和实数 s,t, 成立如下性质

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A,\qquad e^{(t+s)A}=e^{tA}e^{sA},\qquad (e^{tA})^{-1}=e^{-tA}.$$

若 $A=PJP^{-1}$, 则 $e^{tA}=Pe^{tJ}P^{-1}$.

证明. 逐项求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kt^{k-1}A^k}{k!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^{j+1}}{j!}=A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}=Ae^{tA}.$$

因为 A 与它的每个幂 A^j 交换, 同一个级数也等于 $e^{tA}A$.

两个矩阵级数绝对收敛, 所以其乘积可以按 A 的幂次重新分组. 由二项式定理,

$$e^{tA}e^{sA}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^mA^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^nA^n}{n!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}\frac{t^ms^{k-m}}{m!(k-m)!}\right)A^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t+s)^kA^k}{k!}=e^{(t+s)A}.$$

在这个公式中取 $s=-t$, 由 $e^{0A}=I_d$ 得 $e^{tA}e^{-tA}=e^{-tA}e^{tA}=I_d$, 于是 $(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}$.

最后, 由 $A=PJP^{-1}$, 对任意正整数 k 都有 $A^k=PJ^kP^{-1}$, 代入矩阵指数的级数得到

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kPJ^kP^{-1}}{k!}=P\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kJ^k}{k!}\right)P^{-1}=Pe^{tJ}P^{-1}.$$

□

定理 3.1.3 常系数齐次方程组

初值问题(3.1.1)的唯一整体解是

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0. \tag{3.1.6}$$

所有解构成一个 d 维线性空间, e^{tA} 的各列是由标准基初值产生的一组基解：以 $\mathbb{R}^d$ 的标准基向量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d$ 为初值所得到的解，恰好是矩阵 e^{tA} 的各列；这些列构成齐次方程组的一组**基解**.

证明. 令 $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$. 由矩阵指数的求导公式得 $\boldsymbol{x}'(t) = Ae^{tA}\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}(t)$, 且 $\boldsymbol{x}(0) = e^{0A}\boldsymbol{x}_0 = I_d\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$. 因此这确实给出方程组一个解, 并且它对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义.

下面证明唯一性. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是具有同一初值的两个解, 则 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 满足 $\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}(0) = \mathbf{0}$. 在任意有界区间 $[-R, R]$ 上, 由积分方程得到

$$|\boldsymbol{z}(t)| \leqslant |A| \left| \int_0^t |\boldsymbol{z}(s)| \, \mathrm{d}s \right|.$$

对 $0 \leqslant t \leqslant R$, 令 $u(t) = \int_0^t |\boldsymbol{z}(s)| \, \mathrm{d}s$, 则 $u(0) = 0$, $u(t) \geqslant 0$, 并且 $u'(t) = |\boldsymbol{z}(t)| \leqslant |A|u(t)$. 于是可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-|A|t}u(t)\big) = e^{-|A|t}\big(u'(t) - |A|u(t)\big) \leqslant 0.$$

函数 $e^{-|A|t}u(t)$ 非负且不超过它在 $t = 0$ 时的值 0, 所以 $u(t) = 0$, 进而 $\boldsymbol{z}(t) = \mathbf{0}$.

对 $-R \leqslant t \leqslant 0$, 令 $\mathbf{w}(\tau) = \boldsymbol{z}(-\tau)$, 其中 $0 \leqslant \tau \leqslant R$. 则同理可得 $\mathbf{w}(\tau) = \mathbf{0}$. 这说明 $\boldsymbol{z}(t) = \mathbf{0}$ 对 $[-R, 0]$ 也成立. 由于 R 任意, 唯一性在整个实轴上成立.

记齐次方程组的全体解所组成的线性空间为 $\mathcal{S}$. 映射

$$\mathcal{E} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad \mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(0),$$

是线性的. 唯一性说明它是单射, 而公式 $e^{tA}\boldsymbol{x}_0$ 说明每个 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ 都是某个解在 $t = 0$ 时的值, 所以它是满射. 因此 $\mathcal{S}$ 与 $\mathbb{R}^d$ 线性同构, 从而 $\dim \mathcal{S} = d$. 对标准基初值 $\mathbf{e}_j$ 所得的解是 $e^{tA}\mathbf{e}_j$, 它正是 e^{tA} 的第 j 列, 所以这些列向量构成一组基解. □

注记 3.1.2 (谱与多项式因子). 若某Jordan块对应特征值 λ, 则该块上的解由

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{m-1}e^{\lambda t}$$

组合而成. 因此 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 决定主要指数增长或衰减; 当 $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ 时, Jordan块大小决定是否还有多项式增长. 仅知道特征值而忽略Jordan结构, 在临界情形会得出错误的稳定性判断.

3.1.4 *计算矩阵指数的几种办法

Jordan 标准型给出理论上最统一的公式, 但具体计算时未必总要完整求出过渡矩阵 P 的各个列向量 (即原方阵 A 的特征向量和根向量). 低维矩阵常可利用 Cayley–Hamilton 定理, 把所有高次幂化成少数几个低次幂的线性组合.

命题 3.1.4 2×2矩阵指数的降幂

设 A 是 2×2 实矩阵, 迹为 τ, 行列式为 δ. 则存在标量函数 $a(t), b(t)$, 使 $e^{tA} = a(t)I_2 + b(t)A$.

证明. 矩阵指数 e^{tA} 是矩阵初值问题 $E'(t) = AE(t), \quad E(0) = I_2$ 的唯一解。由 Cayley–Hamilton 定理，A^2 可以表示成 I_2 与 A 的线性组合。因此，左乘 A 会把 I_2, A 张成的线性空间映射到其自身。由于初值 I_2 属于这个空间，这就暗示我们在其中寻找上述矩阵初值问题的解，即“待定系数” $E(t) = a(t)I_2 + b(t)A$, 然后将这一形式代入矩阵方程 $E' = AE$，便可确定标量函数 $a(t), b(t)$ 所应满足的初值问题。

据 Cayley–Hamilton 定理，我们有 $A^2 = \tau A - \delta I_2$. 令 $E(t) = a(t)I_2 + b(t)A$, 其中 $a(t), b(t)$ 为待定的标量函数. 则 $E'(t) = a'(t)I_2 + b'(t)A$. 另一方面，利用 Cayley–Hamilton 关系可得

$$AE(t) = A\big(a(t)I_2 + b(t)A\big) = a(t)A + b(t)A^2 = a(t)A + b(t)\big(\tau A - \delta I_2\big) = -\delta b(t)I_2 + \big(a(t) + \tau b(t)\big)A.$$

因此，只要令 a, b 满足

$$a'(t) = -\delta b(t), \quad b'(t) = a(t) + \tau b(t), \quad a(0) = 1, \quad b(0) = 0,$$

便可保证$E'(t) = AE(t)$, $E(0) = I_2$.

上述关于 a, b 的方程是常系数线性初值问题，因而在$\mathbb{R}$ 上存在唯一解。用这组解定义 $E(t)$，便得到矩阵初值问题 $E'(t) = AE(t)$, $E(0) = I_2$ 的一个解。而矩阵指数 e^{tA} 也满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA}$ 以及 $e^{0A} = I_2$. 更具体地，对于 $\mathbb{R}^2$ 的标准基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$，向量函数 $E(t)\mathbf{e}_j$ 与 $e^{tA}\mathbf{e}_j$ 都满足同一个初值问题

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{e}_j.$$

由线性初值问题解的唯一性，就必有 $E(t)\mathbf{e}_j = e^{tA}\mathbf{e}_j$, $(j = 1, 2)$. 这说明 $E(t)$ 与 e^{tA} 的每一列都相同，故 $e^{tA} = E(t) = a(t)I_2 + b(t)A$. □

例 3.1.5 不用特征向量计算指数

计算如下方阵的矩阵指数

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

解. 特征多项式为 $(\lambda+1)(\lambda+2)$, 所以据 Cayley–Hamilton 定理有$(A+I_2)(A+2I_2)=O$. 由于两个特征值不同, 定义

$$P_{-1}=\frac{A+2I}{1},\qquad P_{-2}=-(A+I),$$

首先我们有 $P_{-1}+P_{-2}=A+2I_2-A-I_2=I_2$, 其次由 $A^2+3A+2I_2=O$ 得知,

$$AP_{-1}=A(A+2I_2)=A^2+2A=-A-2I_2=-P_{-1},\quad AP_{-2}=-2P_{-2}.$$

由幂级数的定义, 对 $j=1,2$ 有

$$e^{tA}P_{-j}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^kP_{-j}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-j)^kt^k}{k!}P_{-j}=e^{-jt}P_{-j}.$$

因此 $e^{tA}=e^{-t}P_{-1}+e^{-2t}P_{-2}=e^{-t}(A+2I)-e^{-2t}(A+I)$, 把 A 代入并合并每个矩阵元素, 得

$$e^{tA}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

在 $t=0$ 时, 右端等于 I_2; 这与矩阵指数的初值一致. □

例 3.1.6　幂零矩阵与剪切

令$N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $N^2=O$, 且 $e^{tN}=I+tN=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$. 它把向量 (x,y) 变成 $(x+ty,y)$, 几何上是剪切而非旋转或伸缩. 所有特征值都为零, 却仍有线性增长; 这再次说明特征值实部皆为零时, 需要额外分析 Jordan 块的具体结构。

注记 3.1.3 (为什么变系数时不能写 $e^{\int A}$). 对标量方程 $x'=a(t)x$, 解是 $x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)x_0$. 矩阵情形只有在 $A(t),A(s)$ 对全体的$s,t\in\mathbb{R}$都可交换时, 才可直接写成 $\Phi(t)=\exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s\right)$. 事实上, 记 $B(t)=\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s$, 若所有 $A(s)$ 两两交换, 则 $B(t)$ 与 $B'(t)=A(t)$ 交换. 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)^k=\sum_{j=0}^{k-1}B(t)^jB'(t)B(t)^{k-1-j}=kB'(t)B(t)^{k-1}.$$

在矩阵指数级数中逐项求导得到

$$\Phi'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)^k=B'(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(t)^{k-1}}{(k-1)!}=A(t)e^{B(t)}=A(t)\Phi(t),$$

并且 $\Phi(t_0)=I_d$, 所以这个公式确实给出标准基解矩阵. 若不同时刻的矩阵不交换, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B^k$ 中各项的次序不能调换, 也就不能合并成 $kB'B^{k-1}$. 例 3.3.2 给出的系数矩阵出现周期切换的实例, 正是这种非交换累积效应的表现. 一般情形应使用基解矩阵或时间有序指数(Peano–Baker 级数), 而不能照搬标量的情况.

习题 3.1

习题 3.1.1. 求解方程组 $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$, 其中系数矩阵 A 分别如下。

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\1&0&4\end{pmatrix}\qquad (3)\ A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

$$(4)\ A=\begin{pmatrix}1&9&1\\0&9&-8\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad (5)\ A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}\qquad (6)\ A=\begin{pmatrix}3&4&-10\\2&1&-2\\2&2&-5\end{pmatrix}$$

习题 3.1.2. 考虑变系数齐次线性方程组的初值问题 $\boldsymbol{x}'(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$. 其中 $A(t)=[a^{ij}(t)]_{d\times d}$ 各个元素都是有界连续函数。

(1) 若全体a^{ij}皆为非负函数，且初值$\boldsymbol{x}^0$的各分量也非负，证明解的各个分量保持非负。

(2) 若把(1)的条件改为对全体$i\neq j$有a^{ij}皆为非负函数，其它条件不变，则(1)的结论是否成立?

习题 3.1.3. 设方阵 A 满足 $A^3=A$. 不求特征向量，直接用幂级数证明 $e^{tA}=I+\sinh t\,A+(\cosh t-1)A^2$, 据此写出 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 解的表达式 (可以包含 I,A,A^2).

习题 3.1.4. 对复方阵 A, 定义 $s(A)$ 为 A 全体特征值实部的最大值。

(1) 证明：对任意 $\varepsilon>0$，存在与 ε 有关的常数 $C_\varepsilon>0$ 使得对任意 $t\geqslant 0$ 成立 $\|e^{tA}\|\leqslant C_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t}$.

(2) 证明：存在不依赖 ε 的常数 $C>0$ 使得对任意 $t\geqslant 0$ 成立 $\|e^{tA}\|\leqslant Ce^{s(A)t}$，当且仅当全体满足 $\mathbf{Re}\,\lambda=s(A)$ 特征值所对应的 Jordan 块均为一阶。

(3) 证明：$\sup\limits_{t\geqslant 0}\|e^{tA}\|<+\infty$ 当且仅当 A 的全体特征值实部皆为非正，且全体实部为零的特征值对应的 Jordan 块皆为一阶。

注：这里的矩阵范数定义为 $\|M\|=\sup\limits_{|\boldsymbol{x}|=1}|M\boldsymbol{x}|$，它满足 $|M\boldsymbol{x}|\leqslant\|M\||\boldsymbol{x}|$, $\|MN\|\leqslant\|M\|\|N\|$ 以及 $\|M+N\|\leqslant\|M\|+\|N\|$. 本题应先对单个 Jordan 块讨论，并用到命题3.1.1的结论。

3.2 非齐次线性方程组

3.2.1 基解矩阵与Wronski行列式

先考虑系数矩阵 $A(t)$ 连续情况下的齐次方程组

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}. \tag{3.2.1}$$

定义 3.2.1 基解矩阵

若矩阵函数 $\Phi(t)$ 满足$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ 并且对某个 t 可逆, 则称 Φ 为系统(3.2.1)的基解矩阵. 其行列式 $W(t) = \det\Phi(t)$ 称为Wronski行列式 (Wronskian).

给定 t_0, 分别以标准基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 为初值求解, 把所得解作为列向量排列, 就得到满足 $\Phi(t_0) = I_d$ 的标准基解矩阵.

定理 3.2.1 Liouville公式

对齐次线性系统(3.2.1), 若矩阵函数 Φ 满足 $\Phi' = A(t)\Phi$, 则

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{Tr}A(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{3.2.2}$$

所以若 $\Phi(t_0)$ 可逆, 则 $\Phi(t)$ 在整个系数连续区间上都可逆.

证明. 对任意 $d\times d$ 方阵 $X = (x_{ij})$, 记 C_{ij} 为元素 x_{ij} 的代数余子式, 记 $X^* = (C_{ji})$ 为 X 的伴随矩阵. 它满足 $XX^* = X^*X = (\det X)I_d$.

为了不预先假定 $\Phi(t)$ 可逆, 我们使用 $\Phi(t)^*$. 由行列式的一行一列展开式以及对各个矩阵元素求导的链式法则得到

$$\frac{\partial\det X}{\partial x_{ij}} = C_{ij} = (X^*)_{ji} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) = \operatorname{Tr}\left(\Phi(t)^*\Phi'(t)\right).$$

这只使用了行列式是矩阵元素的多项式, 所以在 $\Phi(t)$ 不可逆时仍然成立. 由 $\Phi' = A\Phi$, 结合 $\Phi\Phi^* = (\det\Phi)I_d$ 以及 $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi = \operatorname{Tr}\left(\Phi^*A\Phi\right) = \operatorname{Tr}\left(\Phi\Phi^*A\right) = \operatorname{Tr}\left((\det\Phi)A\right) = (\operatorname{Tr}A)\det\Phi.$$

记 $W(t) = \det\Phi(t)$. 上式是标量线性方程 $W'(t) = (\operatorname{Tr}A(t))W(t)$. 用积分因子求解得

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{Tr}A(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

这就得到了(3.2.2). 若 $\Phi(t_0)$ 可逆, 则 $W(t_0)\neq 0$. 指数函数永远为正, 因而对系数定义区间内的每个 t 都有 $W(t)\neq 0$, 也就是 $\Phi(t)$ 处处可逆. □

推论 3.2.2 基解矩阵之间的关系

若 Φ,Ψ 是齐次方程组(3.2.1)的两个基解矩阵, 则存在常可逆矩阵 C, 使 $\Psi(t)=\Phi(t)C$.

证明. 对 $C(t)=\Phi(t)^{-1}\Psi(t)$ 求导:

$$C'=-\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}\Psi+\Phi^{-1}\Psi'=-\Phi^{-1}A\Psi+\Phi^{-1}A\Psi=0.$$

因此 $C(t)$ 与 t 无关, 记这个常矩阵为 C. 又因为 $\Phi(t)$ 与 $\Psi(t)$ 对每个 t 都可逆, 所以$C=\Phi(t)^{-1}\Psi(t)$ 也是可逆矩阵; 事实上 $C^{-1}=\Psi(t)^{-1}\Phi(t)$. 最后将上式左乘 $\Phi(t)$, 便得到 $\Psi(t)=\Phi(t)C$. □

3.2.2 常数变易法、传播子与增长估计

考虑非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t). \tag{3.2.3}$$

若 Φ 是对应齐次方程组(3.2.1)的基解矩阵, 则我们引进待定函数 $\mathbf{c}(t)$, 即假设非齐次方程组的解具有形式 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\mathbf{c}(t)$. 将该式代入并利用 $\Phi'=A\Phi$, 得到

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t)=\boldsymbol{g}(t)\ \Rightarrow\ \mathbf{c}'(t)=\Phi(t)^{-1}\boldsymbol{g}(t).$$

定理 3.2.3 常数变易公式

设 $A(t),\boldsymbol{g}(t)$ 连续, I 是非退化区间, $t_0\in I$. 则初值问题 $\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$在 I 上的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.2.4}$$

若 A 是常矩阵并取 $\Phi(t)=e^{tA}$, 则

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.2.5}$$

证明. 令 $\boldsymbol{x}=\Phi\mathbf{c}$. 用乘积法则求导, 并使用 $\Phi'=A\Phi$, 得

$$\boldsymbol{x}'=\Phi'\mathbf{c}+\Phi\mathbf{c}'=A\Phi\mathbf{c}+\Phi\mathbf{c}'=A\boldsymbol{x}+\Phi\mathbf{c}'.$$

因此 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}$ 当且仅当 $\Phi\mathbf{c}'=\boldsymbol{g}$. 由于 $\Phi(t)$ 处处可逆, 所以 $\mathbf{c}'(t)=\Phi(t)^{-1}\boldsymbol{g}(t)$. 从 t_0 积分到 t, 我们得到

$$\mathbf{c}(t)=\Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

这里使用了初值条件 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{c}(t_0)$, $\mathbf{c}(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$. 在 $\mathbf{c}(t)$ 的表达式两边左乘 $\Phi(t)$, 就得到(3.2.4).

若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 满足同一非齐次方程和同一初值, 则 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 满足 $\boldsymbol{z}' = A(t)\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}(t_0) = \mathbf{0}$. 齐次线性初值问题的唯一性给出 $\boldsymbol{z} \equiv \mathbf{0}$, 所以上面所得的解是唯一的.

常系数时, 取 $\Phi(t) = e^{tA}$. 由矩阵指数的半群性质, $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = e^{tA}e^{-t_0A} = e^{(t-t_0)A}$ 以及 $\Phi(t)\Phi(s)^{-1} = e^{tA}e^{-sA} = e^{(t-s)A}$, 把这两个等式代入(3.2.4), 就得到(3.2.5). □

对齐次方程组(3.2.1), 我们定义从时刻 s 到时刻 t 的**传播子 (propagator)** 为 $U(t,s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, 也称传播矩阵. 若齐次方程的解满足 $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}_s$, 则 $\boldsymbol{x}(t) = U(t,s)\boldsymbol{x}_s$. 因此, $U(t,s)$ 确实把时刻 s 的状态传播到时刻 t. 它满足

$$U(t,r)U(r,s) = \Phi(t)\Phi(r)^{-1}\Phi(r)\Phi(s)^{-1} = \Phi(t)\Phi(s)^{-1} = U(t,s),$$
$$U(s,s) = \Phi(s)\Phi(s)^{-1} = I_d,$$

表达式(3.2.4)可写成

$$\boldsymbol{x}(t) = U(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

注记 3.2.1. 基解矩阵把线性方程组的全部齐次解同时装进一个矩阵. 若 $\Phi = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_d)$, 那么每一列$\boldsymbol{x}_j$ 都是解, 而任意齐次方程的解都可写作 $\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_d\boldsymbol{x}_d(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$, 且这种写法是唯一的, 这是因为 $\Phi(t_0)$ 可逆: 在某个时刻知道解的值, 便可唯一地决定系数 $\mathbf{c} = \Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}(t_0)$. 因此, 基解矩阵的各列只要在一个时刻线性无关, 就自动推出它们在每个时刻都线性无关. 这正是定理3.2.1的Liouville公式蕴含的事实.

对非齐次方程组(3.2.3), 传播子 $U(t,s)$ 也准确地记录了时刻 s 的强迫对时刻 t 的影响. 例如, 当 $t \geqslant t_0$ 且初值为零时, 我们有

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^{t} U(t,s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

积分变量 s 只在 $[t_0, t]$ 中取值, 因而时刻 t 的状态只使用了不晚于 t 的强迫项数据. 这就是Duhamel公式的因果性.

若要在初值时刻以前求解, 同一个传播子仍然适用, 只需保留常数变易公式中积分的方向:

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^{t} U(t,s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{t}^{t_0} U(t,s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t < t_0.$$

因此, 传播子是对任意时间顺序都有定义的双参数矩阵, 不需要再引入另一个分段定义的积分核.

例 3.2.1 非齐次Jordan系统中的共振

求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}.$$

解. 系数矩阵 A 可以写作 $A = I_2 + N$, 而 I_2, N 可交换且 $N^2 = 0$, 所以我们可以计算出齐次方程组的传播子为

$$e^{tA} = e^{t(I_2+N)} = e^{tI_2}e^{tN} = e^t\left(I_2 + tN + \frac{N^2}{2!} + \cdots\right) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由Duhamel原理得,

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} e^{s} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = e^t \int_0^t \begin{pmatrix} t-s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = e^t \begin{pmatrix} \int_0^t (t-s)\,\mathrm{d}s \\ \int_0^t 1\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix}.$$

从解的表达式可见强迫项与齐次增长率 e^t 共振, 而Jordan标准型不可对角化再增加一次 t 的幂次. □

例 3.2.2 旋转系统受恒力作用

求解

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}.$$

解. 记 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 因为 $A^2 = -I_2$, 把矩阵指数级数中的偶次幂和奇次幂分开, 得

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I_2\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= I_2 \cos t + A \sin t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

应用Duhamel公式, 并令 $r = t - s$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) \\ \sin(t-s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos r \\ \sin r \end{pmatrix} \mathrm{d}r = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

解轨道是以 $(0,1)$ 为圆心, 半径为 1 的圆, 而不是无界漂移. □

现在我们证明常系数的非齐次线性方程组的增长估计, 其证明过程与标量方程基本无异.

命题 3.2.4 线性系统的先验估计

设 $\boldsymbol{x}$ 是非齐次方程组(3.2.3)在 $[t_0, T]$ 上满足 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解. 且存在常数 $K > 0$ 和非负连续函数 $g(t)$ 使得 $|A(t)| \leqslant K$, $\quad |\boldsymbol{g}(t)| \leqslant g(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上成立. 则解满足

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant e^{K(t-t_0)} \left(|\boldsymbol{x}_0| + \int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}s \right), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.2.6}$$

这说明, 连续系数线性方程组的解在每个有界时间区间上都有界, 因而不会在有限时间爆破.

证明. 由积分方程得

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant |\boldsymbol{x}_0| + \int_{t_0}^t K|\boldsymbol{x}(s)|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}s.$$

令上式右边为 $y(t)$, 则 $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant y(t)$. 同时, $y'(t) = K|\boldsymbol{x}(t)| + g(t) \leqslant Ky(t) + g(t)$. 直接求解可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-K(t-t_0)}y(t)\right) = e^{-K(t-t_0)}\big(y'(t) - Ky(t)\big) \leqslant e^{-K(t-t_0)}g(t).$$

从 t_0 积分到 t, 并使用 $y(t_0) = |\boldsymbol{x}_0|$, 得

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant y(t) \leqslant e^{K(t-t_0)}|\boldsymbol{x}_0| + \int_{t_0}^t e^{K(t-s)}g(s)\,\mathrm{d}s.$$

对积分中的 $s \in [t_0, t]$, 有 $e^{K(t-s)} \leqslant e^{K(t-t_0)}$, 所以

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant e^{K(t-t_0)}|\boldsymbol{x}_0| + e^{K(t-t_0)}\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}s = e^{K(t-t_0)}\left(|\boldsymbol{x}_0| + \int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

□

本节最后, 我们来看如何将一阶线性方程组的理论用来求解二阶线性方程, 同时源项与齐次方程解的“共振”现象也有所体现.

例 3.2.3 二阶受迫振子的一阶系统表示

求解二阶受迫振子的方程 $x'' + \omega^2 x = f(t)$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. 其中 $\omega > 0$.

解. 令 $\boldsymbol{x} = (x, v)^{\mathsf{T}}$, 其中 $v(t) := x'(t)$, 则我们得到非齐次的一阶线性方程组

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

记系数矩阵为 A. 由 $A^2 = -\omega^2 I_2$, 把 e^{tA} 的偶次幂和奇次幂分开, 传播矩阵为

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

取 Duhamel 公式的第一分量, 得到

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big) f(s) \, \mathrm{d}s. \tag{3.2.7}$$

这正是第五章二阶方程常数变易公式. 方程组方法不仅能求解, 还解释了公式中正弦核的来源. □

例 3.2.4 常力与共振力的区别

在 (3.2.7) 中取零初值, 源项分别取成 $f(t) = 1$ 和 $f(t) = \cos \omega t$, 讨论解的长时间行为.

解. 若 $f(t) \equiv 1$, 则

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big) \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega r) \, \mathrm{d}r = \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2},$$

所得到的解关于t是一致有界的. 若 $f(t) = \cos \omega t$, 先将积分核展开:

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big) \cos \omega s \, \mathrm{d}s = \frac{\sin \omega t}{\omega} \int_0^t \cos^2 \omega s \, \mathrm{d}s - \frac{\cos \omega t}{\omega} \int_0^t \sin \omega s \cos \omega s \, \mathrm{d}s.$$

由

$$\int_0^t \cos^2 \omega s \, \mathrm{d}s = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}, \qquad \int_0^t \sin \omega s \cos \omega s \, \mathrm{d}s = \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega},$$

得

$$x(t) = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t + \frac{\sin \omega t \sin 2\omega t}{4\omega^2} - \frac{\cos \omega t \sin^2 \omega t}{2\omega^2} = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t.$$

最后一个等号使用了 $\sin 2\omega t = 2\sin\omega t\cos\omega t$, 后两项正好抵消. 后者含有线性增长的久期项. 本例第二个情况产生的无限时间增长并不是系数矩阵造成的, 而是源项f的“强迫频率”恰好与齐次部分的振动频率重合; 第六章会把它解释为周期边值算子的不可逆性. □

习题 3.2

习题 3.2.1. 求解方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)$, 其中系数矩阵 A, 源项 $\boldsymbol{f}$, 初值 $\boldsymbol{x}(0)$ 分别如下。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 16 & 14 & 38 \\ -9 & -7 & -18 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \tan^2 t - 1 \\ \tan t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

习题 3.2.2. 设常系数方阵 A 的全体特征值的实部皆为负，设向量值连续函数 $\boldsymbol{g}$ 有界。令

$$\boldsymbol{x}_b(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A}\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明如下结论。

(1) 定义 $\boldsymbol{x}_b$ 的积分绝对收敛，且是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t)$ 的一个有界整体解。（提示：用习题 3.1.4.）

(2) (1) 中所述的方程组在$\mathbb{R}$上的有界整体解是唯一的。

(3) 若 $\boldsymbol{g}$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数，则 $\boldsymbol{x}_b$ 也是。

(4) (1) 中所述的方程组的其他任意阶 $\boldsymbol{x}(t)$ 都满足：当 $t \to +\infty$ 时，成立 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_b(t)| \to 0$.

习题 3.2.3. 设 $A(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 是连续系数方阵，且 $\int_0^{+\infty} \|A(t)\|\,\mathrm{d}t < +\infty$. 设 Φ 是满足 $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = I_d$ 的标准基解矩阵。证明 $\Phi(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致有界，且存在可逆方阵 Φ_∞ 使得当 $t \to +\infty$ 时有 $\|\Phi(t) - \Phi_\infty\| \to 0$. 进而该齐次方程组的每个解都有极限，且从初值映射到极限值的映射是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性同构。

3.3 *周期系数线性方程组

本节我们考虑具有周期系数的一阶线性常微分方程组，并假定系数矩阵也是连续的.

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad A(t + T) = A(t). \tag{3.3.1}$$

一个常见误解是计算 $A(t)$ 的特征值即可判断其长时间稳定性, 但事实并非如此. 另一方面, 非自治方程组的系数矩阵在不同时刻通常不交换, 长期行为不是由瞬时特征值简单积分确定.

3.3.1 两个反例

在之前讨论的常系数情况中, 如果系数矩阵的特征值都是负的, 那么对应齐次问题的解应当具有某种指数衰减, 进而长时间稳定. 但对周期系数的情况并不成立, 我们先来看一个瞬时特征值不决定长时间稳定性的例子.

例 3.3.1 瞬时谱不决定稳定性

考查周期系数方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$, 其中 $A(t)$ 是如下2π-周期的连续系数矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t\cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t\cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

解. 对任意 t，有 $\operatorname{Tr} A(t) = -1/2, \det A(t) = 1/2$, 因此 $A(t)$ 的两个特征值恒为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$.

但另一方面, 直接计算可验证如下矩阵 $X(t)$ 是该方程组的基解矩阵

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{t/2}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} \Rightarrow X'(t) = A(t)X(t), \qquad X(0) = I.$$

于是当方程组初值设定为 $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ 时, 我们可以求得解为

$$x_1(t) = ae^{t/2}\cos t + be^{-t}\sin t, \quad x_2(t) = -ae^{t/2}\sin t + be^{-t}\cos t.$$

□

这个例子表明周期系数系统的稳定性不由 $\sigma(A(t))$ 决定 (实际上它是由一个周期之后的映射决定). 接下来我们再看一个由于系数矩阵在不同时刻不交换而产生的反例.

例 3.3.2 稳定矩阵的周期切换可以不稳定

考虑周期方程组

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}, \tag{3.3.2}$$

其周期为 $T=2$. 对每个 $k\in\mathbb{Z}$, 定义

$$A(t)=\begin{cases}A_1, & 2k\leqslant t<2k+1,\\ A_2, & 2k+1\leqslant t<2k+2,\end{cases}\qquad A_1=\begin{pmatrix}-1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ a & -1\end{pmatrix}.$$

这里把切换时刻的矩阵值任意指定为 A_1 或 A_2, 都不改变解. 系数矩阵是周期的分段连续函数, 而不是连续函数.

本例使用线性方程在分段连续系数下的通常解概念: 解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在整个实轴上连续, 在每个开区间 $(2k,2k+1)$, $(2k+1,2k+2)$ 内连续可微并满足微分方程; 到达切换时刻时, 以前一段解的终值作为后一段解的初值. 因此解在切换点两侧取同一个值, 但导数可以发生跳跃. 据此, 我们逐段使用常系数线性初值问题的唯一性, 就可得到整个实轴上的唯一连续解.

解. 两个矩阵的特征多项式都是 $(\lambda+1)^2$, 所以每个时刻的矩阵只有特征值 -1. 令

$$N_1=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad N_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}.$$

由 $N_1^2=N_2^2=O$, 所以

$$e^{A_1}=e^{-1}(I_2+N_1)=e^{-1}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad e^{A_2}=e^{-1}(I_2+N_2)=e^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}.$$

按照前面对传播子的定义, 在第一个时间段和第二个时间段上分别有 $U(1,0)=e^{A_1}$, $U(2,1)=e^{A_2}$. 据传播子的复合公式有 $U(2,0)=U(2,1)U(1,0)=e^{A_2}e^{A_1}$. 也就是说, 对方程组(3.3.2)任意给定的初值, 有 $\boldsymbol{x}(2)=U(2,0)\boldsymbol{x}(0)$. 因此定义一个周期的传播矩阵为 $M=U(2,0)$. 由上面的计算得到

$$M=e^{A_2}e^{A_1}=e^{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=e^{-2}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & a^2+1\end{pmatrix}.$$

取 $a=4$. 记括号内的矩阵为 K, 则 $\det(\lambda I_2-K)=\lambda^2-18\lambda+1$, 解得 K 的特征值是 $9\pm4\sqrt{5}$. 由 $k!\geqslant 2^{k-1}(k\geqslant 2)$, 并且当 $k\geqslant 4$ 时不等号严格成立, 所以

$$e=1+1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}<2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=3.$$

所以 $e^2 < 9 < 9+4\sqrt{5}$. 故 M 的谱半径(即特征值模长的上确界) $\rho(M) = e^{-2}(9+4\sqrt{5}) > 1$. 取 M 对应于特征值 $e^{-2}(9+4\sqrt{5})$ 的特征向量作为初值, 则解每过一个周期都乘以一个大于 1 的数. 因此该解增长, 尽管每个瞬时矩阵的特征值实部都等于 -1. 这个例子表明, 不同时刻的矩阵不交换时, 稳定性由传播矩阵的有序乘积决定, 而不是由瞬时特征值决定. □

3.3.2 单值矩阵与Floquet定理

周期系数使标准基解矩阵在相隔一个周期的时刻之间满足下面的关键恒等式.

命题 3.3.1 一个周期后的演化

设 Φ 是周期系数方程组(3.3.1)满足$\Phi(0) = I_d$的标准基解矩阵, 则$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$.

证明. 矩阵函数 $\Psi(t) = \Phi(t+T)$ 满足 $\Psi'(t) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t)$. 而 $\Theta(t) = \Phi(t)\Phi(T)$ 也满足 $\Theta' = A(t)\Theta$, 并且 $\Psi(0) = \Phi(T) = \Theta(0)$, 由线性方程组的唯一性得到 $\Psi = \Theta$. □

定义 3.3.1 单值矩阵与Floquet乘子

对周期系统(3.3.1), 矩阵$M = \Phi(T) = U(T,0)$称为以 0 为基点的**单值矩阵** (monodromy matrix). 它的特征值$\mu_1, \dots, \mu_d$ 称为Floquet乘子.

注意, 单值矩阵(在相差相似变换的意义下)和Floquet乘子与基解矩阵和初始时间t_0的选取都无关. 事实上若改用另一个基解矩阵 $\Psi(t) = \Phi(t)C$, 则 $\Psi(T)\Psi(0)^{-1} = \Phi(T)CC^{-1} = M$. 若把初始时间改为 t_0, 则一个周期后的传播矩阵为$\Phi(t_0+T)\Phi(t_0)^{-1} = \Phi(t_0)M\Phi(t_0)^{-1}$, 所以只相差一个相似变换, 特征值不变.

定理 3.3.2 Floquet定理

在复数域上, 周期系统(3.3.1)的基解矩阵可以写成$\Phi(t) = P(t)e^{tB}$, 其中 $P(t+T) = P(t)$, B 是常矩阵. 并且$e^{TB} = M$.

证明. 由定理3.2.1的Liouville公式(3.2.2)知$\det M \neq 0$, 所以 M 可逆, 它的每个特征值都不为零. 在复数域上将 M 化为Jordan标准型 $M = SJS^{-1}$, 考虑 J 中的一个Jordan块

$$J_m(\mu) = \mu I_m + N = \mu\left(I_m + \frac{N}{\mu}\right), \qquad N^m = O.$$

选取一个复数 ℓ_μ, 使 $e^{\ell_\mu} = \mu$, 并定义

$$L_m(\mu) = \ell_\mu I_m + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{N}{\mu}\right)^k.$$

则有$\exp(\log(1+z)) = 1+z$作为形式幂级数成立. 代入$z = N/\mu$时, 所有次数大于或等于 m 的项都

因 $N^m = O$ 而被消去, 所以只出现有限次矩阵加法和乘法. 由此可得

$$e^{L_m(\mu)} = e^{\ell_\mu I_m} \exp\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{N}{\mu}\right)^k\right) = \mu I_m \left(I_m + \frac{N}{\mu}\right) = J_m(\mu).$$

将各个 $L_m(\mu)$ 按照 J 的分块方式组成矩阵 L, 并令 $B = \frac{1}{T} SLS^{-1}$, 由矩阵指数在相似变换下的性质可得 $e^{TB} = Se^L S^{-1} = SJS^{-1} = M$.

下面定义$P(t) = \Phi(t)e^{-tB}$, 现在我们用 $\Phi(t+T) = \Phi(t)M$ 和 $M = e^{TB}$ 即可推出 P 的周期性.

$$P(t+T) = \Phi(t)Me^{-(t+T)B} = \Phi(t)e^{TB}e^{-tB}e^{-TB} = P(t).$$

上式中我们调换了 e^{-tB} 与 e^{-TB} 的次序, 这是因为它们都是同一个矩阵 B 的函数. 现在再由 $P(t) = \Phi(t)e^{-tB}$ 右乘e^{tB} 就得到得 $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$. □

注记 3.3.1. 实周期系统总可在复数域使用上述表示. 要同时要求 P, B 都为实矩阵, 需要单值矩阵具有实对数, 这并非对每个实可逆矩阵都成立. 而长时间稳定性判断只依赖Floquet乘子, 不受这一技术点影响.

接下来我们介绍如何通过 Floquet 乘子来判断周期系数的一阶线性方程组是否有长时间稳定性. 先介绍定义

定义 3.3.2 周期系数方程组的稳定性

对周期系数方程组(3.3.1)的零解

- 我们称零解是**稳定**的, 是指对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|\boldsymbol{x}(0)| < \delta$ 就有 $|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$ 对任意 $t \geqslant 0$ 成立.
- 我们称零解是**渐近稳定**的, 是指零解稳定, 且存在 $\delta > 0$ 使得只要 $|\boldsymbol{x}(0)| < \delta$ 就有 $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$.
- 我们称零解是**指数渐近稳定**的, 是指存在常数 $C > 0, \gamma > 0$ 使每个解都满足 $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Ce^{-\gamma t}|\boldsymbol{x}(0)|$ 对任意 $t \geqslant 0$ 成立.
- 我们称零解是**不稳定**的, 是指存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使对任意 $\delta > 0$, 都能找到一个满足 $|\boldsymbol{x}(0)| < \delta$ 的解以及某个 $t > 0$, 使得 $|\boldsymbol{x}(t)| \geqslant \varepsilon_0$.

接下来证明Floquet稳定性判定准则

定理 3.3.3 Floquet稳定性判定准则

对周期线性方程组(3.3.1):

(1) 若所有Floquet乘子满足 $|\mu_j| < 1$, 则存在 $C, \gamma > 0$, 使得每个解都满足 $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Ce^{-\gamma t}|\boldsymbol{x}(0)|$ 对全体 $t \geqslant 0$ 都成立.

(2) 若存在 $|\mu_j| > 1$, 则对任意 $\delta > 0$, 都存在初值满足 $|\boldsymbol{x}(0)| < \delta$, 而对应的解在时刻 nT 沿某

个子列趋于无穷, 从而零解不稳定.

(3) 若所有 $|\mu_j| \leqslant 1$, 且模长为1的乘子在Jordan标准型中都只有一阶Jordan块, 则所有解都一致有界; 若某个模长为1的乘子具有非平凡Jordan块, 则存在多项式增长解.

证明. 先计算一个Jordan块的幂. 设$J_m(\mu) = \mu I_m + N$, $N^m = O$. 当 $\mu \neq 0$ 时, 据二项式定理有

$$J_m(\mu)^n = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \mu^{n-k} N^k. \tag{3.3.3}$$

而当 $\mu = 0$ 时, 对所有 $n \geqslant m$ 有 $J_m(0)^n = O$.

情况一：全体乘子的模都小于 1. 此时选取 q, 使 $\max_{1\leqslant j\leqslant d} |\mu_j| < q < 1$. 现在对任意 $0 \leqslant r < 1$ 和非负整数 k, 数列 $n^k r^n$ 有界, 这是因为有限项之后开始单调递减; 当 $r = 0$ 时, $n^k r^n = 0$ 对所有 $n \geqslant 1$ 成立, 同样得到有界性.

现在对(3.3.3)中的每一项取$r = |\mu|/q < 1$, 并使用 $\binom{n}{k} \leqslant n^k/k!$, 得到存在与 n 无关的常数 C, 使得 $|J_m(\mu)^n| \leqslant Cq^n$ 成立. 今将所有Jordan块组合起来, 再乘以Jordan标准型的过渡矩阵及其逆矩阵, 得 $|M^n| \leqslant Cq^n$.

现在我们回到方程组本身的演化, 对任意时间$t \geqslant 0$, 它可以唯一写成 $t = nT + s$, 其中 n 是自然数, $0 \leqslant s < T$. 现在把命题3.3.1反复使用 n 次, 就得到 $\Phi(t) = \Phi(s + nT) = \Phi(s)M^n$. 连续函数 $|\Phi(s)|$ 在紧区间 $[0, T]$ 上有最大值 C_0. 因此对任意初值 $\boldsymbol{x}_0$,

$$|\boldsymbol{x}(t)| = |\Phi(t)\boldsymbol{x}_0| \leqslant C_0 C q^n |\boldsymbol{x}_0| \leqslant C_0 C e^{\gamma T} e^{-\gamma t} |\boldsymbol{x}_0|,$$

总是可以成立的, 例如我们取 $\gamma = -T^{-1} \log q > 0$, 就得到 $q^n = e^{-\gamma nT} \leqslant e^{\gamma T} e^{-\gamma t}$. 这证明了第一条.

情况二：存在至少一个Floquet乘子的模长大于 1. 若 $M\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ 且 $|\mu| > 1$, 先设 $\mu, \mathbf{v}$ 都是实的. 给定任意初值半径 $\delta_0 > 0$, 取正数 c 使 $0 < c|\mathbf{v}| < \delta_0$. 以 $c\mathbf{v}$ 为初值, 在整数个周期时刻有

$$\boldsymbol{x}(nT) = cM^n\mathbf{v} = c\mu^n\mathbf{v} \;\Rightarrow\; |\boldsymbol{x}(nT)| = c|\mu|^n|\mathbf{v}| \longrightarrow +\infty.$$

若 μ 或 $\mathbf{v}$ 不是实的, 令复解的初值为 $c\mathbf{v}$, 并拆分实部、虚部得到 $c\mu^n\mathbf{v} = \boldsymbol{x}_1(nT) + i\boldsymbol{x}_2(nT)$, 其中 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是两个实方程组的实解. 对任意自然数 n, 我们有

$$|\boldsymbol{x}_1(nT)|^2 + |\boldsymbol{x}_2(nT)|^2 = c^2|\mu|^{2n}|\mathbf{v}|^2.$$

所以至少存在一个指标 $j \in \{1, 2\}$ 在无穷多个整数 n 上满足 $|\boldsymbol{x}_j(nT)| \geqslant \frac{c}{\sqrt{2}}|\mu|^n|\mathbf{v}|$, 对应的实值解沿这个整数子列趋于无穷. 再把 c 取得更小, 可使它的实初值模小于任意给定的δ_0. 这证明了第二条.

情况三：所有 $|\mu_j| \leqslant 1$ 若所有模长为1的特征值对应的Jordan块都是一阶. 对 $|\mu| < 1$ 的块, 前面的计算说明其幂有界; 对一阶Jordan块 (μ), 我们有$|\mu^n| = 1$. 因此 $|M^n|$ 一致有界, 再由 $\Phi(t) = \Phi(s)M^n$ 可知所有解有界.

若某个 $|\mu|=1$ 对应的Jordan块至少是二阶的, 在该块的前两个坐标上取第二个标准基向量 $\mathbf{e}_2$. 由(3.3.3), 我们计算得 $J_m(\mu)^n\mathbf{e}_2=\mu^n\mathbf{e}_2+n\mu^{n-1}\mathbf{e}_1$. 右端的范数至少按 n 的量级增长. 通过Jordan过渡矩阵把该向量变回原坐标, 就得到原方程组的一个多项式增长解. □

3.3.3 Mathieu方程与参数共振

考虑刚度 $q(t)$ 随时间变化的振子运动方程 $x''+q(t)x=0$. 如果 q 是常数, 则可以证明机械能守恒. 如果 q 随时间改变, 定义瞬时能量

$$E(t):=\frac{1}{2}x'(t)^2+\frac{1}{2}q(t)x(t)^2\ \Rightarrow\ E'(t)=x'(t)x''(t)+\frac{1}{2}q'(t)x(t)^2+q(t)x(t)x'(t)=\frac{1}{2}q'(t)x(t)^2.$$

因此, 改变刚度的人或装置对振子所作的功**取决于改变刚度的时刻**. 若在 $x(t)^2$ 较大时增大刚度, 而在 $x(t)^2$ 较小时减小刚度, 一个周期内的净能量输入就可能为正. 这就是“周期改变振子的刚度可能持续注入能量”的准确含义. 一个典例就是Mathieu方程

$$x''+\big(\omega_0^2+\varepsilon\cos(2t)\big)x=0. \tag{3.3.4}$$

例如人在秋千运动频率的两倍附近周期改变重心, 就可能使振幅增长; 这不是外力与振子同频的普通共振, 而是**参数共振**.

命题 3.3.4 Mathieu方程的主参数共振

对Mathieu方程(3.3.4)取$\omega_0=1$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得当 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时, 该方程存在一个Floquet乘子的模长严格大于 1, 进而存在非零实解以及常数 $c>0,\gamma>0$, 使得该解在整数个周期的时刻满足

$$|x(n\pi)|+|x'(n\pi)|\geqslant ce^{\gamma n},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

我们先简要叙述证明思路。首先，当 $\varepsilon=0$ 时，方程退化为 $x''+x=0$. 由于系数 $\cos 2t$ 的周期是 π，我们就以 π 作为 Floquet 周期。无扰动方程经过一个周期后，$x(\pi)$恰好变成原来$x(0)$的相反数，因此两个 Floquet 乘子都是 -1，模长均为1，属于临界情形。为了判断小的周期扰动会使这两个 Floquet 乘子如何移动，我们通过旋转坐标消去无扰动方程产生的快速振荡。在新的坐标中，方程只剩下一个大小为 ε 的周期系数项。随后计算这一“慢变量”在一个周期内的演化矩阵，并最终会得到 $\Psi_\varepsilon(\pi)=I_2+\varepsilon\pi\overline{B}+O(\varepsilon^2)$. 这里的矩阵 $\overline{B}$ 有一正一负两个特征值。因此，当 $\varepsilon\neq 0$ 充分小时，单周期映射的两个特征值一个大于 1，另一个小于 1，从而产生指数增长方向。

证明. 现在给出严格证明。固定一个充分小的非零实数 ε。将 Mathieu 方程写成一阶系统。令

$\boldsymbol{y}(t)=(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}'(t))^{\top}$, 则

$$\boldsymbol{y}'(t)=\big(A_0+\varepsilon A_1(t)\big)\boldsymbol{y}(t),\quad A_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad A_1(t)=\begin{pmatrix}0&0\\-\cos 2t&0\end{pmatrix}.$$

而对应的无扰动方程组$\boldsymbol{y}'=A_0\boldsymbol{y}$ 的标准基解矩阵为

$$R(t)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}.$$

现在作相空间上的坐标变换

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\x'(t)\end{pmatrix}=R(t)\boldsymbol{z}(t),\quad \boldsymbol{z}(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$$

则有 $x(t)=a(t)\cos t+b(t)\sin t$ 以及 $x'(t)=-a(t)\sin t+b(t)\cos t$ 来唯一确定 $a(t)$ 与 $b(t)$，故不存在变参数表示的不唯一性。这个坐标变换的作用，是将无扰动方程本身的旋转运动从解中分离出去。注意这里自动要求了 $a(t),b(t)$ 应当满足相容性条件 $a'(t)\cos t+b'(t)\sin t=0$.

将 $\boldsymbol{y}=R\boldsymbol{z}$ 代入原方程，结合$R'(t)=A_0R(t)$ 可得 $R'(t)\boldsymbol{z}(t)+R(t)\boldsymbol{z}'(t)=\big(A_0+\varepsilon A_1(t)\big)R(t)\boldsymbol{z}(t)$. 利用 $R'=A_0R$ 消去无扰动部分，再在等式两边左乘 $R(t)^{-1}$ 便得到精确的振幅方程 $\boldsymbol{z}'(t)=\varepsilon B(t)\boldsymbol{z}(t)$, 其中

$$B(t)=R(t)^{-1}A_1(t)R(t)=\begin{pmatrix}\sin t\cos t\cos 2t&\sin^2 t\cos 2t\\-\cos^2 t\cos 2t&-\sin t\cos t\cos 2t\end{pmatrix}.$$

注意到 $B(t)$ 也是 π-周期函数。

下面计算 $B(t)$ 在一个周期内的平均值。反复利用二倍角公式、积化和差可得

$$\overline{B}:=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}B(t)\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}.$$

这个计算已经揭示了共振产生的原因。若暂时用均值矩阵$\overline{B}$ 代替 $B(t)$，便得到 $a'=-\frac{\varepsilon}{4}b$, $b'=-\frac{\varepsilon}{4}a$, 于是 $(a+b)'=-\frac{\varepsilon}{4}(a+b)$, $(a-b)'=\frac{\varepsilon}{4}(a-b)$. 因此，无论 ε 为正还是为负，总有一个方向以$e^{|\varepsilon|t/4}$ 的速度增长。不过这只是平均方程给出的提示。下面证明原始方程也具有相同的增长机制。

设 $\Psi_\varepsilon(t)$ 是振幅方程 $\boldsymbol{z}' = \varepsilon B(t)\boldsymbol{z}$ 的标准基解矩阵，即 $\Psi_\varepsilon'(t) = \varepsilon B(t)\Psi_\varepsilon(t), \Psi_\varepsilon(0) = I_2$. 由积分方程得到，

$$\Psi_\varepsilon(t) = I_2 + \varepsilon \int_0^t B(s)\Psi_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s.$$

记$K = \max_{0\leqslant t\leqslant \pi} \|B(t)\|$. 当 $|\varepsilon| \leqslant 1$ 时，由 Grönwall 不等式可得，

$$\forall t \in [0,\pi], \quad \|\Psi_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{K\pi} \;\Rightarrow\; \|\Psi_\varepsilon(t) - I_2\| \leqslant |\varepsilon| \int_0^t \|B(s)\|\,\|\Psi_\varepsilon(s)\|\,\mathrm{d}s \leqslant C|\varepsilon|.$$

其中常数 $C > 0$ 与 ε 无关。

再次使用积分方程，并取 $t = \pi$，得到

$$\Psi_\varepsilon(\pi) = I_2 + \varepsilon \int_0^\pi B(s)\,\mathrm{d}s + \varepsilon \int_0^\pi B(s)\big(\Psi_\varepsilon(s) - I_2\big)\,\mathrm{d}s.$$

于是 $\Psi_\varepsilon(\pi) = I_2 + \varepsilon\pi\overline{B} + R_\varepsilon$, 其中 $\|R_\varepsilon\| \leqslant C_1\varepsilon^2$, 且常数 $C_1 > 0$ 与 ε 无关。这说明平均矩阵并非仅仅给出形式上的近似，它确实给出了精确单周期映射关于 ε 的一阶项。

现在将单周期映射写成

$$\Psi_\varepsilon(\pi) = \begin{pmatrix} p_\varepsilon & q_\varepsilon \\ r_\varepsilon & s_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

由上述展开可得

$$p_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon^2), \quad s_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon^2), \quad q_\varepsilon = -\frac{\pi}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad r_\varepsilon = -\frac{\pi}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

其特征方程的判别式为

$$\Delta_\varepsilon = (p_\varepsilon + s_\varepsilon)^2 - 4\big(p_\varepsilon s_\varepsilon - q_\varepsilon r_\varepsilon\big) = (p_\varepsilon - s_\varepsilon)^2 + 4q_\varepsilon r_\varepsilon = \frac{\pi^2}{4}\varepsilon^2 + O(|\varepsilon|^3).$$

因此，当 $\varepsilon \neq 0$ 充分小时就有 $\Delta_\varepsilon > 0$. 所以 $\Psi_\varepsilon(\pi)$ 有两个不同的实特征值。又因为$\sqrt{\Delta_\varepsilon} = \frac{\pi}{2}|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$ 以及 $p_\varepsilon + s_\varepsilon = 2 + O(\varepsilon^2)$, 所以将这两个特征值按大小记为 $\lambda_+(\varepsilon)$ 与 $\lambda_-(\varepsilon)$ 后可以得到

$$\lambda_+(\varepsilon) = 1 + \frac{\pi}{4}|\varepsilon| + O(\varepsilon^2), \quad \lambda_-(\varepsilon) = 1 - \frac{\pi}{4}|\varepsilon| + O(\varepsilon^2).$$

特别地，当 $\varepsilon \neq 0$ 充分小时，$\lambda_+(\varepsilon) > 1$.

进一步地，我们还可以利用 Liouville 公式进一步确定另一个特征值的位置。由于 $\operatorname{Tr} B(t) = 0$, 所以

$$\det \Psi_\varepsilon(\pi) = \exp\left(\varepsilon \int_0^\pi \operatorname{Tr} B(t)\,\mathrm{d}t\right) = 1 \;\Rightarrow\; \lambda_-(\varepsilon) = \lambda_+(\varepsilon)^{-1}$$

从而$0 < \lambda_-(\varepsilon) < 1$.

最后回到原来的变量。原方程的标准基解矩阵为 $X_\varepsilon(t) = R(t)\Psi_\varepsilon(t)$. 而 $R(0) = I_2$, $R(\pi) = -I_2$. 所以原方程对应于周期 π 的 monodromy 矩阵为 $M_\varepsilon = X_\varepsilon(\pi) = -\Psi_\varepsilon(\pi)$. 因此，原方程的两个 Floquet 乘子分别为 $-\lambda_+(\varepsilon)$ 和 $-\lambda_-(\varepsilon)$, 其中前者的模长大于1. 取 $\Psi_\varepsilon(\pi)$ 对应于 $\lambda_+(\varepsilon)$ 的一个非零实特征向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$ 并将其作为初值 $\boldsymbol{y}(0)$ 由单周期映射的迭代性质，对任意整数 $n \geqslant 0$，有

$$\begin{pmatrix} x(n\pi) \\ x'(n\pi) \end{pmatrix} = M_\varepsilon^n \boldsymbol{v} = \big(-\lambda_+(\varepsilon)\big)^n \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; |x(n\pi)| + |x'(n\pi)| = \lambda_+(\varepsilon)^n \big(|v_1| + |v_2|\big).$$

令$c = |v_1| + |v_2| > 0$, $\gamma = \log \lambda_+(\varepsilon) > 0$, 就得到对任意自然数 n 都有 $|x(n\pi)| + |x'(n\pi)| = ce^{\gamma n}$. 这表明原方程存在指数增长的解，因而其零解不稳定。 □

当 ω_0 在其他正整数附近时, 也会出现更高阶的共振区间, 在参数平面上形成所谓的“不稳定舌”. 确定这些高阶区间的精确边界需要继续展开Floquet乘子, 此处不再展开讨论.

3.3.4 周期非齐次方程组的相容条件

命题 3.3.5 周期非齐次方程组的相容条件

设 $A, \boldsymbol{g}$ 连续并且都是 T-周期的. 对非齐次方程组

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(t), \qquad A(t+T) = A(t), \quad \boldsymbol{g}(t+T) = \boldsymbol{g}(t). \tag{3.3.5}$$

设 Φ 是对应齐次方程组的标准基解矩阵, $\Phi(0) = I_d$, 并令 $M = \Phi(T)$. 则方程组(3.3.5)存在 T-周期解, 当且仅当

$$M \int_0^T \Phi(s)^{-1} \boldsymbol{g}(s)\, \mathrm{d}s \in \mathrm{Ran}(I_d - M). \tag{3.3.6}$$

更具体地:

(1) 若 1 不是 M 的特征值, 则 T-周期解存在且唯一;
(2) 若 1 是 M 的特征值, 则周期解可能不存在; 一旦存在一个周期解 $\boldsymbol{x}_p$, 全部 T-周期解恰好为 $\boldsymbol{x}_p(t) + \Phi(t)\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \ker(I_d - M)$.

证明. 由常数变易法(3.2.4)可得

$$\boldsymbol{x}(T) = M\boldsymbol{x}(0) + M \int_0^T \Phi(s)^{-1} \boldsymbol{g}(s)\, \mathrm{d}s.$$

若 $\boldsymbol{x}$ 是 T-周期解, 则必有$\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}(0)$. 反过来, 假设一个解满足这个端点条件. 令$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t+T)$. 由 A 和 $\boldsymbol{g}$ 的周期性得知 $\boldsymbol{y}'(t) = A(t+T)\boldsymbol{x}(t+T) + \boldsymbol{g}(t+T) = A(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{g}(t)$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}(0)$.

由初值问题的唯一性得到 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$, 即 $\boldsymbol{x}(t+T) = \boldsymbol{x}(t)$. 因此, 一个解是 T-周期解当且仅当 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}(0)$. 令常数变易公式中$\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}(0)$, 可知相应初值必须满足

$$(I_d - M)\boldsymbol{x}(0) = M\int_0^T \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.3.7}$$

线性方程(3.3.7)有解, 当且仅当它的右端属于 $I_d - M$ 的值域. 这正是条件(3.3.6).

若 1 不是Floquet乘子, 则 $I_d - M$ 可逆, 因而 (3.3.7)唯一确定初值. 线性初值问题的存在唯一性随即给出唯一的周期解.

若 1 是Floquet乘子, 则 $I_d - M$ 不可逆, 条件(3.3.6) 可能成立, 也可能不成立. 当它不成立时没有周期解. 当它成立时, 取方程 (3.3.7)的一个解 $\boldsymbol{x}_{p,0}$. 该方程的全部解为 $\boldsymbol{x}_{p,0} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \ker(I_d - M)$. 以 $\boldsymbol{x}_{p,0}$ 为初值的解记为 $\boldsymbol{x}_p(t)$. 初值增加 $\mathbf{v}$ 后, 由线性叠加原理, 相应解为 $\boldsymbol{x}_p(t)+\Phi(t)\mathbf{v}$, 且 $\Phi(t+T)\mathbf{v} = \Phi(t)M\mathbf{v} = \Phi(t)\mathbf{v}$, 所以 $\Phi(t)\mathbf{v}$ 是齐次方程组的 T-周期解. 反过来, 任意两个非齐次周期解之差都是齐次T-周期解, 它在 $t = 0$ 的值必属于 $\ker(I_d - M)$. 因此没有遗漏任何周期解. □

这个命题是第一章标量周期方程的矩阵版本, 也为第六章周期边值问题作了准备.

习题 3.3

习题 3.3.1. 设 a, g 是以 T 为周期的实值连续函数，考虑标量方程 $x' = a(t)x + g(t)$.

(1) 求齐次方程的 Floquet 乘子;
(2) 当 $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ 时，证明非齐次方程存在唯一的 T-周期解;
(3) 当 $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t = 0$，求 T-周期解存在的充要条件，并说明一旦存在，全部周期解构成怎样的集合。

习题 3.3.2. 设 $q(t)$ 是以 T 为周期的实值连续函数，考虑微分方程 $x''(t) + q(t)x(t) = 0$.

(1) 将其写成一阶方程组，证明其单值矩阵 M 的行列式恒为1
(2) 记 $\Delta = \mathrm{Tr}\,M$，证明:

- 若 $|\Delta| < 2$，则所有解在全实轴上一致有界;
- 若 $|\Delta| > 2$，则存在指数增长解;
- 若 $|\Delta| = 2$，则所有解有界当且仅当 $M = \pm I_2$，否则存在关于周期数线性增长的解。

第四章　定性理论初步

对于少数结构简单的微分方程, 我们可以写出解的显式表达式. 不过, 即使方程的右端只是两个低次多项式, 也常常无法用初等函数表示它的解. 另一方面, 在许多实际问题中, 人们首先关心的并不是某个解的精确表达式, 而是下列问题:一个运动受到微小扰动以后, 是否仍然停留在原来的运动附近？经过很长时间以后, 它会趋于一个平衡态, 还是趋于某种周期运动？当方程中的参数改变时, 轨道的整体形状会不会发生改变？这种不求解方程, 直接研究方程的解性质的方法被称作定性方法.

本章主要考虑自治方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{4.0.1}$$

并假设 $\boldsymbol{f} \in C^1$. 由第二章的存在唯一性定理, 对每个初值 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, 方程在$t = 0$附近有唯一解. 若这个解在时刻 t 有定义, 就把它在该时刻的值记为 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(t; 0, \boldsymbol{x}_0)$. 由解的唯一性知, Φ_t满足“流”的性质

$$\Phi_0(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad \Phi_{t+s}(\boldsymbol{x}_0) = \Phi_t\big(\Phi_s(\boldsymbol{x}_0)\big),$$

其中第二个等式在两边都有定义时成立.

若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{0}$, 则常值函数 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_*$ 是方程的解. 这样的点 $\boldsymbol{x}_*$ 称为**平衡点**, 相应的常值解称为**平衡态**或**稳态解**. 平衡点本身不随时间运动, 但从它附近出发的解未必留在它附近; 这正是稳定性所要回答的问题.

定义 4.0.1　轨道, 不变集与周期轨道

对自治方程组(4.0.1),

- 从初值 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的**轨道**是集合 $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}_0) = \{\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) : t \text{ 属于极大存在区间}\}$.
- 集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ 称为**正向不变集**, 如果 $\boldsymbol{x}_0 \in S$ 可以推出 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) \in S$ 对所有正向存在时间成立; 若正负时间都成立, 则称 S 为不变集.
- 若一个非常值解存在于全实轴上, 并且存在最小正数 T 使 $\Phi_T(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$, 则称它为**周期解**, 并称 T 为它的最小周期, 其轨道称为**周期轨道**. 如果一条周期轨道在某个邻域内是唯一的周期轨道, 就称它为**极限环**.

需注意的是, 轨道只记录解曲线在状态空间(即$\boldsymbol{x}$所在的空间)中经过哪些点, 而不记录经过这些点的时刻.

定义 4.0.2 Lyapunov稳定与渐近稳定

设 $\boldsymbol{x}_*$ 是系统(4.0.1)的平衡点, 并且以 $\boldsymbol{x}_*$ 为中心的某个球包含在 $\boldsymbol{f}$ 的定义域内.

(1) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_*| < \varepsilon \quad (t \geqslant 0),$$

则称平衡态 $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_*$ 是 *Lyapunov* 稳定的, 简称 $\boldsymbol{x}_*$ **稳定**.

(2) 若 $\boldsymbol{x}_*$ 稳定, 并且存在 $\delta_0 > 0$, 使

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_t(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{x}_* \quad (t \to +\infty),$$

则称 $\boldsymbol{x}_*$ **渐近稳定**.

(3) 若还存在 $C, \gamma, \delta_0 > 0$, 使

$$|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_*| \leqslant Ce^{-\gamma t}|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*|,$$

对所有满足 $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_*| < \delta_0$ 的初值以及所有 $t \geqslant 0$ 成立, 则称 $\boldsymbol{x}_*$ **指数渐近稳定**.

Lyapunov稳定性与渐近稳定性的区别在于, 前者只要求从平衡点附近出发的解始终不远离平衡点, 后者还要求这些解最终趋于平衡点. 因而“渐近稳定”包含两个彼此独立的要求:

始终保持接近, 当 $t \to +\infty$ 时趋于平衡点.

仅有第二个极限而没有第一个一致的邻域控制, 不能称为渐近稳定. 下面的例子说明Lyapunov稳定并不自动推出渐近稳定.

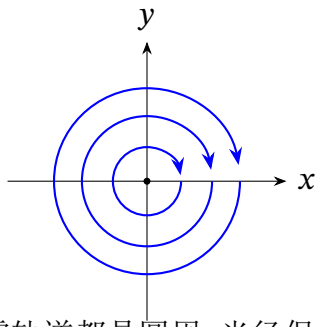
例 4.0.1 稳定但不渐近稳定

考虑简谐振子 $x' = y$, $y' = -x$ 的稳定性.

解. 对该方程组的任意解，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2) = 2xx' + 2yy' = 2xy - 2xy = 0 \Rightarrow x(t)^2 + y(t)^2 = x(0)^2 + y(0)^2.$$

给定 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$. 若 $x(0)^2 + y(0)^2 < \delta^2$, 则对每个 $t \geqslant 0$ 都有 $x(t)^2 + y(t)^2 < \varepsilon^2$, 所以原点稳定. 另一方面, 从任意非零初值出发的轨道都是以原点为圆心的圆周, 它到原点的距离保持不变, 因而原点不是渐近稳定的. □



每条非零轨道都是圆周, 半径保持不变

定义 4.0.3　周期轨道的轨道稳定性

对自治方程组(4.0.1), 设 Γ 是一条周期轨道. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意满足 $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0, \Gamma) < \delta$ 的初值 $\boldsymbol{x}_0$, 相应的解都在正向时间整体存在, 并且对任意 $t \geqslant 0$ 都有 $\operatorname{dist}(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0), \Gamma) < \varepsilon$, 则称 Γ **轨道稳定**. 若它轨道稳定, 并且还存在 $\delta_0 > 0$, 使

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0, \Gamma) < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{dist}(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0), \Gamma) \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty),$$

则称 Γ 轨道渐近稳定. 这里 $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \Gamma) = \inf\limits_{\boldsymbol{y} \in \Gamma} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

周期解沿自身运动, 所以一般不能要求邻近解在相同相位上趋向指定的 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)$. 轨道稳定性允许沿周期轨道发生相位平移.

例 4.0.2　稳定平衡点与稳定周期轨道的区别

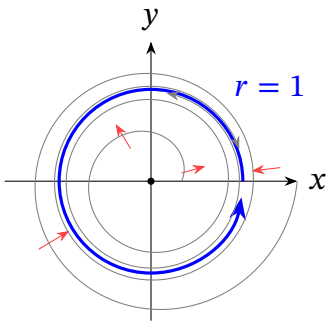
在极坐标中考虑 $r' = r(1-r), \theta' = 1$.

解. 径向方程可以分离变量. 对 $r_0 > 0$, 令 $u = 1/r$, 则 $u' = -\frac{r'}{r^2} = 1 - u$, 从而

$$u(t) = 1 + \left(\frac{1}{r_0} - 1\right) e^{-t}, \qquad r(t) = \frac{r_0}{r_0 + (1 - r_0) e^{-t}}.$$

所以 $r(t) \to 1$. 由于 $\theta(t) = \theta_0 + t$, 圆 $r = 1$ 是周期为 2π 的周期轨道, 并且它轨道渐近稳定. 原点 $r = 0$ 则不稳定: 任意小的正半径最终都会趋于 1.

两个邻近解的初始极角可以不同, 这个相位差在运动中保持不变. 因此, 它们未必趋向同一个指定的参数化周期解. 真正趋于零的量是$|r(t) - 1|$, 也就是解的轨道到集合 $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 的距离. 这说明**周期轨道的稳定性必须对轨道集合定义, 而不能照抄平衡点定义.** □



圆内,圆外的轨道都趋向周期轨道 $r=1$

例 4.0.3 正向不变集的边界判别

设对平面上的方程组 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$, 闭圆盘 $D_R=\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|\leqslant R\}$ 的边界外法向量与 $\boldsymbol{x}$ 同向. 若在 $|\boldsymbol{x}|=R$ 上有 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<0$, 则向量场在边界上严格指向圆盘内部, 并且 D_R 是该方程组的正向不变集.

证明. 先设 $|\boldsymbol{x}_0|<R$. 反设如果轨道能够离开 D_R, 由 $t\longmapsto|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)|$ 的连续性知 $\{t>0:|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)|=R\}\neq\varnothing$. 令 t_* 为这个集合的下确界. 因为初值严格位于圆盘内部, 所以 $t_*>0$, 并且

$$|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)|<R\quad(0\leqslant t<t_*),\qquad|\Phi_{t_*}(\boldsymbol{x}_0)|=R.$$

记 $g(t)=|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)|^2-R^2$, 则对任意充分小的 $h>0$ 都有

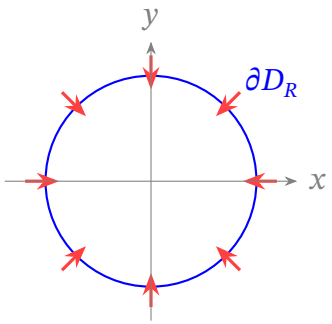
$$\frac{g(t_*)-g(t_*-h)}{h}\geqslant 0.$$

令 $h\to 0+$, 得到 $g'(t_*)\geqslant 0$. 另一方面, 由方程本身可得 $g'(t_*)=2\Phi_{t_*}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{f}\big(\Phi_{t_*}(\boldsymbol{x}_0)\big)<0$，这就导出了矛盾.

再设 $|\boldsymbol{x}_0|=R$. 由边界上的严格不等式和连续性, 存在 $\eta>0$ 以及 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U_0, 使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in U_0$ 都有 $2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant-\eta$. 由解的连续性我们知道 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)\in U_0$ 对任意充分小的正数 t 成立, 于是

$$|\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)|^2-R^2=\int_0^t 2\Phi_s(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{f}\big(\Phi_s(\boldsymbol{x}_0)\big)\,\mathrm{d}s\leqslant-\eta t<0.$$

轨道立即进入圆盘内部, 随后应用前一段的结论. 故所有从 D_R 出发的轨道都不能穿过其边界. □



边界上的向量场严格指向 D_R 内部

4.1　2×2 线性方程组的零解稳定性

考虑 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, 其中 A 是二阶实方阵. 记

$$\tau = \operatorname{Tr} A, \qquad \Delta = \det A, \qquad D = \tau^2 - 4\Delta.$$

特征多项式为 $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta$. 因此 Δ, τ, D 已经决定特征值的基本类型, 再结合Jordan标准型即可对该方程组解的相图进行分类.

定理 4.1.1　线性方程组的稳定性

考虑方程组 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, 其零解有如下稳定性判据:

(1) 零解渐近稳定, 当且仅当两个特征值实部都小于零;
(2) 零解稳定, 当且仅当所有特征值实部不大于零, 并且实部为零的特征值对应的Jordan块均为一阶;
(3) 若存在实部为正的特征值, 或存在实部为零的非平凡Jordan块, 则零解不稳定.

需注意，本定理的结论与方阵阶数无关。

证明. 由第三章可知，任意初值 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 对应的解为 $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$。

先证明 (2)。由方程的线性性知，零解稳定当且仅当 $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|e^{tA}\| < +\infty$. 事实上，若上式左端为 $M < +\infty$，则对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon/M$，便有 $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ 蕴含 $|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立。

反之，若零解稳定，则由稳定的定义知：对 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，使得 $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时，对所有正向时间都有 $|e^{tA}\boldsymbol{x}_0| < 1$。下面证明 $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|e^{tA}\| < +\infty$：对任意单位向量 $\mathbf{v}$，取 $\boldsymbol{x}_0 = (\delta/2)\mathbf{v}$，即得 $|e^{tA}\mathbf{v}| \leqslant 2/\delta$，故由矩阵范数定义得到 $\|e^{tA}\| \leqslant 2/\delta < +\infty$ 对 $t \geqslant 0$ 一致成立。于是 (2) 直接由习题 3.1.4(3) 得到，而本定理的 (3) 是 (2) 的直接推论。

(3) 由习题 3.1.4(3) 知：若 $s(A) > 0$，或者 $s(A) = 0$ 时存在实部为零的至少二阶 Jordan 块，则 $\sup_{t\geqslant 0} \|e^{tA}\| = +\infty$. 根据前面已经证明的零解稳定性与矩阵指数一致有界性的等价关系，零解必不稳定。

最后证明 (1)。若 $s(A)<0$，则由习题 3.1.4(1) 知：如果取 $0<\varepsilon<-s(A)$，则存在常数 $C_\varepsilon>0$，使得

$$\|e^{tA}\| \leqslant C_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t}, \qquad t \geqslant 0.$$

而 $s(A)+\varepsilon<0$，所以零解指数渐近稳定。

反之，若零解渐近稳定，则由方程的线性性可知，对任意 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$，都有 $e^{tA}\boldsymbol{x}_0 \to \mathbf{0}$（$t \to +\infty$）。因此对任意复向量也有同样的结论，只需分别考虑其实部和虚部即可。现任取 A 的一个特征值 λ 及其非零复特征向量 $\mathbf{v}$，则

$$e^{tA}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \qquad |e^{tA}\mathbf{v}| = e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}|\mathbf{v}|.$$

由 $e^{tA}\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ 可知 $\operatorname{Re}\lambda<0$，因此 $s(A)<0$，证毕。 □

下面把定理做到平面上的齐次线性方程组. 所谓结点, 鞍点, 焦点和中心, 不只是特征值的名称, 还描述了轨道在原点附近的实际形状.

命题 4.1.2 平面线性系统的初等奇点分类

对平面上的线性方程组 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, 设 $\det A \neq 0$, 因而原点是孤立平衡点. 记

$$\tau = \operatorname{Tr} A, \qquad \Delta = \det A, \qquad D = \tau^2 - 4\Delta.$$

则有下列分类.

(1) 若 $\Delta<0$, 则原点为鞍点 (saddle point);
(2) 若 $\Delta>0, D>0$, 则原点为双向结点 (node); 当 $\tau<0$ 时为稳定结点, 当 $\tau>0$ 时为不稳定结点;
(3) 若 $\Delta>0, D=0$, 则原点为单向结点或星形结点; 具体地，若 $A=\frac{\tau}{2}I$，则原点为星形结点；否则为单向结点。当 $\tau<0$ 时为稳定结点, 当 $\tau>0$ 时为不稳定结点;
(4) 若 $\Delta>0, D<0$ 且 $\tau\neq 0$, 则原点为焦点 (focus); 当 $\tau<0$ 时为稳定焦点, 当 $\tau>0$ 时为不稳定焦点;
(5) 若 $\Delta>0, D<0$ 且 $\tau=0$, 则原点为中心 (center).

证明. 据韦达定理系数矩阵 A 的特征多项式为 $\lambda^2-\tau\lambda+\Delta$，因此其特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{D}}{2}.$$

由线性代数的实相似标准型知，存在二阶实可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$，其中 J 是 A 的实相似 Jordan 标准型。令 $\boldsymbol{z}=P^{-1}\boldsymbol{x}$，则由 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ 得到

$$\boldsymbol{z}' = P^{-1}\boldsymbol{x}' = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = J\boldsymbol{z}.$$

由于 P 是可逆线性变换，它将直线映成直线，将相切的曲线映成相切的曲线，并且保持轨道趋向或远离原点的性质。特别地，由于存在常数 $c_1, c_2 > 0$，使得 $c_1|\boldsymbol{z}| \leqslant |P\boldsymbol{z}| \leqslant c_2|\boldsymbol{z}|$，因此上述坐标变换也不改变原点的稳定性。所以，只需研究实 Jordan 标准型对应的方程组。

为了简化记号，以下仍将变换后的未知函数记为 $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))^{\mathsf{T}}$，并将 J 重新记为 A。也就是说，在后面的计算中，我们不妨直接假设 A 已经是实相似标准型。

（1）我们求解 $\Delta < 0$ 的情况。由于 $\lambda_1\lambda_2 = \Delta < 0$ 以及 A 是实方阵，所以两个特征值只能是异号实数，并不妨设 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$。此时 A 可对角化，因此不妨设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

相应的方程组为 $x' = \lambda_1 x,\ y' = \lambda_2 y$，从初值 (x_0, y_0) 出发的解为

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}.$$

当 $x_0 = 0$ 时，轨道位于 y 轴上，且 $y(t) \to 0$（$t \to +\infty$），因此 y 轴是趋向原点的特征方向。当 $y_0 = 0$ 时，轨道位于 x 轴上，且 $|x(t)| \to +\infty$（$t \to +\infty$），因此 x 轴是远离原点的特征方向。当 $x_0 y_0 \neq 0$ 时，消去参数 t 得到轨道方程

$$|y| = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad C = \frac{|y_0|}{|x_0|^{\lambda_2/\lambda_1}} > 0.$$

由于 $\lambda_2/\lambda_1 < 0$，这些轨道分别位于四个象限内，并且随着 t 增大，$|x(t)|$ 逐渐增大，$|y(t)|$ 逐渐减小。因此原点附近存在两条相交的特征直线，其中一条对应趋向原点的轨道，另一条对应远离原点的轨道，其余轨道呈双曲线状分布。此时我们称原点是**鞍点**。特别地，原点是不稳定的。

（2）现在求解 $\Delta > 0, D > 0$，此时两个特征值是不同的实数，并且由 $\lambda_1\lambda_2 = \Delta > 0$ 知它们同号。不妨调整特征值的顺序，使得 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$。由于两个特征值不同，$A$ 可对角化，因此仍不妨设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

此时方程组的解为 $x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}$、$y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$。由于两个特征值同号，所以：当 $\tau < 0$ 时，$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$。所有轨道均在 $t \to +\infty$ 时趋于原点，因此原点渐近稳定。当 $\tau > 0$ 时，$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$。所有非零轨道均在 $t \to +\infty$ 时远离原点，因此原点不稳定。

下面进一步考察轨道趋向原点时的形状。若 $y_0 \neq 0$，则

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{x_0}{y_0} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}.$$

注意，当 $\tau<0$ 时，$\lambda_1-\lambda_2<0$，所以随着 $t\to+\infty$，有 $x(t)/y(t)\to 0$；而当 $\tau>0$ 时，$\lambda_1-\lambda_2>0$，所以随着 $t\to-\infty$，也有 $x(t)/y(t)\to 0$。

因此除 x 轴上的特殊轨道外，其余轨道在趋向原点时均与 y 轴相切。而当 $y_0=0$ 时，轨道始终位于 x 轴上。这表明原点有两个不同的特征方向，并且轨道在趋向原点时的切线方向由特征值决定。这种奇点称为双向结点。

（3）现在求解 $\Delta>0, D=0$ 的情况。此时两个特征值均为 $\lambda=\tau/2$，又因为 $\lambda^2=\Delta>0$，所以 $\lambda\neq 0$。

首先，若 A 可对角化，则由于它只有一个特征值，必有 $A=\lambda I$。此时方程组为 $x'=\lambda x,\ y'=\lambda y$，其解为

$$x(t)=x_0e^{\lambda t},\qquad y(t)=y_0e^{\lambda t}.$$

所以对于任意非零初值 (x_0,y_0)，轨道都是由原点出发、经过 (x_0,y_0) 的一条射线。由于每一条过原点的直线都是特征方向，因此这种奇点称为星形结点。当 $\lambda<0$ 时，所有轨道沿射线趋于原点，原点渐近稳定；当 $\lambda>0$ 时，所有非零轨道沿射线远离原点，原点不稳定。

其次，若 A 不可对角化，则不妨设它的 Jordan 标准型为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

此时方程组为 $x'=\lambda x+y,\ y'=\lambda y$。先解第二个方程，得到 $y(t)=y_0e^{\lambda t}$。再代入第一个方程，得到 $x'-\lambda x=y_0e^{\lambda t}$，从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\lambda t}x(t))=y_0\ \Rightarrow\ x(t)=e^{\lambda t}(x_0+ty_0),\qquad y(t)=y_0e^{\lambda t}.$$

当 $y_0=0$ 时，解为 $x(t)=x_0e^{\lambda t},\ y(t)=0$，所以 x 轴是一条特征直线。当 $y_0\neq 0$ 时，随着 $t\to+\infty$（若 $\lambda<0$）或 $t\to-\infty$（若 $\lambda>0$），都有 $(x(t),y(t))\to(0,0)$，并且

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{y_0}{x_0+ty_0}\longrightarrow 0.$$

这说明所有这些轨道在趋向原点时均与 x 轴相切。

另一方面，我们知道 $\dim\ker(A-\lambda I)=1$，因此 x 轴是唯一的特征方向。这种奇点称为单向结点，也称为退化结点。其稳定性仍然由 λ 的符号决定：当 $\lambda<0$ 时原点渐近稳定，当 $\lambda>0$ 时原点不稳定。由此可见，双向结点、单向结点与星形结点的区别在于：双向结点有两个不同的特征方向，单向结点只有一个特征方向，而星形结点的每一条过原点的直线都是特征方向。

（4）焦点与中心：$\Delta>0, D<0$。此时两个特征值是一对共轭复数，可以写为 $\lambda_{1,2}=a\pm ib$，

其中 $a=\tau/2$、$b=\sqrt{-D}/2>0$。由于 A 是实矩阵，不妨设其二阶实相似标准型[1]为

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

于是方程组为 $x'=ax-by,\ y'=bx+ay$。令 $r^2=x^2+y^2$。将第一个方程乘以 x，第二个方程乘以 y，再相加，得到

$$rr'=xx'+yy'=a(x^2+y^2)=ar^2.$$

同样，将第二个方程乘以 x，第一个方程乘以 y，再相减，得到

$$xy'-yx'=b(x^2+y^2)=br^2.$$

对于非零轨道，令 θ 表示极角，则由 $r^2\theta'=xy'-yx'$ 可知

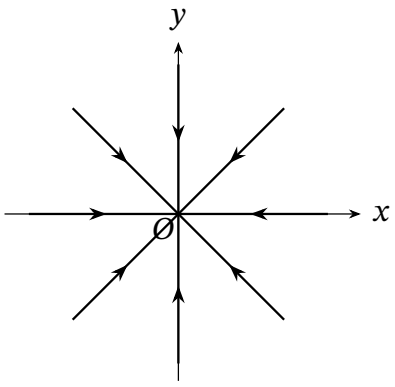
$$r'=ar,\quad \theta'=b \qquad\Rightarrow\qquad r(t)=r_0e^{at},\quad \theta(t)=\theta_0+bt.$$

由于 $b>0$，在当前坐标下，轨道始终沿逆时针方向旋转。

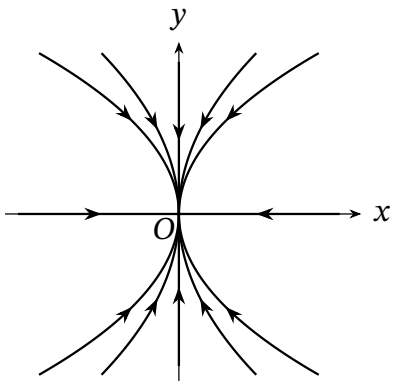
- 若 $a<0$，则 $r(t)\to 0$（$t\to+\infty$），因此轨道螺旋趋于原点。这种奇点称为稳定焦点，原点渐近稳定。
- 若 $a>0$，则 $r(t)\to+\infty$（$t\to+\infty$），因此轨道螺旋远离原点。这种奇点称为不稳定焦点，原点不稳定。
- 若 $a=0$，则 $r(t)\equiv r_0$，因此每一条非零轨道都是以原点为圆心的圆周。回到原来的坐标后，这些圆周一般变成椭圆，但仍然是围绕原点的闭轨道。这种奇点称为中心，原点稳定但不渐近稳定。

综上，根据 τ,Δ,D 的符号可完全确定平面线性方程组孤立平衡点的类型及稳定性。 □

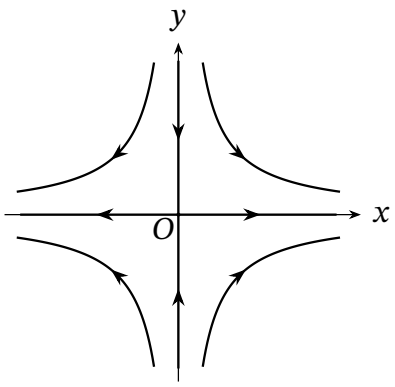
[1]这与 Jordan 标准型的唯一区别是过渡矩阵必须是实方阵。在该限制下，如果特征值有虚部非零的复数，则我们不一定能把一个方阵通过实过渡方阵来相似到一个上三角阵，而是改成多个这样的分块上三角阵。如果复特征值有重根，则还有可能在“分块次对角线”上排布若干单位阵 I_2.



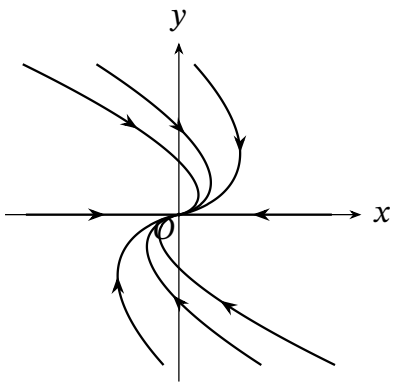
(a) 星形结点



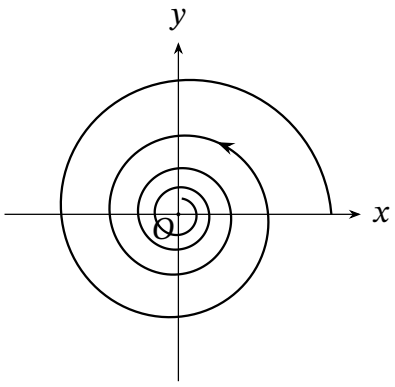
(b) 双向结点



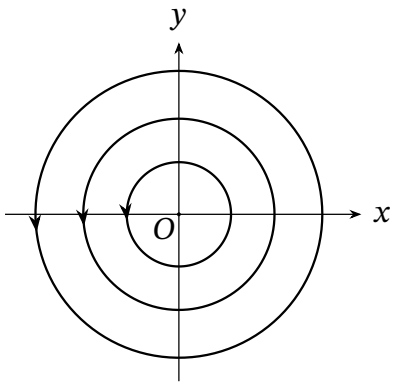
(c) 鞍点



(d) 单向结点



(e) 焦点



(f) 中心

图 4.1: 平面线性系统的六种典型相图。图中结点和焦点均取渐近稳定的情形；对应的不稳定结点和不稳定焦点只需将轨道箭头反向。

奇点类型	判别条件	轨道的几何特征	零解稳定性
星形结点	$\Delta>0,\ D=0,\ A=\dfrac{\tau}{2}I$	所有过原点的直线都是特征方向；非零轨道为射线。	$\tau<0$：渐近稳定 $\tau>0$：不稳定
双向结点	$\Delta>0,\ D>0$	两个不同的特征方向；其余轨道靠近原点时与绝对值较小的特征值所对应的方向相切。	$\tau<0$：渐近稳定 $\tau>0$：不稳定
鞍点	$\Delta<0$	一条特征方向上的轨道趋于原点，另一条特征方向上的轨道远离原点。	不稳定
单向结点	$\Delta>0,\ D=0,\ A\neq\dfrac{\tau}{2}I$	只有一个特征方向；其余轨道靠近原点时均与该方向相切。	$\tau<0$：渐近稳定 $\tau>0$：不稳定
焦点	$\Delta>0,\ D<0,\ \tau\neq 0$	轨道绕原点螺旋旋转；$\tau<0$ 时向内，$\tau>0$ 时向外。	$\tau<0$：渐近稳定 $\tau>0$：不稳定
中心	$\Delta>0,\ D<0,\ \tau=0$	所有非平衡轨道为围绕原点的闭曲线（适当线性变换下为圆）。	稳定但不渐近稳定

表 4.1: 平面线性系统孤立平衡点的分类（$\tau=\operatorname{Tr}A,\Delta=\det A,D=\tau^2-4\Delta$）。

上述定理只是通过特征值的情况来判断零解稳定性，所作相图皆为 A 本身就是 Jordan 标准型的情况。对一般的实方阵 A，我们知道存在实过渡方阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$ 成为实相似标准型。那么在“相似”的过程中，实际上还涉及了伸缩和旋转。因此，如果我们要对一般的二阶实方阵 A 作出该方程组的相图时，还需另外计算它相比标准相图发生了何种变换。当然，**我们没有必要去硬算过渡矩阵以及坐标变换。绝大部分情况可以直接通过待定系数方法直接计算，且看下例。**

例 4.1.1

考虑微分方程组

$$\begin{cases} x'(t)=2x(t)+3y(t),\\ y'(t)=2x(t)-3y(t). \end{cases}$$

判断零解的稳定性，并作相图。

解. 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，因此 $\tau=\operatorname{Tr}A=-1$，$\Delta=\det A=-12<0$，$D=\tau^2-4\Delta=49$。由命题4.1.2，原点是鞍点，零解不稳定。下面确定它的两条特征直线以及其它轨道的方向。

因为在 $x=0$ 上有 $x'=3y$，所以 $x=0$ 不是特征直线。设直线 $y=kx$ 是特征方向，由于沿这条直线必须有 $y'=kx'$，故

$$2-3k=k(2+3k)\quad\Longleftrightarrow\quad 3k^2+5k-2=0\quad\Longleftrightarrow\quad k=\frac{1}{3}\text{ 或 }k=-2.$$

在 $y=\frac{1}{3}x$ 上，$x'=3x$，所以沿该直线的非零轨道在 $t\to+\infty$ 时远离原点；在 $y=-2x$ 上，$x'=-4x$，所以沿该直线的轨道在 $t\to+\infty$ 时趋于原点。

为了确定其他轨道的形状，直接由原方程计算

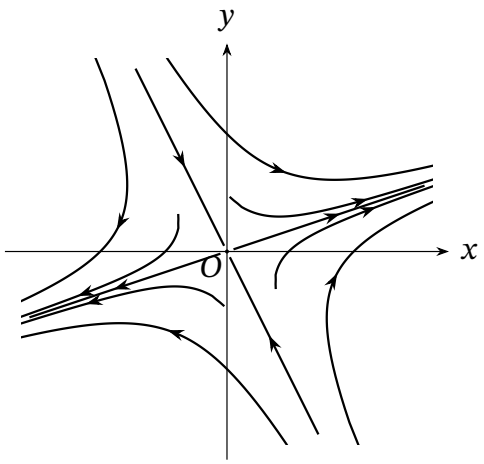
$$\begin{aligned}(2x+y)'&=2(2x+3y)+(2x-3y)=3(2x+y),\\(x-3y)'&=(2x+3y)-3(2x-3y)=-4(x-3y).\end{aligned}$$

注意，计算这两个量是因为我们已经知道特征方向的斜率 $k=1/3$ 或 -2，也就是说这两条斜线是“相似 Jordan 化之后的坐标轴”。

今对以上两式积分得 $2x+y=7C_1e^{3t}$、$x-3y=7C_2e^{-4t}$，联立解出 x,y 得到

$$\begin{cases}x(t)=3C_1e^{3t}+C_2e^{-4t},\\y(t)=C_1e^{3t}-2C_2e^{-4t},\end{cases}\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

当 $C_1C_2\neq0$ 时，$2x(t)+y(t)$ 与 $x(t)-3y(t)$ 的符号分别保持不变，所以轨道不能穿过两条特征直线。随着 t 增大，e^{3t} 项不断增长，而 e^{-4t} 项不断衰减，故这些轨道最终沿 $y=\frac{1}{3}x$ 的方向远离原点。相图如下，其中箭头表示时间增大的方向。



鞍点：沿 $y=-2x$ 趋于原点，沿 $y=\frac{1}{3}x$ 远离原点。

□

例 4.1.2

考虑微分方程组

$$\begin{cases}x'(t)=3x(t),\\y'(t)=2x(t)+y(t).\end{cases}$$

判断零解的稳定性。

解. 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，因此 $\tau=\operatorname{Tr}A=4$，$\Delta=\det A=3>0$，$D=\tau^2-4\Delta=4>0$。两个特征值为 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=1$，故原点是不稳定的双向结点。

直线 $x=0$ 是一条特征直线，因为此时 $x'=0$、$y'=y$；直线 $y=x$ 也是一条特征直线，因为在这条直线上 $y'=3x=x'$。两条特征直线上的非零轨道都在正向时间远离原点。

由第一个方程可得 $x(t)=C_1e^{3t}$。再将其代入第二个方程，得 $y'-y=2C_1e^{3t}$，故

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}y(t)\right)=2C_1e^{2t},\qquad e^{-t}y(t)=C_1e^{2t}+C_2.$$

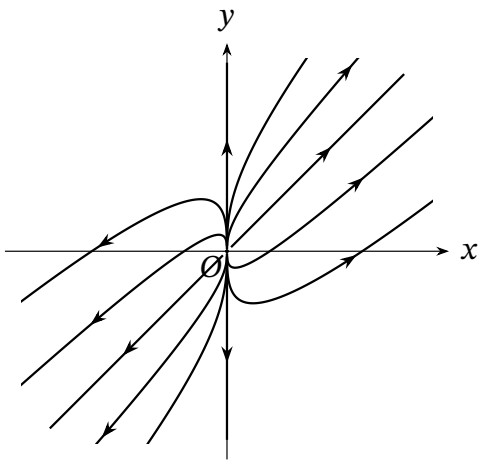
于是通解为

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^{3t},\\ y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{t},\end{cases}\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

当 $C_1=0$ 时，轨道位于 $x=0$；当 $C_2=0$ 时，轨道位于 $y=x$。若 $C_1C_2\neq 0$，则当 $t\to-\infty$ 时，

$$\frac{x(t)}{y(t)}=\frac{C_1e^{2t}}{C_1e^{2t}+C_2}\longrightarrow 0.$$

所以其余轨道在反向时间趋于原点时，都与 y 轴相切；而在正向时间，所有非零轨道均远离原点。由此作出相图如下。



不稳定双向结点：非特征轨道趋向原点时都与 y 轴相切。

□

习题 4.1

习题 4.1.1. 判断如下方程的奇点 $(0,0)$ 是什么类型，说明其稳定性，并作该奇点附近的相图。

(1) $x' = 4y - x, y' = -9x + y.$
(2) $x' = x + 2y, y' = 5y - 2x.$
(3) $x' = 2x + y, y' = x + 2y.$
(4) $x' = x - xy, y' = y - xy.$

习题 4.1.2. 设 x, t 均为标量，a为连续函数，求方程 $x'(t) = a(t)x(t)$ 的零解稳定及渐近稳定的充要条件。

习题 4.1.3. 对极坐标方程

$$\dot{\theta} = 1, \qquad \dot{r} = \begin{cases} r^2 \sin \dfrac{1}{r}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

作出原点附近的相图，并研究平衡点 $r = 0$ 的稳定性。（注意：$r^2 \sin \frac{1}{r} \notin C^1$，但仍然局部 Lipschitz，不影响使用各种定理结论。）

4.2 非线性平面动力系统平衡点的定性分析

对非线性方程 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{f} \in C^1$ 且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, 则在原点附近可以将其写为

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \qquad A = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}), \qquad \frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} \longrightarrow 0. \tag{4.2.1}$$

方阵 A 称为线性化矩阵. 本节证明，若 A 的特征值实部皆为非零，则可以由线性化方程组 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ 零解的稳定性 (定理 4.1.1) 给出非线性方程(4.2.1)零解的稳定性。

4.2.1 双曲平衡点的线性稳定性

定义 4.2.1 双曲平衡点

对方程组(4.2.1), 更一般地也对自治方程组(4.0.1), 若平衡点 $\boldsymbol{x}_*$ 处的线性化矩阵 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*)$ 的所有特征值实部皆为非零, 则称 $\boldsymbol{x}_*$ 是双曲平衡点.

定理 4.2.1 线性化稳定性原理

对非线性方程组 (4.2.1)

(1) 若线性部分的系数矩阵 A 的所有特征值实部皆为负, 则原点是局部指数渐近稳定的;
(2) 若 A 至少有一个特征值实部大于零, 则原点不稳定.

若所有特征值实部不大于零但有特征值实部等于零, 线性化一般不能作出结论.

证明. (1) 所有特征值实部皆为负的情形.

由习题 3.1.4 可知, 存在常数 $M \geqslant 1$ 和 $\gamma > 0$, 使得对任意 $t \geqslant 0$ 都有 $\|e^{tA}\| \leqslant Me^{-\gamma t}$. 由于 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{x}|)$, 对任意 $\eta > 0$, 均存在 $r > 0$, 使得闭球 $\overline{B(\boldsymbol{0}, r)}$ 包含在方程右端的定义域内, 并且 $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \leqslant \eta|\boldsymbol{x}|$ 对所有 $|\boldsymbol{x}| \leqslant r$ 成立.

设 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, 只要解仍位于球 $|\boldsymbol{x}| \leqslant r$ 内, 就由 Duhamel 公式得到

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}|\boldsymbol{x}_0| + M\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant Me^{-\gamma t}|\boldsymbol{x}_0| + M\eta\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|\boldsymbol{x}(s)|\,\mathrm{d}s.$$

两边乘以 $e^{\gamma t}$, 再利用 Grönwall 不等式, 得到

$$e^{\gamma t}|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant M|\boldsymbol{x}_0| + M\eta\int_0^t e^{\gamma s}|\boldsymbol{x}(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant M|\boldsymbol{x}_0|e^{M\eta t}.$$

因此 $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Me^{-(\gamma - M\eta)t}|\boldsymbol{x}_0|$.

现在选取 $0 < \eta < \gamma/(2M)$, 再固定相应的 $r > 0$, 则只要解仍位于球内, 就有

$$|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Me^{-\gamma t/2}|\boldsymbol{x}_0|.$$

若初值满足 $|\boldsymbol{x}_0| < r/(2M)$, 则解不可能在正向演化过程中首次到达球面 $|\boldsymbol{x}| = r$. 事实上, 若 $t_* > 0$ 是首次到达时刻, 则

$$r = |\boldsymbol{x}(t_*)| \leqslant Me^{-\gamma t_*/2}|\boldsymbol{x}_0| < \frac{r}{2},$$

矛盾. 因此解始终位于球 $|\boldsymbol{x}| < r$ 内. 再由解的延拓定理得知解对所有 $t \geqslant 0$ 存在, 并始终满足 $|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant Me^{-\gamma t/2}|\boldsymbol{x}_0|$. 这就证明了原点的局部指数渐近稳定性.

(2) 至少有一个特征值实部大于零的情形.

记 $\sigma > 0$ 为 A 的所有实部为正的特征值实部的最小值. 由实Jordan标准型可知, 对任意 $\gamma > 0$, 均存在实可逆矩阵 P_γ, 使得

$$P_\gamma^{-1}AP_\gamma = B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

其中 B_1 由所有实部为正的特征值对应的实Jordan块组成, B_2 由其余实Jordan块组成, 而且每个Jordan块的超对角元或超对角块均可取为 γ 或 γI_2.

事实上, 只需对实Jordan标准型中的每一个Jordan块作对角相似变换

$$D_\gamma = \mathrm{diag}(I, \gamma I, \ldots, \gamma^{m-1}I),$$

其中 m 是该Jordan块的阶数, I 是一阶或二阶单位矩阵. 直接计算 $D_\gamma^{-1}JD_\gamma$ 即可发现其对角元或对角块保持不变, 而次对角元或次对角块由 1 或 I_2 变为 γ 或 γI_2.

取上述相似变换, 令 $\boldsymbol{y} = P_\gamma^{-1}\boldsymbol{x}$, $\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}) = P_\gamma^{-1}\boldsymbol{g}(P_\gamma \boldsymbol{y})$, 则原方程化为

$$\boldsymbol{y}' = B\boldsymbol{y} + \widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}).$$

由于

$$\frac{|\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{y}|} \leqslant \|P_\gamma^{-1}\|\|P_\gamma\| \frac{|\boldsymbol{g}(P_\gamma \boldsymbol{y})|}{|P_\gamma \boldsymbol{y}|} \longrightarrow 0 \qquad (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{0}),$$

故 $\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}) = o(|\boldsymbol{y}|)$. 可逆线性变换保持平衡点的稳定性, 因此只需证明变换后系统的原点不稳定.

按照 B_1, B_2 的分块, 记

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{y}) \\ \widetilde{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix},$$

并令 $R = |\mathbf{u}|$, $\rho = |\mathbf{v}|$. 若 B_2 不存在, 则以下约定 $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, $\rho \equiv 0$, 并省略涉及 B_2 的估计.

首先估计线性部分. 对任意实Jordan块, 其对角部分为实数 a 或二阶矩阵

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{z} \cdot C_{a,b}\boldsymbol{z} = a|\boldsymbol{z}|^2$, 而相邻分量之间的交叉项满足

$$\left| \gamma \sum_{j=1}^{m-1} \boldsymbol{z}_j \cdot \boldsymbol{z}_{j+1} \right| \leqslant \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \left(|\boldsymbol{z}_j|^2 + |\boldsymbol{z}_{j+1}|^2 \right) \leqslant \gamma \sum_{j=1}^{m} |\boldsymbol{z}_j|^2,$$

其中 $\boldsymbol{z}_j$ 是相应Jordan块中的标量或二维分量. 因此对所有Jordan块求和可得

$$\mathbf{u} \cdot B_1\mathbf{u} \geqslant (\sigma - \gamma)R^2, \qquad \mathbf{v} \cdot B_2\mathbf{v} \leqslant \gamma\rho^2.$$

另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 因为 $\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y}) = o(|\boldsymbol{y}|)$, 所以可取 $r > 0$ 使得闭球 $\overline{B(\mathbf{0}, r)}$ 包含在变换后向量场的定义域内, 并且当 $|\boldsymbol{y}| \leqslant r$ 时,

$$|\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{y})| \leqslant \varepsilon|\boldsymbol{y}| \leqslant \varepsilon(R + \rho).$$

当 $R > 0$ 时, 由方程可得 (这里对 R^2, ρ^2 求导是为了避免计算 $R = |\mathbf{u}|$, $\rho = |\mathbf{v}|$ 中的根号项)

$$(R^2)' = 2RR' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 2(\mathbf{u} \cdot B_1\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \widetilde{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{y})) \geqslant 2(\sigma - \gamma)R^2 - 2R\varepsilon(R + \rho).$$

同理, 当 $\rho > 0$ 时,

$$(\rho^2)' = 2\rho\rho' = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 2(\mathbf{v} \cdot B_2\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \widetilde{\boldsymbol{g}}_2(\boldsymbol{y})) \leqslant 2\gamma\rho^2 + 2\varepsilon\rho(R + \rho).$$

两式相减可得

$$(R^2-\rho^2)' \geqslant 2(\sigma-\gamma)R^2 - 2\gamma\rho^2 - 2\varepsilon(R+\rho)^2.$$

当 $R \geqslant \rho$ 时, 由 $\rho^2 \leqslant R^2$ 及 $(R+\rho)^2 \leqslant 4R^2$ 进一步得到 $(R^2-\rho^2)' \geqslant 2(\sigma-2\gamma-4\varepsilon)R^2$. 因此, 只要取 γ, ε 满足 $2\gamma + 4\varepsilon < \sigma$ (这可以通过先取 $0 < \gamma < \sigma/2$, 再取 $0 < \varepsilon < (\sigma - 2\gamma)/4$ 来完成), 锥形区域 $R > \rho$ 就保持正向不变: 只要初值满足 $R(0) > \rho(0)$, 且解仍位于球 $|\boldsymbol{y}| \leqslant r$ 内, 就可保证 $R(t) > \rho(t)$ 成立.

另一方面, 在区域 $R > \rho$ 内, 由前面对 R^2 的估计可知

$$(R^2)' \geqslant 2(\sigma-\gamma)R^2 - 2\varepsilon R(R+\rho) \geqslant 2(\sigma-\gamma-2\varepsilon)R^2.$$

按照前面选取的 $2\gamma + 4\varepsilon < \sigma$, 我们就得到

$$(R^2)' \geqslant \sigma R^2 \;\Rightarrow\; R^2(t) \geqslant R^2(0)e^{\sigma t}, \qquad R(t) \geqslant R(0)e^{\sigma t/2}.$$

现在即可说明 $\boldsymbol{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^{\mathsf{T}}$ 的零解是不稳定的。今任取 $\delta > 0$, 选取初值 $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ 以及 $0 < |\mathbf{u}(0)| < \min\{\delta, r\}$. 若相应解始终不离开球 $|\boldsymbol{y}| < r$, 则由解的延拓定理可知它对所有 $t \geqslant 0$ 存在, 而上述估计表明

$$|\boldsymbol{y}(t)| \geqslant R(t) \geqslant |\mathbf{u}(0)|e^{\sigma t/2} \longrightarrow +\infty,$$

矛盾, 因此原点不稳定. 而可逆线性变换保持稳定性, 所以原方程的原点也不稳定. □

例 4.2.1 线性化为中心时两种相反结论

考虑方程组

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2), \\ y' = -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

在原点处的线性化稳定性和非线性稳定性.

解. 原方程组的线性化方程组的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 所以线性化相图中的原点是中心.

对原始非线性方程组, 我们令 $R = x^2 + y^2$, 则

$$R' = 2xx' + 2yy' = 2x(y - xR) + 2y(-x - yR) = -2R^2.$$

当 $R(0) = R_0 > 0$ 时, 分离变量得到

$$-\frac{1}{R(t)} + \frac{1}{R_0} = -2t, \qquad R(t) = \frac{R_0}{1 + 2R_0 t} \longrightarrow 0.$$

又因为 $R' \leqslant 0$, 原点稳定, 再由表达式可知它渐近稳定.

若把两个三次项的符号同时反向, 则

$$R' = 2x(y + xR) + 2y(-x + yR) = 2R^2 \ \Rightarrow\ R(t) = \frac{R_0}{1 - 2R_0 t}.$$

无论 R_0 多小, $R(t)$ 都会在正向时间中增大并离开任意给定的小邻域, 所以原点不稳定. 这两个方程组有相同的线性化方程组, 说明有特征值实部为零的时, 高阶项可能决定不同的稳定性结论. □

4.2.2 *局部稳定流形与不稳定流形

设原点是双曲平衡点，我们把共轭特征值所对应的复根子空间合并成实子空间以后，可以得到 A-不变直和分解$\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$, 其中 E^s 由负实部特征值对应的实根子空间组成, E^u 由正实部特征值对应的实根子空间组成. 记相应投影为 P^s, P^u, 限制矩阵为 A_s, A_u. 则存在常数 $C, \gamma > 0$, 使

$$|e^{tA_s}| \leqslant Ce^{-\gamma t} \quad (t \geqslant 0), \qquad |e^{tA_u}| \leqslant Ce^{\gamma t} \quad (t \leqslant 0).$$

为了构造在整个正半轴或负半轴上指数趋于原点的轨道, 需要在半无穷区间上使用压缩映射原理. 指数权重既把所要求的衰减速度写进函数空间, 又保证 Lyapunov–Perron 方程中的无穷积分收敛. 下面先说明相应函数空间的完备性.

引理 4.2.2 指数加权函数空间的完备性

设 $\eta > 0$, 并令

$$\mathcal{X}_\eta^+ = \left\{ \boldsymbol{x} \in C([0, +\infty); \mathbb{R}^d) : \|\boldsymbol{x}\|_\eta^+ := \sup_{t \geqslant 0} e^{\eta t}|\boldsymbol{x}(t)| < +\infty \right\},$$
$$\mathcal{X}_\eta^- = \left\{ \boldsymbol{x} \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d) : \|\boldsymbol{x}\|_\eta^- := \sup_{t \leqslant 0} e^{-\eta t}|\boldsymbol{x}(t)| < +\infty \right\}.$$

这两个空间在各自的范数下都是完备的.

证明. 先证明一个同时适用于两个半轴的事实. 设 I 是 $[0, +\infty)$ 或 $(-\infty, 0]$, 并以

$$C_b(I; \mathbb{R}^d) = \left\{ \boldsymbol{y} \in C(I; \mathbb{R}^d) : \sup_{t \in I} |\boldsymbol{y}(t)| < +\infty \right\}$$

表示有界连续函数空间. 设 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ 是这个空间中的 Cauchy 序列. 对每个固定的 $t \in I$, 数列 $\{\boldsymbol{y}_n(t)\} \subset \mathbb{R}^d$ 是 Cauchy 序列; 由 $\mathbb{R}^d$ 的完备性, 它有极限, 记为 $\boldsymbol{y}(t)$. 给定 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使 $m, n \geqslant N$ 时

$$\sup_{t \in I} |\boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}_m(t)| < \varepsilon.$$

固定 $n \geqslant N$, 再令 $m \to \infty$, 逐点取极限得到

$$\sup_{t\in I} |\boldsymbol{y}_n(t) - \boldsymbol{y}(t)| \leqslant \varepsilon.$$

所以 $\boldsymbol{y}_n$ 一致收敛到 $\boldsymbol{y}$. 连续函数的一致极限连续; 并且取一个固定的 $n \geqslant N$, 有

$$\sup_{t\in I} |\boldsymbol{y}(t)| \leqslant \sup_{t\in I} |\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_n(t)| + \sup_{t\in I} |\boldsymbol{y}_n(t)| < +\infty.$$

故 $\boldsymbol{y} \in C_b(I;\mathbb{R}^d)$, 而 $\boldsymbol{y}_n$ 关于一致范数收敛到 $\boldsymbol{y}$. 这就证明了 $C_b(I;\mathbb{R}^d)$ 的完备性.

映射 $\boldsymbol{x}(t) \longmapsto e^{\eta t}\boldsymbol{x}(t)$ 把 $\mathcal{X}_\eta^+$ 一一映到 $C_b([0,+\infty);\mathbb{R}^d)$, 并且保持范数; 映射 $\boldsymbol{x}(t) \longmapsto e^{-\eta t}\boldsymbol{x}(t)$ 把 $\mathcal{X}_\eta^-$ 一一映到 $C_b((-\infty,0];\mathbb{R}^d)$, 也保持范数. 两个加权空间都与一个已经证明完备的空间等距同构, 因而它们都是完备的. □

定义 4.2.2 局部稳定与不稳定流形

对线性化方程组(4.2.1), 设原点是双曲平衡点. 若通过原点的局部流形 $W^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{0})$ 满足以下三个条件:

(1) 它在原点与 E^s 相切;
(2) 它局部正向不变, 即轨道只要仍位于所取邻域内, 就仍在该流形上;
(3) 从它上面充分靠近原点的点出发的轨道在正向时间指数趋于原点,

就称它为原点的局部稳定流形. 把正向时间换成反向时间, 并把 E^s 换成 E^u, 所得到的流形称为局部不稳定流形 $W^u_{\mathrm{loc}}(\mathbf{0})$.

稳定流形的光滑性来自压缩映射的不动点对参数的光滑依赖. 这里不能只引用这个结论, 因为压缩映射原理只给出了不动点的存在唯一性.

引理 4.2.3 含参数压缩映射的 C^1 依赖

设 E 是有限维赋范空间, $U \subset E$ 是开集, X 是完备赋范空间. 设 $\mathcal{T} : U \times X \to X$ 满足:

(1) 存在与 $p \in U$ 无关的常数 $0 < q < 1$, 使得对任意的 $x, y \in X, p \in U$ 成立

$$\|\mathcal{T}(p,x) - \mathcal{T}(p,y)\|_X \leqslant q\,\|x - y\|_X.$$

(2) 对任意 $(p,x) \in U \times X$, 存在关于扰动都是线性的映射 $D_p\mathcal{T}(p,x) : E \to X$ 与 $D_x\mathcal{T}(p,x) : X \to X$, 并且当 $|a| + \|y\|_X \to 0$ 时有

$$\left\|\mathcal{T}(p+a,x+y) - \mathcal{T}(p,x) - D_p\mathcal{T}(p,x)a - D_x\mathcal{T}(p,x)y\right\|_X = o\big(|a| + \|y\|_X\big)$$

这两个线性映射按算子范数连续地依赖于 (p,x).

对 $p \in U$, 令 x_p 是方程 $x = \mathcal{T}(p, x)$ 的唯一解. 那么映射 $p \longmapsto x_p$ 连续可微, 并且对 $a \in E$ 有

$$Dx_p a = \left[I - D_x\mathcal{T}(p, x_p)\right]^{-1} D_p\mathcal{T}(p, x_p)a. \tag{4.2.2}$$

这里的逆映射由 Neumann 级数给出.

证明. 完备性与条件 (1) 表明我们可以用压缩映射原理, 所以每个 x_p 都存在且唯一. 固定 $p \in U$, 并取足够小的 a, 使 $p + a \in U$. 由两个不动点方程,

$$\begin{aligned}\left\|x_{p+a} - x_p\right\|_X &\leqslant \left\|\mathcal{T}(p+a, x_{p+a}) - \mathcal{T}(p+a, x_p)\right\|_X + \left\|\mathcal{T}(p+a, x_p) - \mathcal{T}(p, x_p)\right\|_X \\ &\leqslant q\left\|x_{p+a} - x_p\right\|_X + \left\|\mathcal{T}(p+a, x_p) - \mathcal{T}(p, x_p)\right\|_X.\end{aligned}$$

据条件 (2) 可得 $\mathcal{T}(p+a, x_p) - \mathcal{T}(p, x_p) = D_p\mathcal{T}(p, x_p)a + o(|a|)$, 所以存在常数 $M_p > 0$, 使得对任意充分小的 a 都满足

$$\left\|x_{p+a} - x_p\right\|_X \leqslant \frac{M_p}{1-q}|a|. \tag{4.2.3}$$

这既证明了 $p \longmapsto x_p$ 的连续性, 也给出了下面处理余项所需的一阶上界.

记$A_p = D_p\mathcal{T}(p, x_p)$, $B_p = D_x\mathcal{T}(p, x_p)$, 由压缩性知道对每个 $y \in X$ 和非零实数 h 有

$$\frac{\left\|\mathcal{T}(p, x_p + hy) - \mathcal{T}(p, x_p)\right\|_X}{|h|} \leqslant q\|y\|_X.$$

令 $h \to 0$, 得到 $\left\|B_p y\right\|_X \leqslant q\|y\|_X$, 即 $\left\|B_p\right\| \leqslant q$. 对任意 $z \in X$, 级数 $z + B_p z + B_p^2 z + \cdots$ 的第 m 项至第 n 项之和的范数不超过

$$(q^m + q^{m+1} + \cdots + q^n)\|z\|_X \leqslant \frac{q^m}{1-q}\|z\|_X.$$

所以它是 X 中的 Cauchy 级数; 由 X 的完备性, 它收敛. 定义 $R_p z = \sum_{j=0}^{\infty} B_p^j z$, 由于有限和的线性性在取极限后仍成立, 所以 R_p 线性; 而 $\left\|R_p z\right\|_X \leqslant \frac{1}{1-q}\|z\|_X$ 表明它有界, 且 $\left\|R_p\right\| \leqslant (1-q)^{-1}$. 在有限和恒等式 $(I - B_p)(I + B_p + \cdots + B_p^n) = I - B_p^{n+1}$ 中令 $n \to \infty$ 就得到

$$(I - B_p)R_p = R_p(I - B_p) = I \;\Rightarrow\; R_p = (I - B_p)^{-1}.$$

令 $\Delta_a = x_{p+a} - x_p$. 把 $(p+a, x_{p+a}) = (p+a, x_p + \Delta_a)$ 代入(2), 并利用不动点方程得到

$$\Delta_a = A_p a + B_p\Delta_a + r_a, \qquad \|r_a\|_X = o\big(|a| + \|\Delta_a\|_X\big).$$

由估计 (4.2.3), $\|\Delta_a\|_X = O(|a|)$, 所以 $\|r_a\|_X = o(|a|)$. 另一方面, 令 $\zeta_a = R_p A_p a$, 则 $\zeta_a = A_p a + B_p\zeta_a$.

两式相减后乘以 R_p, 得到

$$\Delta_a - \zeta_a = R_p r_a, \qquad \|\Delta_a - \zeta_a\|_X \leqslant \frac{1}{1-q}\|r_a\|_X = o(|a|).$$

这证明了可微性以及公式 (4.2.2).

最后证明导数连续. 由 $p \longmapsto x_p$ 的连续性以及条件(2) 得到 A_p 与 B_p 都连续. 若 $p, p_0 \in U$, 则

$$(I - B_p)^{-1} - (I - B_{p_0})^{-1} = (I - B_p)^{-1}(B_p - B_{p_0})(I - B_{p_0})^{-1}.$$

两端取算子范数, 并使用两个逆映射都不超过 $(1-q)^{-1}$ 的界, 可知 $(I - B_p)^{-1} \to (I - B_{p_0})^{-1}$. 因此 $Dx_p = (I - B_p)^{-1}A_p$ 连续. □

定理 4.2.4　局部稳定流形定理

对方程组(4.2.1), 设 $\boldsymbol{f} \in C^1$, 原点是双曲平衡点. 则在原点附近存在 C^1 函数 $h^s : E^s \to E^u$, 满足 $h^s(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $Dh^s(\mathbf{0}) = 0$, 使得局部稳定流形可以写成图像

$$W^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{a} + h^s(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in E^s,\ |\mathbf{a}| \text{ 小}\},$$

对充分小的 $\mathbf{a}$, 从 $\mathbf{a} + h^s(\mathbf{a})$ 出发的轨道满足

$$|\Phi_t(\mathbf{a} + h^s(\mathbf{a}))| \leqslant C_1 e^{-\alpha t}|\mathbf{a}| \qquad (t \geqslant 0),$$

其中 $C_1 > 0$ 且 $0 < \alpha < \gamma$ 与 $\mathbf{a}$ 无关. 在具有这种指数衰减性质的局部图像中, $W^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{0})$ 是唯一的. 对反向时间演化的方程组应用同一结论, 亦可得到与 E^u 相切的 C^1 局部不稳定流形.

证明. 把方程组写成

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = 0.$$

为了在整个半轴上应用压缩映射原理, 先把非线性余项截断成全空间上的小 Lipschitz 函数. 取原点的邻域 U, 使 $\boldsymbol{f} \in C^1(U)$, 再取 $r > 0$, 使 $\overline{B_{2r}(\mathbf{0})} \subset U$. 取 C^1 函数 χ, 使 $\chi(\boldsymbol{x}) = 1$ 当 $|\boldsymbol{x}| \leqslant 1$, $\chi(\boldsymbol{x}) = 0$ 当 $|\boldsymbol{x}| \geqslant 2$, 并令

$$\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \chi(\boldsymbol{x}/r)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in U, \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{x} \notin U. \end{cases}$$

由于 $\chi(\boldsymbol{x}/r)$ 的支集包含在 U 中, 这个零延拓是全空间上的 C^1 函数. 因为 $D\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = 0$, 当 $r \to 0_+$ 时有

$$\sup_{|\boldsymbol{x}| \leqslant 2r} |D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \longrightarrow 0, \qquad \sup_{0 < |\boldsymbol{x}| \leqslant 2r} \frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} \longrightarrow 0.$$

而在 U 中,

$$D\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}) = \chi(\boldsymbol{x}/r)D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{r}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \otimes \nabla\chi(\boldsymbol{x}/r),$$

所以 $\sup_{\boldsymbol{x}} |D\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x})| \to 0$. 以下把 r 固定得足够小, 并仍用 $\boldsymbol{g}$ 表示截断后的函数. 它是全空间上的 C^1 函数, 其 Lipschitz 常数 L 可以任意小; 在原点附近, 截断不改变原方程.

选 $0 < \alpha < \gamma$. 对给定的小向量 $\mathbf{a} \in E^s$, 在空间

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{ \boldsymbol{x} \in C([0,+\infty);\mathbb{R}^d) : \|\boldsymbol{x}\|_\alpha := \sup_{t\geqslant 0} e^{\alpha t}|\boldsymbol{x}(t)| < +\infty \right\}$$

上定义 Lyapunov–Perron 映射

$$(\mathcal{T}_{\mathbf{a}}\boldsymbol{x})(t) = e^{tA_s}\mathbf{a} + \int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s. \tag{4.2.4}$$

由上面的完备性结论知, $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}_\alpha^+$ 是 Banach 空间. 先说明式中的无穷积分有意义. 若 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_\alpha$, 则

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))| \leqslant L|\boldsymbol{x}(s)| \leqslant L\|\boldsymbol{x}\|_\alpha e^{-\alpha s}.$$

又因为 $s \geqslant t$ 时 $t - s \leqslant 0$, 所以

$$\int_t^\infty \left|e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\right| \mathrm{d}s \leqslant CL\|\boldsymbol{x}\|_\alpha \int_t^\infty e^{-\gamma(s-t)}e^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s < +\infty.$$

对 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}_\alpha$, 稳定部分满足

$$e^{\alpha t}\int_0^t Ce^{-\gamma(t-s)}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant CL\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\alpha \int_0^t e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{CL}{\gamma-\alpha}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\alpha.$$

同理, 不稳定部分则满足

$$e^{\alpha t}\int_t^\infty Ce^{-\gamma(s-t)}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(s))|\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{CL}{\gamma+\alpha}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\alpha,$$

现在把截断半径取得足够小, 使得

$$q := \frac{CL}{\gamma-\alpha} + \frac{CL}{\gamma+\alpha} < 1.$$

就得到 $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ 是 $\mathcal{X}_\alpha$ 上的压缩映射. 此外, 我们有 $\|\mathcal{T}_{\mathbf{a}}\boldsymbol{x}\|_\alpha \leqslant C|\mathbf{a}| + q\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$, 所以由压缩映射原理得到

存在唯一不动点 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}} \in \mathcal{X}_\alpha$, 并且把不动点代入上式得到

$$\|\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}\|_\alpha \leqslant \frac{C}{1-q}|\mathbf{a}|. \tag{4.2.5}$$

取 $|\mathbf{a}|$ 充分小, (4.2.5) 保证整条轨道都位于截断未改变原方程的小球内.

下面逐项验证不动点确实是微分方程的解. 由 (4.2.4) 的两个投影分量,

$$P^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t) = e^{tA_s}\mathbf{a} + \int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s, \quad P^u\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t) = -\int_t^\infty e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s.$$

第一式中各项的导数分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA_s}\mathbf{a}) = A_s e^{tA_s}\mathbf{a},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s = P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)) + A_s\int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s.$$

所以

$$(P^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}})'(t) = A_sP^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t) + P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)).$$

对第二式, 先把无穷积分的上端点换成 T, 求导后再令 $T \to +\infty$. 由于

$$\left|A_u e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\right| \leqslant \|A_u\|\,CL\,\|\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}\|_\alpha\, e^{-\gamma(s-t)}e^{-\alpha s},$$

右端在 $s \in [t, +\infty)$ 上可积, 并且当 t 限制在任意紧区间时可取同一个可积上界, 故可以对无穷积分求导. Leibniz 公式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\int_t^\infty e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s\right] = P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)) - \int_t^\infty A_u e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s = P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)) + A_uP^u\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t).$$

两个投影分量相加, 并使用 $P^s + P^u = I$, 得到 $\boldsymbol{x}'_{\mathbf{a}} = A\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}})$. 在 $t = 0$ 取值得

$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{a} + h^s(\mathbf{a}), \qquad h^s(\mathbf{a}) = -\int_0^\infty e^{-sA_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\,\mathrm{d}s.$$

下面核对引理 4.2.3 的条件. 映射 $(\mathbf{a}, \boldsymbol{x}) \longmapsto \mathcal{T}_{\mathbf{a}}\boldsymbol{x}$ 关于 $\mathbf{a}$ 的导数是

$$\big[D_{\mathbf{a}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x})\mathbf{b}\big](t) = e^{tA_s}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} \in E^s,$$

而由前面的Jordan块指数估计得到

$$\|D_{\mathbf{a}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x})\mathbf{b}\|_{\alpha} = \sup_{t\geqslant 0} e^{\alpha t}|e^{tA_s}\mathbf{b}| \leqslant C|\mathbf{b}|.$$

关于 $\boldsymbol{x}$ 的导数是

$$\big[D_{\boldsymbol{x}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\big](t) = \int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\boldsymbol{y}(s)\,\mathrm{d}s - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A_u}P^u D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\boldsymbol{y}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.2.6}$$

记 $K = \frac{C}{\gamma-\alpha} + \frac{C}{\gamma+\alpha}$, 由于截断后的 $D\boldsymbol{g}$ 连续并具有紧支集, 所以一致连续. 令

$$\omega(\rho) = \sup\{\,\|D\boldsymbol{g}(\xi) - D\boldsymbol{g}(\eta)\| : |\xi-\eta| \leqslant \rho\,\};$$

则 $\omega(\rho)\to 0$ 当 $\rho\to 0+$. 由微积分基本定理得到

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{y}(s)) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) - D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\boldsymbol{y}(s) = \int_0^1 \big[D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)+\theta\boldsymbol{y}(s)) - D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\big]\boldsymbol{y}(s)\,\mathrm{d}\theta.$$

因为 $|\boldsymbol{y}(s)| \leqslant e^{-\alpha s}\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha} \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_{\alpha}$, 所以上式的模长不超过 $\omega(\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha})e^{-\alpha s}\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha}$. 分别把这个界代入有限积分与无穷积分所用的估计, 得到

$$\|\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x}) - D_{\boldsymbol{x}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\|_{\alpha} \leqslant K\omega(\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha})\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha} = o(\|\boldsymbol{y}\|_{\alpha}).$$

所以 (4.2.6) 确实是关于 $\boldsymbol{x}$ 的导数. 由于 $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ 关于 $\mathbf{a}$ 是线性依赖, 关于 $\mathbf{a}$ 的余项恒为零, 因而联合可微性也已经得到.

又由 $\sup\limits_{\xi}\|D\boldsymbol{g}(\xi)\| \leqslant L$ 以及前面的积分估计, 我们得到导数算子的范数估计 $\|D_{\boldsymbol{x}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x})\|_{\mathcal{X}_\alpha\to\mathcal{X}_\alpha} \leqslant KL = q < 1$. 若 $\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{X}_\alpha$, 则

$$\|D_{\boldsymbol{x}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x}) - D_{\boldsymbol{x}}\mathcal{T}_{\mathbf{a}}(\widetilde{\boldsymbol{x}})\| \leqslant K\sup_{s\geqslant 0}\|D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) - D\boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{x}}(s))\| \leqslant K\omega(\|\boldsymbol{x}-\widetilde{\boldsymbol{x}}\|_{\alpha}).$$

所以这个导数按算子范数连续; 关于 $\mathbf{a}$ 的导数与 $(\mathbf{a},\boldsymbol{x})$ 无关, 当然连续. 引理 4.2.3 现在表明 $\mathbf{a}\longmapsto \boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}$ 是 C^1 的.

为了把参数求导的每一项写出来, 令 $\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(t) = D_{\mathbf{a}}\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)\mathbf{b}$, 由 (4.2.2) 得知, $\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 是下列线性 Lyapunov–Perron 方程的唯一解:

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(t) = e^{tA_s}\mathbf{b} + \int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A_u}P^u D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.2.7}$$

特别地, $h^s(\mathbf{a}) = P^u \boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(0)$ 也是 C^1 的, 并且

$$Dh^s(\mathbf{a})\mathbf{b} = P^u \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(0) = -\int_0^{\infty} e^{-sA_u} P^u D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(s))\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s.$$

最后一个积分绝对收敛, 因为其被积函数的上界不超过 $CLe^{-(\gamma+\alpha)s}\left\|\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right\|_{\alpha}$, 这个可积上界也说明从 h^s 的积分表达式求导是可行的.

当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, 唯一不动点是零函数, 所以 $h^s(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 在 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 处, $D\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = 0$, 上述导数方程化为 $\boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{0},\mathbf{b}}(t) = e^{tA_s}\mathbf{b}$, 它在 $t = 0$ 的 E^u 分量为零, 故 $Dh^s(\mathbf{0}) = 0$. 这还说明图像在原点与 E^s 相切. 而映射 $\mathbf{a} \longmapsto \mathbf{a} + h^s(\mathbf{a})$ 是一一映射, 因为对其取 P^s 投影便恢复 $\mathbf{a}$; 它在图像上的逆映射正是线性投影 P^s. 因此这个图像是一个 $\dim E^s$ 维的 C^1 局部流形.

由(4.2.5) 得

$$|\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)| \leqslant \frac{C}{1-q}e^{-\alpha t}|\mathbf{a}|, \qquad t \geqslant 0,$$

所以定理中的指数衰减估计成立.

接着证明图像的唯一性和局部不变性. 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是截断方程的一个小解, 并且 $\sup\limits_{t\geqslant 0} e^{\alpha t}|\boldsymbol{x}(t)| < +\infty$. 由 Duhamel 原理可得稳定分量为

$$P^s\boldsymbol{x}(t) = e^{tA_s}P^s\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_s}P^s\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

对任意 $T > t$, 不稳定分量满足

$$P^u\boldsymbol{x}(t) = e^{(t-T)A_u}P^u\boldsymbol{x}(T) - \int_t^T e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

第一项的模不超过 $Ce^{-\gamma(T-t)}\|\boldsymbol{x}\|_{\alpha}e^{-\alpha T}$, 它在 $T \to +\infty$ 时趋于零; 第二项绝对收敛. 因此

$$P^u\boldsymbol{x}(t) = -\int_t^{\infty} e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

把两个分量相加, $\boldsymbol{x}$ 满足(4.2.4), 其中 $\mathbf{a} = P^s\boldsymbol{x}(0)$. 由压缩映射的不动点唯一性, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}$, 因而其初值位于上述图像上.

现在固定 $t_0 \geqslant 0$, 并对 $t \geqslant 0$ 令 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t + t_0)$. 自治性说明 $\boldsymbol{y}$ 仍是同一方程的解, 而且

$$\sup_{t\geqslant 0} e^{\alpha t}|\boldsymbol{y}(t)| \leqslant e^{-\alpha t_0}\|\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}\|_{\alpha} < +\infty.$$

刚才证明的刻画用于 $\boldsymbol{y}$, 并注意 $P^s\boldsymbol{y}(0) = P^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t_0)$, 便得到 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t_0) = P^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t_0) + h^s\big(P^s\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t_0)\big)$. 只要该点仍位于定义局部图像的小邻域内, 它就属于这个图像. 这证明了局部正向不变性. 前一段的刻画还说明: 任何具有相同指数衰减性质的小解, 其初值都只能落在这个图像上, 故定理所说的唯一性

也成立.

最后考虑反向时间演化的方程组 $\boldsymbol{y}' = -A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, 它的线性部分在 E^u 上的特征值实部为负, 在 E^s 上的特征值实部为正; 非线性余项 $-\boldsymbol{g}$ 仍为 C^1, 并满足 $-\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $D(-\boldsymbol{g})(\mathbf{0}) = 0$. 因此已经证明的稳定流形结论用于这个反向系统, 给出一个 C^1 函数

$$h^u : E^u \longrightarrow E^s, \qquad h^u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad Dh^u(\mathbf{0}) = 0,$$

以及局部图像

$$\{\mathbf{b} + h^u(\mathbf{b}) : \mathbf{b} \in E^u, |\mathbf{b}| \text{ 小}\}.$$

若 $\boldsymbol{y}(t)$ 是反向时间演化的方程组从这个图像上出发的解, 则 $\boldsymbol{y}(t) \to \mathbf{0}$ 当 $t \to +\infty$. 令 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(-t)$, 便有 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, 且 $\boldsymbol{x}(t) \to \mathbf{0}$ 当 $t \to -\infty$. 反向系统的局部正向不变性正是原方程组的局部负向不变性. 因此这个图像就是原系统的 C^1 局部不稳定流形. □

例 4.2.2 稳定流形可能不是线性空间

考虑方程组 $x' = -x$, $y' = y + x^2$ 零解的稳定流形

解. 由第一式 $x' = -x$ 及初值得 $x(t) = x_0 e^{-t}$. 第二个方程就变为 $y' - y = x_0^2 e^{-2t}$, 直接用积分因子法求解可得

$$y(t) = e^t \left[y_0 + \frac{x_0^2}{3}(1 - e^{-3t}) \right].$$

解在$t \to +\infty$时趋于原点，当且仅当$y_0 = -\frac{x_0^2}{3}$. 因此

$$W^s(\mathbf{0}) = \left\{ (x, y) : y = -\frac{x^2}{3} \right\},$$

它在原点与x轴相切, 却是一条抛物线而不是线性子空间. □

4.2.3 *Hartman-Grobman定理、Sternberg线性化定理

定义 4.2.3 局部拓扑共轭

若两个局部流 Φ_t, Ψ_t 的平衡点附近存在同胚 H, 使得 $H(\Phi_t(\boldsymbol{x})) = \Psi_t(H(\boldsymbol{x}))$, 则称两个系统在该平衡点附近局部拓扑共轭. 若 H 是 C^k 微分同胚, 则称为 C^k 共轭.

定理 4.2.5 Hartman-Grobman 定理

设 $\boldsymbol{f} \in C^1$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且 $A = D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ 没有实部为零的特征值. 则双曲平衡点附近的非线性方程组

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{x}|)$$

与其线性化 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ 局部拓扑共轭. 更确切地说, 存在原点的邻域 U, V 和同胚 $H : U \to V$, 满足 $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 并且只要轨道段 $\{\Phi_s(\boldsymbol{x}) : s \text{ 位于 } 0 \text{ 与 } t \text{ 之间}\}$ 包含在 U 中, 就有

$$H(\Phi_t(\boldsymbol{x})) = e^{tA}H(\boldsymbol{x}).$$

这一定理说明, 双曲平衡点附近的非线性轨道与线性化轨道具有相同的连接方式. 不过, 同胚 H 通常不可微, 所以它不保留轨道的速度、曲率或夹角. 定理的证明需要在整个局部流上构造共轭, 技术上比稳定流形定理更复杂, 这里不作证明.

定理 4.2.6 Sternberg 光滑线性化定理, C^∞ 形式

对自治方程组(4.0.1), 设 $\boldsymbol{f} \in C^\infty$, 原点是双曲平衡点, 并把 $A = D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ 的复特征值按代数重数记为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$. 假设对每个 $1 \leqslant j \leqslant d$ 以及所有满足 $m_1 + \cdots + m_d \geqslant 2$ 的非负整数 $m_1, \cdots, m_d$, 都有非共振条件

$$\lambda_j \neq m_1\lambda_1 + \cdots + m_d\lambda_d.$$

则存在原点附近的 C^∞ 坐标变换 $\boldsymbol{y} = H(\boldsymbol{x})$, 满足 $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, DH(\mathbf{0}) = I$, 并把系统化为 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$

有限阶光滑版本需要把方程的光滑阶数, 所排除的共振阶数以及坐标变换的光滑阶数同时写入假设; 为避免掩盖这些必要条件, 这里只陈述上面的 C^∞ 形式. 该定理也不作证明. 接下来我们看一个无法光滑线性化的例子.

例 4.2.3 共振项不能被光滑消去

方程组 $x' = x$, $y' = 2y + x^2$ 的特征值满足共振条件 $2 = 2 \cdot 1$, 试研究其线性化.

解. 显式求解 x 的方程可得 $x(t) = x_0e^t, \{y(t) = e^{2t}(y_0 + x_0^2t)$. 若尝试用二次变换 $Y = y + cx^2$ 消去 x^2, 则

$$Y' = y' + 2cxx' = 2y + x^2 + 2cx^2 = 2Y + x^2,$$

可见 x^2 的系数与 c 无关. 若允许一般变换 $Y = y + h(x)$, 并要求 $Y' = 2Y$, 则 h 必须满足

$$xh'(x) - 2h(x) = -x^2.$$

在 $x \neq 0$ 处令 $h(x) = x^2k(x)$, 便得到

$$x^3k'(x) = -x^2, \qquad k'(x) = -\frac{1}{x},$$

所以 h 必须含有 $-x^2 \log|x|$. 这个函数在原点不是 C^2 的. 因此 Hartman–Grobman 定理仍给出拓扑线性化, 但实际上共振项阻止了光滑线性化. □

注记 4.2.1. 实际上我们可以证明该例中的光滑线性化必定不存在。若不然，反设存在局部 C^2 微分同胚 $H = (H_1, H_2)$，将原方程共轭到 $X' = X$, $Y' = 2Y$。那么在原点处对共轭关系求导可知

$DH(0)$ 与 $\mathrm{diag}(1,2)$ 交换。由于两个特征值不同，所以只能有

$$DH(0)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\qquad ab\neq 0.$$

另一方面，第二个分量的共轭关系为 $x\partial_x H_2+(2y+x^2)\partial_y H_2=2H_2$. 因为 $H_2\in C^2$ 以及 $\partial_x H_2(0)=0$，所以在 $y=0$ 上可以做展开

$$H_2(x,0)=cx^2+o(x^2),\qquad \partial_x H_2(x,0)=2cx+o(x),\qquad \partial_y H_2(x,0)=b+o(1).$$

将 $y=0$ 代入共轭关系得到 $x(2cx+o(x))+x^2(b+o(1))=2cx^2+o(x^2)$，于是比较 x^2 的系数就得到 $b=0$，这与 $ab\neq 0$ 矛盾。

习题 4.2

习题 4.2.1. 判断如下方程的奇点 $(0,0)$ 是什么类型，说明其稳定性，并作该奇点附近的相图。

(1) $x'=2x+y+xy^2, y'=x+2y+x^2+y^2$.
(2) $x'=x+2y, y'=5y-2x+x^3$.
(3) $x'=2x+4y+\sin y, y'=x+y+e^y-1$.

习题 4.2.2. 判断微分方程 $x'(t)=x(t)-y(t), y'(t)=1-x(t)y(t)$ 奇点的类型，并作出奇点附近的相图。

习题 4.2.3. 作出方程组 $x'(t)=2y(t), y'(t)=x(t)-x(t)^2-y(t)$ 在平衡点附近的相图。

习题 4.2.4. 考虑方程组 $x'(t)=-x(t), y'(t)=2y(t)+x(t)^2+x(t)y(t)$.

(1) 证明原点的局部稳定流形可以写成 $y=h(x)$ 的形式，其中 $h(0)=h'(0)=0$，并推导 h 满足的微分方程。
(2) 设在 $x=0$ 有展开 $h(x)=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+o(x^4)$，计算这三个系数。
(3) 如果只将线性稳定子空间 $y=0$ 作为初值集合，为什么不能得到非线性方程的稳定流形？

问题 4.2

问题 4.2.1 (定理4.2.1的另证). 考虑非线性方程组

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{g}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\qquad D\boldsymbol{g}(\mathbf{0})=0,$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 在原点的某个邻域 U 内连续可微。假设 A 至少有一个实部为正的特征值。

本题要求利用负时间指数加权空间和压缩映射原理，给出定理 4.2.1(2) 的另一种证明。不得直接引用该结论、局部稳定或不稳定流形定理以及 Hartman–Grobman 定理。

(1) 考虑直和分解 $\mathbb{R}^d = E^u \oplus E^{cs}$，其中 E^u 为 A 的所有实部为正的特征值所对应的实根子空间的直和，令 E^{cs} 为其余特征值所对应的实根子空间的直和。对于复特征值，应把一对共轭复根子空间合并成相应的实不变子空间。记相应的投影为 P^u, P^{cs}，并记 $A_u = A|_{E^u}, A_{cs} = A|_{E^{cs}}$. 证明：存在常数 $C > 1, 0 < \varepsilon < \beta < \alpha$ 使得对任意 $t \leqslant 0$ 有 $|e^{tA_u}| \leqslant Ce^{\alpha t}$，对任意 $t \geqslant 0$ 有 $|e^{tA_{cs}}| \leqslant Ce^{\varepsilon t}$. 这里可以把 P^u, P^{cs} 的算子范数吸收到 C 中。若 $E^{cs} = \{\mathbf{0}\}$，则以下所有含有 E^{cs}, A_{cs}, P^{cs} 的项均省略。

(2) 取函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，满足 $0 \leqslant \chi \leqslant 1, \chi|_{|\boldsymbol{x}|\leqslant 1} = 1, \chi|_{|\boldsymbol{x}|\geqslant 2} = 0$. 设 r 充分小使得 $\overline{B_{2r}(\mathbf{0})} \subset U$，并定义

$$\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \chi(\boldsymbol{x}/r)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), & |\boldsymbol{x}| < 2r, \\ \mathbf{0}, & |\boldsymbol{x}| \geqslant 2r. \end{cases}$$

证明：$\boldsymbol{g}_r \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$，且当 $|\boldsymbol{x}| \leqslant r$ 时 $\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，并证明其全局 Lipschitz 常数 L_r 满足

$$L_r := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |D\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x})| \leqslant \sup_{|\boldsymbol{x}|\leqslant 2r} |D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| + 2\|\nabla\chi\|_{L^\infty} \sup_{0<|\boldsymbol{x}|\leqslant 2r} \frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} \to 0 \qquad (r \to 0_+).$$

(3) 对第 (1) 问中的 β，考虑负时间指数加权空间

$$\mathcal{X}_\beta^- = \left\{ \boldsymbol{x} \in C((-\infty, 0]; \mathbb{R}^d) : \|\boldsymbol{x}\|_\beta^- := \sup_{t\leqslant 0} e^{-\beta t}|\boldsymbol{x}(t)| < +\infty \right\}.$$

利用本节关于指数加权函数空间完备性的结论，说明 $\mathcal{X}_\beta^-$ 是 Banach 空间。

(4) 对每个 $\mathbf{a} \in E^u$，定义

$$(\mathcal{T}_{\mathbf{a}}\boldsymbol{x})(t) = e^{tA_u}\mathbf{a} + \int_0^t e^{(t-s)A_u}P^u\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A_{cs}}P^{cs}\boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \leqslant 0.$$

证明两个积分都有意义，并且 $\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ 在 $\mathcal{X}_\beta^-$ 中有唯一不动点 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}$.

(5) 证明：存在 $q < 1$ 使得 $\|\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}\|_\beta^- \leqslant \dfrac{C}{1-q}|\mathbf{a}|$，并验证 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}$ 连续可微并满足截断后的方程

$$\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}'(t) = A\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}(t)), \qquad t \leqslant 0.$$

并说明 $\boldsymbol{x}_{\mathbf{a}}$ 是未截断的原方程在 $(-\infty, 0]$ 上的一条非零轨道，据此证明原点不稳定。

4.3 Lyapunov函数法

通过线性化方程组来判断零解稳定性，需要原点是双曲平衡点; 而且特征值实部皆为非正且存在特征值为纯虚数的情况, 非线性扰动可能改变原点这一平衡点的类型和稳定性. 此时，我们可

以利用Lyapunov方法寻找一个沿轨道不增加的“能量”，通过能量的几何形状控制轨道.

定义 4.3.1 正定函数与Lyapunov函数

对自治方程组(4.0.1), 设 $V \in C^1(U)$, 其中 U 是原点邻域. 若 $V(\mathbf{0}) = 0$, 且对任意 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ 都有 $V(\boldsymbol{x}) > 0$ 则称 V 在原点处正定. 沿方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 轨线的导数定义为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla V(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

若 V 正定且 $\dot{V} \leqslant 0$, 则称 V 为**Lyapunov 函数**.

定理 4.3.1 Lyapunov 稳定性定理

对自治方程组(4.0.1), 设 $\boldsymbol{f} \in C^1(U)$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 其中 U 是原点的邻域.

(1) 若 U 中存在正定函数 $V \in C^1(U)$, 并且 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$, 则原点稳定;
(2) 若进一步有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$ 对每个 $\boldsymbol{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ 成立, 则原点局部渐近稳定;
(3) 若 $U = \mathbb{R}^d$, V 正定, $\dot{V}$ 负定, 并且当 $|\boldsymbol{x}| \to +\infty$ 时有 $V(\boldsymbol{x}) \to +\infty$, 则原点全局渐近稳定.

证明. 先证(1)的稳定性. 取 $r > 0$, 使闭球 $\overline{B_r(\mathbf{0})}$ 包含在 U 中. 给定 $0 < \varepsilon < r$, 球面 $|\boldsymbol{x}| = \varepsilon$ 是紧集, 所以由正定性与连续性得到 $m_\varepsilon := \min\limits_{|\boldsymbol{x}|=\varepsilon} V(\boldsymbol{x}) > 0$. 据 $V(\mathbf{0}) = 0$ 和连续性, 可取 $\delta < \varepsilon$, 使 $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时 $V(\boldsymbol{x}_0) < m_\varepsilon$.

在解尚未离开 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 时, 由链式法则计算得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}(t)) = \dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant 0.$$

因而 $V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) < m_\varepsilon$. 如果轨道能够离开 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$, 则再由连续性得知第一次到达球面的时刻 $t_* > 0$. 在该时刻, 一方面我们有 $V(\boldsymbol{x}(t_*)) \geqslant m_\varepsilon$, 另一方面又成立 $V(\boldsymbol{x}(t_*)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) < m_\varepsilon$, 矛盾, 故轨道始终留在 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$. 因为 ε 可以任意小, 所以原点稳定.

(2) 设 $\dot{V}$ 负定. 固定充分小的 $r_0 < r$, 使 $\overline{B_{r_0}(\mathbf{0})} \subset U$. 由已经证明的稳定性, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|\boldsymbol{x}_0| < \delta_0$ 时, 轨道对所有 $t \geqslant 0$ 都位于 $B_{r_0}(\mathbf{0})$ 中. 据延拓定理知, 该轨道在时间正向整体存在.

下面证明 $\boldsymbol{x}(t) \to \mathbf{0}$. 给定 $0 < \varepsilon < r_0$, 再由原点的稳定性可取 $0 < \delta < \varepsilon$, 使得任何从 $B_\delta(\mathbf{0})$ 出发的轨道在此后的所有时间内都留在 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 中. 由于 $-\dot{V}$ 在紧环域 $\{\boldsymbol{x} : \delta \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant r_0\}$ 上连续且严格为正, 所以

$$m_\delta := \min_{\delta \leqslant |\boldsymbol{x}| \leqslant r_0} \left(-\dot{V}(\boldsymbol{x})\right) > 0.$$

若轨道始终不进入 $B_\delta(\mathbf{0})$, 则对所有 $t \geqslant 0$ 都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}(t)) = \dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant -m_\delta,$$

从而 $V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) - m_\delta t$. 当 t 充分大时右端为负数, 这与 $V \geqslant 0$ 矛盾. 因此轨道必在某个时刻

进入 $B_\delta(\mathbf{0})$. 利用方程的自治性和原点的稳定性, 从该时刻起轨道始终位于 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 中. 因为 $\varepsilon>0$ 任意, 所以 $\boldsymbol{x}(t)\to\mathbf{0}$.

(3) 给定任意初值 $\boldsymbol{x}_0$, 考虑下水平集 $K_{\boldsymbol{x}_0}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d : V(\boldsymbol{x})\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)\}$. 由 V 的径向无界性, $K_{\boldsymbol{x}_0}$ 是紧集; 又因为沿轨道 V 单调不增, 所以 $K_{\boldsymbol{x}_0}$ 正向不变. 延拓定理于是保证相应解在所有正向时间整体存在.

给定 $\varepsilon>0$, 由已经证明的原点稳定性可取 $0<\delta<\varepsilon$, 使得从 $B_\delta(\mathbf{0})$ 出发的轨道始终位于 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 中. 如果当前轨道始终不进入 $B_\delta(\mathbf{0})$, 那么它始终位于紧集 $K_{\boldsymbol{x}_0}\setminus B_\delta(\mathbf{0})$ 中. 在这个集合上 $-\dot V$ 有严格正的最小值, 与第 (2) 项相同的积分论证将迫使 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 在有限时间后变成负数, 矛盾. 因此轨道最终进入 $B_\delta(\mathbf{0})$, 并从此始终位于 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 中. 于是每条正向轨道都趋于原点, 原点全局渐近稳定. □

例 4.3.1 用 Lyapunov 函数判断渐近稳定性

考察方程组

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x - y^3. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

用Lyapunov函数方法判断原点的稳定性.

解. 首先由 $x'=y'=0$ 可知原点是一个平衡点。为了考察其线性化稳定性，计算右端的Jacobi矩阵：

$$D\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

在原点处，线性化矩阵为

$$A=D\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^2+1=0$，故特征值为 $\lambda=\pm i$。因此原点不是双曲平衡点，线性化稳定性原理不能判断原非线性系统是否渐近稳定。

下面直接考察原方程组。取函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，则 $V(0,0)=0$，且当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时有 $V(x,y)>0$，所以 V 是正定函数。沿着原方程组的解求导，得到

$$\dot V = xx'+yy' = x(y-x^3)+y(-x-y^3) = xy-x^4-xy-y^4 = -x^4-y^4.$$

因此，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，恒有 $\dot V(x,y)<0$，这实际上也说明本例所考虑的方程组的解是正向整体存在的（为什么？）。另一方面，当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时，$V(x,y)\to+\infty$。所以 V 不仅是正定的，而且径向无界。由 Lyapunov 稳定性定理可知，原点是全局渐近稳定的。 □

注记 4.3.1. 本例与例4.2.1有相同的线性化矩阵，但两者存在重要区别。在例4.2.1中，我们令 $R=$

x^2+y^2 后，可以得到封闭的标量方程 $R'=\pm 2R^2$。而本例中 $R'=-2(x^4+y^4)$ 仍然依赖于 x,y 各自的取值，不能仅用 R 表示。实际上 Lyapunov 方法不需要求出具体解，就能够判断整体渐近稳定性。

注记 4.3.2 (多项式收敛率). 实际上我们还可以计算出上例中的解收敛到原点的速率。令 $R(t)=x(t)^2+y(t)^2$，则 $R'=-2(x^4+y^4)$, 而

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \leqslant x^4+y^4 \leqslant (x^2+y^2)^2.$$

若 $R(0)=R_0>0$，则由解的唯一性可知非零解不会在有限时间内到达原点。因此对任意有限的 $t\geqslant 0$ 均有 $R(t)>0$，于是得到

$$1 \leqslant -\frac{R'}{R^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{R}\right)\leqslant 2 \;\Rightarrow\; t\leqslant \frac{1}{R(t)}-\frac{1}{R_0}\leqslant 2t \;\Rightarrow\; \frac{R_0}{1+2R_0t}\leqslant R(t)\leqslant \frac{R_0}{1+R_0t}.$$

特别地，$R(t)\to 0$，即 $(x(t),y(t))\to(0,0)$。这个估计还说明非零解到原点的距离具有 $O(t^{-1/2})$ 的衰减速度，而不是指数衰减。综上，原点是全局渐近稳定的，但不是指数渐近稳定的。

当然 Lyapunov 稳定性定理也有其局限之处：很多时候我们只能构造出满足 $\dot V\leqslant 0$ 的 Lyapunov 函数，而 $\{\dot V=0\}$ 这个集合里面可能包含非平衡点。这种情况下 Lyapunov 稳定性定理只能给出稳定性而非渐近稳定性，后者的证明往往要用到 4.5 节的 LaSalle 不变原理。这里我们给出一个例子。

例 4.3.2 用自然机械能作为 Lyapunov 函数无法判断渐近稳定性的例子

考察方程组$x'=y,\ y'=-x-y^3$. 用Lyapunov函数方法判断原点的稳定性.

解. 首先，原点是平衡点。线性部分系数矩阵的特征值仍然为 $\lambda=\pm i$，因此线性化稳定性判据(定理4.2.1) 不能判断原点的渐近稳定性。我们仍然尝试最自然的能量函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$。沿方程组的解求导，得到

$$\dot V=xx'+yy'=xy+y(-x-y^3)=-y^4\leqslant 0.$$

于是 V 是正定的Lyapunov函数，从而原点稳定。但这与例4.3.1不同：对所有满足 $y=0$ 的点，包括 $x\neq 0$ 的点，都有 $\dot V(x,0)=0$。因此 $\dot V$ 不是负定函数，不能用 Lyapunov 稳定性定理得到渐近稳定性。 □

思考. 是否可以构造其它的 Lyapunov 函数 W，使得我们直接能得到 $\dot W<0$ 在原点以外的地方恒成立？

下面这个例子可能更加令人难蚌：Lyapunov 稳定性定理处理线性方程组零解的渐近稳定性都可能无法直接搞定。

例 4.3.3

考虑阻尼振子方程组 $x'=y,\ y'=-\omega^2x-\gamma y$, 其中 $\omega,\gamma>0$. 用 Lyapunov 函数法判断稳定性.

解. 自然机械能 $V_0(x,y)=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}\omega^2x^2$ 只满足 $\dot V_0=-\gamma y^2\leqslant 0$, 因而只能直接给出稳定性. 为了使耗散同时控制 x 与 y, 在机械能中加入交叉项: 对 $a>0$ 我们待定 Lyapunov 函数为 $V_a(x,y):=V_0(x,y)+axy$，计算可得

$$\dot V_a=\dot V_0+a(x'y+y'x)=-(\gamma-a)y^2-a\gamma y-a\omega^2x^2.$$

我们希望 $\dot V_a<0$ 在原点以外恒成立，所以要求 $(a\gamma)^2-4a\omega^2(\gamma-a)<0$，解得 $0<a<\dfrac{4\gamma\omega^2}{\gamma^2+4\omega^2}$. 另一方面，我们还要求 V_a 本身正定，所以这要求判别式 $a^2-\omega^2<0$，而这是显见成立的，因为之前得到的上界是更小的

$$\frac{4\gamma\omega^2}{\gamma^2+4\omega^2}\leqslant\frac{4\gamma\omega^2}{4\gamma\omega}=\omega.$$

于是把这个新的 Lyapunov 函数 $\dot V_a$ 代入定理 4.3.1(2) 即得到原点的渐近稳定性。 □

另一种修正 Lyapunov 函数的方法是增加高阶项。当然，Attention is all you need!

例 4.3.4 构造一个含交叉项的能量

用Lyapunov函数方法判断方程组 $x'=-x^3+y,\ y'=-y$ 零解的稳定性。

思考. 事实上，本例中我们不可能构造出形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 的 Lyapunov 函数，为什么？

解. 系统在原点处的线性化矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$, 由于存在零特征值，线性化稳定性判据不能判断原点是否渐近稳定，非线性项 $-x^3$ 的作用不能忽略。

先尝试最简单的能量 $E_0(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, 沿系统的解求导得到

$$\dot E_0=xx'+yy'=x(-x^3+y)-y^2=-x^4+xy-y^2.$$

这个表达式并不恒为非正。事实上，取 $y=x/2$，便有

$$\dot E_0\left(x,\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}x^2-x^4>0,\qquad 0<|x|<\frac{1}{2}.$$

因此，无论把邻域取得多小，E_0 都不能作为 Lyapunov 函数，其问题来自耦合项 xy. 为了消去这

个耦合项，考虑含交叉项的正定二次型

$$V_2(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+y^2=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4}x^2$$

沿解计算得，

$$\dot{V}_2=(x+y)x'+(x+2y)y'=(x+y)(-x^3+y)+(x+2y)(-y)=-x^4-x^3y-y^2.$$

交叉项 xy 又产生不定号的非线性项 $-x^3y$. 另一方面我们注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=x^3x'=x^3(-x^3+y)=-x^6+x^3y.$$

其中的 x^3y 恰好可以与 $\dot{V}_2$ 中的$-x^3y$ 相消。因此定义

$$V(x,y)=V_2(x,y)+\frac{1}{4}x^4=\frac{1}{2}x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}x^4.$$

一方面它正定，而且当 $x^2+y^2\to\infty$ 时有 $V(x,y)\to\infty$. 另一方面，

$$\dot{V}=\dot{V}_2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=\left(-x^4-x^3y-y^2\right)+\left(-x^6+x^3y\right)=-x^4-y^2-x^6.$$

因此对任意 $(x,y)\neq(0,0)$ 都有 $\dot{V}(x,y)<0$. 由 Lyapunov 稳定性定理知原点是渐近稳定的。又因为 V 径向无界，故任意解都被限制在某个紧的能量下水平集中，因而解在时间正向是整体存在的。所以原点实际上是整体渐近稳定的。

这个例子还说明，渐近稳定未必伴随指数衰减。若 $y(0)=0$，则 $y(t)\equiv0$，而

$$x'=-x^3\ \Rightarrow\ x(t)=\frac{x(0)}{\sqrt{1+2x(0)^2t}},$$

衰减速度只有 $t^{-1/2}$ 阶，不是指数衰减，这与线性化矩阵含有零特征值相吻合。 □

习题 4.3

习题 4.3.1. 设 $g\in C^1(\mathbb{R})$, 且 $x\neq0$ 时 $xg(x)>0$. 证明: 方程 $x''(t)+g(x(t))=0$ 的零解是稳定但不渐近稳定的。

习题 4.3.2. 讨论系统 $x'=y-xf(x,y)$, $y'=-x-yf(x,y)$ 的零解稳定性，其中 f 在原点附近连续可微。(提示: 考察 $f(0,0)$ 的符号)

习题 4.3.3. 研究系统 $x'=y$, $y'=-1+x^2$ 的两个平衡点的稳定性。

习题 4.3.4. 讨论下列平面系统零解的稳定性:

(1) $x' = -y - xy^2, \quad y' = x - x^4y$;
(2) $x' = -y^3 - x^5, \quad y' = x^3 - y^5$;
(3) $x' = -x + 2x(x+y)^2, \quad y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2$;
(4) $x' = 2x^2y + y^3, \quad y' = -xy^2 + 2x^5$.

习题 4.3.5. 判断 $x'(t) = y(t), y'(t) = -y(t)^2 - \sin x(t)$ 的平衡点 $(0,0), (\pi, 0)$ 的时间正向稳定性。

习题 4.3.6. 设 $\varepsilon \neq 0$, 讨论如下方程组零解的稳定性

$$x' = (\varepsilon x + 4y)(z+1), \quad y' = (-x + \varepsilon y)(z+1), \quad z' = -z^3.$$

问题 4.3

问题 4.3.1. 考虑二阶方程 $x''(t) + x(t) + x(t)^3 = 0, x(0) = x_0, x'(0) = 0$ 的实值解。证明：对任意 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 该方程的解必定是周期解。

4.4 *全局相图的零等倾线方法

本章前两节讨论了平衡点附近的局部相图分类，并介绍了双曲平衡点稳定性的线性判据；而第三节又介绍了利用 Lyapunov 函数判断平衡点的稳定性的方法，这时的平衡点未必是双曲平衡点。但这些局部信息不能自动说明不同平衡点附近的轨道如何在整个相平面中连接，本节来简要讨论如何利用 **零等倾线 (nullcline)** 方法作出全局相图的草图。

对平面系统 $x' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$, 曲线 $f(x,y) = 0$ 称为 x-零等倾线, 曲线 $g(x,y) = 0$ 称为 y-零等倾线. 第一条曲线上有 $x' = 0$, 所以向量场沿竖直方向; 第二条曲线上有 $y' = 0$, 所以向量场沿水平方向. 若这些曲线把相平面分成若干连通区域, 并且 f, g 在各区域内都不为零, 那么连续性保证 x' 与 y' 在每个区域内各自保持固定符号. 画出零等倾线并标明这些符号, 便能得到全局相图的方向骨架.

需要注意, 零等倾线一般不是不变曲线. 例如在 $f = 0$ 上只有 $x' = 0$, 轨道通常仍会沿竖直方向穿过这条曲线. 因此零等倾线主要提供方向信息, 仅凭它一般不能判定闭轨、分离轨以及有界轨道的最终去向. 要补全全局相图, 还需结合守恒量、不变区域以及后文的极限集方法.

例 4.4.1 Lotka–Volterra捕食者–猎物模型

设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别表示猎物和捕食者的数量. 最简单的捕食者–猎物模型为

$$x' = x(\alpha - \beta y), \qquad y' = y(-\gamma + \delta x), \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

用零等倾线方法作相图的草图.

解. 在第一象限, 两条非平凡的零等倾线是 $y = \alpha/\beta$, $x = \gamma/\delta$. 四个区域中向量场的符号依次为右

上, 左上, 左下, 右下, 轨道绕内部平衡点旋转. 定义函数H如下

$$H(x,y)=\delta x-\gamma\log x+\beta y-\alpha\log y,$$

则它在第一象限内有

$$\begin{aligned}\dot H&=(\delta-\gamma/x)x(\alpha-\beta y)+(\beta-\alpha/y)y(-\gamma+\delta x)\\&=(\delta x-\gamma)(\alpha-\beta y)+(\beta y-\alpha)(-\gamma+\delta x)=0.\end{aligned}$$

内部平衡点为 $(x_*,y_*)=\left(\frac{\gamma}{\delta},\frac{\alpha}{\beta}\right)$. 进一步我们算出

$$D^2H(x,y)=\begin{pmatrix}\gamma/x^2 & 0\\ 0 & \alpha/y^2\end{pmatrix},$$

所以 H 在第一象限严格凸, 并且只在 (x_*,y_*) 处达到最小值. 当 $x\to 0_+$, $y\to 0_+$, $x\to+\infty$ 或 $y\to+\infty$ 时, $H(x,y)\to+\infty$. 因此高于最小值的每个水平集都是第一象限内的紧、闭曲线. 下面把这个结论以及“有限时间回到初值”两点分别证明清楚.

固定 $c>H(x_*,y_*)$, 并记

$$K_c=\{(x,y):x>0,y>0,H(x,y)\leqslant c\},\qquad \Gamma_c=\partial K_c=\{H=c\}.$$

上述边界行为说明 K_c 与两个坐标轴以及无穷远都保持正距离, 因而 K_c 是第一象限中的紧集. 又因为 H 严格凸, K_c 是严格凸集. 为直接看出其边界只有一条闭曲线, 从 $p=(x_*,y_*)$ 出发, 任取单位向量 $\mathbf{e}$, 并考察 $\psi_{\mathbf{e}}(r)=H(p+r\mathbf{e})$ 在射线仍位于第一象限的范围内的取值. 由于 $\nabla H(p)=0$, 有

$$\psi_{\mathbf{e}}'(0)=0,\qquad \psi_{\mathbf{e}}''(r)=\mathbf{e}^{\mathsf T}D^2H(p+r\mathbf{e})\mathbf{e}>0.$$

所以 $\psi_{\mathbf{e}}'(r)>0$ 对每个 $r>0$ 成立, 即 $\psi_{\mathbf{e}}$ 严格递增. 沿射线趋向第一象限边界或趋向无穷远时, $\psi_{\mathbf{e}}(r)\to+\infty$. 因此存在唯一的 $r_c(\mathbf{e})>0$, 使 $H(p+r_c(\mathbf{e})\mathbf{e})=c$.

因为该点的径向导数 $\psi_{\mathbf{e}}'(r_c(\mathbf{e}))>0$, 一元隐函数定理表明 r_c 连续可微地依赖于方向 $\mathbf{e}$. 于是 $\mathbf{e}\longmapsto p+r_c(\mathbf{e})\mathbf{e}$ 把单位圆一一连续地参数化为 Γ_c; 参数导数不为零, 因为它的径向分量和切向分量不可能同时为零. 故 Γ_c 是一条正则简单闭曲线.

第一象限中的平衡点只有 p, 而 $p\notin\Gamma_c$, 所以向量场 $F=(x',y')$ 在 Γ_c 上处处不为零. 而 $\dot H=\nabla H\cdot F=0$ 又说明 F 处处与Γ_c 相切. 现在引入弧长参数得到

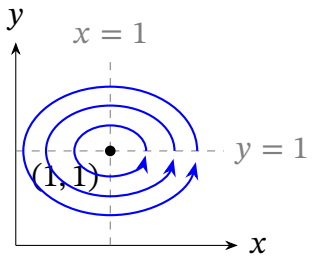
$$\boldsymbol\gamma:[0,L]\longrightarrow\Gamma_c,\qquad |\boldsymbol\gamma'(s)|=1,\qquad \boldsymbol\gamma(0)=\boldsymbol\gamma(L).$$

选定合适的方向后, 存在连续函数 $v(s)>0$, 使 $F(\boldsymbol{\gamma}(s))=v(s)\boldsymbol{\gamma}'(s)$. 据紧性得到 $m:=\min\limits_{0\leqslant s\leqslant L} v(s)>0$. 若解写成 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\gamma}(s(t))$, 则方程等价于 $s'(t)=v(s(t))$. 从 $s=0$ 沿曲线走完一周所需的时间为

$$T_c=\int_0^L \frac{1}{v(s)}\,\mathrm{d}s\leqslant \frac{L}{m}<+\infty.$$

因此 $\boldsymbol{x}(T_c)=\boldsymbol{x}(0)$, 每条 Γ_c 都是周期轨道. 随着 c 改变得到的是一族周期轨道, 而不是一条孤立的吸引极限环. □

为了把零等倾线与轨道方向具体画出来, 在上例中取$\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$, 此时非平凡零等倾线为 $x=1$, $y=1$, 内部平衡点是 $(1,1)$. 下图中的闭曲线是守恒量 $H(x,y)=x-\log x+y-\log y$ 的水平集示意图. 在 $y<1$ 时猎物数量 x 增加, 在 $x>1$ 时捕食者数量 y 增加, 由此确定图中的逆时针方向.



Lotka–Volterra模型的闭轨

从该例看出，全局相图分析的一般流程可以概括为：

1. 找出自然的不变区域和不变边界，求平衡点并判断其局部类型；
2. 画出零等倾线，在零等倾线分出的区域中判断 x',y' 的符号；
3. 寻找守恒量、不变曲线或单调量，据此判断闭轨、分离轨、无界轨以及轨道之间的连接方式。

需注意，零等倾线通常不是不变曲线，它只告诉我们“轨道朝哪个方向运动”，不能单独判断轨道是闭合还是螺旋，也不能单独确定分离轨和长期极限。后者则需要通过上述流程的第三步完成。接下来我们再看一个非线性摆的例子。

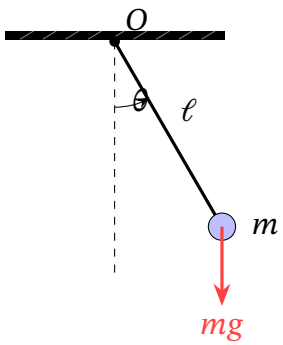
例 4.4.2　非线性摆

无阻尼摆满足

$$\theta'=\omega,\qquad \omega'=-\sin\theta.$$

这里已经把重力加速度与摆长的比值归一化为 1. 作出它在相平面上的全局相图.

下图中 O 是固定悬点, 细杆长度为 ℓ, θ 是细杆相对于竖直向下方向的有向夹角, 质点受到竖直向下的重力 mg.



非线性摆的物理构型

以悬点 O 为转轴计算力矩. 质点的转动惯量为 $m\ell^2$, 重力矩为 $-mg\ell\sin\theta$, 因此Newton转动定律给出

$$m\ell^2\theta'' = -mg\ell\sin\theta \;\Rightarrow\; \theta'' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

把时间变量改为 $\tau = \sqrt{g/\ell}\,t$ 并令 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau$, 就得到上面的归一化方程组.

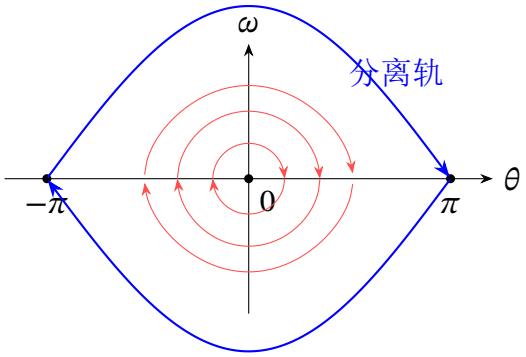
解. 该方程组的两族零等倾线是 $\omega = 0$, $\theta = k\pi$. 两族曲线的交点 $(k\pi, 0)$ 是平衡点, 在这个点处, 系数矩阵的线性化为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(k\pi) & 0 \end{pmatrix}$.

当 k 为偶数时, 特征值为 $\pm i$; 当 k 为奇数时, 特征值为 ± 1. 后者由线性化定理判定为鞍点. 对于前者, 特征值实部皆为零, 所以线性化方程组本身不能判定非线性方程组稳定性, 但守恒能量可以给出结论. 令 $H(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + 1 - \cos\theta$, 则沿解的轨线求导得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\theta(t),\omega(t)) = \sin\theta\,\theta' + \omega\omega' = \sin\theta\,\omega - \omega\sin\theta = 0.$$

所以轨道包含在 H 的水平集中. 在 $(2k\pi, 0)$ 附近, H 有严格局部极小值, 且其充分小的正水平集是闭曲线, 因此这些平衡点是中心.

在条带 $-\pi < \theta < \pi$ 中, 水平集 $H = h$ 可以写成 $\omega = \pm\sqrt{2(h - 1 + \cos\theta)}$. 若 $0 < h < 2$, 根号内的表达式只在两个转向角之间非负, 上、下两支在转向点相接形成一条闭轨, 对应摆的往复运动. 若 $h = 2$, 两支在鞍点 $(\pm\pi, 0)$ 处相接, 形成分离轨. 若 $h > 2$, 则 $h - 1 + \cos\theta \geqslant h - 2 > 0$, 所以 ω 不改变符号; 摆持续沿同一方向旋转.



由于向量场关于 θ 具有 2π-周期性, 将上述条带中的相图沿 θ 方向平移, 即可得到整个相平面上的相图. □

上述两个系统之所以能够较完整地画出全局相图，是因为它们具有“首次积分”，轨道被限制在守恒量的水平集上。一般的耗散系统通常没有这样的守恒量；即使已经证明一条正向轨道始终有界，也仍不知道它在长时间后趋近什么集合。为此需要引入 ω-极限集，这将在下节介绍。

习题 4.4

习题 4.4.1. 考虑方程组 $x' = 2y + xy, y' = x + y$. 作其平衡点附近的相图，再用零等倾线方法作出全平面上的相图。

问题 4.4

问题 4.4.1. 考虑方程组 $x' = y, y' = x - x^3$.

(1) 求全部平衡点并判断类型。

(2) 令 $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

(2a) 证明 H 沿解的轨道是守恒的。

(2b) 证明 $H = 0$ 由原点及两条同宿轨道构成，并求出其显式的参数表示。

(2c) 分别说明当 $-1/4 < H < 0$ 和 $H > 0$ 时，守恒量 H 的水平集具有怎样的形状，并据此做出全局的相图。

4.5 *ω-极限集与周期轨道

上一节我们利用平衡点的局部分类、零等倾线和守恒量建立了若干平面系统的全局相图骨架. 但是零等倾线主要给出方向信息, 不能单独判定有界轨道的最终去向, 也不能一般地判断周期轨道是否存在. 本节引入 ω-极限集、LaSalle不变性原理、Poincaré–Bendixson定理和Bendixson–Dulac准则, 以研究轨道的长期行为.

定义 4.5.1 ω-极限集

对自治方程组(4.0.1), 设正向轨道 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)$ 对所有 $t \geqslant 0$ 存在. 其 ω-极限集定义为

$$\omega(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{y}: \text{ 存在 } t_k \to +\infty,\ \Phi_{t_k}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y}\}.$$

命题 4.5.1 ω-极限集的基本性质

对自治方程组(4.0.1)及定义4.5.1, 若正向轨道包含在紧集内, 则 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 非空、紧、连通并且在流的作用下保持不变.

证明. 把包含正向轨道的紧集记为 K. 先取 $t_j = j$. 由 Bolzano–Weierstrass 定理, 存在子列 $\Phi_{j_k}(\boldsymbol{x}_0)$ 收敛到 $\boldsymbol{y} \in K$, 所以 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 极限集非空.

对正整数 N 记 $K_N = \overline{\{\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) : t \geqslant N\}}$. 我们先证明$\omega(\boldsymbol{x}_0) = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} K_N$.

若 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 则存在 $t_j \to +\infty$, 使 $\Phi_{t_j}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y}$. 对每个固定的 N, 当 j 足够大时 $t_j \geqslant N$, 所以 $\boldsymbol{y} \in K_N$. 反过来, 若 $\boldsymbol{y} \in \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N$, 则对每个正整数 N, 可以取 $t_N \geqslant N$, 使

$$|\Phi_{t_N}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{y}| < \frac{1}{N}.$$

于是 $t_N \to +\infty$ 且 $\Phi_{t_N}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y}$, 故 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$. 等式得证. 每个 K_N 都是紧集 K 的闭子集, 因此交集 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 也是紧集.

区间 $[N, +\infty)$ 连通, 而 $t \longmapsto \Phi_t(\boldsymbol{x}_0)$ 连续, 所以尾轨道连通; 连通集的闭包仍连通, 故每个 K_N 连通. 为证明它们的交集连通, 反设 $\omega(\boldsymbol{x}_0) = F_1 \cup F_2$, 其中 F_1, F_2 是两个非空, 不交的紧集. 可取不交开集 U_1, U_2, 使 $F_i \subset U_i$. 我们断言某个 K_N 包含在 $U_1 \cup U_2$ 中. 否则, 对每个 N 都能取 $\boldsymbol{y}_N \in K_N \setminus (U_1 \cup U_2)$. 紧集 K_1 中的点列 $\{\boldsymbol{y}_N\}$ 存在严格递增的正整数列 $N_1 < N_2 < \cdots$ 和 $\boldsymbol{y} \in K_1$, 使 $\boldsymbol{y}_{N_k} \to \boldsymbol{y}$. 对每个固定的 m, 当 k 足够大时 $N_k \geqslant m$, 于是 $\boldsymbol{y}_{N_k} \in K_{N_k} \subset K_m$; 由 K_m 闭可知 $\boldsymbol{y} \in K_m$. 因此 $\boldsymbol{y} \in \bigcap_m K_m = \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 但同时 $\boldsymbol{y} \notin U_1 \cup U_2$, 矛盾. 故上述断言成立. 这个 K_N 同时与 F_1, F_2 相交, 却包含在两个不交开集 U_1, U_2 之并中, 这与 K_N 连通矛盾. 因此 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 连通.

最后证明流不变性. 若 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 取 $t_j \to +\infty$, 使 $\Phi_{t_j}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y}$. 对固定 $s \geqslant 0$, 据连续依赖性得到

$$\Phi_s(\boldsymbol{y}) = \lim_{j\to\infty} \Phi_{t_j+s}(\boldsymbol{x}_0) \in \omega(\boldsymbol{x}_0).$$

若 $s < 0$, 则当 j 足够大时 $t_j + s > 0$, 从而点列 $\{\Phi_{t_j+s}(\boldsymbol{x}_0)\}$ 包含在 K 中, 进而存在子列 $\Phi_{t_{j_k}+s}(\boldsymbol{x}_0)$ 收敛于 $\boldsymbol{z} \in K$. 由于 $t_{j_k} + s \to +\infty$, 上述收敛关系正好说明 $\boldsymbol{z} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$. 此外,

$$\Phi_{-s}(\boldsymbol{z}) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{t_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}.$$

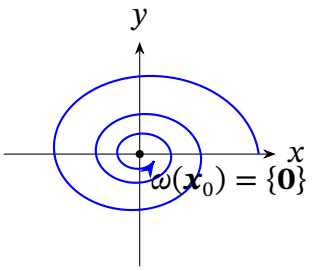
由唯一性知必有 $\boldsymbol{z} = \Phi_s(\boldsymbol{y})$. 所以极限集在正, 负时间的流下都不变. □

命题4.5.1最简单的具体图像来自稳定焦点 $x' = -x - y$, $y' = x - y$. 从初值 $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ 出

发的解为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

轨道螺旋趋向原点, 因而 $\omega(x_0, y_0) = \{(0,0)\}$, 这个集合非空、紧、连通, 并且在流下不变, 与命题的结论契合.



本例表明，ω-极限集可以是一个平衡点。另一方面我们实际上可以证明，对某个自治方程组，若初值位于周期轨道上，则其极限集就是整条周期轨道。事实上**ω-极限集可以被认为是正向轨道的“长期去向”**。

定理 4.5.2 LaSalle不变性原理, 局部形式

对自治方程组(4.0.1), 设 K 是包含在向量场定义域内的紧正向不变集, 函数 V 在 K 的一个邻域内属于 C^1, 并且 $\dot{V} \leqslant 0$ 在 K 上成立. 记 $E = \{\boldsymbol{x} \in K : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}$, 并令 M 为 E 中的最大不变集, 即 M 是所有完全包含在 E 中的完整轨道之并. 则对每个 $\boldsymbol{x}_0 \in K$,

$$\operatorname{dist}\left(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0), M\right) \longrightarrow 0, \qquad t \to +\infty.$$

特别地, 若 M 只含一个平衡点 $\boldsymbol{x}_*$, 则 $\Phi_t(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{x}_*$.

LaSalle原理表明，如果 $V(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0))$ 单调，则 V 在 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 上保持恒定，进而 $\omega(\boldsymbol{x}_0) \subset \{\dot{V} = 0\}$. 此时再利用$\omega(\boldsymbol{x}_0)$的不变性，就可以将其限制在$\{\dot{V} = 0\}$中的最大不变集内。

证明. 固定 $\boldsymbol{x}_0 \in K$. 由于 K 紧且正向不变, 相应正向轨道整体存在并始终位于 K 中.函数 $V(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0))$ 单调不增且有下界, 因此存在实数 ℓ, 使 $V(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0)) \to \ell$.

由命题4.5.1, $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 非空、紧并且在流下保持不变. 对任意 $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 可取 $t_j \to +\infty$, 使 $\Phi_{t_j}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y}$. 由连续性可知 $V(\boldsymbol{y}) = \ell$. 又因为 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 在流下不变, 对轨道存在的任意 s 都有 $\Phi_s(\boldsymbol{y}) \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 从而

$$V(\Phi_s(\boldsymbol{y})) = \ell.$$

在 $s = 0$ 处求导得到 $\dot{V}(\boldsymbol{y}) = 0$, 因此

$$\omega(\boldsymbol{x}_0) \subset E.$$

由于 $\omega(\boldsymbol{x}_0)$ 本身是不变集, 根据 M 的最大性还有 $\omega(\boldsymbol{x}_0) \subset M$.

最后证明轨道趋近于它的 ω-极限集. 若结论不成立, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $t_j \to +\infty$, 使

$$\operatorname{dist}\left(\Phi_{t_j}(\boldsymbol{x}_0), \omega(\boldsymbol{x}_0)\right) \geqslant \varepsilon_0.$$

由 K 的紧性可取子列, 使 $\Phi_{t_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0) \to \boldsymbol{y} \in K$. 根据 ω-极限集的定义, $\boldsymbol{y} \in \omega(\boldsymbol{x}_0)$, 因而

$$\operatorname{dist}\left(\Phi_{t_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0), \omega(\boldsymbol{x}_0)\right) \leqslant \left|\Phi_{t_{j_k}}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{y}\right| \longrightarrow 0,$$

矛盾. 所以

$$\operatorname{dist}\left(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0), M\right) \leqslant \operatorname{dist}\left(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0), \omega(\boldsymbol{x}_0)\right) \longrightarrow 0.$$

□

LaSalle不变原理进一步研究了 Lyapunov 函数 V 满足 $\{\dot{V} = 0\}$ 的这一集合的性质。它可以用于证明 Lyapunov 稳定性定理无法判定的渐近稳定性。

例 4.5.1 用 Lyapunov 函数无法判断渐近稳定性的例子

再次考察例4.3.2中的方程组，证明原点的渐近稳定的。

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - y^3. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

证明. 第一步：构造紧的正向不变集。 对任意 $c > 0$，定义 $K_c = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant c\right\}$，显然$K_c$ 是紧集。由于沿任意解都有 $\dot{V} \leqslant 0$，所以如果初值 $(x_0, y_0) \in K_c$，那么在解的存在区间上就恒有 $V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) \leqslant c$，进而解不能离开 K_c。

又由于向量场在整个平面上光滑，而解始终位于紧集 K_c 内，解的延拓定理保证了方程组在时间正向的整体存在性。故 K_c 是紧的正向不变集。

第二步：研究集合 $\dot{V} = 0$。 在 K_c 内定义 $E = \{(x, y) \in K_c : \dot{V}(x, y) = 0\}$. 因为 $\dot{V} = -y^4$，所以 $E = \{(x, 0) \in K_c\}$, 这是圆盘 K_c 在 x 轴上的一条线段。但是必须注意：集合 E 本身并不是不变集。

事实上，如果假设某条轨道始终位于 E 中，那么它必然满足 $y(t) \equiv 0$，进而由 $x' = y = 0$ 可知 $x(t)$ 必为常数。另一方面，我们将 $y(t) \equiv 0$ 代入第二个方程会得到 $0 = y'(t) = -x(t) - y(t)^3 = -x(t)$，因此 $x(t) \equiv 0$。这就证明了：能够始终停留在 E 中的完整轨道只有原点这一条平衡态轨道。所以 E 中的最大不变集为 $M = \{(0, 0)\}$.

第三步：应用LaSalle不变原理。 现在我们已经得到 K_c 紧且正向不变，$V \in C^1$，并且 $\dot{V} \leq 0$，所以 LaSalle 不变原理的全部条件均已满足。因此，对任意初值 $(x_0, y_0) \in K_c$，都有

$$\operatorname{dist}((x(t), y(t)), M) \longrightarrow 0, \qquad t \to +\infty.$$

由 $M=\{(0,0)\}$ 就得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}(x(t),y(t))=(0,0)$. 因为 $c>0$ 可以任意选取，而每个初值都属于某个 K_c，所以这个收敛结论对整个平面上的初值成立。现在，例4.3.2中已经证明了稳定性，再结合前面证明的整体吸引性，我们就得到原点是全局渐近稳定的。 □

例 4.5.2 带阻尼的非线性摆

重新讨论例 4.4.2 带阻尼的非线性摆的例子。

$$\theta'=\omega,\qquad \omega'=-\sin\theta-\gamma\omega,\qquad \gamma>0.$$

解. 此时两族零等倾线分别为 $\omega=0$ 与 $\omega=-\sin\theta/\gamma$. 仍取机械能 $H(\theta,\omega)=\frac{1}{2}\omega^2+1-\cos\theta$, 则

$$\dot H=\sin\theta\,\omega+\omega(-\sin\theta-\gamma\omega)=-\gamma\omega^2\leqslant 0.$$

固定 $0<c<2$, 并令

$$K_c=\{(\theta,\omega):-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ H(\theta,\omega)\leqslant c\}.$$

由于在 $\theta=\pm\pi$ 上有 $H\geqslant 2$, K_c 实际上包含在 $-\pi<\theta<\pi$ 中. 又因为 $\dot H\leqslant 0$, 它是紧正向不变集.在 K_c 中,所以

$$E=\{(\theta,\omega)\in K_c:\dot H=0\}=\{(\theta,\omega)\in K_c:\omega=0\}.$$

若一条完整轨道始终包含在 E 中, 则 $\omega=0$ 且 $\theta'=\omega=0$, 所以 θ 为常数. 为使 ω 始终等于零, 还必须有 $\omega'=-\sin\theta=0$. 由于 $0<c<2$, 在 K_c 中只能有 $\theta=0$. 因此 E 中的最大不变集是 $\{(0,0)\}$. 由 LaSalle 不变原理 (定理4.5.2), 每条从 K_c 出发的轨道都趋于原点.再结合 H 的局部正定性与 Lyapunov 稳定性定理, 原点渐近稳定. □

注记 4.5.1. 从本例可以看出，无阻尼时 $\dot H=0$，轨道沿能量水平集运动；有阻尼时 $\dot H\leqslant 0$，轨道不断穿过能量水平集，而 LaSalle 不变原理用来判断它最终落入哪个不变集。需注意的是，LaSalle 不变原理不是平面系统特有的，它是 Lyapunov 函数法在长时间动力学方面的自然延伸。

LaSalle 不变原理要求事先找到合适的单调函数（可以认为与构造 Lyapunov 函数类似），而一般系统未必存在这种函数。在高维空间中，有界轨道的极限集可能非常复杂；但在平面上，轨道不能相交这一拓扑限制使极限集受到很强约束。尤其是在一个“捕获环域”的内部如果没有平衡点（见例4.5.3），那么其中轨道的ω-极限集还能是什么？

定理 4.5.3 Poincaré–Bendixson 定理

设平面自治方程组(4.0.1)的向量场属于 C^1, 且一条正向轨道包含在紧集内. 若其 ω-极限集不含平衡点, 则该极限集是一条周期轨道.

这个定理的完整证明要用到横截线、Jordan 曲线定理以及平面轨道不能相交的拓扑性质, 这里只陈述而不证明. 它是平面系统特有的结论; 在三维及更高维空间中, 两条轨道可以从彼此旁边绕过, 极限集也可能比平衡点和周期轨道复杂得多.

注记 4.5.2. Poincaré–Bendixson定理本身并没有证明这条周期轨道唯一，也没有判断它的稳定性。这些是需要进一步研究的问题。

反过来，我们也可以问：如何证明一个区域内不可能有周期轨道？

定理 4.5.4 Bendixson–Dulac准则

考虑平面系统

$$x' = f(x,y), \qquad y' = g(x,y).$$

设 $G \subset \mathbb{R}^2$ 是单连通区域, $f, g \in C^1(G)$. 若存在$B \in C^1(G)$使得下列函数在 G 中处处严格为正，或者在 G 中处处严格为负：

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$$

则这个系统在 G 内没有周期轨道.

特别地，若 $B = 1$，上述准则退化为 Bendixson 判据：若 $\partial_x f + \partial_y g$ 在单连通区域中保持严格同号，则该区域内不存在周期轨道。这个判据的证明用到了格林公式。

证明. 反设 $\Gamma \subset G$ 是周期轨道, 并取它的最小周期为 T. 由解的唯一性, 参数曲线$t \longmapsto \Phi_t(\boldsymbol{x}_0)$ 在 $[0,T)$ 上没有自交点; 又因为周期轨道上没有平衡点, 它是一条正则简单闭曲线. Jordan 曲线定理说明 Γ 围成一个有界区域 Ω. 由于 G 单连通且 $\Gamma \subset G$, 有 $\overline{\Omega} \subset G$.

向量场 (f,g) 沿 Γ 与曲线相切, 乘以标量函数 B 后仍与曲线相切, 所以 (Bf, Bg) 在 Γ 上的外法向分量为零. 由 Green 公式可得

$$0 = \int_{\partial\Omega} (Bf, Bg)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

若被积函数处处严格为正, 则右端严格大于零; 若它处处严格为负, 则右端严格小于零. 两种情形都与左端等于零矛盾, 因此 G 内不存在周期轨道. □

Poincaré–Bendixson 定理常与一个正向不变的环域配合使用. 若能找到两条简单闭曲线, 使外边界上的向量场指向内部, 内边界上的向量场指向环域, 同时环域中没有平衡点, 那么从其中任一点出发的正向轨道永远被困在紧环域内. 其 ω-极限集非空且不含平衡点, 故必有周期轨道. 但请注意该定理只保证周期轨道的存在性，该轨道的具体位置、唯一性、稳定性等更深入的性质则需要进一步计算。

例 4.5.3

考虑

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2+y^2), \\ y' = x + y - y(x^2+y^2). \end{cases}$$

则 $\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ 是极限环.

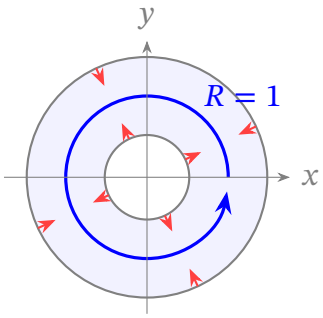
解. 令 $R=x^2+y^2$, 则

$$R'=2x\big[x-y-xR\big]+2y\big[x+y-yR\big]=2(x^2+y^2)-2R(x^2+y^2)=2R(1-R).$$

在小圆 $R=r_1^2<1$ 上有 $R'>0$, 向量场指向环域外侧; 在大圆 $R=r_2^2>1$ 上有 $R'<0$, 向量场指向内侧. 因此

$$r_1^2\leqslant R\leqslant r_2^2$$

是捕获环域, 而且其中没有平衡点. Poincaré–Bendixson 定理保证环域内存在周期轨道. 这里还能直接看出 $R=1$ 是不变圆周. 在 $R>0$ 上, 极角满足 $\theta'=\frac{xy'-yx'}{R}=1$, 所以该圆周上的运动周期为 2π. 当 $0<R<1$ 时 $R'>0$, 当 $R>1$ 时 $R'<0$, 故两侧轨道都趋向 $R=1$; 这条周期轨道是稳定极限环. □



捕获环域及其中的稳定极限环

上面这个例子在化成极坐标后实际上可以显式求解R，接下来我们举一个无法显示求解的例子，但可以用 Poincaré–Bendixson 定理证明存在非平凡周期轨道。

例 4.5.4

考虑平面自治方程组

$$\begin{cases}x'=x-(1+x^2)y-x(x^2+2y^2),\\ y'=(1+x^2)x+y-y(x^2+2y^2).\end{cases}$$

利用Poincaré–Bendixson定理证明该系统存在非平凡周期轨道。

证明. 第一步：寻找紧正向不变集。 令 $R=x^2+y^2$。直接计算：

$$\begin{aligned}R'&=2xx'+2yy'=2x[x-(1+x^2)y-x(x^2+2y^2)]+2y[(1+x^2)x+y-y(x^2+2y^2)]\\&=2x^2-2(1+x^2)xy-2x^2(x^2+2y^2)+2(1+x^2)xy+2y^2-2y^2(x^2+2y^2)=2R[1-(x^2+2y^2)].\end{aligned}$$

接下来我们利用 $R \leqslant x^2+2y^2 \leqslant 2R$ 来讨论 $R=1/4,4$ 时的情况。当 $R=\frac{1}{4}$ 时，

$$R' = 2R[1-(x^2+2y^2)] \geqslant 2\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0.$$

所以轨道在内边界上指向环域内部。而当 $R=4$ 时，

$$R' = 2R[1-(x^2+2y^2)] \leqslant 2\cdot 4(1-4) = -24 < 0.$$

所以轨道在外边界上也指向环域内部。于是与前例相同，闭环域 $K=\left\{(x,y):\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$ 是一个紧正向不变集。因为向量场是多项式函数，从 K 出发的解又始终有界，所以每个这样的解都在所有正向时间存在。

第二步：证明环域中不存在平衡点。 设 $(x,y)\in K$ 是一个平衡点，那么 $x'=y'=0$，特别地有 $R'=0$。由于 $R\geq\frac{1}{4}>0$，所以从 $R'=2R[1-(x^2+2y^2)]$ 可得 $x^2+2y^2=1$，将这个关系代入原方程组得到

$$x' = -(1+x^2)y, \qquad y' = (1+x^2)x.$$

若 $x'=y'=0$，则由于 $1+x^2>0$ 就迫使 $x=y=0$。但这与 $x^2+2y^2=1$ 矛盾，所以环域 K 中不存在平衡点。

第三步，应用Poincaré–Bendixson定理。 任取 $(x_0,y_0)\in K$。因为 K 紧且正向不变，对应的正向轨道始终包含在紧集 K 中。因此其 ω-极限集非空、紧且不变。又因为 K 内不存在平衡点，所以这个 ω-极限集也不含平衡点。由Poincaré–Bendixson定理知它必然是一条周期轨道。因此该系统存在至少一条非平凡周期轨道。 □

注记 4.5.3. 本例中，我们还可以补充两点观察。首先计算极角的导数得到

$$xy'-yx' = x[(1+x^2)x+y-y(x^2+2y^2)] - y[x-(1+x^2)y-x(x^2+2y^2)] = (1+x^2)(x^2+y^2).$$

所以 $\theta' = \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2} = 1+x^2 > 0$，因此非零轨道始终沿逆时针方向转动。

其次，我们可以证明不存在以原点为圆心的圆形周期轨道。事实上，若某个圆周 $R=c>0$ 是周期轨道，那么沿整个圆周都必须满足 $R'=0$，也就是 $c(1+\sin^2\theta)=1$ 但是左端随着 θ 变化，不可能对所有角度恒等于1。

已知周期轨道存在以后，邻近轨道会靠近它还是远离它？为了判断周期轨道的稳定性, 取横截周期轨道的一条小线段 Σ, 用一个实坐标 s 标记线段上的点. 从 s 出发沿流走到下一次返回 Σ, 得到一维映射

$$\Pi(s) = \text{下一次返回点}.$$

它称为 Poincaré 返回映射. 周期轨道对应不动点 s_*, 即 $\Pi(s_*)=s_*$. 若 $|\Pi'(s_*)|<1$，则相邻返回点逐次靠近 s_*, 周期轨道渐近稳定; 若 $|\Pi'(s_*)|>1$, 则不稳定. 这样, 一个连续时间二维周期轨道问题被化成了一维离散不动点问题.

命题 4.5.5 平面周期轨道的非平凡乘子

对平面自治方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 设 $\Gamma : t \longmapsto \boldsymbol{x}_*(t)$ 是周期为 T 的周期轨道. 其变分方程 $\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))\boldsymbol{y}$ 有一个 Floquet 乘子恒等于 1, 对应沿轨道切向量 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}_*'(t)$. 另一个乘子为

$$\mu = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))\,\mathrm{d}t\right). \tag{4.5.2}$$

证明. 把原方程关于时间求导, 得到 $\boldsymbol{x}_*''(t) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))\boldsymbol{x}_*'(t)$, 所以 $\boldsymbol{x}_*'$ 是变分方程的解. 周期轨道上没有平衡点, 故 $\boldsymbol{x}_*'(0) \neq \boldsymbol{0}$; 又因为$\boldsymbol{x}_*'(T) = \boldsymbol{x}_*'(0)$, 所以周期矩阵把非零向量 $\boldsymbol{x}_*'(0)$ 映到自身. 因此 1 是一个 Floquet 乘子.

令 $\Phi(t)$ 是变分方程满足 $\Phi(0) = I_2$的标准基解矩阵, 并记 $A(t) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))$. 把第三章的Liouville公式(3.2.2)用于这个变分方程得到

$$\det\Phi(T) = \det\Phi(0)\exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))\,\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*(t))\,\mathrm{d}t\right).$$

两个Floquet乘子是 $\Phi(T)$ 的两个特征值, 其乘积等于 $\det\Phi(T)$. 其中一个已经证明为1, 而 $\operatorname{Tr} D\boldsymbol{f} = \operatorname{div}\boldsymbol{f}$, 所以另一个乘子正是(4.5.2)中的 μ. □

上述命题说明说明, 若沿周期轨道一个周期的散度积分为负, 则横向乘子小于 1, 极限环吸引轨线; 若积分为正, 极限环排斥轨线. 切向乘子必须为 1, 因为沿轨道平移起始相位仍是同一个周期解, 这也是只能讨论轨道稳定而不能要求固定相位渐近稳定的线性解释.

例 4.5.5 Dulac函数的选择

对竞争系统

$$x' = x(1 - x - ay), \qquad y' = y(1 - bx - y)$$

在第一象限取 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, 则

$$Bf = \frac{1 - x - ay}{y}, \qquad Bg = \frac{1 - bx - y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x} < 0.$$

由于第一象限单连通, 所以其中不存在周期轨道. 结合有界性与 Poincaré–Bendixson 定理, 许多轨道只能趋向平衡点或边界, 这为竞争排斥与共存的相图分析提供了关键一步.

习题 4.5

习题 4.5.1. 在第一象限考虑带有种内竞争的捕食者–猎物系统

$$x' = x(\alpha - \beta x - \gamma y), \qquad y' = y(-\delta + \eta x),$$

其中所有参数均为正数。取 $B(x,y)=\frac{1}{xy}$，利用 Bendixson–Dulac 准则证明第一象限内不存在周期轨道。

习题 4.5.2. 设 $h\in C^1([0,+\infty))$, 考虑平面系统

$$\begin{cases} x'=-y+xh(x^2+y^2),\\ y'=x+yh(x^2+y^2). \end{cases}$$

设 $R_0>0$ 是 h 的单重零点，即 $h(R_0)=0$ 但 $h'(R_0)\neq 0$.

(1) 证明圆周 $x^2+y^2=R_0$ 是以 2π 为周期的轨道；
(2) 利用命题 4.5.5 证明其非平凡 Floquet 乘子为 $\mu=\exp\big(4\pi R_0 h'(R_0)\big)$.
(3) 根据 $h'(R_0)$ 的符号判断该周期轨道的稳定性。

问题 4.5

问题 4.5.1. 考虑平面系统

$$\begin{cases} x'=-y+x(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4),\\ y'=x+y(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4). \end{cases}$$

(1) 求所有平衡点与周期轨道，并判断原点以及每条周期轨道的稳定性。（提示：考虑 $r^2=x^2+y^2$，求 r 满足的方程。）
(2) 对平面上每个非平衡初值，确定其正向极限集；
(3) 分别用径向方程与命题 4.5.5 计算两条周期轨道的横向 Floquet 乘子，并核对两种计算所得结论一致；
(4) 画出全局相图。

第五章　高阶线性常微分方程

一个 m 阶标量方程可以化为 m 维一阶方程组, 进而线性方程组的基本理论都可以用于高阶线性方程. 但是, 保留标量方程的形式也有好处: 常系数时可以使用特征方程, 对二阶方程可以把常数变易法写成显式含有Wronskian的表达式, 系数解析时还可以通过幂级数递推构造解. 本章先讨论常系数线性方程的求解; 第二节从偏微分方程的分离变量出发, 介绍常点处的幂级数法和正则奇点处的Frobenius方法.

5.1　常系数高阶线性方程的求解

5.1.1　约化到一阶线性方程组

一般 m 阶显式方程 $x^{(m)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(m-1)})$ 通过 $x_1 = x,\ x_2 = x',\ \cdots,\ x_m = x^{(m-1)}$ 化作如下一阶线性方程组的形式

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad \cdots, \quad x_{m-1}' = x_m, \quad x_m' = f(t, x_1, \cdots, x_m).$$

所以求解高阶常微分方程的初值问题需要给出全体低阶项的初值 $x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(m-1)}(t_0)$, 而第二章的存在唯一, 延拓和连续依赖定理都可直接应用到约化后的这个一阶方程组上. 特别地，对线性方程

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t) \tag{5.1.1}$$

对应的一阶线性常微分方程组为

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

若各系数连续, 则我们已经证明解在整个系数定义区间上存在.

先考虑常系数的情况. 记微分算子 $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 并考虑线性方程 $P(D)x = 0$, 其中 P 是多项式 $P(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$. 如果我们取 $x(t) = e^{\lambda t}$, 则会得到 $P(D)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$. 所以利用多项式 $P(\lambda) = 0$ 的根可以造出指数增长的解.

定理 5.1.1 常系数齐次高阶方程

考虑方程 (5.1.1) 在 $g = 0$ 且 $a_0, \cdots, a_{m-1}$ 均为常数时的齐次方程, 并记它的特征多项式为 $P(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$. 设 P 在复数域分解为

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{N} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}, \qquad \sum_{j=1}^{N} n_j = m.$$

则复解空间的一组基为 $t^k e^{\lambda_j t}$, 其中 $j = 1, \cdots, N$, $k = 0, \cdots, n_j - 1$. 若方程系数为实数, 对共轭根 $\alpha \pm i\beta$ 取实部, 虚部, 可得到实值基解 $t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$, $t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$.

证明. 按照第5.1.1节前面的约化方法，令 $\boldsymbol{x} = (x, x', \ldots, x^{(m-1)})^{\mathsf{T}}$，则原方程等价于 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

沿最后一行展开 $\lambda I - A$ 的行列式，得到$\det(\lambda I - A) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0 = P(\lambda)$. 因此 A 的特征值恰好是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$，对应的代数重数分别为 $n_1, \ldots, n_N$。而又存在可逆矩阵 S，使得 $A = SJS^{-1}$，其中 J 是 A 的Jordan标准型，故一阶方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = Se^{tJ}C, \qquad C \in \mathbb{C}^m.$$

另一方面，对任意大小为 r 的Jordan块 $J_r(\lambda)$，我们已经知道

$$e^{tJ_r(\lambda)} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为对应于特征值 λ_j 的Jordan块的大小不超过 n_j，所以 $\boldsymbol{x}(t)$ 的每个分量都可以写成 $t^k e^{\lambda_j t}$（$0 \le k \le n_j - 1$）的线性组合。特别地，取其第一个分量便得到

$$x(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n_j-1} C_{jk} t^k e^{\lambda_j t}.$$

这说明原方程的每一个解都可以由上述 m 个函数线性表示。又因为原方程等价于 m 维一阶线性方程组，其解与初值向量 $(x(0), x'(0), \dots, x^{(m-1)}(0))^{\mathsf{T}}$ 一一对应，所以解空间维数为 m。而上述函数恰好有 $\sum_{j=1}^{N} n_j = m$ 个，因此它们必然线性无关，构成复解空间的一组基。若系数为实数，对共轭特征值取实部和虚部，即得到定理所述的实值基解。证毕。 □

例 5.1.1

求解方程 $x^{(4)} - 2x'' + x = 0.$

解. 方程对应的特征多项式为 $(\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$, 解得特征值为 $1, -1$, 且重数均为2. 因此方程的解应为 $e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$ 的线性组合，故通解为

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + (C_3 + C_4 t)e^{-t}.$$

□

例 5.1.2

求解方程 $x^{(4)} + 2x'' + x = 0.$

解. 方程对应的特征多项式为 $(\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$, 解得特征值为 $i, -i$, 且重数均为2. 因此方程的解应为 $e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}$ 的线性组合，现在取实值基解就得到通解为

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\cos t + (C_3 + C_4 t)\sin t.$$

□

5.1.2 Wronski行列式与降阶法

考虑如下二阶线性的齐次方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{5.1.2}$$

它的两个解 φ_1, φ_2 是否线性无关, 可由 Wronski 行列式 $W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$ 是否为零来判断. 而 Wronski 行列式本身满足一个一阶方程.

命题 5.1.2

设 $p, q \in C(I)$,φ_1, φ_2 是 (5.1.2) 的两个解. 则

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{5.1.3}$$

因此 W 要么处处为零, 要么处处不为零; 前一种情形两解线性相关, 后一种情形两解构成解空间的一组基.

证明. 直接求导,

$$W' = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 = \varphi_1(-p\varphi_2' - q\varphi_2) - (-p\varphi_1' - q\varphi_1)\varphi_2 = -p(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2) = -pW.$$

一阶线性方程公式给出 (5.1.3). 若 $W(t_0) = 0$, 则两个初值向量

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

线性相关. 因此存在不全为零的常数 c_1, c_2, 使得

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) = 0, \qquad c_1\varphi_1'(t_0) + c_2\varphi_2'(t_0) = 0.$$

而函数 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ 是齐次方程的解, 并且它在 t_0 处的函数值和一阶导数都为零. 由初值问题解的唯一性得知这个解恒为零, 所以 φ_1, φ_2 线性相关. 若 $W(t_0) \neq 0$, 则两个初值向量线性无关; 若两个函数存在常系数线性关系, 在 t_0 处取函数值和一阶导数便会使这两个常数都为零, 所以两个解线性无关. □

命题 5.1.2 也是第三章 Liouville 公式 (3.2.2) 在方程 (5.1.2) 所对应的一阶常微分方程组上的特例, 因为该方程组系数矩阵的迹为 $-p(t)$.

命题 5.1.3 已知一个非零解时的降阶

设 φ_1 是 (5.1.2) 在区间 $J \subset I$ 上处处非零的解, 则另一个与它线性无关的解可取为

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s} p(r)\,\mathrm{d}r\right)}{\varphi_1(s)^2}\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.4}$$

证明. 令 $\varphi_2 = u\varphi_1$. 代入方程并使用 φ_1 已满足齐次方程, 得到 $u''\varphi_1 + u'(2\varphi_1' + p\varphi_1) = 0$. 记 $v = u'$,

除以非零的 φ_1, 直接用积分因子法求解一阶方程得到

$$v' + \left(2\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + p\right)v = 0 \;\Rightarrow\; v(t) = C\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(r)\,\mathrm{d}r\right)}{\varphi_1(t)^2}.$$

把非零常数因子吸收到所求第二个解的常数倍中, 可以取 $C = 1$. 从 t_0 积分到 t, 就得到 (5.1.4). 此时

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(r)\,\mathrm{d}r\right) \neq 0,$$

故二者线性无关. □

例 5.1.3 由一个解找出第二个解

方程 $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0\ (t > 0)$ 除以 t^2 后有 $p(t) = -2/t$. 已知 $\varphi_1(t) = t$ 是方程的一个解, 找出该方程第二个解,

解. 由降阶公式可得

$$\varphi_2(t) = t\int_1^t \frac{\exp\left(-\int_1^s(-2/r)\,\mathrm{d}r\right)}{s^2}\,\mathrm{d}s = t\int_1^t \frac{\exp(2\log s)}{s^2}\,\mathrm{d}s = t\int_1^t 1\,\mathrm{d}s = t(t-1).$$

由于 $t(t-1) = t^2 - t$, 给 φ_2 加上已知解 $\varphi_1 = t$ 后, 可以取更简单的第二个解 t^2. 二者的Wronski行列式为

$$W(t, t^2) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \qquad (t > 0),$$

所以 t, t^2 构成一组基解. 这待定 $x = t^r$ 后所得的关于 r 的方程 $r(r-1) - 2r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$ 的两根 $r = 1, 2$ 是一致的. □

5.1.3 常数变易法

以二阶非齐次方程为例:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t). \tag{5.1.5}$$

设 φ_1, φ_2 是齐次方程的一组基解. 仿照一阶方程组的常数变易法, 我们待定方程的解为

$$x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t).$$

但现在我们不能把 C_1, C_2 看成两个可以任意选取的新未知函数. 一个二阶方程在任意时刻的状态由 (x, x') 两个数决定; 相应地, 这里的常数变易法还需附加条件

$$C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0. \tag{5.1.6}$$

的来源. 事实上, 如果我们令 $\boldsymbol{\mathfrak{X}} = (x, x')^{\mathsf{T}}$, 则齐次方程组的基解矩阵为 $X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}$. 对任意一个给定的解 x, 令

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = X(t)^{-1}\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t).$$

因为 φ_1, φ_2 线性无关, 由命题 5.1.2 得 $\det X(t) = W(t) \neq 0$ 对所有的 t 成立, 所以上式对每个 t 唯一确定了 $C_1(t), C_2(t)$. 现在来看等式 $\boldsymbol{\mathfrak{X}} = X(C_1, C_2)^{\mathsf{T}}$ 的具体形态. 它的第一行是 $x = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$, 第二行是 $x' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$. 对第一行求导又得到 $x' = C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 + C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$. 将它与第二行比较, 就自然而然地得到(5.1.6). 因此, 该条件不是为了简化计算而无根据地增加的假设, 而是一阶方程组常数变易法所得等式的第一行.

在这一条件下再求一次导数 $x'' = C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' + C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2''$, 代入(5.1.5)并使用齐次方程, 就得到 $C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = g$. 于是现在就可以通过如下方程组来求解待定函数 $C_1(t), C_2(t)$ 了.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}. \tag{5.1.7}$$

定理 5.1.4 二阶方程的常数变易公式

*考虑非齐次方程 (5.1.5), 并设 φ_1, φ_2 是相应齐次方程 (5.1.2) 的一组基解. 记*Wronski*行列式为 $W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$, 则$W(t)$ 在所讨论区间上处处不为零, 进而可取*

$$C_1'(t) = -\frac{\varphi_2(t)g(t)}{W(t)}, \qquad C_2'(t) = \frac{\varphi_1(t)g(t)}{W(t)}.$$

所以一个特解为

$$x_p(t) = -\varphi_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_2(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.8}$$

证明. 方程组(5.1.7)的系数行列式是 $W(t) \neq 0$. 直接求解可得

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ g(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = -\frac{\varphi_2(t)g(t)}{W(t)}, \qquad C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{\varphi_1(t)g(t)}{W(t)}.$$

从 t_0 积分到 t, 并把两个积分常数都取为零, 就得到待定函数的表达式

$$C_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_2(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad C_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s)g(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s.$$

代入 $x_p = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$, 就得到(5.1.8).

接下来我们验证表达式确实给出二阶非齐次方程的一个解, 由上面的 C_1', C_2' 先计算

$$C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = -\frac{\varphi_2 g}{W}\varphi_1 + \frac{\varphi_1 g}{W}\varphi_2 = 0.$$

因此$x_p' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2'$. 再求导并代入非齐次方程, 直接计算可得

$$\begin{aligned} x_p'' + px_p' + qx_p &= C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' + C_1(\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1) + C_2(\varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2) \\ &= \frac{g}{W}\big(-\varphi_2\varphi_1' + \varphi_1\varphi_2'\big) = \frac{g}{W}W = g. \end{aligned}$$

所以(5.1.8)确实是一个特解. 如果在 C_1, C_2 中保留积分常数, 所增加的项是 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, 也就是一般齐次解. □

例 5.1.4　受迫振子与Duhamel公式

设 $\omega > 0$, 求解受迫振子的初值问题

$$x'' + \omega^2 x = g(t), \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

解. 相应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. 由定理 5.1.1, 我们知道 $\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$ 是两个线性无关的实解. 为了使第二个解在 $t = 0$ 处满足 $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 1$, 取 $\varphi_1(t) = \cos\omega t$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$. 这样选取还使它们的Wronski行列式恒等于 1:

$$W(t) = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1.$$

若方程的初值皆为零，则对应的特解如下

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -\cos\omega t\int_0^t \frac{\sin\omega s}{\omega}g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\sin\omega t}{\omega}\int_0^t \cos\omega s\, g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\omega}\int_0^t \big(\sin\omega t\cos\omega s - \cos\omega t\sin\omega s\big)g(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big)g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

而齐次方程的解 $C_1\cos\omega t + C_2\omega^{-1}\sin\omega t$ 满足给定初值当且仅当 $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0$. 因此非齐次方程的全部解可以写作

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\big(\omega(t-s)\big)g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.1.9}$$

□

5.1.4 待定系数法

当系数为常数, 且 $g(t)$ 是多项式, 指数, 三角函数或它们的乘积时, 可在同一有限维函数空间中猜测特解. 一旦猜对那么计算量比常数变易法要小很多, 而关键是检查猜测是否与齐次解匹配.

命题 5.1.5 待定系数法的乘 t 规则

考虑 $P(D)x = e^{\lambda t}Q_n(t)$，其中 Q_n 是 n 次多项式，λ 是 P 的 r 重根（若不是根，则令 $r = 0$）。证明存在 n 次多项式 R_n，使得 $x_p = t^r e^{\lambda t}R_n(t)$ 为方程的一个特解。

证明. 由恒等式 $P(D)(e^{\lambda t}u) = e^{\lambda t}P(D+\lambda)u$以及 λ 是 P 的 r 重根，我们得到

$$P(\lambda + z) = \frac{P^{(r)}(\lambda)}{r!}z^r + \frac{P^{(r+1)}(\lambda)}{(r+1)!}z^{r+1} + \cdots,$$

其中 $P^{(r)}(\lambda) \neq 0$.

因此，对任意整数 $k \geq 0$，有

$$P(D)(t^{r+k}e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}P(D+\lambda)t^{r+k} = e^{\lambda t}\left[\frac{P^{(r)}(\lambda)}{r!}\frac{(r+k)!}{k!}t^k + \text{次数低于 } k \text{ 的多项式}\right].$$

注意到 $P^{(r)}(\lambda) \neq 0$，所以括号内多项式的次数恰好为 k. 现在设 $R_n(t) = c_n t^n + \cdots + c_0$，代入待定特解 $x_p = t^r e^{\lambda t}R_n(t)$。据上述计算，$P(D)x_p$ 除去公因子 $e^{\lambda t}$ 后是一个次数不超过 n 的多项式，其 t^n 项系数只含 c_n，且系数不为零，因此可以唯一确定 c_n 使得它等于 Q_n 的最高次项系数。

接着比较 t^{n-1} 项便可唯一确定 c_{n-1}，依此类推直到确定 c_0。于是存在唯一的 n 次多项式 R_n，使得

$$P(D)\big(t^r e^{\lambda t}R_n(t)\big) = e^{\lambda t}Q_n(t).$$

□

例 5.1.5

对 $x'' + x = \cos t$ 寻找一个特解.

解. 我们可算得齐次方程的特征根为 $\pm i$, 而非齐次项 $\cos t$ 已属于齐次解空间. 所以如果待定解为 $A\cos t + B\sin t$, 那么它的二阶导数与它自身之和恒为零, 不可能等于 $\cos t$. 因此要把待定的解乘以 t, 即我们预判特解为 $x_p(t) = t(A\cos t + B\sin t)$. 逐次求导算得

$$x_p' = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t),$$
$$x_p'' = 2(-A\sin t + B\cos t) - t(A\cos t + B\sin t).$$

进而 $x_p'' + x_p = -2A\sin t + 2B\cos t$. 与右端 $\cos t$ 比较正弦和余弦的系数得到 $A = 0, B = 1/2$, 所以一个特解是 $x_p(t) = \frac{t}{2}\sin t$. 振幅随时间线性增长, 这正是外力共振. □

例 5.1.6 多项式与指数同时出现

求方程 $x'' - 2x' + x = e^t(1+t)$ 的一个特解.

解. 该方程对应齐次方程的特征多项式是 $(\lambda-1)^2$, 而右端源项是 e^t 乘一次多项式, 所以按乘 t 规则应设 $x_p = t^2e^t(At+B)$. 现在利用恒等式 $(D-1)(e^tu) = e^tu'$ 两次, 其中这里的 $u(t) = t^2(At+B)$, 则原方程可以化为 $e^tu'' = e^t(1+t)$. 两次积分得到

$$u'(t) = t + \frac{t^2}{2} + C_1, \qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2.$$

其中 $e^t(C_1t + C_2)$ 是齐次解, 不影响特解的选择. 现在取 $C_1 = C_2 = 0$, 我们得到

$$u(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \qquad x_p(t) = e^t\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right).$$

这里的"共振"是指强迫项中的指数频率 $\lambda = 1$ 恰好也是齐次方程的特征根. 又因为 $\lambda = 1$ 是 $P(\lambda) = (\lambda-1)^2$ 的二重根, 算子 $(D-1)^2$ 不仅消去 e^t, 也消去 te^t:

$$(D-1)^2e^t = 0, \qquad (D-1)^2(te^t) = 0.$$

因此这里称为二重共振. 为了得到不被 $(D-1)^2$ 消去的待定函数, 必须再乘 t^2. 这也解释了为什么特解从 t^2e^t 开始凑. □

注记 5.1.1 (待定系数法的局限性). 若强迫项是 $\tan t$, $\log t$ 或任意一般连续函数, 有限维试探空间通常不封闭, 待定系数法便不适用; 此时常数变易公式仍然成立, 只是答案保留为积分. 求解方法的选择应由方程的结构决定, 不能把"猜一个相似的形式"当作普遍原则.

5.1.5 Cauchy–Euler方程

Cauchy–Euler方程具有如下形式，它的特性是系数幂次与导数阶数匹配:

$$t^2x'' + atx' + bx = g(t), \qquad t > 0. \tag{5.1.10}$$

这类方程在尺度变换 $t \longmapsto ct$ 下保持同一种形式. 作对数变量替换后我们会发现尺度伸缩约化为平移变换, 这正是它能够化为常系数方程的原因. 具体来说, 令 $t = e^s$, $u(s) = x(e^s)$, 由于 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t =$

$1/t$, 据链式法直接计算可得

$$x'(t) = u'(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}u'(s),$$
$$x''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}u'(s)\right) = -\frac{1}{t^2}u'(s) + \frac{1}{t}u''(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\big(u''(s) - u'(s)\big).$$

把这两个表达式代入(5.1.10), 得到 $u''(s) + (a-1)u'(s) + bu(s) = g(e^s)$. 所以齐次Cauchy–Euler方程化为常系数方程

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0.$$

现在, 若直接尝试配凑 $x = t^r$, 则有 $x' = rt^{r-1}$, $x'' = r(r-1)t^{r-2}$. 代入齐次方程并约去 t^r 之后, 我们会得到 r 必须满足多项式方程 $r^2 + (a-1)r + b = 0$, 而这正是变换后常系数方程的特征方程.

需注意, 在区间 $t < 0$ 上, 令 $\tau = -t > 0$,$v(\tau) = x(-\tau)$, 也会得到同一种Cauchy–Euler方程; 相应公式中的 t^r 和 $\log t$ 应分别写成 $|t|^r$ 和 $\log|t|$. 由于 $t = 0$ 是方程的奇点, 通常分别在 $t > 0$ 与 $t < 0$ 上讨论, 而不能不加说明地让解穿过原点.

例 5.1.7 关于 r 的方程有重根的情况

求解方程 $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$.

解. 先考虑 $t > 0$ 的情况。令 $s = \log t$，并作变量替换 $u(s) = x(e^s)$。由链式法则计算可得$x'(t) = \frac{1}{t}u'(s)$, $x''(t) = \frac{1}{t^2}\big(u''(s) - u'(s)\big)$. 代入原方程，得到$u'' - 4u' + 4u = 0$. 这是一个二阶常系数齐次线性方程，其特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$，具有二重特征根 $\lambda = 2$。根据定理 5.1.1，通解为 $u(s) = (C_1 + C_2 s)e^{2s}$. 最后代回 $s = \log t$ 得到原方程在 $t > 0$ 上的通解 $x(t) = C_1t^2 + C_2t^2\log t$.

同理在 $t < 0$ 上作变量替换 $s = \log(-t)$也可以化为相同的常系数方程。因此原方程在不含 $t = 0$ 的区间上的通解统一写为 $x(t) = C_1t^2 + C_2t^2\log|t|$. □

Cauchy–Euler 方程并非只是一种便于练习的特殊形式. 例如我们考虑 $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ 中的径向函数 u, 即函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的取值仅依赖 $r = |\boldsymbol{x}|$, 并记 $v(r) = u(\boldsymbol{x})$, 现在我们计算径向函数求 Laplace 算子后的表达式.

定理 5.1.6 径向函数求Laplace算子的表达式

设 u 是 $\mathbb{R}^d$ 中的径向函数且充分光滑, 记 $v(r) = u(\boldsymbol{x})$, 其中 $r = |\boldsymbol{x}|$, 则有

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r) \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}).$$

这里 $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$. **这个表达式考试不会算的话要打屁股!!!**

证明. 因为 $r = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$, 所以直接计算可得

$$\partial_{x_i} r = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}} = \frac{x_i}{r} \Rightarrow \partial_{x_i} u = \partial_r v \frac{x_i}{r} \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

再求一次∂_{x_i}, 可得

$$\partial_{x_i}^2 u = \partial_r^2 v \frac{x_i^2}{r^2} + \partial_r v \left(\frac{1}{r} + x_i \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \cdot \frac{x_i}{r} \right) = \partial_r^2 v \frac{x_i^2}{r^2} + \partial_r v \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

对指标i从1到d求和，得到

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u = \partial_r^2 v \underbrace{\frac{\sum x_i^2}{r^2}}_{=\frac{r^2}{r^2}=1} + \frac{d}{r} \partial_r v - \underbrace{\frac{\sum x_i^2}{r^3}}_{=1/r} \partial_r v = \partial_r^2 v + \frac{d-1}{r} \partial_r v.$$

□

这样的话求解径向调和函数 $\Delta u = 0$ 相当于求解常微分方程 $r^2 R''(r) + (d-1) r R'(r) = 0$, 这正是齐次 Cauchy–Euler 方程. 对径向波动方程

$$U_{tt} - c^2 \left(U_{rr} + \frac{d-1}{r} U_r \right) = 0,$$

空间径向算子乘以 r^2 后也含有 $r^2 U_{rr} + (d-1) r U_r$ 这一相同结构. 因此, 在径向调和函数、径向波以及许多具有尺度不变性的偏微分方程中, 都会自然遇到 Cauchy–Euler 型方程.

习题 5.1

习题 5.1.1. 考虑区间 (a,b) 上具有连续系数的二阶线性方程 $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, 设 $u(t), v(t)$ 是这个方程的一个基本解组，证明方程组的系数 p, q 被该基本解组唯一确定，且$u(t), v(t)$没有公共零点。

习题 5.1.2. 求解如下方程

(1) $x'''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = 0.$
(2) $x^{(4)}(t) - 4x'''(t) + 8x''(t) - 8x'(t) + 3x(t) = 0.$
(3) $x^{(4)}(t) + x(t) = 2e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1.$
(4) $t^2 x''(t) + 5t x'(t) + 13x(t) = 0, \quad t > 0.$
(5) $(2t+1)^2 x''(t) - 4(2t+1)x'(t) + 8x(t) = 0.$

习题 5.1.3. 考虑微分方程 $x''(t)+4x'(t)+3x(t)=f(t)$, 其中 f 在 $[a,+\infty)$ 连续，且当$t\to+\infty$ 时有 $f(t)\to 0$. 证明：该方程的任意解都满足当$t\to+\infty$ 时成立 $x(t)\to 0$.

习题 5.1.4. 考虑方程 $x''(t)+f(t)x(t)=0$, 其中 $f\in C(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_1^{\infty}t|f(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$.

(1) 证明：存在至少一个解 φ 使得当 $t\to+\infty$ 时成立 $\varphi(t)\to 1,\varphi'(t)\to 0$

(2) 证明：存在至少一个解 ψ 使得当 $t\to+\infty$ 时成立 $\psi(t)/t\to 1,\psi'(t)\to 1$.

提示：对(1)考虑将 $t=+\infty$作为初值反向演化，证明问题可以转化为求解积分方程 $\varphi(t)=1+\int_t^{\infty}(t-\tau)f(\tau)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

5.2 *幂级数解法

对变系数方程，一般来说无法用特征根法进行求解，但对线性方程往往可以考虑使用幂级数方法，待定其中的系数并求解出其递推关系。这些方法经常在求解特殊函数时使用，而特殊函数也来源于求解特定的偏微分方程过程中必然出现的步骤。例如我们考虑二维单位圆盘中的Laplace算子特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\qquad u|_{r=1}=0.$$

在极坐标中我们有 $\Delta u=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$. 令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. 由于极坐标中的 θ 与 $\theta+2\pi$ 表示同一方向, 所以角向因子必须满足周期条件 $\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$. 将乘积代入特征值方程并除以 $R(r)\Theta(\theta)$, 我们得到

$$-\frac{R''}{R}-\frac{1}{r}\frac{R'}{R}-\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda\ \Rightarrow\ -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda r^2+r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}.$$

左边只依赖 θ, 右边只依赖 r, 所以二者都必须等于同一个常数, 记为 m^2, 于是 $\Theta''+m^2\Theta=0$. 为了使 $u(r,\theta)$ 在极坐标下是单值的, 就必须有 $\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$. 求解$\Theta$的方程，我们会发现必须要求 $m\in\mathbb{Z}$ 才能满足前面提到的要求. 这个时候径向因子 R 满足的方程为

$$r^2R''+rR'+(\lambda r^2-m^2)R=0. \tag{5.2.1}$$

这个方程不再具有常系数, 也不能用前一节的特征根法求解. 我们将在 $r=0$ 附近用收敛幂级数构造它的解, 并把经过统一标准化的解定义为Bessel函数. 这也是引入许多特殊函数的通常方式: 先从一个具有明确几何或物理来源的微分方程出发, 再把它的标准解作为新的函数.

在讨论幂级数解以前, 先说明本节反复使用的两个概念. 考虑标准形齐次方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0. \tag{5.2.2}$$

定义 5.2.1 常点与正则奇点

若 p,q 都在 t_0 附近解析, 则称 t_0 是方程 (5.2.2) 的**常点** (ordinary point). 若 p,q 中至少一个在 t_0 不解析, 则称 t_0 是该方程的**奇点** (singularity). 对一个奇点 t_0, 若 $(t-t_0)p(t)$ 和 $(t-t_0)^2q(t)$ 都能解析地延拓到 $t=t_0$, 则称 t_0 是**正则奇点** (regular singularity); 否则称它是**非正则奇点** (irregular singularity). 对于非齐次方程, 常点与奇点的分类仍由其齐次方程左端的系数 p,q 决定.

5.2.1 常点附近的幂级数

考虑

$$x''+p(t)x'+q(t)x=g(t), \tag{5.2.3}$$

并设 p,q,g 在 t_0 附近可展开为收敛幂级数. 令 $s=t-t_0$, 我们待定方程的解为 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n$, 逐项求导并比较同次幂系数, 就能从 $a_0=x(t_0)$,$a_1=x'(t_0)$ 递推确定所有 a_n.

定理 5.2.1 常点处的解析解

对方程 (5.2.3), 若 p,q,g 在 $|t-t_0|<R$ 内解析, 则对任意初值 $x(t_0)=a_0$, $x'(t_0)=a_1$, 方程(5.2.3)有唯一解析解. 其Taylor系数由代入方程逐项比较唯一确定, 所得级数在某个正半径内收敛.

证明. 把三个已知函数的幂级数写成

$$p(t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j s^j,\qquad q(t)=\sum_{j=0}^{\infty}q_j s^j,\qquad g(t)=\sum_{j=0}^{\infty}g_j s^j,\qquad s=t-t_0.$$

若 $x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n$, 则

$$x'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}s^n,\qquad x''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}s^n.$$

利用幂级数乘法的Cauchy乘积公式, px' 与 qx 中 s^n 的系数分别是

$$\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1},\qquad \sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k.$$

比较方程两边的 s^n 系数, 得到递推关系

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=g_n-\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k. \tag{5.2.4}$$

右端只含 $a_0,\cdots,a_{n+1}$, 而左端 a_{n+2} 的系数不为零. 因此, 从给定的 a_0,a_1 出发, 先在递推式 (5.2.4) 中令 $n=0$, 求出 a_2; 再依次令 $n=1,2,\cdots$ 便可逐项并且唯一地求出 $a_3,a_4,\cdots$.

下面证明所得级数确实具有正的收敛半径. 取 $0<\rho<R$. 三个已知幂级数在 $|s|<R$ 内绝对收敛, 因而可以选取 $M\geqslant 1$, 使

$$|p_j|\leqslant M\rho^{-j},\qquad |q_j|\leqslant M\rho^{-j},\qquad |g_j|\leqslant M\rho^{-j}\qquad (j\geqslant 0).$$

例如, 可以令

$$M=\max\left\{\sum_{j=0}^{\infty}|p_j|\rho^j,\sum_{j=0}^{\infty}|q_j|\rho^j,\sum_{j=0}^{\infty}|g_j|\rho^j,\qquad 1\right\}.$$

选取常数 $L\geqslant\max\left\{1,\frac{2}{\rho},4M\right\}$, $C\geqslant\max\{1,|a_0|,|a_1|,M\}$. 我们用数学归纳法证明

$$|a_n|\leqslant CL^n\qquad (n\geqslant 0). \tag{5.2.5}$$

当 $n=0,1$ 时, 这由 C 和 L 的选取成立. 假设该估计对 $a_0,\cdots,a_{n+1}$ 已经成立. 记 $\vartheta=\frac{1}{\rho L}\leqslant\frac{1}{2}$, 则递推式中含 p 的和满足

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}|p_{n-k}|(k+1)|a_{k+1}|&\leqslant MC\sum_{k=0}^{n}\rho^{-(n-k)}(k+1)L^{k+1}=MCL^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\vartheta^{n-k}\\&\leqslant MCL^{n+1}(n+1)\sum_{j=0}^{n}\vartheta^j\leqslant 2MC(n+1)L^{n+1}.\end{aligned}$$

对含 q 的和, 归纳假设给出

$$\sum_{k=0}^{n}|q_{n-k}|\,|a_k|\leqslant MC\sum_{k=0}^{n}\rho^{-(n-k)}L^k=MCL^n\sum_{k=0}^{n}\vartheta^{n-k}\leqslant 2MCL^n.$$

把这两个估计代入(5.2.4), 并使用 $(n+2)(n+1)\geqslant 2$, 得到

$$\begin{aligned}|a_{n+2}|&\leqslant\frac{M\rho^{-n}}{(n+2)(n+1)}+\frac{2MC(n+1)L^{n+1}}{(n+2)(n+1)}+\frac{2MCL^n}{(n+2)(n+1)}\\&\leqslant\frac{ML^n}{2}+MCL^{n+1}+MCL^n\leqslant\frac{CL^{n+2}}{2}+2MCL^{n+1}.\end{aligned}$$

由 $L\geqslant 4M$, 最后一项满足 $2MCL^{n+1}\leqslant\frac{CL^{n+2}}{2}$, 所以 $|a_{n+2}|\leqslant CL^{n+2}$, 这就完成了归纳证明.

当 $|s|<1/L$ 时, 由(5.2.5) 得知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_ns^n|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(L|s|)^n<\infty$. 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|a_n||s|^{n-1}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n||s|^{n-2}$ 也在每个 $|s|\leqslant r<1/L$ 上一致收敛. 因此所得级数可以逐项求两次导数, 所有参与乘

法的级数均绝对收敛, Cauchy 乘积公式适用; 现在递推关系 (5.2.4)说明级数之和满足原方程及给定初值. 最后, 据初值问题解的唯一性定理, 我们知道这个解析解就是该初值问题的唯一解. □

接下来我们来看两个例子：Airy方程和Hermite方程. Airy 方程最典型的来源是带有转向点的一维驻定 Schrödinger 方程. 例如考虑 $-\varepsilon^2 u''(y)+V(y)u(y)=Eu(y)$. 若 y_0 是一个简单转向点, 即 $V(y_0)=E$, $V'(y_0)\neq 0$, 则由 Taylor 展开得到 $V(y)-E=V'(y_0)(y-y_0)+O\big((y-y_0)^2\big)$. 然后我们在 y_0 附近保留最低阶项, 再把 $y-y_0$ 按 $\varepsilon^{2/3}$ 的尺度伸缩, 就得到 Airy 方程 $u_{tt}-tu=0$ 或把 t 反向后所得的等价方程. Airy 方程描述了振荡区与指数衰减区交界处的局部行为; 下面的级数计算给出这一局部模型的两个精确解.

例 5.2.1 Airy方程的级数解

计算Airy 方程的幂级数解

$$x''-tx=0 \tag{5.2.6}$$

解. 可以看到 $t=0$ 是常点, 所以我们直接待定 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ 就得到

$$x''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n,\qquad tx=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^n.$$

比较常数项得 $a_2=0$; 比较 t^n 项得

$$a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)},\qquad n\geqslant 1. \tag{5.2.7}$$

递推跨越三个指标, 所以系数按下标模 3 分组. 由 $a_2=0$ 得到所有 a_{3k+2} 都为零, 而 a_0,a_1 分别产生两支独立的解:

$$x_0(t)=a_0\left(1+\frac{t^3}{3\cdot 2}+\frac{t^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\cdots\right),$$
$$x_1(t)=a_1\left(t+\frac{t^4}{4\cdot 3}+\frac{t^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots\right).$$

令上面两个解分别满足初值 $(x(0),x'(0))=(1,0)$ 与 $(0,1)$, 它们便构成Airy方程的一组标准化基解. 通常使用的Airy函数 Ai 与 Bi 是这两个基解的两个固定线性组合; 固定线性组合的条件来自无穷远处的标准渐近归一化: $\mathrm{Ai}(t)$ 在正无穷方向衰减, 而 $\mathrm{Bi}(t)$ 在该方向增长. □

注记 5.2.1 (形式级数与解析解的区别). 把级数代入并比较系数, 只能先得到一个形式幂级数. 还必须证明它在某个正半径内收敛, 才能逐项求导并成为真正的函数解. 常点解析定理补上了这一步. 以后遇到非线性方程或非正则奇点时, 形式幂级数甚至可能发散, 但仍可作为渐近展开使用. 总之, 必须注意区分“形式上满足”与“收敛并满足”.

Hermite 方程则来自一维量子谐振子的定态方程. 经过无量纲化以后, 该方程可以写成

$$-\psi''(t)+t^2\psi(t)=(2\nu+1)\psi(t). \tag{5.2.8}$$

为了提取出本征函数在无穷远处的 Gaussian 衰减, 我们把方程的解写作 $\psi(t)=e^{-t^2/2}x(t)$, 逐次求导得到

$$\psi'(t)=e^{-t^2/2}\big(x'(t)-tx(t)\big),\qquad \psi''(t)=e^{-t^2/2}\big(x''(t)-2tx'(t)+(t^2-1)x(t)\big).$$

把这两个公式代入 (5.2.8), 并约去处处非零的因子 $e^{-t^2/2}$, 恰好得到下面例子中的 Hermite 方程. 多项式解的出现对应量子谐振子的离散能级.

例 5.2.2 Hermite多项式

讨论Hermite方程解的幂级数展开

$$x''-2tx'+2\nu x=0. \tag{5.2.9}$$

解. 对该方程 $t=0$ 仍然是常点. 所以令 $x=\sum a_nt^n$, 比较 t^n 系数得

$$x''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n,\quad -2tx'=-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n,\quad 2\nu x=2\nu\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

因此对任意的 $n\geqslant 0$, 我们有如下递推关系

$$a_{n+2}=\frac{2(n-\nu)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

偶数系数与奇数系数分别递推. 当 $\nu=N\in\mathbb{N}$ 时, 与 N 同奇偶的一支在 $n=N$ 后终止, 产生 N 次多项式. 按照首项系数为 2^N 的惯例作标准化, 这个多项式记为 $H_N(t)$. 例如:

N	所取初始系数	递推所得多项式
0	$a_0=1$	$H_0(t)=1$
1	$a_1=2$	$H_1(t)=2t$
2	$a_0=-2$	$a_2=4,\quad H_2(t)=4t^2-2$
3	$a_1=-12$	$a_3=8,\quad H_3(t)=8t^3-12t$

所以

$$H_0=1,\quad H_1=2t,\quad H_2=4t^2-2,\quad H_3=8t^3-12t.$$

量子谐振子的可积本征函数正由 $e^{-t^2/2}H_N(t)$ 构成; 级数终止对应离散能级. □

5.2.2 正则奇点与Frobenius方法

若方程 (5.2.2) 的 t_0 是定义 5.2.1 所说的正则奇点, 此时标准型中的系数可能不再同时解析. 但

$$p_0 = (t-t_0)p(t)\big|_{t=t_0}, \qquad q_0 = (t-t_0)^2 q(t)\big|_{t=t_0}.$$

这两个值仍然有意义, 因为定义中的两个乘积都能解析延拓到 $t=t_0$.

在正则奇点处, 解可能像 $(t-t_0)^r$ 而不是整数次幂. Frobenius 方法尝试将方程的解待定为如下形式

$$x(t) = (t-t_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \qquad a_0 \neq 0. \tag{5.2.10}$$

代入后方程, 最低次幂的系数要求 r 满足

$$F(r) := r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0. \tag{5.2.11}$$

这个关于 r 的二次方程决定了 Frobenius 级数可能具有的最低幂次.

定理 5.2.2 Frobenius定理, 常用形式

设 t_0 是方程 (5.2.2) 的正则奇点, 方程 (5.2.11) 的两个根为 r_1, r_2.

(1) 至少有一个形如(5.2.10)的非零解;
(2) 若 $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, 则分别以 r_1, r_2 开头的两个Frobenius级数给出一组基解;
(3) 若二根相等或相差整数, 第二个解可能含有 $\log|t-t_0|$ 项.

上述Frobenius级数都在某个正半径内收敛.

证明. 令 $s = t - t_0$, 并置 $y(s) = x(t_0+s)$. 因为 $y'(s) = x'(t_0+s), \qquad y''(s) = x''(t_0+s)$, 所以原方程在新变量下仍是二阶线性方程, 而且 t_0 是正则奇点, 当且仅当 $s=0$ 是变换后方程的正则奇点. 因此我们可以把 s 重新记作 t, 并把奇点记作 0.

先在 $t>0$ 的一侧讨论; 此时 $t^r = e^{r\log t}$ 有明确意义. 在这一段中, 暂时把 (5.2.2) 的两个系数记为 $\widehat{p}, \widehat{q}$. 由正则奇点的定义, $t\widehat{p}(t)$ 与 $t^2\widehat{q}(t)$ 在原点解析. 为了不使后续得到的表达式过于繁琐, 把这两个解析函数重新记为 $p(t), q(t)$; 它们的常数项正是前面定义的 p_0, q_0. 于是原方程可以写成

$$t^2 x'' + t\,p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{5.2.12}$$

其中 $p(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$, $q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j$ 在原点附近解析. 代入方程的解

$$x(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \qquad a_0 \neq 0.$$

并逐项求导以后, 得到

$$t^2x'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nt^{n+r},$$
$$tp(t)x' = \left(\sum_{j=0}^{\infty}p_jt^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kt^{k+r}\right), \qquad q(t)x = \left(\sum_{j=0}^{\infty}q_jt^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^{k+r}\right).$$

最低次幂 t^r 的系数为 $\big(r(r-1)+p_0r+q_0\big)a_0$. 由于 $a_0\neq 0$, 所以必须有 $r(r-1)+p_0r+q_0=0$, 这就得到方程 (5.2.11).

再比较 t^{n+r} 的系数. 乘积中取 $j+k=n$, 并把含 a_n 的 $j=0$ 项移到左边, 得到

$$F(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\big((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\big)a_k, \qquad n\geqslant 1. \tag{5.2.13}$$

设方程 (5.2.11) 的另一个根为 $\widetilde{r}$. 因为 $F(z)=(z-r)(z-\widetilde{r})$, 所以 $F(r+n)=n(n+r-\widetilde{r})$. 只要 $\widetilde{r}-r$ 不是正整数, 递推式左边的系数对每个 $n\geqslant 1$ 皆为非零, 从而 (5.2.13) 中所有后续的系数都由 a_0 唯一确定.

下面证明这个形式幂级数收敛. 取一个正数 ρ, 使 p,q 的幂级数在 $|t|\leqslant\rho$ 上绝对收敛. 然后选取 $M\geqslant 1$, 使

$$|p_j|\leqslant M\rho^{-j}, \qquad |q_j|\leqslant M\rho^{-j} \qquad (j\geqslant 0).$$

又因为

$$\frac{|F(r+n)|}{n^2} = \frac{|n+r-\widetilde{r}|}{n} \longrightarrow 1 \qquad (n\longrightarrow\infty),$$

并且每个 $F(r+n)\neq 0$, 所以存在 $c>0$, 使得 $|F(r+n)|\geqslant cn^2$ 对全体正整数 n 都成立. 接下来证明对任意自然数 n 都有 $|a_n|\leqslant CL^n$. 其中

$$L\geqslant \max\left\{\frac{2}{\rho},\ \frac{2M(|r|+2)}{c\rho},\ 1\right\}, \qquad C=|a_0|.$$

用数学归纳法, 首先它在 $n=0$ 时显然成立, 然后假设它对 $0,\cdots,n-1$ 成立. 令 $\vartheta=(\rho L)^{-1}\leqslant 1/2$. 由递推式,

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{cn^2}\sum_{k=0}^{n-1}\big((|r|+k)|p_{n-k}|+|q_{n-k}|\big)|a_k|\leqslant\frac{MCL^n}{cn^2}\sum_{k=0}^{n-1}(|r|+k+1)\vartheta^{n-k}$$
$$\leqslant\frac{MCL^n(|r|+n+1)}{cn^2}\sum_{j=1}^{\infty}\vartheta^j\leqslant\frac{2M(|r|+2)}{c\rho L}CL^n\leqslant CL^n.$$

其中我们用到了如下估计

$$\sum_{j=1}^{\infty} \vartheta^j = \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \leqslant \frac{2}{\rho L}, \qquad \frac{|r|+n+1}{n^2} \leqslant |r|+2 \quad (n \geqslant 1).$$

这就完成了归纳证明, 于是 $\sum a_n t^n$ 在 $|t| < 1/L$ 内绝对收敛, 其逐项一阶、二阶导数在每个 $0 < \delta \leqslant t \leqslant r < 1/L$ 上一致收敛. 代回方程 (5.2.12), 递推式保证所得函数确实是解.

而在方程 (5.2.11) 的两个根中, 至少可以选择一个根 r, 使另一个根与它的差不是正整数. 例如, 取实部较大的根; 若两个根的实部相同, 则二者之差也不可能是正整数. 因此上面的构造至少给出一个Frobenius解, 这证明了第一条.

若 $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, 那么对 r_1 和 r_2 都不会出现 $F(r_j + n) = 0$, 所以分别得到两个收敛的Frobenius解

$$x_j(t) = t^{r_j}\big(a_{j,0} + a_{j,1}t + \cdots\big), \qquad a_{j,0} \neq 0.$$

它们的Wronski行列式的最低次项是

$$W(x_1, x_2)(t) = a_{1,0}a_{2,0}(r_2 - r_1)t^{r_1+r_2-1} + \text{更高次幂}.$$

由于 $r_1 \neq r_2$, 这个最低次项的系数不为零, 所以在充分靠近原点的穿孔区间内 $W(x_1, x_2) \neq 0$. 两个解线性无关, 第二条得证.

最后设 $r_1 - r_2 = N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 并取上面构造的较大根所对应的解

$$x_1(t) = t^{r_1}h(t), \qquad h(0) \neq 0,$$

其中 h 解析. 缩小区间后可设 $h(t) \neq 0$. 由降阶公式, 第二个线性无关的解可取为

$$x_2(t) = x_1(t)\int^t \frac{\exp\left(-\int^s p(\tau)/\tau \,\mathrm{d}\tau\right)}{x_1(s)^2}\,\mathrm{d}s. \tag{5.2.14}$$

由于

$$\int^s \frac{p(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau = p_0 \log s + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j}{j}s^j + \text{常数},$$

所以表达式(5.2.14)中的被积函数具有形式$s^{-p_0-2r_1}H(s)$, 其中 H 在原点解析且 $H(0) \neq 0$. 方程 (5.2.11) 的两根之和为 $r_1 + r_2 = 1 - p_0$, 所以 $-p_0 - 2r_1 = r_2 - r_1 - 1 = -N - 1$.

今记 $H(s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} h_j s^j$, 逐项积分得到

$$\int s^{-N-1}H(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{\substack{j\geqslant 0\\ j\neq N}} \frac{h_j}{j-N}s^{j-N} + h_N \log s.$$

乘回 $x_1(t)=t^{r_1}h(t)$ 后, 第二个解可以写成

$$x_2(t)=t^{r_2}\sum_{j=0}^{\infty}b_jt^j+c\,x_1(t)\log t.$$

当 $N\geqslant 1$ 时, 系数 c 可能为零; 当 $N=0$ 时, 有$h_0\neq 0$, 所以对数项必然出现. 把 $t>0$ 换成原点另一侧时, 应将 $\log t$ 写成 $\log|t|$. 第三条得证. □

例 5.2.3 Cauchy-Euler方程

考虑 $t^2x''+atx'+bx=0\,(t>0)$.

解. 在 $t=0$ 处, 我们有 $tp(t)=a, t^2q(t)=b$, 均可解析地延拓到 $t=0$, 所以 $t=0$ 是正则奇点. 代入最简单的 Frobenius 形式 $x=t^r$, 得到 r 必须满足 $r(r-1)+ar+b=0$.

若两根 $r_1\neq r_2$, 得到 t^{r_1},t^{r_2}. 若二根重合为 r, 第二个解为 $t^r\log t$. 下面解释重根情形中对数项的来源。作变量代换 $s=\log t$, $y(s)=x(e^s)$, 即 $x(t)=y(\log t)$. 由链式法则得 $tx'(t)=y'(s)$, $t^2x''(t)=y''(s)-y'(s)$, 因此原方程化为常系数方程 $y''+(a-1)y'+by=0$, 特征方程恰为 $\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$. 当特征方程有重根 r 时, 常系数方程的两个线性无关解为 e^{rs},se^{rs}, 代回 $s=\log t$ 就得到了 $t^r,t^r\log t$ 这样的解.

因此，在 Cauchy–Euler 方程这个基本模型中，幂函数解来自常系数方程的指数解，而重根情形中的对数项来自第二个解 se^{rs}。这也解释了为什么 Frobenius 方法以幂函数为出发点，以及为什么在某些情形下需要在解中加入对数项。 □

例 5.2.4 决定最低幂次的两个根相差整数

考察方程

$$t^2x''-t(t+2)x'+(t+2)x=0,\qquad t>0$$

解. 我们可以直接看出 $t=0$ 是正则奇点. 方程两边除以 t^2 后, 最低次项要求 r 满足 $r(r-1)-2r+2=(r-1)(r-2)=0$. 两个根相差 1, 这时不能仅凭这两个根就断言一定有两个纯 Frobenius 级数解; 这是因为递推到某一阶可能出现零分母, 第二个解可能含 $\log t$. 本例把两个解完整地求出来.

先代入 $x_1(t)=t$. 由于 $x_1'=1, x_1''=0$, 我们得到

$$t^2x_1''-t(t+2)x_1'+(t+2)x_1=-t(t+2)+(t+2)t=0.$$

所以 $x_1=t$ 是一个解. 把方程除以 t^2, 其 x' 项系数为

$$p(t)=-\frac{t+2}{t}=-1-\frac{2}{t}.$$

使用降阶公式, 另一个解可以取为

$$x_2(t)=t\int^t\frac{\exp\left(-\int^s(-1-2/\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)}{s^2}\,\mathrm{d}s=t\int^t\frac{e^ss^2}{s^2}\,\mathrm{d}s=te^t.$$

这里不定积分所产生的常数只会给 x_2 增加 x_1 的常数倍. 两个解的Wronski行列式是

$$W(t,te^t)=\begin{vmatrix} t & te^t \\ 1 & (1+t)e^t \end{vmatrix}=t^2e^t\neq 0.$$

为了使第二个解从最低幂次 $r=2$ 开始, 把 x_2 减去 x_1, 得到

$$\widetilde{x}_2(t)=t(e^t-1)=t^2+\frac{t^3}{2!}+\frac{t^4}{3!}+\cdots.$$

因此本例的两个线性无关解都可以写成纯Frobenius级数, 并没有对数项. 这正是定理中说“可能含有对数项”而不是“必然含有对数项”的原因. □

5.2.3 Bessel方程与Bessel函数

设 $\lambda>0$, 令 $z=\sqrt{\lambda}r$, $R(r)=x(z)$. 据求导可得 $R'(r)=\sqrt{\lambda}\,x'(z)$, $R''(r)=\lambda x''(z)$. 把 $r=z/\sqrt{\lambda}$ 以及这两个导数代入(5.2.1), 我们得到

$$z^2x''+zx'+(z^2-m^2)x=0.$$

在圆盘的径向问题中, $r\geqslant 0$, 所以 $z\geqslant 0$; 而方程只含 m^2, 可以把角向指标换成 $|m|$. 因此本小节只讨论 $\nu\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的情况. 现在将非负整数$|m|$ 推广为非负实参数 ν, 便得到Bessel方程

$$z^2x''+zx'+(z^2-\nu^2)x=0. \tag{5.2.15}$$

对该方程来说,$z=0$ 是正则奇点. 我们待定解具有形式 $x=z^r\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 它的最低次项应当满足 $r^2-\nu^2=0$. 所以这个方程的两个根为 $r=\pm\nu$. 取 $r=\nu$, 比较系数得到

$$z^2x''+zx'-\nu^2x=\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+\nu)^2-\nu^2\big)a_nz^{n+\nu},$$

而 $z^2x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+\nu}$, 我们比较 $z^{1+\nu}$ 的系数, 可得

$$\big((1+\nu)^2-\nu^2\big)a_1=(2\nu+1)a_1=0.$$

在 $\nu\geqslant 0$ 的情形,$2\nu+1\neq 0$, 所以 $a_1=0$. 对 $n\geqslant 2$, 比较 $z^{n+\nu}$ 的系数, 得到

$$\big((n+\nu)^2-\nu^2\big)a_n+a_{n-2}=0\ \Rightarrow\ a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}\qquad(n\geqslant 2).$$

因此所有奇数下标的系数都为零. 对偶数下标反复使用递推式,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\prod_{j=1}^{k}(2j)(2j+2\nu)} = \frac{(-1)^k a_0\,\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\,\Gamma(k+\nu+1)}.$$

这里对实数 $\alpha > 0$, Gamma函数定义为$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}\,\mathrm{d}s$. 现在我们令 $a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, 就得到**第一类Bessel函数**的幂级数展开式

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{5.2.16}$$

为了同时说明收敛性与逐项求导的合法性, 我们记

$$J_\nu(z) = z^\nu F_\nu(z^2), \qquad F_\nu(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{2^{2k+\nu}k!\,\Gamma(k+\nu+1)}.$$

F_ν 的幂级数中, 相邻两项绝对值之比为

$$\frac{|w|}{4(k+1)(k+\nu+1)} \longrightarrow 0.$$

所以这个幂级数的收敛半径为 $+\infty$.

据幂级数逐项求导定理，进一步我们得到 F_ν 以及它的任意阶逐项导数在每个有界 w-区间上一致收敛. 对任意 $0 < a < R$, 函数 z^ν 在 $[a,R]$ 上有连续的各阶导数, 因而 $z^\nu F_\nu(z^2)$ 可以在 $[a,R]$ 上按照乘积法则与链式法则求两次导数. 把这些导数代回Bessel方程, 前面所得的系数递推式使每个同次幂的系数都等于零. 因此级数在每个 $z > 0$ 处确实给出Bessel方程的解. 由于 a, R 可以任意选取, 这个结论对 $(0,+\infty)$ 都成立. 而在 $z = 0$ 处, 方程本身有奇点, 级数的取值则直接给出所取解在原点的连续延拓. 这个收敛级数便是 J_ν 在 $[0,+\infty)$ 上的定义, 而不只是一个形式展开.

当 $\nu = m \in \mathbb{N}$ 时, 恒等式 $\Gamma(k+m+1) = (k+m)!$ 把上式化为

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}.$$

整数阶级数只含非负整数次幂, 而且对每个实数 z 都收敛, 所以它还把 J_m 唯一地延拓为整个实轴上的函数. 下面讨论整数阶递推公式时采用这个实轴延拓.

整数阶时, 决定最低幂次的两个根之差为 $2m$. 从较小根 $-m$ 出发的递推会在某一步遇到零分母, 不能由同一种纯Frobenius级数自动得到第二个独立解. 此时，用降阶公式构造的第二个解在选定常数后称为**第二类Bessel函数** Y_m: 当 $m = 0$ 时它在原点含有 $\log z$ 项; 当 $m \geqslant 1$ 时它还含有 z^{-m} 型的奇性. 圆盘中心要求径向解有界, 因此必须排除 Y_m, 保留 J_m. 而边界条件 $R(1) = 0$ 进一步要求 $\sqrt{\lambda}$ 是 J_m 的零点, 这就把偏微分方程的特征值问题化为特殊函数零点问题.

例 5.2.5 零阶Bessel函数的前几项

$$J_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=1-\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^4}{2^2\,4^2}-\frac{z^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\cdots.$$

记 z^{2k} 的系数为

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2},\qquad a_{2k+1}=0.$$

则它是零阶Bessel方程的解.

证明. 在 $z^2J_0''+zJ_0'+z^2J_0$ 中,z^{2k} 的系数在 $k\geqslant 1$ 时为

$$(2k)(2k-1)a_{2k}+2ka_{2k}+a_{2k-2}=(2k)^2a_{2k}+a_{2k-2}.$$

而

$$(2k)^2a_{2k}=4k^2\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}=-\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-2}((k-1)!)^2}=-a_{2k-2}.$$

常数项也为零, 所以每一项的系数都为零, 从而 $z^2J_0''+zJ_0'+z^2J_0=0$. 这说明上面的级数不是近似式, 而是Bessel方程的一个精确解. □

命题 5.2.3 整数阶Bessel函数的两个递推公式

设 J_m 是由级数 (5.2.16) 定义的整数阶 Bessel 函数, 因而它满足方程 (5.2.15). 对整数 $m\geqslant 1$, 第一式对每个 $z\in\mathbb{R}$ 成立, 第二式对 $z\neq 0$ 成立:

$$J_m'(z)=\frac{1}{2}\big(J_{m-1}(z)-J_{m+1}(z)\big),\qquad \frac{2m}{z}J_m(z)=J_{m-1}(z)+J_{m+1}(z).\tag{5.2.17}$$

第二式左边在 $z=0$ 有可去奇点; 把它定义为 $z\to 0$ 时的极限后, 第二式在 $z=0$ 也成立. 此外, 对每个 $z\in\mathbb{R}$ 都有 $J_0'(z)=-J_1(z)$.

证明. 先严格说明下面两次逐项求导的合法性. 固定 $R>0$. 令

$$F_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{2k+2m}}{2^{2k+m}k!(k+m)!},\qquad H_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{2k}}{2^{2k+m}k!(k+m)!}.$$

由整数阶Bessel函数的级数,$F_m(z)=z^mJ_m(z)$; 当 $z\neq 0$ 时, $H_m(z)=z^{-m}J_m(z)$, 而右边的级数还给出了 H_m 在 $z=0$ 处的连续定义. 在 $|z|\leqslant R$ 上,F_m 的第 k 项的导数绝对值不超过

$$M_k=\frac{(2k+2m)R^{2k+2m-1}}{2^{2k+m}k!(k+m)!}.$$

相邻两个上界之比为

$$\frac{M_{k+1}}{M_k}=\frac{2k+2m+2}{2k+2m}\frac{R^2}{4(k+1)(k+m+1)}\to 0.$$

所以 $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ 收敛,Weierstrass判别法说明 F_m 的逐项导数级数在 $[-R,R]$ 上一致收敛. 对于 H_m, 第零项的导数为零; 当 $k \geqslant 1$ 时, 第 k 项的导数绝对值不超过

$$N_k = \frac{2kR^{2k-1}}{2^{2k+m}k!(k+m)!},$$

并且

$$\frac{N_{k+1}}{N_k} = \frac{2k+2}{2k}\frac{R^2}{4(k+1)(k+m+1)} \longrightarrow 0.$$

故 H_m 的逐项导数级数也在 $[-R,R]$ 上一致收敛. 两个原级数在 $z=0$ 都收敛, 于是数学分析中的函数项级数逐项求导定理表明,F_m 与 H_m 确实可以逐项求导. 由于 $R>0$ 是任意的, 以下等式在其所写的整个定义域内成立.

对整数 $m \geqslant 1$, 逐项求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^m J_m(z)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+2m}}{2^{2k+m}k!(k+m)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2m)z^{2k+2m-1}}{2^{2k+m}k!(k+m)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+2m-1}}{2^{2k+m-1}k!(k+m-1)!} = z^m J_{m-1}(z).\end{aligned}$$

另一方面, 对整数 $m \geqslant 0$, 逐项求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^{-m} J_m(z)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k+m}k!(k+m)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2kz^{2k-1}}{2^{2k+m}k!(k+m)!}\\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+m+1}j!(j+m+1)!} = -z^{-m}J_{m+1}(z),\end{aligned}$$

其中第三行令 $j=k-1$. 最后一个等式先在 $z\neq 0$ 时按通常意义理解; 它的两边均由各自的幂级数在 $z=0$ 连续延拓.

当 $z\neq 0$ 时展开这两个乘积的导数, 分别得到

$$J'_m + \frac{m}{z}J_m = J_{m-1}, \qquad J'_m - \frac{m}{z}J_m = -J_{m+1}.$$

两式相加得到 $2J'_m = J_{m-1} - J_{m+1}$, 第一式减去第二式给出 $\frac{2m}{z}J_m = J_{m-1} + J_{m+1}$. 这就证明了(5.2.17)在 $z\neq 0$ 时成立. 第一式的两边都是连续函数, 所以令 $z\to 0$, 第一式在 $z=0$ 也成立.

再考察第二式左边在原点的极限. 由Bessel级数的首项,

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m m!} + z^{m+2}Q_m(z),$$

其中 Q_m 在原点附近连续. 因此

$$\lim_{z\to 0}\frac{2m}{z}J_m(z)=\begin{cases}1, & m=1,\\ 0, & m\geqslant 2.\end{cases}$$

另一方面, $J_0(0)=1$, 而 $J_j(0)=0$ 对全体 $j\geqslant 1$ 成立, 所以

$$J_{m-1}(0)+J_{m+1}(0)=\begin{cases}1, & m=1,\\ 0, & m\geqslant 2.\end{cases}$$

这证明了第二式在约定可去奇点的取值后也延拓到 $z=0$. 最后, 在 $J_m'-\frac{m}{z}J_m=-J_{m+1}$ 中取 $m=0$; 这时没有含 $1/z$ 的项, 直接得到 $J_0'(z)=-J_1(z)$. 两边皆为连续函数, 故该等式也对 $z=0$ 成立. □

命题 5.2.4 整数阶Bessel函数的正零点是孤立的

固定整数 $m\geqslant 0$. 设 J_m 是由级数 (5.2.16) 定义的方程 (5.2.15) 的解. 函数 J_m 的正零点在任何有限点都不能聚集, 而且每个有界区间 $[0,R]$ 至多含有有限个正零点.

证明. 先排除零点向原点聚集的可能性. 从级数中提出首项, 得到

$$J_m(z)=\frac{z^m}{2^m m!}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k m!}{2^{2k}k!(k+m)!}z^{2k}\right).$$

括号内的级数在原点附近一致收敛, 因而其和是连续函数, 并且在 $z=0$ 时等于 1. 由连续性, 存在 $\delta>0$, 使得括号内的函数在 $[0,\delta]$ 上大于 $1/2$. 因此 $J_m(z)\neq 0$ 对每个 $0<z\leqslant\delta$ 成立.

再设某个 $z_*>0$ 是正零点的聚点. 于是存在两两不同的正零点 z_n, 满足 $z_n\to z_*$. 由 J_m 的连续性,$J_m(z_*)=0$. 又因为 J_m 在 $z_*>0$ 处可微,

$$J_m'(z_*)=\lim_{n\to\infty}\frac{J_m(z_n)-J_m(z_*)}{z_n-z_*}=0.$$

在 $(0,+\infty)$ 上,Bessel方程可以除以 z^2 写成

$$x''+\frac{1}{z}x'+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)x=0.$$

它的系数在任意不含原点的闭区间上连续. 零函数和 J_m 在 z_* 处具有相同的初值 $x(z_*)=x'(z_*)=0$. 线性初值问题的唯一性说明: 对任意 $b>0$, 在连接 z_* 与 b 的闭区间上都有 $J_m\equiv 0$. 因此 J_m 应当在整个 $(0,+\infty)$ 上恒为零, 这与上一步已经证明的 $J_m(z)\neq 0$ $(0<z\leqslant\delta)$ 矛盾. 所以正零点不能在任何 $z_*>0$ 处聚集.

最后, 若某个 $[0,R]$ 含有无穷多个正零点, 就把两两不同的这些零点依次排成一个有界序列. 据Bolzano–Weierstrass 定理，该序列有收敛子列, 其极限属于 $[0,R]$. 这个极限若为零, 就与第一段矛盾; 若为正数, 就与第二段矛盾. 因此 $[0,R]$ 中的正零点只能有有限个. □

在偏微分方程中，圆盘上的 Dirichlet 问题要求 $J_m(\sqrt{\lambda})=0$. 由上面的命题, 它的正零点可以依次按递增次序编号为 $j_{m,k}$, 相应特征值为 $\lambda_{m,k}=j_{m,k}^2$. 本章到这里证明了零点的局部有限性; 第六章的 Sturm 振荡理论还将证明正零点有无穷多个, 并说明怎样按照振荡次数给它们排序.

5.2.4　Legendre方程: 另一个几何来源

下面从球面上的分离变量完整导出 Legendre 方程. 在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上使用球坐标 (θ,φ), 其中 $0<\theta<\pi$ 是极角, φ 是方位角. 球面 Laplace 算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^2}Y=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

考虑球面特征值问题

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2}Y=\lambda Y. \tag{5.2.18}$$

令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 并把乘积代入 (5.2.18), 再除以 $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得到

$$-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda.$$

乘以 $\sin^2\theta$ 并移项, 可将只依赖 φ 的量与只依赖 θ 的量分开:

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right)+\lambda\sin^2\theta.$$

等式左边只依赖 φ, 右边只依赖 θ, 因而两边都等于一个常数, 记为 m^2. 方位角满足 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, 所以

$$\Phi''+m^2\Phi=0$$

直接求解这个方程会发现，如果它有非零周期解就必须要求 $m\in\mathbb{Z}$. 而角向因子Θ满足

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0. \tag{5.2.19}$$

在轴对称情形 $m=0$ 下, 令 $t=\cos\theta$, $x(t)=\Theta(\theta)$, 直接求导可得

$$\Theta'(\theta)=-\sin\theta\,x'(t),\qquad \sin\theta\Theta'(\theta)=-(1-t^2)x'(t).$$

由于 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\theta = -\sin\theta$, 进一步有

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1-t^2)x'(t)\right) = (1-t^2)x''(t) - 2tx'(t).$$

把这个公式代入 (5.2.19), 并将参数写成 $\lambda = \nu(\nu+1)$, 得到 Legendre 方程

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + \nu(\nu+1)x = 0. \tag{5.2.20}$$

若 $m \neq 0$, 同样的变量替换得到带有 $m^2/(1-t^2)$ 项的连带 Legendre 方程. 因此 (5.2.20) 正是球面分离变量中轴对称部分的方程. 球面的两个极点分别对应 $t=-1$ 与 $t=1$. $t=0$ 是常点, 而 $t=\pm1$ 是正则奇点. 代入 $x = \sum a_n t^n$, 得到

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\nu(\nu+1)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

若 $\nu = N \in \mathbb{N}$, 与 N 同奇偶的一支终止, 得到Legendre多项式 P_N. 前几项为

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = t, \qquad P_2 = \frac{1}{2}(3t^2-1), \qquad P_3 = \frac{1}{2}(5t^3-3t).$$

在球面调和分析中, 端点 $t=\pm1$ 的正则性排除了含对数的另一个解, 从而再次产生离散的整数参数.

命题 5.2.5 Legendre多项式的Rodrigues公式

对方程 (5.2.20) 取 $\nu = N \in \mathbb{N}$. 对 $N = 0, 1, 2, \cdots$, 定义

$$P_N(t) = \frac{1}{2^N N!}\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N}(t^2-1)^N. \tag{5.2.21}$$

则 P_N 是 N 次多项式, 并满足

$$(1-t^2)P_N'' - 2tP_N' + N(N+1)P_N = 0.$$

证明. 令 $u(t) = (t^2-1)^N$. 对恒等式 $(t^2-1)u' = 2Nt\,u$ 两边求 $N+1$ 次导数会发现, 左端只有对 t^2-1 求零、一、二阶导数的这三项, 右端只有对 t 求零, 一次导数的两项. 把这些项逐项写出, 左端是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{N+1}}{\mathrm{d}t^{N+1}}\left((t^2-1)u'\right) &= (t^2-1)u^{(N+2)} + \binom{N+1}{1}2t\,u^{(N+1)} + \binom{N+1}{2}2u^{(N)} \\ &= (t^2-1)u^{(N+2)} + 2(N+1)t\,u^{(N+1)} + N(N+1)u^{(N)},\end{aligned}$$

右端是

$$2N\frac{\mathrm{d}^{N+1}}{\mathrm{d}t^{N+1}}(tu) = 2N\left(tu^{(N+1)} + (N+1)u^{(N)}\right).$$

令左右两端相等, 再把右端移到左端, 得到

$$(t^2-1)u^{(N+2)}+2t\,u^{(N+1)}-N(N+1)u^{(N)}=0.$$

整个等式乘以 $-1/(2^N N!)$. 根据(5.2.21),

$$P_N=\frac{u^{(N)}}{2^N N!},\qquad P_N'=\frac{u^{(N+1)}}{2^N N!},\qquad P_N''=\frac{u^{(N+2)}}{2^N N!}.$$

因此

$$(1-t^2)P_N''-2tP_N'+N(N+1)P_N=0.$$

最后,$u=(t^2-1)^N$ 的最高次项是 t^{2N}. 对它求 N 次导数得到 $\frac{(2N)!}{N!}t^N$, 其系数非零; 而 u 的其余各项的次数都低于 $2N$, 求 N 次导数后的次数都低于 N. 所以 P_N 的次数恰好为 N. □

命题 5.2.6 Legendre多项式的正交性

设 P_M, P_N 是由 (5.2.21) 定义的 Legendre 多项式, 它们分别满足方程 (5.2.20) 中 $\nu=M$ 与 $\nu=N$ 的情形. 若 $M\neq N$, 则

$$\int_{-1}^{1}P_M(t)P_N(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

证明. 把 Legendre 方程写成自伴形式

$$-\big((1-t^2)P_N'(t)\big)'=N(N+1)P_N(t).$$

分别将 N 方程乘以 P_M, 将 M 方程乘以 P_N, 相减后积分. 分部积分的边界项含因子 $1-t^2$. 更具体地,

$$\big(N(N+1)-M(M+1)\big)\int_{-1}^{1}P_M(t)P_N(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\Big[-P_M\big((1-t^2)P_N'\big)'+P_N\big((1-t^2)P_M'\big)'\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$=\big[-P_M(1-t^2)P_N'+P_N(1-t^2)P_M'\big]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(1-t^2)\big(P_M'P_N'-P_N'P_M'\big)\,\mathrm{d}t.$$

最后一个积分的被积函数恒为零; 边界项由于 $1-t^2$ 在 $t=\pm1$ 处为零, 也等于零. 因此

$$\big(N(N+1)-M(M+1)\big)\int_{-1}^{1}P_M(t)P_N(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

当 M,N 是不同的非负整数时, $N(N+1)-M(M+1)=(N-M)(N+M+1)\neq0$. 所以积分必为零. □

习题 5.2

习题 5.2.1. 用幂级数方法求解 $t^2x''(t)+tx'(t)+(t^2-\frac{1}{9})x(t)=0$.

习题 5.2.2. 求方程 $x''(t)-tx'(t)-x(t)=0$ 在 $t=0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解，并写出系数的递推式。

习题 5.2.3. 求方程 $x''(t)+(\sin t)x(t)=0$ 在 $t=0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解。

习题 5.2.4. 用广义幂级数求解 $tx''(t)=-x(t)$.

问题 5.2

问题 5.2.1. 令 $G(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}$.

(1) 证明：它的幂级数展开是 $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, 其中 P_n 是 Legendre 多项式。

(2) 利用 $(1-2xt+t^2)\partial_t G=(x-t)G$ 证明对任意正整数 n 成立 $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$.

(3) 取 $x_0<1$ 充分接近 1，使得 P_n 在 $[x_0,1]$ 上不为零。利用 Liouville 公式，在 $(x_0,1)$ 上构造一个与 P_n 线性无关的解 Q_n，并证明：当 $x\nearrow 1$ 时 $|Q_n(x)|\to+\infty$.

问题 5.2.2. 用Bessel函数表示方程 $x''(t)+tx(t)=0$ 的通解。

问题 5.2.3. 对自然数 n，定义 $H_n(t):=(-1)^N e^{t^2}\dfrac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N}e^{-t^2}$.

(1) 证明 H_n 是首项系数为 2^n 的 n 次多项式，且满足 $H_n''-2tH_n'+2nH_n=0$.

(2) 证明对任意不相等的自然数 m,n 有 $\int_{\mathbb{R}}H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$.

(3) 证明：对任意自然数 n 有 $\int_{\mathbb{R}}H_n(t)^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=2^n(n!)\sqrt{\pi}$.

第六章　Sturm–Liouville理论

前面几章讨论得最多的是初值问题。给定某一时刻的位置与速度以后，微分方程的解通常由初值唯一确定；如果方程右端满足适当条件，解还会连续地依赖于初值。边值问题的情形不同：我们在区间的两个端点分别规定条件，一般不能预先断言这些条件一定能够同时满足。特别地，有一类边值问题还包含一个待定参数，只有当参数取某些特殊值时，边值问题才存在非零解。这就是微分方程的特征值问题。下面从经典力学中的 Euler 杆屈曲问题出发，说明特征值问题的来源及其与能量变分、解的振荡性质之间的联系。

今考虑一根长度为 ℓ 的均匀细杆，竖直放置，两端采用铰支（也称简支），在上端施加大小为 $P>0$ 的轴向压力。铰支点限制杆端的横向位移，但允许杆端自由转动；此外，受压端允许沿轴向产生位移。以 $t\in[0,\ell]$ 表示杆未变形时沿中心轴线的位置，设 $x=x(t)$ 表示杆弯曲后相对于原来竖直轴线的横向位移。于是两个铰支点要求 $x(0)=x(\ell)=0$。设杆的 Young 模量为 $E>0$，横截面的面积二次矩为 $I>0$，则抗弯刚度为常数 $B=EI>0$。

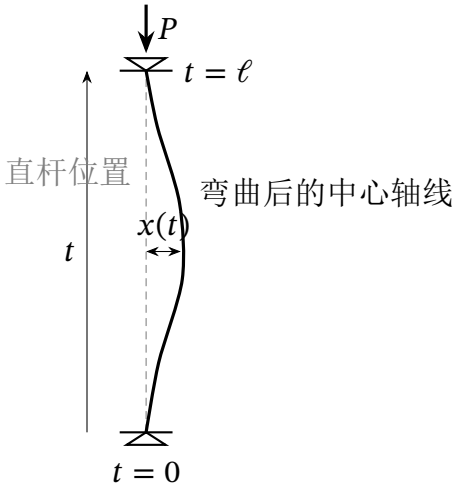


图 6.1: 两端铰支细杆在轴向压力下的屈曲模型. 虚线表示未弯曲的直杆, 实线表示横向位移为 $x(t)$ 的小挠度形状.

当杆发生弯曲时，其内部产生抵抗弯曲的力矩称为弯矩。在小挠度近似下，杆的曲率可以用 $x''(t)$ 近似表示，而弹性弯矩与曲率成正比。因此杆弯曲所储存的弹性势能为 $\frac{B}{2}\int_0^\ell x''(t)^2\,\mathrm{d}t$. 另一方面，在杆长近似不变的情况下，弯曲会使杆在竖直方向上的投影长度缩短。若以杆的弧长作为

参数并假设 $|x'(t)| \ll 1$，则这一缩短量满足

$$\Delta = \ell - \int_0^\ell \sqrt{1 - x'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t + O\!\left(\int_0^\ell x'(t)^4\,\mathrm{d}t\right).$$

这里用到了 $\sqrt{1-s^2} = 1 - \frac{1}{2}s^2 + O(s^4)$。由于轴向压力 P 在杆端缩短时作正功，因此外力势能相应减少 $P\Delta$。忽略四次及更高阶项，得到杆的线性化总势能

$$\mathcal{E}_P[x] = \frac{B}{2}\int_0^\ell x''(t)^2\,\mathrm{d}t - \frac{P}{2}\int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t, \qquad x(0) = x(\ell) = 0.$$

其中第一项是弯曲储存的弹性势能，第二项是轴向压力所作功的负值。二者反映了两种相反的作用：杆的弹性倾向于使其恢复笔直，而轴向压力则可能使杆通过弯曲降低总势能。

在静力学中，平衡形状对应于总势能的驻值点。注意，驻值点并不一定是极小值点。对满足 $\eta(0) = \eta(\ell) = 0$ 的任意变分 $x + \varepsilon\eta$，平衡形状必须满足

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{E}_P[x+\varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\ell (Bx''\eta'' - Px'\eta')\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\ell (Bx^{(4)} + Px'')\eta\,\mathrm{d}t + \left[Bx''\eta' - (Bx''' + Px')\eta\right]_0^\ell . \end{aligned}$$

首先取在 $(0,\ell)$ 内具有紧支集的 η，由变分法基本引理得到 $Bx^{(4)} + Px'' = 0$。其次因为 $\eta(0) = \eta(\ell) = 0$，所有含 η 的边界项都自动消失。但是铰支端允许杆端自由转动，所以 $\eta'(0)$、$\eta'(\ell)$ 可以独立地任意取值。因此剩余的边界项对所有允许的变分都等于零，当且仅当 $x''(0) = x''(\ell) = 0$，而这正是铰支端弯矩为零的条件。

事实上，在小挠度近似下，杆的弹性弯矩为 $M(t) = -Bx''(t)$，而理想铰支点只能提供支反力，不能传递使杆端转动的力偶，因此 $M(0) = M(\ell) = 0$。在变分法中，事先施加的位移条件 $x(0) = x(\ell) = 0$ 称为本质边界条件，而由能量驻值条件推出的弯矩条件称为**自然边界条件**。

今注意到四阶方程可以写成 $(Bx'' + Px)'' = 0$。因此存在常数 C_1, C_2 使得 $Bx''(t) + Px(t) = C_1 + C_2 t$。利用 $x(0) = x(\ell) = x''(0) = x''(\ell) = 0$，可得 $C_1 = C_2 = 0$。于是四阶驻值方程连同铰支边界条件等价于二阶边值问题

$$-Bx''(t) = Px(t)\ (0 < t < \ell), \qquad x(0) = x(\ell) = 0. \tag{6.0.1}$$

反过来，(6.0.1) 的任何解也满足前面的四阶方程及铰支边界条件。

显然 $x \equiv 0$ 对任何 P 都是解，对应杆保持笔直的状态。我们真正关心的是：当压力 P 取什么值时，边值问题 (6.0.1) 会出现非零解？

令 $\lambda = P/B$，则方程化为 $x'' + \lambda x = 0$。当 $\lambda \le 0$ 时，由方程的通解与两个边界条件容易验证只有零解。当 $\lambda > 0$ 时，通解为 $x(t) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,t)$。由 $x(0) = 0$ 得到 $C_1 = 0$。若

要求解非零，则 $C_2 \neq 0$，再由 $x(\ell) = 0$ 得到 $\sin(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0$。因此只有如下情况

$$P_n = B\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad x_n(t) = \sin\frac{n\pi t}{\ell}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

边值问题才存在非零解。其中最小的压力 $P_1 = B\pi^2/\ell^2$ 称为 Euler 临界压力。

那为什么称 P_1 为临界压力呢？这可以从前面的总势能得到解释。由于 $x(0) = x(\ell) = 0$，所以有 $\int_0^\ell x'(t)\,\mathrm{d}t = 0$。因此对 x' 使用 Wirtinger 不等式（史济怀数学分析教材问题17.4.2）得到 $\int_0^\ell x''(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant (\pi/\ell)^2 \int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t$，从而

$$\mathcal{E}_P[x] \geqslant \frac{1}{2}(P_1 - P)\int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

当 $P < P_1$ 时，对所有非零允许函数都有 $\mathcal{E}_P[x] > 0 = \mathcal{E}_P[0]$，因此直杆状态是线性化总势能的严格极小点。当 $P = P_1$ 时，取 $x(t) = A\sin(\pi t/\ell)$，其中 A 为任意实数，可直接算得

$$\mathcal{E}_P\left[A\sin\frac{\pi t}{\ell}\right] = \frac{A^2\pi^2}{4\ell}(P_1 - P).$$

所以在 $P = P_1$ 时，该方向上的二次势能恒为零，直杆状态不再是严格极小点；当 $P > P_1$ 时，只要 $A \neq 0$，上述能量就为负，说明直杆状态已经不再是能量极小点。因此 Euler 临界压力是直杆在线性化二次能量意义下首次失去稳定性的阈值。需要强调的是，当 $P > P_1$ 时，非零屈曲解仍可能是总势能的驻值点，但一般不是极小化子。上述结论也不能直接用于判断真实杆的大幅度非线性弯曲行为。

另一方面，将二阶方程 (6.0.1) 乘以非零解 x，在 $[0, \ell]$ 上积分，并利用边界条件分部积分，得到 $P\int_0^\ell x(t)^2\,\mathrm{d}t = B\int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t$。因此每个非零屈曲模态所对应的压力都满足

$$P = B\frac{\displaystyle\int_0^\ell x'(t)^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^\ell x(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

这启发我们考虑：如果不预先要求 x 满足微分方程，而是在所有满足 $x(0) = x(\ell) = 0$ 的非零函数中研究这个比值（称作 Rayleigh 商），它的最小值是否恰好等于第一特征值 P_1？对更一般的变系数方程，是否也可以通过类似的方法构造全体特征值？

此外，我们观察刚才得到的特征函数 $x_n(t) = \sin(n\pi t/\ell)$ 还可以发现一个重要现象：第 n 个特征函数在 $(0, \ell)$ 中恰有 $n-1$ 个零点，而且随着 P_n 增大，解的振荡越来越频繁，相邻零点的间距越来越小。这种现象是否只对能够显式求解的常系数方程成立？对于一般的变系数方程，即使不知道解的具体表达式，是否仍能根据方程的系数比较不同解的零点分布？这些问题引出了 Sturm 比较理论。

更一般地，我们将考虑正则 Sturm–Liouville 特征值问题

$$-(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = \lambda w(t)x(t),$$

其中 $p(t) > 0$、$w(t) > 0$，并配以适当的两端边界条件。此类方程通常无法用初等函数表示其解，但我们仍希望了解特征值是否存在、如何排列，以及特征函数的零点个数与特征值序号之间的关系。

本章首先在第6.1节中介绍 Sturm 分离定理和比较定理，通过方程系数研究解的振荡与零点分布；随后在第6.2节利用 Rayleigh 商及约束变分方法证明正则 Sturm–Liouville 问题的特征值存在性、严格排序和 Sturm 振荡定理。最后简要讨论特征函数展开及周期边值条件。

6.1 Sturm比较定理

Sturm 方法的特点, 是不必先求出方程的显式解, 而从方程系数本身判断解是否振荡以及零点如何分布. 我们从二阶齐次线性方程

$$x'' + a(t)x' + q(t)x = 0, \qquad t \in J, \tag{6.1.1}$$

开始, 其中 J 是一个区间,$a, q \in C(J)$.

6.1.1 零点的孤立性

引理 6.1.1 非零解的零点是孤立的

设 x 是方程 (6.1.1) 的非零解. 若 $t_0 \in J$ 且 $x(t_0) = 0$, 则 $x'(t_0) \neq 0$. 因此,t_0 是单重零点, 并且 x 的零点在 J 内没有聚点.

证明. 反证法：若 $x'(t_0) = 0$，则在此条件以及题设条件 $x(t_0) = 0$ 下我们证明 (6.1.1) 的唯一性。事实上，(6.1.1) 可以化成 2×2 一阶线性方程组：令 $x_1 = x$, $x_2 = x'$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

由于 $a, q \in C(J)$，所以方程组右端关于 t 连续且关于 (x_1, x_2) 局部 Lipschitz。因此可以应用 Picard 存在唯一性定理得到唯一性。这样的话就迫使给出 $x(t) \equiv 0$ 对全体 $t \in J$ 成立 , 这与 x 是非零解矛盾，因此 $x'(t_0) \neq 0$.

而由 x' 的连续性知：存在 $\delta > 0$, 使得 x' 在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap J$ 内与 $x'(t_0)$ 同号. 于是 x 在这个区间内严格单调, 除 t_0 外不再有其他零点. 这已经说明各个零点皆为孤立零点.

再设零点在 J 内有聚点 t_*. 按照聚点的定义, 存在互异的点 $t_m \in J$, 使 $x(t_m) = 0$, $t_m \to t_*$. 由连续性得到 $x(t_*) = 0$. 又因为 $t_m \neq t_*$, 所以

$$\frac{x(t_m) - x(t_*)}{t_m - t_*} = 0.$$

令 $m \to \infty$, 导数的定义给出 $x'(t_*) = 0$. 这与第一段的结论矛盾, 故零点在 J 内没有聚点. □

若 $t_1 < t_2$ 是同一非零解的两个零点, 并且该解在 (t_1, t_2) 内没有零点, 就称 t_1, t_2 为两个相邻零点. 由上面的引理可得, 若 $x(t)$ 在 (t_1, t_2) 中的取值为正, 则

$$x'(t_1) > 0, \qquad x'(t_2) < 0. \tag{6.1.2}$$

事实上, $x'(t_1)$ 与 $x'(t_2)$ 均不为零. 若 $x'(t_1) < 0$, 则在 t_1 右侧充分近处有 $x < 0$; 若 $x'(t_2) > 0$, 则在 t_2 左侧充分近处也有 $x < 0$. 两者都与区间内部 $x > 0$ 矛盾.

6.1.2 Sturm分离定理

设 x_1, x_2 是方程 (6.1.1) 的两个解. 它们的 Wronski 行列式 $W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$ 满足 $W'(t) = -a(t)W(t)$. 固定 $t_0 \in J$, 则对任意的 t, 我们之前已经证过

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{6.1.3}$$

这正是命题 5.1.2 在方程 (6.1.1) 上的应用; 它也可以由 Liouville 公式 (3.2.2) 应用于相应的一阶常微分方程组直接得到. 因此 W **要么恒为零, 要么在整个 J 上不为零且不改变符号。**

定理 6.1.2 Sturm分离定理

设 x_1, x_2 是方程 (6.1.1) 的两个非零解, 并且每个解都有零点. 则

(1) x_1, x_2 线性相关, 当且仅当它们存在至少一个公共零点; 在这种情形下, 它们具有同一零点集.

(2) 若 x_1, x_2 线性无关, 则它们的零点互相交错. 更确切地说, 在 x_1 的任意两个相邻零点之间, x_2 恰有一个零点; 交换 x_1, x_2 后仍有这个结论.

证明. (1) 若 x_1, x_2 线性相关, 则 Wronskian 恒为零, 对任意 t 都有 $W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) = 0$. 如果 t_* 是 x_1 的零点但不是 x_2 的零点，那么代入该式后就会与零点的孤立性矛盾 (因为此时有 $x_1(t_*) = 0$, $x_1'(t_*) \neq 0$, 这将迫使 $x_2(t_*) = 0$)，所以此时 x_1, x_2 具有同一零点集.

反过来, 设 t_0 是它们的某个公共零点, 则

$$W(t_0) = x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_1'(t_0)x_2(t_0) = 0.$$

由 (6.1.3) 得到 $W(t) = 0$ 对全体 $t \in J$ 成立, 这就已经证明了 x_1, x_2 线性相关 (Wronskian 恒为零). 进一步地, 我们还可以证明存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $x_2 = cx_1$ 恒成立. 事实上, 据引理 6.1.1 可得 $x_1'(t_0) \neq 0$. 令 $c = \frac{x_2'(t_0)}{x_1'(t_0)}$, 则函数 x_2 与 cx_1 在 t_0 处的函数值均为零, 导数均为 $x_2'(t_0)$. 初值问题的唯一性迫使 $x_2 = cx_1$.

(2) 下面设 x_1, x_2 线性无关. 此时 W 在 J 上恒不为零. 设 $t_1 < t_2$ 是 x_1 的两个相邻零点, 并不妨设 $x_1(t) > 0$ 在 $t \in (t_1, t_2)$ 中恒成立. 由 (6.1.2), 我们得到 $x_1'(t_1) > 0$, $x_1'(t_2) < 0$. 由于 x_1, x_2 没有公共零点, 故$x_2(t_1)$ 与 $x_2(t_2)$ 均不为零. 在两个端点处有,

$$W(t_1) = -x_1'(t_1)x_2(t_1), \qquad W(t_2) = -x_1'(t_2)x_2(t_2).$$

由 (6.1.3) 我们得到 $W(t_1)W(t_2) > 0$，代入上式后推出

$$x_1'(t_1)x_1'(t_2)x_2(t_1)x_2(t_2) > 0 \xRightarrow{x_1'(t_1)x_1'(t_2)<0} x_2(t_1)x_2(t_2) < 0.$$

由介值定理, x_2 在 (t_1, t_2) 内至少有一个零点. 现在在 (t_1, t_2) 内, x_1 不为零, 而且

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)' = \frac{x_1x_2' - x_1'x_2}{x_1^2} = \frac{W}{x_1^2}.$$

W 不改变符号, 故 x_2/x_1 严格单调. 严格单调函数至多取一次零值, 所以 x_2 在 (t_1, t_2) 内至多有一个零点. 结合上一段可知, 零点恰有一个. □

6.1.3 Sturm比较定理

本章前言已经提到，对变系数二阶线性方程，我们难以对其显式求解，那么我们希望将变系数方程的解与一些“可计算”的方程的解作比较，以研究变系数方程解的振荡性质和零点分布。今比较两个具有相同一阶导数项的方程

$$\begin{aligned} u'' + a(t)u' + Q(t)u = 0, \\ v'' + a(t)v' + R(t)v = 0, \end{aligned} \quad t \in J, \tag{6.1.4}$$

其中 $a, Q, R \in C(J)$.

我们先看两个常系数的例子：$u'' + u = 0$ 和 $v'' + 4v = 0$. 显然 $u(t) = \sin t$ 与 $v(t) = \sin 2t$ 分别是它们的解。前者相邻零点的间距为 π，后者为 $\pi/2$。据此我们可以“猜测”：方程中的零阶项 x 前面的正系数越大（一阶项、二阶项系数相等），解振荡得越快，零点也越密集。那么如果系数不是常数，这个现象是否仍然成立？例如考虑

$$u'' + u = 0, \qquad v'' + (1 + t^2)v = 0, \quad t \geq 0.$$

第一个方程有显式解 $u(t)=\sin t$，相邻零点为 $k\pi$ 与 $(k+1)\pi$。而第二个方程一般不能用初等函数写出解，但由于 $1+t^2\geq 1$，我们**是否仍然能够证明：第二个方程的任意非零解，在每一个区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 内至少有一个零点？**

接下来证明 Sturm 比较定理来回答如上问题。

定理 6.1.3 Sturm比较定理

设 u 为 (6.1.4) 第一个方程的非零解，$t_1<t_2$ 是 u 的两个相邻零点，且在 $[t_1,t_2]$ 上恒有 $R(t)\geqslant Q(t)$，则第二个方程的每一个非零解 v 在 $[t_1,t_2]$ 上至少有一个零点。若进一步假设 $R-Q$ 在 $[t_1,t_2]$ 上不恒为零，则 v 在 (t_1,t_2) 内至少有一个零点。

证明. 不妨设 $u(t)>0$ 在 (t_1,t_2) 恒成立。由零点的孤立性及 t_1,t_2 是相邻零点可知 $u'(t_1)>0$, $u'(t_2)<0$. 今假设 v 在开区间 (t_1,t_2) 内没有零点，且不妨设 $v(t)>0$ 对 $t\in(t_1,t_2)$ 成立，于是 $v(t_1)\geqslant 0$, $v(t_2)\geqslant 0$.

令 $H(t)=v(t)u'(t)-u(t)v'(t)$。利用方程组 (6.1.4)，直接计算得到

$$H'=v'u'+vu''-u'v'-uv''=v(-au'-Qu)-u(-av'-Rv)=-a(vu'-uv')+(R-Q)uv.$$

代入 H 的表达式得到一阶方程 $H'+aH=(R-Q)uv$. 据积分因子法，令 $\mu(t)=\exp\left(\int_{t_1}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)>0$，则 $\mu'=a\mu$，从而 $(\mu H)'=\mu(H'+aH)=\mu(R-Q)uv$. 两边积分得到

$$\mu(t_2)H(t_2)-\mu(t_1)H(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\mu(t)(R(t)-Q(t))u(t)v(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

另一方面，由 $u(t_1)=u(t_2)=0$，所以有

$$H(t_1)=v(t_1)u'(t_1)\geqslant 0,\qquad H(t_2)=v(t_2)u'(t_2)\leqslant 0.$$

由于 $\mu>0$，我们得到 $\mu(t_2)H(t_2)-\mu(t_1)H(t_1)\leqslant 0$，而刚才又证明它非负，所以就只能等于零，即

$$\mu(t_2)H(t_2)-\mu(t_1)H(t_1)=0,\qquad \int_{t_1}^{t_2}\mu(t)(R(t)-Q(t))u(t)v(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

首先，因为 $H(t_1)\geqslant 0$、$H(t_2)\leqslant 0$ 且 $\mu>0$，所以第一个等式可推出 $H(t_1)=H(t_2)=0$。再由 $u'(t_1)>0$、$u'(t_2)<0$ 就得到 $v(t_1)=v(t_2)=0$. 这说明，如果 v 在开区间 (t_1,t_2) 内没有零点，那么它必定在两个端点处为零，进而无论哪种情况，v 在 $[t_1,t_2]$ 上都至少有一个零点。

进一步地，由于第二个等式中的被积函数连续且非负，所以它在 $[t_1,t_2]$ 上恒为零。而 μ,u,v 在 (t_1,t_2) 内均严格为正，故 $R(t)-Q(t)=0$ 对任意 $t\in(t_1,t_2)$ 成立，所以 $R-Q$ 在闭区间 $[t_1,t_2]$ 上恒为零。因此，若 $R-Q$ 在 $[t_1,t_2]$ 上不恒为零，则 v 不可能在 (t_1,t_2) 内没有零点，即 v 在该开区间内至少有一个零点。 □

6.1.4 两个振荡判别法

若方程的一个非零解在区间 J 上至多有一个零点, 就称这个解在 J 上**非振荡**; 否则称它在 J 上**振荡**. 若一个解在 J 上有无穷多个零点, 就称它在 J 上**无限振荡**.

命题 6.1.4 非振荡判别

若方程 (6.1.1) 的系数满足 $q(t)\leqslant 0$ 对全体 $t\in J$ 成立, 则它的每个非零解在 J 上至多有一个零点.

证明. 考虑比较方程 $z''+a(t)z'=0$, 它有非零解 $z(t)=1$, 这个解在 J 上没有零点. 现在反设原方程 $x''+a(t)x'+q(t)x=0$ 有一个非零解 u, 并且 u 有两个不同的零点. 据引理 6.1.1 以及闭区间的紧性得知，这两个零点之间只有有限多个零点, 进而其中存在两个相邻零点 $t_1<t_2$. 把

$$Q(t)=q(t),\qquad R(t)=0$$

代入定理 6.1.3, 应当得到比较解 $z=1$ 在 $[t_1,t_2]$ 上至少有一个零点. 这与 $z=1$ 矛盾. 因此原方程的非零解不可能有两个不同的零点. □

另一方面，正的系数并不足以保证无限振荡. 例如, 在 $[1,+\infty)$ 上考虑 $x''+\frac{1}{4t^2}x=0$. 它的通解为$x(t)=\sqrt{t}\,(C_1+C_2\ln t)$. 若 $C_2=0$, 非零解没有零点; 若 $C_2\neq 0$, 方程 $C_1+C_2\ln t=0$ 至多有一个解. 因此这个方程虽有正系数, 所有非零解仍然非振荡.

命题 6.1.5 无限振荡判别

设 $Q\in C([a,+\infty))$, 并且存在常数 $m>0$, 使得对所有的 $t\geqslant a$ 都有 $Q(t)\geqslant m^2$ 成立, 则方程 $x''+Q(t)x=0$ 的每个非零解都在 $[a,+\infty)$ 上无限振荡; 而且任意两个相邻零点的间距不超过 π/m.

证明. 任取 $c\geqslant a$ 和 $\varepsilon\in(0,m)$. 比较方程 $z''+(m-\varepsilon)^2z=0$ 有解 $z(t)=\sin\big((m-\varepsilon)(t-c)\big)$. 它在 c, $c+\dfrac{\pi}{m-\varepsilon}$ 处有两个相邻零点.

由于 $Q(t)\geqslant m^2>(m-\varepsilon)^2$, 据定理 6.1.3 知, 原方程的每个非零解都在 $\left(c,c+\dfrac{\pi}{m-\varepsilon}\right)$ 内有零点. 今对非负整数 j, 依次取 $c_j=a+\dfrac{j\pi}{m-\varepsilon}$, 可见每一个互不相交的开区间 (c_j,c_{j+1}) 内都有一个零点, 因此零点有无穷多个.

若 $t_1<t_2$ 是原方程的两个相邻零点, 反设 $t_2-t_1>\pi/m$. 则可以取充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 $\dfrac{\pi}{m-\varepsilon}<t_2-t_1$. 把上面的论证用于 $c=t_1$, 便可以在 $\left(t_1,t_1+\dfrac{\pi}{m-\varepsilon}\right)\subset(t_1,t_2)$ 内得到原方程的一个零点, 这与 t_1,t_2 相邻矛盾. 因此 $t_2-t_1\leqslant\pi/m$. □

推论 6.1.6 零点间距的双侧估计

设 $q\in C(J)$ 且对任意 $t\in J$ 有 $0<m^2\leqslant q(t)\leqslant M^2$. 若 $t_1<t_2$ 是方程 $x''+q(t)x=0$ 的两个相

邻零点, 则

$$\frac{\pi}{M} \leqslant t_2 - t_1 \leqslant \frac{\pi}{m}.$$

证明. 右侧不等式已经包含在命题 6.1.5 的证明中. 下面证明左侧不等式, 任取 $\varepsilon > 0$, 比较方程 $z'' + (M+\varepsilon)^2 z = 0$ 的解为 $z(t) = \sin\big((M+\varepsilon)(t-t_1)\big)$. 因为 $(M+\varepsilon)^2 > q(t)$，所以我们把 $u = x$, $v = z$ 代入定理 6.1.3 就得到 z 在 (t_1, t_2) 内有零点. z 在 t_1 右侧的第一个零点是 $t_1 + \dfrac{\pi}{M+\varepsilon}$, 所以

$$t_2 - t_1 > \frac{\pi}{M+\varepsilon} \overset{\varepsilon\downarrow 0}{\Longrightarrow} t_2 - t_1 \geqslant \frac{\pi}{M}.$$

□

习题 6.1

习题 6.1.1. 证明：Bessel 函数 $J_n(x)$ 有无穷多个零点，且相邻两个零点的间距在 $x \to +\infty$ 时收敛到 π.

习题 6.1.2. 设方程$x''(t)+P(t)x(t)=0$ 满足 $P \in C(\mathbb{R})$, 且存在非负整数 n 使得 $n^2 < P(t) < (n+1)^2$. 证明：该方程的任何非零解都不可能是2π-周期解。

习题 6.1.3. 考虑微分方程 $t\left(x''(t) + 2(\ln t)x'(t) + (1+\ln^2 t)x(t)\right) = -x(t)(1+\sin t)$. 证明：该方程的解有无穷多个零点，且相邻两个零点的间距在 $t \to +\infty$ 时收敛到 π. （提示：令 $x(t) = u(t)e^{t-t\ln t}$，推导 u 的方程。）

习题 6.1.4. 设 $x = \varphi(t)$ 是方程 $(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0$ 在有界闭区间I上的非平凡解，已知存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 以及 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 使得 $0 < c_1 \leqslant p(t) \leqslant c_2, k_1 \leqslant q(t) \leqslant k_2$ 对全体 $t \in I$ 成立。

(1) 若 $k_2 \leqslant 0$，证明 $\varphi(t)$ 在I上至多一个零点。

(2) 若 $k_2 > 0$，且 $t_1 < t_2$ 为 $\varphi(t)$ 的相邻零点，证明 $t_2 - t_1 \geqslant \pi c_1\sqrt{1/(c_2k_2)}$。

6.2 正则Sturm–Liouville特征值问题

今在有限闭区间 $[a,b]$ 上考虑微分算子 $\mathcal{L} := -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot) + q(t)\cdot$ 的加权特征值问题

$$\mathcal{L}[x] := -\big(p(t)x'(t)\big)' + q(t)x(t) = \lambda w(t)x(t), \tag{6.2.1}$$

其中 p, q, w 是给定的实值函数, 满足

$$p \in C^1([a,b]), \qquad q, w \in C([a,b]), \qquad p(t) > 0, \qquad w(t) > 0. \tag{6.2.2}$$

w 称为**权函数**. 在两个端点施加分离边界条件

$$\alpha_1 x(a) + \alpha_2 p(a) x'(a) = 0, \qquad \beta_1 x(b) + \beta_2 p(b) x'(b) = 0, \tag{6.2.3}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是实常数, 且 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$. 区间有限且系数满足 (6.2.2) 的问题称为**正则** Sturm–Liouville 问题.

定义 6.2.1 特征值与特征函数

若对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$, 边值问题 (6.2.1)–(6.2.3) 有非零解 x, 则称 λ 为这个问题的特征值, 称 x 为属于 λ 的特征函数.

在系统性地介绍变系数问题之前，我们先算一个可显式计算的常系数例子，以及一个可化为常系数方程的变系数例子。

例 6.2.1 两端固定的均匀弦

讨论$-x'' = \lambda x$, $x(0) = x(\ell) = 0$, $(\ell > 0)$. 这个例子在偏微分方程的分离变量法中会反复用到.

解. 若 $\lambda = 0$, 则 $x = C_1 + C_2 t$. 两个边界条件依次给出 $C_1 = 0$ 与 $C_2 \ell = 0$, 所以只有零解.

若 $\lambda = -\mu^2 < 0$, $\mu > 0$, 则 $= C_1 \cosh \mu t + C_2 \sinh \mu t$. 由 $x(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$, 再由 $x(\ell) = 0$ 得 $C_2 \sinh(\mu \ell) = 0$, 因为 $\sinh(\mu \ell) > 0$, 所以 $C_2 = 0$, 仍只有零解.

若 $\lambda = \mu^2 > 0$, 则 $x = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t$. 由 $x(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$. 要使解非零, 必须有 $C_2 \neq 0$, 而右端边界条件表明 $\sin(\mu \ell) = 0$, 所以得到全体特征值和特征函数如下

$$\mu \ell = n\pi, \qquad n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad x_n(t) = \sin \frac{n\pi t}{\ell}.$$

其中特征函数 x_n 在 $(0, \ell)$ 内的零点为 $\frac{\ell}{n}, \frac{2\ell}{n}, \cdots, \frac{(n-1)\ell}{n}$, 恰有 $n-1$ 个, 与后面要讲的 Sturm 振荡定理结论一致. □

例 6.2.2 可化为常系数的变系数方程

求下列Sturm–Liouville问题的全体特征值及相应实特征函数:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+t^2)x'(t)\right) = \frac{\lambda}{1+t^2}x(t) \ \ (0 < t < 1), \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

解. 注意到方程中 $p(t) = 1 + t^2$，而权函数 $w(t) = 1/(1+t^2)$ 满足 $p(t)w(t) = 1$。因此考虑变量代换 $s = \arctan t$，并令 $x(t) = y(s)$. 由链式法则算得，

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}y'(s), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+t^2)x'(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y'(s) = \frac{1}{1+t^2}y''(s).$$

代入原方程并约去 $1/(1+t^2)$ 得到 $-y''(s) = \lambda y(s)$. 同时，由于 $t = 0, 1$ 分别对应 $s = 0, \pi/4$，边界

条件变为 $y(0)=y(\pi/4)=0$.因此原问题等价于

$$-y''(s)=\lambda y(s),\ (0<s<\pi/4),\qquad y(0)=y(\pi/4)=0.$$

直接按照上一例子方法求解可得全体特征值与相应的非零实特征函数为

$$\lambda_n=16n^2, x_n(t)=C_n\sin(4n\arctan t),\quad n\geqslant 1.$$

此外 x_n 的内部零点满足 $4n\arctan t=j\pi$，即 $t=\tan(j\pi/(4n))\,(j=1,\cdots,n-1)$ 恰有 $n-1$ 个，仍然与后面要讲的Sturm振荡定理一致。 □

对如上一般化的微分算子 $\mathcal{L}$，尽管我们无法显式计算特征值和特征函数，但仍然可以证明其特征值皆为实值，证明各个特征值对应的特征函数的正交性、单重性（这个只有一维区间成立，高维不对）、特征值的变分刻画，并研究特征函数的零点分布。

引理 6.2.1 Lagrange恒等式与Green公式

设 $u,v\in C^2([a,b];\mathbb{C})$. 则微分算子 $\mathcal{L}$ 是**形式自伴的**，即

$$\overline{u}\,\mathcal{L}[v]-\overline{\mathcal{L}[u]}v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(\overline{u'}v-\overline{u}v')\right],\tag{6.2.4}$$

进而

$$\int_a^b\left(\overline{u}\,\mathcal{L}[v]-\overline{\mathcal{L}[u]}v\right)\mathrm{d}t=\left[p(\overline{u'}v-\overline{u}v')\right]_a^b.\tag{6.2.5}$$

若 u,v 都满足 (6.2.3), 则右端为零.

证明. 由 p,q 为实函数,

$$\overline{u}\,\mathcal{L}[v]-\overline{\mathcal{L}[u]}v=-\overline{u}(pv')'+(p\overline{u'})'v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(\overline{u'}v-\overline{u}v')\right].$$

积分即得 Green 公式. 在左端, 若 $\alpha_2=0$, 则 $u(a)=v(a)=0$; 若 $\alpha_2\neq 0$, 则 $\overline{p(a)u'(a)}=-(\alpha_1/\alpha_2)u(a)$, v 也满足同一等式. 因为 α_1/α_2 为实数, 两种情形都有 $p(a)(\overline{u'(a)}v(a)-\overline{u(a)}v'(a))=0$. 右端用 β_1,β_2 作同样计算即可. □

6.2.1 实特征值, 正交性与单重性

记带权空间及其内积为

$$L^2_w(a,b):=\left\{u:\int_a^b|u(t)|^2w(t)\,\mathrm{d}t<\infty\right\},\qquad \langle u,v\rangle_w:=\int_a^b u(t)\overline{v(t)}w(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 6.2.2 实特征值, 正交性与单重性

正则 Sturm–Liouville 问题 (6.2.1)–(6.2.3) 满足:

(1) 全体特征值皆为实数;
(2) 属于不同特征值的特征函数关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ 是正交的;
(3) 每个特征值的特征函数空间都是一维的. (注: 这个结论只在一维区间的情况成立!)

证明. 设 x 属于特征值 λ. 在 Green 公式中取 $u = v = x$, 得到

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b w|x|^2 \,\mathrm{d}t.$$

因 $w > 0$ 且 $x \not\equiv 0$, 积分严格为正, 所以 $\lambda \in \mathbb{R}$.

若 x_1, x_2 分别属于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 再用 Green 公式得到

$$0 = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b w\overline{x_1}x_2 \,\mathrm{d}t,$$

所以二者正交.

最后固定特征值 λ. 任一非零特征函数的初始向量 $(x(a), p(a)x'(a))$ 均非零, 否则由初值唯一性得 $x \equiv 0$. 左端边界条件使所有这些向量位于 $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$ 所确定的一维复子空间内. 因此, 若 x_1, x_2 属于同一特征值, 存在 $c \in \mathbb{C}$ 使它们的初始向量满足 x_2 的初始向量等于 cx_1 的初始向量. 由初值唯一性可得 $x_2 = cx_1$. □

由于特征值为实数, 特征函数的实部、虚部都满足同一方程及边界条件, 且至少一个不恒为零, 故每个特征值均有实特征函数, 后面章节变分计算都只考虑实值函数. 另外还需注意的是: 分离边界条件对单重性不可省略. 例如 $-x'' = n^2 x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上满足周期边界条件的特征函数, 当 $n \geqslant 1$ 时由 $\cos nt, \sin nt$ 张成, 空间为二维.

下面再来看一个可以把变系数问题化成常系数问题的

6.2.2 Rayleigh商与第一特征值

上一小节我们证明了 Sturm–Liouville 问题的特征值皆为单重、实特征值，且不同特征值对应的特征函数具有正交性。然而，这些结论都是以特征值已经存在为前提的。本节则回答整个正则S–L理论最难的问题：**特征值是否一定存在？如果存在，能否找到其中最小的一个？**。需注意的是，在此之前的讨论都是基于特征值问题的解已经存在的假设下进行的，但是函数空间 $L^2_w(a,b)$ 是**无限维线性空间，因此线性算子未必存在特征值**。本节我们将采用**变分法 (calculus of variation)**回答这些问题。

变分法的出发点十分简单：将特征方程乘以相应的特征函数，再通过分部积分，可以把特征值表示成一个由函数及其一阶导数决定的积分比值，称为 **Rayleigh 商**。这提示我们不妨在满足

适当端点条件的函数中寻找 Rayleigh 商的最小值，并研究使得 Rayleigh 商达到最小值的函数 (一般称作**极小化子 (minimizer)**) 是否恰为原问题的特征函数。

要使这一想法成为严格的证明，需要解决两个问题。首先，Rayleigh 商虽然有下界，但它的最小值是否真的能够由某个函数取到？这需要用到积分估计与函数列的紧性（这是我们唯一会用到泛函分析中的“弱紧性”的地方）。其次，若某个函数的确能将 Rayleigh 商极小化，那为什么它一定满足原来的微分方程及边界条件？这里的关键是对极小化函数作微小扰动，并利用一元函数在极小点处导数为零这一熟悉的事实，反过来推导出微分方程。这就是变分法的基本思想。当然，这里的“微小扰动”可能需要满足某些约束条件（例如边界条件等），以使得扰动后的函数仍然满足方程本身的约束。

在证明第一特征值存在之后，我们还将研究第一特征函数的符号，并在下一小节通过逐次增加正交条件构造其余特征值（某种程度上这与线性代数里面的特征子空间/根子空间分解是同样的思想），为后面的 Sturm 振荡定理作准备。

在进入正式证明之前，我们先介绍二阶线性方程的三种边界条件:

- Dirichlet 边界条件：$x(a)$ 和 $x(b)$ 的取值给定，但 $x'(a)$ 和 $x'(b)$ 的取值不事先预设。
- Neumann 边界条件：$x'(a)$ 和 $x'(b)$ 的取值给定，但 $x(a)$ 和 $x(b)$ 的取值不事先预设。
- Robin 边界条件：给定 $x'(a)$ 与 $x(a)$ 的某个线性组合以及 $x'(b)$ 与 $x(b)$ 的某个线性组合的取值。

大部分情况下，我们都是讨论齐次边界条件，也就是这些给定的值皆为零的情况。现在我们先把非 Dirichlet 端点的条件改写为如下形式

$$p(a)x'(a) = h_a x(a), \qquad p(b)x'(b) = -h_b x(b), \tag{6.2.6}$$

其中左端在 $\alpha_2 \neq 0$ 时取 $h_a = -\alpha_1/\alpha_2$, 右端在 $\beta_2 \neq 0$ 时取 $h_b = \beta_1/\beta_2$. 若某端给定了齐次 Dirichlet 条件, 则一律省略该端的 h_a 或 h_b 项.

现在我们将特征方程乘以 x 并积分, 得到

$$\lambda \int_a^b w x^2 \,\mathrm{d}t = \int_a^b (px'^2 + qx^2)\,\mathrm{d}t - (pxx')\Big|_a^b = \int_a^b (px'^2 + qx^2)\,\mathrm{d}t + h_a x(a)^2 + h_b x(b)^2.$$

因此对非零实函数 u 定义 Rayleigh 商

$$\mathcal{R}[u] := \frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2}{\displaystyle\int_a^b wu^2 \,\mathrm{d}t}, \tag{6.2.7}$$

则特征函数满足 $\mathcal{R}[x]=\lambda$. 特别地, 两端均为 Dirichlet 条件时, 我们得到

$$\mathcal{R}[u]=\frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2+qu^2)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t}. \tag{6.2.8}$$

这里的容许函数属于 Sobolev 空间 $H^1(a,b)$: 即 u 在 $[a,b]$ 上绝对连续[1], 且 $\int_a^b(u^2+u'^2)\,\mathrm{d}t<\infty$, 即函数本身和一阶导数皆为平方可积的，进而 $u(t)=u(a)+\int_a^t u'(s)\,\mathrm{d}s$ 端点值可以逐点意义. 注意，这里引入 Sobolev 空间而不采用 $C^2([a,b])$ 的根本原因是一列 C^2 函数的一致极限未必是 C^2 的，而控制函数和一阶导数的平方积分就足够完成变分的过程；同学们在学了泛函分析之后将会知道：严格的变分方法就是在 Sobolev 空间中完成的。

我们再记 $H_0^1(a,b)=\{u\in H^1(a,b)\,:\,u(a)=u(b)=0\}$. 在 Rayleigh 商的极小化问题中，我们只要求容许函数满足原问题的 Dirichlet 边界条件，而不预先施加 Robin 条件。这是因为一般 $H^1(a,b)$ 函数的一阶导数未必具有端点值。事实上，我们将在后面证明极小化子满足 Sturm–Liouville 方程，而相应的 Robin 边界条件可以由一阶变分公式自然导出。

举例来说，对于我们考虑的正则 S–L 特征值问题 $-(p(t)x'(t))'+q(t)x(t)=\lambda w(t)x(t)$，如果左端是 Dirichlet 条件 $x(a)=0$，那么在极小化 Rayleigh 商时，容许函数 u 就必须满足 $u(a)=0$，因此对极小化函数作扰动 $u+\varepsilon\varphi$ 时，也必须要求 $\varphi(a)=0$，否则扰动后的函数就不满足原来的 Dirichlet 条件。

但如果右端是 Robin 条件 $p(b)x'(b)=-h_bx(b)$，情况就不同了。据 (6.2.7)，如果我们在左端给定 Dirichlet 边界条件，右端给定 Robin 边界条件，则

$$\mathcal{R}[u]=\frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2+qu^2)\,\mathrm{d}t+h_bu(b)^2}{\displaystyle\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t}.$$

我们在所有满足 $u(a)=0$ 的非零 H^1 函数中寻找极小值，并不要求这些函数满足 $p(b)u'(b)=-h_bu(b)$. 设 u 是极小化子（假设已经知道它存在），$\lambda=\mathcal{R}[u]$。对任意满足 $\varphi(a)=0$ 的函数 $\varphi\in H^1(a,b)$，我们考虑 $u+\varepsilon\varphi$ 并在 $\varepsilon=0$ 处求一阶变分，得到

$$\int_a^b (pu'\varphi'+qu\varphi)\,\mathrm{d}t+h_bu(b)\varphi(b)=\lambda\int_a^b wu\varphi\,\mathrm{d}t.$$

选取 $\varphi\in C_c^\infty(a,b)$，就能够得到方程 $-(pu')'+qu=\lambda wu$. 证明 u 具有足够的光滑性之后，再对

[1]没学过实分析时不需要细究这个定义，它可以视作“让微积分基本定理成立的最差条件”。

前面的变分恒等式分部积分，并利用方程可得到

$$\big[p(t)u'(t)\varphi(t)\big]_a^b + h_b u(b)\varphi(b) = 0.$$

因为 $\varphi(a) = 0$，所以 $\big(p(b)u'(b) + h_b u(b)\big)\varphi(b) = 0$. 注意我们并没有要求 $\varphi(b) = 0$，因此 $\varphi(b)$ 可以任意选取，从而必然有 $p(b)u'(b) = -h_b u(b)$.

接下来我们介绍本节最核心的结论：它在PDE书上一般被叫做**主特征值变分原理 (variational principle of principal eigenvalues)**.

定理 6.2.3　第一特征值与 Rayleigh–Ritz 原理

正则 Sturm–Liouville 问题存在最小特征值 λ_1, 且

$$\lambda_1 = \min\big\{\mathcal{R}[u] : 0 \neq u \in H^1(a,b),\ u \text{ 满足原问题的 Dirichlet 端点条件}\big\}. \tag{6.2.9}$$

两端都是 Dirichlet 条件时, 极小化子在 $H_0^1(a,b)$ 中的非零元里面选取.

定理中的极小化子存在性是通过对一致有界的极小化序列取极限得到。我们先证明极小化序列在 $H^1(a,b)$ 中的一致有界性。证完后则需要用到泛函分析中的弱紧性取极限。

命题 6.2.4　Rayleigh商的一致下界 (变分不等式)

存在常数 $C > 0$, 使对每个实函数 $u \in H^1(a,b)$ 都有

$$\int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2 \geqslant \frac{1}{2}\min_{[a,b]} p \int_a^b u'^2\,\mathrm{d}t - C\int_a^b u^2\,\mathrm{d}t. \tag{6.2.10}$$

因此 $\mathcal{R}$ 有一致的下界; 若 $\int_a^b w u_j^2\,\mathrm{d}t = 1$ 且 $\mathcal{R}[u_j]$ 有一致的上界, 则 $\{u_j\}$ 在 $H^1(a,b)$ 中有界.

证明. 首先估计端点值。对任意 $t \in [a,b]$，据微积分基本定理得到

$$u(a)^2 = u(t)^2 - 2\int_a^t u(s)u'(s)\,\mathrm{d}t.$$

对 $t \in [a,b]$ 积分并除以 $b-a$，再用均值不等式得到

$$\begin{aligned} u(a)^2 &\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b u^2\,\mathrm{d}t + \frac{2}{b-a}\int_a^b\int_a^t |u(s)u'(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b u^2\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b |uu'|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon\int_a^b u'^2\,\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\int_a^b u^2\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

同理可得

$$u(b)^2 \leqslant \varepsilon \int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}t.$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2 \\
&\quad \geqslant \left[\min_{[a,b]} p - \varepsilon(|h_a| + |h_b|)\right] \int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}t - \left[\max_{[a,b]} |q| + (|h_a| + |h_b|)\left(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

现在我们取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\varepsilon(|h_a| + |h_b|) \leqslant \dfrac{1}{2} \min\limits_{[a,b]} p$，便得到

$$\int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2 \geqslant \frac{1}{2} \min_{[a,b]} p \int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}t - C \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}t.$$

这里若某端为 Dirichlet 条件，则省略该端的边界项。下面证明命题的其余结论。由于 $w > 0$，对任意非零容许函数 u，

$$\mathcal{R}[u] \geqslant \frac{\dfrac{1}{2} \min\limits_{[a,b]} p \displaystyle\int_a^b u'^2 \,\mathrm{d}t - C \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b w u^2 \,\mathrm{d}t} \geqslant -\frac{C \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}t}{\int_a^b w u^2 \,\mathrm{d}t} \geqslant -\frac{C}{\min_{[a,b]} w}.$$

故 Rayleigh 商有一致下界。

最后设 $\int_a^b w u_j^2 \,\mathrm{d}t = 1$，且 $\mathcal{R}[u_j] \leqslant M$。由 $w > 0$，我们有 $\int_a^b u_j^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\min_{[a,b]} w}$. 再利用上面的估计就得到一致上界

$$\frac{1}{2} \min_{[a,b]} p \int_a^b u_j'^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \mathcal{R}[u_j] + C \int_a^b u_j^2 \,\mathrm{d}t \leqslant M + \frac{C}{\min_{[a,b]} w}.$$

因此 $\int_a^b (u_j^2 + u_j'^2)\,\mathrm{d}t$ 有对 j 一致的上界，即 $\{u_j\}$ 在 $H^1(a,b)$ 中一致有界。 □

取极限所需的引理具体列在如下引理中，同学们可以先跳过证明。

引理 6.2.5 *一维 Sobolev 紧嵌入

若存在常数 $C > 0$ 使得函数列 $\{u_j\}$ 满足 $\sup\limits_j \int_a^b (u_j^2 + u_j'^2)\,\mathrm{d}t \leqslant C$，则存在子列（仍记作 $\{u_j\}$）以及极限函数 $u \in H^1(a,b)$, 使 u_j 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 u, 且 u_j' 在 $L^2(a,b)$ 弱收敛到 u'. 这里的弱收敛是指: 对任意容许函数 $\varphi \in L^2(a,b)$ 都有 $\int_a^b u_j' \varphi \,\mathrm{d}t \to \int_a^b u' \varphi \,\mathrm{d}x$. 此外还有 H_0^1 范数

的弱下半连续性，即

$$\int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}t \leqslant \liminf_{j\to\infty}\int_a^b pu_j'^2\,\mathrm{d}t. \tag{6.2.11}$$

证明. 由 Cauchy–Schwarz 不等式可得等度连续性

$$|u_j(t)-u_j(s)| \leqslant |t-s|^{1/2}\left(\int_a^b u_j'^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

对每个 j, 可取 $s_j\in[a,b]$ 使 $|u_j(s_j)|^2\leqslant (b-a)^{-1}\int_a^b u_j^2\,\mathrm{d}t$，所以据微积分基本定理得

$$|u_j(t)| \leqslant \sqrt{\frac{C}{b-a}}+\sqrt{C(b-a)}$$

故这列函数一致有界。据 Arzelà–Ascoli 引理知，存在子列一致收敛到连续函数 u.

现在我们用 L^2 有界序列的弱紧性, 再取子列使 $u_j'\rightharpoonup v$ 于 $L^2(a,b)$. 这里弱收敛指对每个 $g\in L^2(a,b)$, 都有 $\int_a^b u_j' g\,\mathrm{d}t\to\int_a^b vg\,\mathrm{d}t$. 在 $u_j(t)-u_j(a)=\int_a^t u_j'(s)\,\mathrm{d}s$ 中令 $j\to\infty$, 右端用 $g=\mathbf{1}_{[a,t]}$, 得到 $u(t)-u(a)=\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s$. 因此 u 绝对连续且 $u'=v$ 几乎处处成立, 从而 $u\in H^1(a,b)$.

最后, 弱收敛以 $pu'\in L^2(a,b)$ 为容许函数, 给出 $\int_a^b pu_j'u'\,\mathrm{d}t\to\int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}t$. 由

$$0\leqslant\int_a^b p(u_j'-u')^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b pu_j'^2\,\mathrm{d}t-2\int_a^b pu_j'u'\,\mathrm{d}t+\int_a^b pu'^2\,\mathrm{d}t$$

取下极限便得到 (6.2.11). □

注记 6.2.1. 我们也可以不用弱紧性得到H_0^1 范数的弱下半连续性，但是那个方法需要用到实分析里面“绝对连续”的定义，并且该证明很难推广到高维情况，因此没有采用。

现在我们证明特征值问题的存在性定理。

定理 6.2.3 的证明. 令

$$\lambda_1=\inf\{\mathcal{R}[u]:0\neq u\in H^1(a,b),\ u\text{ 满足原问题的 Dirichlet 端点条件}\}.$$

由命题 6.2.4 知 $\mathcal{R}$ 有一致下界，所以 λ_1 是有限实数。

今取极小化序列 $\{u_j\}$，据 $\mathcal{R}[cu_j]=\mathcal{R}[u_j]$，我们不妨设

$$\int_a^b wu_j^2\,\mathrm{d}t=1,\qquad \mathcal{R}[u_j]\longrightarrow\lambda_1.$$

由命题 6.2.4 知 $\{u_j\}$ 在 $H^1(a,b)$ 中一致有界。再由引理 6.2.5 知存在子列（仍记为 $\{u_j\}$）和极限函数 $u \in H^1(a,b)$，使 u_j 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 u，并且

$$\int_a^b pu'^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_a^b pu_j'^2 \,\mathrm{d}t.$$

据一致收敛知 u 可以继承 Dirichlet 边界条件，且 $\int_a^b wu^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{j\to\infty} \int_a^b wu_j^2 \,\mathrm{d}t = 1$. 此外，还有

$$\int_a^b qu_j^2 \,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b qu^2 \,\mathrm{d}t, \quad u_j(a) \to u(a), \quad u_j(b) \to u(b).$$

结合导数能量的下半连续性，我们得到

$$\mathcal{R}[u] \leqslant \liminf_{j\to\infty} \mathcal{R}[u_j] = \lambda_1.$$

而 u 本身也是非零容许函数，故 $\mathcal{R}[u] \geqslant \lambda_1$，因此 $\mathcal{R}[u] = \lambda_1$，即 u 是 Rayleigh 商的极小化子。

第二步：计算一阶变分。 任取满足原问题 Dirichlet 边界条件的实值函数 $\varphi \in H^1(a,b)$。当 ε 充分小时，$u + \varepsilon\varphi$ 仍是非零容许函数。由于 $\mathcal{R}[u] = \lambda_1$ 是最小值，所以有

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{R}[u+\varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

将 Rayleigh 商(6.2.7)代入，并利用 $\int_a^b wu^2 \,\mathrm{d}t = 1$，得到

$$\int_a^b (pu'\varphi' + qu\varphi) \,\mathrm{d}t + h_a u(a)\varphi(a) + h_b u(b)\varphi(b) = \lambda_1 \int_a^b wu\varphi \,\mathrm{d}t. \tag{6.2.12}$$

其中 Dirichlet 边界条件对应的边界项皆为零。

第三步：证明极小化子满足特征值问题。 在 (6.2.12) 中任取 $\varphi \in H_0^1(a,b)$，据 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，我们得到

$$\int_a^b pu'\varphi' \,\mathrm{d}t + \int_a^b (q - \lambda_1 w)u\varphi \,\mathrm{d}t = 0.$$

令

$$G(s) = \int_a^s \big(q(t) - \lambda_1 w(t)\big)u(t) \,\mathrm{d}t.$$

由于 u, q, w 连续，故 $G \in C^1([a,b])$，且 $G' = (q - \lambda_1 w)u$。对上式中的第二项分部积分，得到

$$\int_a^b (pu' - G)\varphi' \,\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(a,b).$$

取常数$C = \frac{1}{b-a}\int_a^b (pu' - G)\,\mathrm{d}t$, 并选取容许函数为$\varphi(s) = \int_a^s (p(t)u'(t) - G(t) - C)\,\mathrm{d}t$. 由于$pu' - G - C \in L^2(a,b)$，且由 C 的定义知 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，所以 $\varphi \in H_0^1(a,b)$。将其代入上式得到

$$0 = \int_a^b (pu' - G)(pu' - G - C)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (pu' - G - C)^2\,\mathrm{d}t,$$

其中第二个等号使用了$\int_a^b (pu' - G - C)\,\mathrm{d}t = 0$。因此 $pu' = G + C$ 几乎处处成立。再由微积分基本定理得

$$u(s) = u(a) + \int_a^s \frac{G(t) + C}{p(t)}\,\mathrm{d}t.$$

由于 $G \in C^1([a,b])$，$p \in C^1([a,b])$ 且 $p > 0$，可知 $u \in C^2([a,b])$，并满足 $(pu')' = G' = (q - \lambda_1 w)u$，即正则S-L特征值问题 $-(pu')' + qu = \lambda_1 wu$.

第四步：还原边界条件。 现在已经知道 $u \in C^2([a,b])$，所以可对 (6.2.12) 中的第一项分部积分。结合刚证明的特征方程，我们得到

$$\big(h_a u(a) - p(a)u'(a)\big)\varphi(a) + \big(h_b u(b) + p(b)u'(b)\big)\varphi(b) = 0.$$

若左端不是 Dirichlet 条件，则可以取$\varphi(a) = 1$、$\varphi(b) = 0$ 的线性容许函数，进而得到 $p(a)u'(a) = h_a u(a)$. 若右端不是 Dirichlet 条件，同理取 $\varphi(a) = 0$、$\varphi(b) = 1$，得到 $p(b)u'(b) = -h_b u(b)$. 原问题的 Dirichlet 端点条件已在第一步得到。因此 u 满足全部边界条件。又因为 $\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t = 1$，故 $u \not\equiv 0$，所以 u 是属于特征值 λ_1 的非零特征函数。

最后，对原问题的任意其他特征值 λ，由定理 6.2.2 知可取相应的非零实特征函数 x。它满足原问题的 Dirichlet 端点条件，且 $\lambda = \mathcal{R}[x]$，于是 $\lambda = \mathcal{R}[x] \geqslant \lambda_1$，所以 λ_1 确实是原问题的最小特征值，并满足(6.2.12). □

命题 6.2.6 第一特征函数的符号

属于 λ_1 的任一非零实特征函数在 (a,b) 内保持严格正号或严格负号, 并且在非 Dirichlet 端点也不为零.

证明. 设 u 是上一定理中的归一化极小化子，即 $\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t = 1$. 绝对连续函数 $|u|$ 仍属于 H^1, 且 $|(|u|)'| = |u'|$ 几乎处处成立. 因而 $\mathcal{R}[|u|] = \mathcal{R}[u] = \lambda_1$, $|u|$ 也是极小化子. 上一定理第二至第四步对每个极小化子都适用, 故 $|u| \in C^2([a,b])$, 满足同一方程及边界条件.

若 $|u|(t_0) = 0$ 对某个 $t_0 \in (a,b)$ 成立，则由非负性给出 $(|u|)'(t_0) = 0$. 由初值唯一性有 $|u| \equiv 0$, 与归一化 $\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t = 1$ 矛盾. 故 $|u| > 0$ 于 (a,b). 若它在非 Dirichlet 端点为零, Robin 条件就会迫使导数为零, 仍与初值唯一性矛盾. 最后由特征值的单重性知，任一实值的第一特征函数都是 $|u|$ 的非零实常数倍. □

例 6.2.3 具有混合边界条件的均匀弦

设 $\ell > 0$，$\alpha \in \mathbb{R}$。考虑

$$\begin{cases} -x''(t) = \lambda x(t), & 0 < t < \ell, \\ x(0) = 0, \qquad x'(\ell) + \alpha x(\ell) = 0. \end{cases}$$

设 $\lambda_1(\alpha)$ 为其第一特征值，则 $\lambda_1(\alpha)$ 关于 α 严格递增，且满足

$$\begin{cases} \lambda_1(\alpha) > 0, & \alpha > -1/\ell, \\ \lambda_1(\alpha) = 0, & \alpha = -1/\ell, \\ \lambda_1(\alpha) < 0, & \alpha < -1/\ell. \end{cases}$$

证明. 先证明证明严格单调性。由 Rayleigh–Ritz 变分原理知

$$\lambda_1(\alpha) = \min_{\substack{0 \neq u \in H^1(0,\ell) \\ u(0)=0}} \frac{\displaystyle\int_0^\ell u'^2 \,\mathrm{d}t + \alpha u(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell u^2 \,\mathrm{d}t}.$$

任取 $\alpha_1 < \alpha_2$，设 x_2 是参数为 α_2 时属于第一特征值 $\lambda_1(\alpha_2)$ 的非零实特征函数。由于 x_2 满足Robin边界条件，所以必有 $x_2(\ell) \neq 0$，否则会得到 $x_2 \equiv 0$. 将 x_2 代入参数为 α_1 时的Rayleigh商可得

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha_1) &\leqslant \frac{\displaystyle\int_0^\ell x_2'^2 \,\mathrm{d}t + \alpha_1 x_2(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell x_2^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{\displaystyle\int_0^\ell x_2'^2 \,\mathrm{d}t + \alpha_2 x_2(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell x_2^2 \,\mathrm{d}t} - (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{x_2(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell x_2^2 \,\mathrm{d}t} \\ &= \lambda_1(\alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_1)\frac{x_2(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell x_2^2 \,\mathrm{d}t} < \lambda_1(\alpha_2). \end{aligned}$$

因此$\lambda_1(\alpha)$ 关于 α 严格递增。

接下来确定第一特征值的符号。根据上面的结论，只需证明当 $\alpha = -1/\ell$ 时有 $\lambda_1(\alpha) = 0$。此时Rayleigh商为

$$\mathcal{R}[u] = \frac{\displaystyle\int_0^\ell u'^2 \,\mathrm{d}t - \frac{1}{\ell}u(\ell)^2}{\displaystyle\int_0^\ell u^2 \,\mathrm{d}t}, \qquad u(0) = 0.$$

而 $u(\ell)=\int_0^\ell u'(t)\,\mathrm{d}t$，故由Cauchy–Schwarz不等式得

$$u(\ell)^2=\left(\int_0^\ell u'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant \ell\int_0^\ell u'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

从而 $\mathcal{R}[u]\geqslant 0$，故 $\lambda_1(-1/\ell)\geqslant 0$.

另一方面，取 $u(t)=t$，则 $u(0)=0$ 且

$$\mathcal{R}[t]=\frac{\ell-\dfrac{1}{\ell}\ell^2}{\displaystyle\int_0^\ell t^2\,\mathrm{d}t}=0.$$

由Rayleigh–Ritz变分原理，$\lambda_1(-1/\ell)\leqslant 0$。结合前面的下界，得到 $\lambda_1(-1/\ell)=0$. 最后，利用特征值关于α严格单调性立即得到结论。 □

6.2.3 逐次正交约束与全体特征值

上一小节通过 Rayleigh 商的极小化构造了第一特征值。那么能否利用同一种方法寻找第二、第三个乃至全部特征值？回忆上一小节已经证明，不同特征值对应的特征函数相互正交。因此为了排除已经找到的特征函数，我们可以在极小化问题中逐次增加与之前特征值对应的特征子空间正交的条件约束。下面证明，这种方法的确能构造出严格递增且趋于无穷的全体特征值。

定理 6.2.7 全体特征值的变分构造

正则 Sturm–Liouville 问题的全体特征值可以排列为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, 且 $\lambda_n\to+\infty$. 相应的实特征函数可取为

$$\int_a^b wx_ix_j\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\tag{6.2.13}$$

对每个 $n\geqslant 2$, 有

$$\lambda_n=\min\left\{\mathcal{R}[u]:\ \begin{array}{l}0\neq u\in H^1(a,b),\ u\text{ 满足原问题的 Dirichlet 端点条件},\\ \displaystyle\int_a^b wux_j\,\mathrm{d}t=0,\quad j=1,\cdots,n-1\end{array}\right\}.\tag{6.2.14}$$

证明. 第一步：约束极小值存在. 已构造 λ_1 及归一化实特征函数 x_1. 假设已构造前 $n-1$ 个特征值与正交归一特征函数. 在 (a,b) 内取 n 个线性无关的光滑紧支集函数, 它们的线性组合满足 (6.2.14) 中的正交条件, 等价于 $n-1$ 个关于 n 个系数的齐次线性方程, 所以有非零解. 故容许函数集合非空.

定义 λ_n 为该集合上 $\mathcal{R}$ 的下确界. 取归一化极小化序列, 由命题 6.2.4 和引理 6.2.5 选取一致收敛且导数弱收敛的子列. 一致收敛保留归一化、全部正交条件和 Dirichlet 端点条件, 导数积分的下半连续性保证极限达到下确界. 将极限记为 x_n, 则 $\int w x_n^2 \,\mathrm{d}t = 1$ 且 $\mathcal{R}[x_n] = \lambda_n$.

第二步: 约束极小化子是特征函数. 任取满足原问题 Dirichlet 端点条件的 $\varphi \in H^1(a,b)$, 令

$$\eta = \varphi - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_a^b w\varphi x_j \,\mathrm{d}t \right) x_j.$$

则 $\int w\eta x_j \,\mathrm{d}t = 0$ 对 $j < n$ 成立, 所以 $x_n + \varepsilon\eta$ 满足全部正交条件. 对 Rayleigh 商求导, 得到

$$\int_a^b (px_n'\eta' + qx_n\eta) \,\mathrm{d}t + h_a x_n(a)\eta(a) + h_b x_n(b)\eta(b) = \lambda_n \int_a^b w x_n \eta \,\mathrm{d}t. \tag{6.2.15}$$

对每个 $j < n$, 将已知特征函数 x_j 的方程乘以 $x_n \in H^1$, 分部积分并使用边界条件, 得到

$$\int_a^b (px_j'x_n' + qx_jx_n) \,\mathrm{d}t + h_a x_j(a)x_n(a) + h_b x_j(b)x_n(b) = \lambda_j \int_a^b w x_j x_n \,\mathrm{d}t = 0.$$

把 η 的表达式代入 (6.2.15), 左端的每个被减项都由上式为零, 右端的每个被减项都由正交性为零. 因而

$$\int_a^b (px_n'\varphi' + qx_n\varphi) \,\mathrm{d}t + h_a x_n(a)\varphi(a) + h_b x_n(b)\varphi(b) = \lambda_n \int_a^b w x_n \varphi \,\mathrm{d}t. \tag{6.2.16}$$

这与 (6.2.12) 同形. 定理 6.2.3 第三、第四步只使用这个等式, 所以原样适用: 取 $G(t) = \int_a^t (q - \lambda_n w)x_n \,\mathrm{d}s$, 用端点为零的容许函数得到 $px_n' = G + C$ 几乎处处成立, 继而 $x_n \in C^2$ 且 $\tau[x_n] = \lambda_n w x_n$; 再允许非 Dirichlet 端点的容许函数值任意, 得到全部 Robin 条件. 故 x_n 是非零经典特征函数.

第三步: 特征值严格递增. 第 n 次极小化比第 $n-1$ 次多一个正交条件, 故 $\lambda_n \geqslant \lambda_{n-1}$. 若等号成立, 则 x_n, x_{n-1} 是同一特征值的两个非零正交特征函数, 与定理 6.2.2 的单重性矛盾. 因而 $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, 归纳构造完成.

第四步: 特征值趋于无穷. 若严格递增的 λ_n 有上界, 由归一化及 (6.2.10), x_n 在 H^1 中有界, 故有一致收敛子列. 该子列也在 L^2_w 中收敛, 但当 $i \neq j$ 时,

$$\int_a^b w(x_i - x_j)^2 \,\mathrm{d}t = \int_a^b w x_i^2 \,\mathrm{d}t + \int_a^b w x_j^2 \,\mathrm{d}t - 2\int_a^b w x_i x_j \,\mathrm{d}t = 2,$$

不可能存在收敛子列. 所以 $\lambda_n \to +\infty$.

第五步: 没有遗漏其他特征值. 若 λ 不在构造出的序列中, 取其非零实特征函数 x, 并取 n 使 $\lambda_n > \lambda$. 由不同特征值的正交性, $\int_a^b w x x_j \,\mathrm{d}t = 0$ 对 $j < n$ 成立, 故 x 可用于第 n 次极小化. 于是 $\lambda_n \leqslant \mathcal{R}[x] = \lambda$, 矛盾. □

6.2.4 Sturm振荡定理

前面已经证明正则 Sturm–Liouville 问题存在无穷多个严格递增的实特征值。另一方面，第6.1节的 Sturm 比较理论揭示了微分方程的零点与振荡行为之间的联系。现在我们进一步研究：特征值的排列顺序是否能够决定对应特征函数的零点个数？本节我们证明第 n 个特征值的特征函数在区间内部恰有 $n-1$ 个零点。

引理 6.2.8 零点区间上的第一特征值

设 x 是正则Sturm–Liouville问题关于特征值 λ 的非零实值特征函数，其在 (a,b) 内的全部零点为 $t_1 < \cdots < t_k$。若非零实函数 $v \in H^1(a,b)$ 满足原问题的Dirichlet端点条件，且 $v(t_j) = 0,\ j = 1,\cdots,k$. 则有 $\mathcal{R}[v] \geqslant \lambda$ 成立。这里 Rayleigh 商中的 Robin 端点项仍按式 (6.2.7) 定义。特别地，以上结论不强制要求 v 满足原问题的Robin端点条件。

注记 6.2.2. 这个引理说明高阶特征函数虽然在整个区间上不是第一特征函数，但把区间沿着它的零点切开以后，它在每一段上恰恰就是第一特征函数。这说明零点把一个高阶振荡模态分解成了若干个局部的最低模态。于是可以利用各子区间的第一特征值变分原理，去反过来限制整个区间上高阶特征函数的零点个数。这就建立了零点数量与特征值序号之间的联系。

证明. 首先 x 在 (a,b) 内只有有限个零点，否则存在互异零点序列 $t_j \to t_* \in [a,b]$，由 $x \in C^2([a,b])$ 可知 $x(t_*) = x'(t_*) = 0$，从而由初值唯一性得到 $x \equiv 0$，矛盾。

现在记 $t_0 = a,\ t_{k+1} = b$，则 x 在任一开区间 (t_{j-1}, t_j) 内不变号，并满足原端点的边界条件以及内部切断点的Dirichlet条件。设该子区间对应的第一特征值为 μ，相应的实特征函数为 φ。由命题6.2.6知，我们取支撑在 (t_{j-1}, t_j) 的容许函数 $\varphi > 0$，并将 x, φ 的特征方程分别乘以 φ, x，相减并积分，得到

$$(\lambda - \mu)\int_{t_{j-1}}^{t_j} wx\varphi \,\mathrm{d}t = (p(x\varphi' - x'\varphi))\Big|_{t_{j-1}}^{t_j} = 0.$$

这里最后一个等号成立是用到二者满足相同的边界条件。因为x 在该区间内部严格不变号，而 $\varphi > 0$，所以积分不为零，从而 $\lambda = \mu$. 因此 λ 是每个子区间上的第一特征值。由 Rayleigh–Ritz 变分原理知，对 v 在每个子区间上的限制，均有相应的Rayleigh商下界 λ。将这些不等式相加就得到

$$\int_a^b (pv'^2 + qv^2)\,\mathrm{d}t + h_a v(a)^2 + h_b v(b)^2 \geqslant \lambda \int_a^b wv^2 \,\mathrm{d}t.$$

其中Dirichlet端点对应的 h_a 或 h_b 项照例省略。由于 $v \not\equiv 0$ 且 $w > 0$，两端除以 $\int_a^b wv^2\,\mathrm{d}t$ 即得 $\mathcal{R}[v] \geqslant \lambda$. □

定理 6.2.9 Sturm振荡定理

将全体特征值依次排列为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, 则属于 λ_n 的任一非零实特征函数在 (a,b) 内**恰有** $n-1$ 个零点, 且全体零点皆为单重零点.

证明. 取属于 λ_n 的非零实特征函数 x_n。据上一引理的证明，x_n 在 (a,b) 内只有有限个零点，记为 $t_1 < \cdots < t_k$，并令 $t_0 = a$, $t_{k+1} = b$，下面证明 $k = n-1$.

第一步: 证明 $k \leqslant n-1$. 将 x_n 按照上述零点分割，定义

$$u_j(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, k+1.$$

由于内部切断点均为零点，故 $u_j \in H^1(a,b)$ 且满足原问题的Dirichlet端点条件。由特征方程乘以 x_n 后在每个子区间上积分，并利用边界条件，得到 $\mathcal{R}[u_j] = \lambda_n$。

由于 $u_1, \cdots, u_{k+1}$ 的非零部分互不相交，所以对任意不全为零的实数 $c_1, \cdots, c_{k+1}$ 都有 $\mathcal{R}\left[\sum_{j=1}^{k+1} c_j u_j\right] = \lambda_n$. 如果反设 $k \geqslant n$，则存在不全为零的 $c_1, \cdots, c_{k+1}$，使 $v = \sum_{j=1}^{k+1} c_j u_j$ 满足

$$\int_a^b w v x_i \,\mathrm{d}t = 0, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

而这是关于 $k+1 > n$ 个未知数的 n 个齐次线性方程。由定理6.2.7的变分公式知

$$\lambda_{n+1} \leqslant \mathcal{R}[v] = \lambda_n,$$

与特征值严格递增矛盾。因此 $k \leqslant n-1$

第二步: 证明 $k \geqslant n-1$. 当 $n = 1$ 时已经证明了 $k = 0$. 接下来考虑 $n \geqslant 2$ 并反设 $k < n-1$. 由于 k 个齐次线性方程

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i(t_j) = 0, \qquad j = 1, \cdots, k,$$

有 $n-1 > k$ 个未知数，故存在不全为零的 $c_1, \cdots, c_{n-1}$，使得函数 $v = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$ 满足 $v(t_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$. 据引理 6.2.8 知 $\mathcal{R}[v] \geqslant \lambda_n$. 另一方面由特征函数的正交归一性以及特征方程知

$$\mathcal{R}[v] = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} c_i^2} \leqslant \lambda_{n-1} < \lambda_n,$$

矛盾,因此 $k \geqslant n-1$。

综上我们证明了$k = n-1$。最后，若 x_n 在某个零点 t_j 处还满足 $x_n'(t_j) = 0$，则由初值唯一性

得到 $x_n \equiv 0$，矛盾。因此全体零点皆为单重零点。 □

例 6.2.4 全体特征值估计

考虑 $-x'' + q(t)x = \lambda x$, $x(0) = x(\ell) = 0$, 其中 $q_{\min} \leqslant q(t) \leqslant q_{\max}$. 记其全体特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$，则对任意 $n \geqslant 1$ 都有

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 + q_{\min} \leqslant \lambda_n \leqslant \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 + q_{\max}.$$

证明. 取 λ_n 的非零实特征函数 x_n。据Sturm振荡定理有 x_n 在 $(0,\ell)$ 内恰有 $n-1$ 个零点，记这些零点连同两个端点为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \ell$. 设 $\ell_j = t_j - t_{j-1} > 0$，则 $\ell_1 + \cdots + \ell_n = \ell$.

由引理 6.2.8 可得 λ_n 是每个子区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 上Dirichlet特征值问题的第一特征值。下面在每个子区间上应用 Rayleigh–Ritz 变分原理。首先，对任意 $u \in H_0^1(t_{j-1}, t_j)$，由均匀弦的第一特征值公式可知

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} u'^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} u^2 \,\mathrm{d}t \xRightarrow{q(t)\geqslant q_{\min}} \mathcal{R}[u] = \frac{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} (u'^2 + qu^2)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} u^2 \,\mathrm{d}t} \geqslant \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + q_{\min}.$$

由于 λ_n 是该子区间上的第一特征值，所以对所有允许的非零 u 取最小值就得到 $\lambda_n \geqslant \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + q_{\min}$.

另一方面取 $u(t) = \sin\frac{\pi(t-t_{j-1})}{\ell_j}$，则 $u(t_{j-1}) = u(t_j) = 0$ 且有 $\int_{t_{j-1}}^{t_j} u'^2 \,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} u^2 \,\mathrm{d}t$. 因此

$$\lambda_n \leqslant \mathcal{R}[u] = \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + \frac{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} q(t)u(t)^2 \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(t)^2 \,\mathrm{d}t} \leqslant \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + q_{\max}.$$

综上，对每个 $j = 1, \cdots, n$ 都成立

$$\left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + q_{\min} \leqslant \lambda_n \leqslant \left(\frac{\pi}{\ell_j}\right)^2 + q_{\max}.$$

现在只需要注意一个简单事实：由于 $\ell_1 + \cdots + \ell_n = \ell$，则必有 $\min_{1\leqslant j\leqslant n} \ell_j \leqslant \frac{\ell}{n} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \ell_j$. 对下界，选取长度最短的子区间，其长度不超过 ℓ/n；对上界，选取长度最长的子区间，其长度不小于 ℓ/n，代入即得结论。 □

6.2.5 *极小极大公式与特征函数展开

本小节继续用实特征函数 x_n, 并取 $\int_a^b w x_n^2 \,\mathrm{d}t = 1$. 以下各式在 Dirichlet 端点处均略去相应的端点项; 所有容许函数只须满足原问题的 Dirichlet 端点条件.

定理 6.2.10 极小极大公式

正则 Sturm–Liouville 问题的第 n 个特征值满足

$$\lambda_n = \min_{\substack{S\subset H^1(a,b),\ \dim S=n \\ S\text{ 中的函数满足原 Dirichlet 端点条件}}} \ \max_{0\neq u\in S} \mathcal{R}[u]. \tag{6.2.17}$$

这里 S 遍历满足所列条件的实线性子空间.

证明. 任取这样的 n 维空间 S, 选定一组基. 条件 $\int_a^b w u x_j \,\mathrm{d}t = 0$, $1 \leqslant j < n$, 是关于 u 的 n 个基底系数的 $n-1$ 个齐次线性方程, 因而有非零解 $u \in S$; $n = 1$ 时无正交条件, 直接取任一非零 $u \in S$. 由第一特征值公式 (6.2.9) 及逐次正交约束公式 (6.2.14), $\mathcal{R}[u] \geqslant \lambda_n$. 因此每个这样的 S 都满足 $\max_{0\neq u\in S} \mathcal{R}[u] \geqslant \lambda_n$. 这里最大值确实存在: 只须在有限维空间 S 中的紧集 $\int_a^b w u^2 \,\mathrm{d}t = 1$ 上取连续函数的最大值.

反过来, 取 $S = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$. 将 x_j 的方程乘以 x_i, 分部积分并使用边界条件, 得到

$$\int_a^b (p x_i' x_j' + q x_i x_j)\,\mathrm{d}t + h_a x_i(a) x_j(a) + h_b x_i(b) x_j(b) = \lambda_j \int_a^b w x_i x_j \,\mathrm{d}t.$$

由正交归一性, 对任意不全为零的实数 $c_1, \cdots, c_n$, 有

$$\mathcal{R}\left[\sum_{j=1}^n c_j x_j\right] = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2}{\displaystyle\sum_{j=1}^n c_j^2} \leqslant \lambda_n.$$

取 $u = x_n$ 时等号成立. 因而这个空间上的最大值恰为 λ_n, 结合前面的下界便得到 (6.2.17). □

命题 6.2.11 势函数的单调性

保持 p, w 与边界条件不变. 若 $q_1(t) \leqslant q_2(t)$ 对所有 $t \in [a,b]$ 成立, 则 $\lambda_n(q_1) \leqslant \lambda_n(q_2)$ 对每个 $n \geqslant 1$ 成立.

证明. 对每个允许的非零函数 u, 有

$$\frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2+q_2u^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2}{\displaystyle\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t} - \frac{\displaystyle\int_a^b (pu'^2+q_1u^2)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2}{\displaystyle\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{\displaystyle\int_a^b (q_2-q_1)u^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b wu^2\,\mathrm{d}t} \geqslant 0.$$

在同一个 n 维空间内分别取最大值, 不等式仍成立. 再对全部允许的 n 维空间取最小值, 由 (6.2.17) 得到 $\lambda_n(q_2) \geqslant \lambda_n(q_1)$. □

定理 6.2.12 特征函数系的完备性

归一化的实特征函数 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 $L_w^2(a,b)$ 中的完备正交系. 即对任意 $f \in L_w^2(a,b)$, 令 $c_n = \int_a^b f(t)x_n(t)w(t)\,\mathrm{d}t$, 则

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left|f - \sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right|^2 w\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_a^b |f|^2 w\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2.$$

特别地, 若 f 与每个 x_n 都正交, 则 $f = 0$ 几乎处处成立.

证明. 先设 f 为满足原 Dirichlet 端点条件的实函数, 且 $f \in H^1(a,b)$. 由命题 6.2.4, 可选常数 $C > 0$, 使 $\lambda_1 + C > 0$, 并且对每个允许的实函数 $u \in H^1(a,b)$ 都有

$$\int_a^b \big(pu'^2 + (q+Cw)u^2\big)\,\mathrm{d}t + h_a u(a)^2 + h_b u(b)^2 \geqslant 0.$$

于是所有 $\lambda_j + C$ 都为正.

令 $u_N = f - \sum_{j=1}^{N} c_j x_j$. 正交归一性给出 $\int_a^b w u_N x_j\,\mathrm{d}t = 0$ 对 $1 \leqslant j \leqslant N$ 成立. 若 $u_N \not\equiv 0$, 由 (6.2.14), 有 $\mathcal{R}[u_N] \geqslant \lambda_{N+1}$. 因而

$$(\lambda_{N+1}+C)\int_a^b wu_N^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \big(pu_N'^2 + (q+Cw)u_N^2\big)\,\mathrm{d}t + h_a u_N(a)^2 + h_b u_N(b)^2.$$

若 $u_N \equiv 0$, 这个不等式也成立.

将 x_j 的方程乘以 f 并分部积分, 得到

$$\int_a^b \left(px_j'f' + (q+Cw)x_jf\right)\mathrm{d}t + h_a x_j(a)f(a) + h_b x_j(b)f(b) = (\lambda_j + C)c_j.$$

对 x_i, x_j 也作相同计算, 再展开 u_N 的各个平方项, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left(pu_N'^2 + (q+Cw)u_N^2\right)\mathrm{d}t + h_a u_N(a)^2 + h_b u_N(b)^2 \\
&\quad = \int_a^b \left(pf'^2 + (q+Cw)f^2\right)\mathrm{d}t + h_a f(a)^2 + h_b f(b)^2 - \sum_{j=1}^N (\lambda_j + C)c_j^2 \\
&\quad \leqslant \int_a^b \left(pf'^2 + (q+Cw)f^2\right)\mathrm{d}t + h_a f(a)^2 + h_b f(b)^2.
\end{aligned}$$

最后一个上界与 N 无关, 而定理 6.2.7 已证明 $\lambda_{N+1} \to +\infty$. 所以 $\int_a^b wu_N^2\,\mathrm{d}t \to 0$. 这就证明了上述 H^1 函数的展开收敛.

现在设 f 为任意实函数, 且 $f \in L_w^2(a,b)$. 使用 $C_c^1(a,b)$ 在 $L^2(a,b)$ 中稠密这一基本事实. 因为 w 在闭区间上有正的下界和有限的上界, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以选择 $g \in C_c^1(a,b)$, 使 $\|f-g\|_{L_w^2} < \varepsilon$. 记 $d_j = \int_a^b wgx_j\,\mathrm{d}t$. 对任意 $h \in L_w^2(a,b)$, 由正交归一性直接展开平方可得

$$\int_a^b w\left|h - \sum_{j=1}^N \left(\int_a^b whx_j\,\mathrm{d}t\right)x_j\right|^2 \mathrm{d}t = \int_a^b w|h|^2\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^N \left|\int_a^b whx_j\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_a^b w|h|^2\,\mathrm{d}t.$$

将此式用于 $h = f - g$, 再用三角不等式, 得到

$$\left\|f - \sum_{j=1}^N c_j x_j\right\|_{L_w^2} \leqslant \|f-g\|_{L_w^2} + \left\|g - \sum_{j=1}^N d_j x_j\right\|_{L_w^2}.$$

由于 $g \in C_c^1(a,b)$ 满足全部 Dirichlet 端点条件, 已证明的结论说明右边第二项趋于零. 故左边的上极限不超过 ε. 令 $\varepsilon \to 0$, 得到任意实 f 的展开收敛. 对复值 f, 分别用于其实部与虚部即可.

最后, 在上面的平方展开恒等式中取 $h = f$, 并令 $N \to \infty$, 就得到 Parseval 等式. 若所有 c_j 均为零, 则该等式给出 $\int_a^b w|f|^2\,\mathrm{d}t = 0$, 所以 $f = 0$ 几乎处处成立. □

习题 6.2

习题 6.2.1. *求解下列两个边值问题:*

(1) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0;$
(2) $y'' + (\lambda+1)y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$

习题 6.2.2. 证明 $t^2x'' - \lambda tx' + \lambda x = 0, \quad x(1) = x(2) = 0$ 对任何实参数 λ 都没有非零解。这是否与定理 6.2.9 矛盾？

习题 6.2.3. 考虑 $[0,1]$ 上的特征值问题 $x''(t) + (\lambda + t)x(t) = 0, x(0) = x(1) = 0$. 证明：该问题的特征值$\lambda$一定是非负实数。

习题 6.2.4. 设 $f(t,x,y)$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 连续可微，已知 $\varphi(t)$ 是方程 $x''(t) = f(t,x,x')\,(t\in[0,1])$ 的解，且满足 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$.

(1) 设 $\varphi'(0) = \alpha_0$. 证明：若 $|\alpha-\alpha_0|$ 充分小，令 $\theta = \theta(t,\alpha)$ 是如上方程以 $\theta(0,\alpha) = a, \theta'(0,\alpha) = \alpha$ 为初值的解。证明：$\theta(t,\alpha)$ 在整个区间 $t\in[0,1]$ 存在。

(2) 令 $u(t) = \partial_\alpha\theta(t,\alpha_0)$，求 u 满足的微分方程以及初值 $u(0), u'(0)$.

(3) 若对全体 $t\in[0,1], (x,y)\in\mathbb{R}^2$ 都有 $\partial_x f > 0$, 证明 u' 非负。

(4) 证明：若 $|\beta - b|$ 充分小，则存在 $x'' = f(t,x,x')$ 的解 ψ 满足 $\psi(0) = a, \psi(1) = \beta$.

6.3 *周期边值问题

前一节的正则 Sturm–Liouville 问题把两个端点上的条件分别施加在 $t = a$ 与 $t = b$; 这类条件是分离的, 并且每个特征值的特征函数空间是一维的. 周期边界条件则把两个端点直接联系起来:

$$x(a) = x(b), \qquad x'(a) = x'(b).$$

它不是分离边界条件, 结论也会出现实质差别. 例如, 方程 $-x'' = n^2x\ (t\in[0,2\pi])$ 在周期边界条件下有两个线性无关的特征函数 $\cos nt$ 与 $\sin nt$. 此外, 对非齐次周期问题, 解的存在性取决于一个周期后的端点处的状态能否回到初始状态. 在源项与齐次部分精确共振时, 周期解的存在还必须满足额外的相容性条件. 因此, 前一节关于分离边界条件的单重性和 Prüfer 角结论不能直接用于研究周期边值问题.

本节讨论如下形式的方程

$$x''(t) + \omega_0^2 x = p(t) + \lambda f(t,x,x'), \tag{6.3.1}$$

其中 $\omega_0 > 0$ 是常数, p 是连续的 2π 周期函数, f 关于 t 是 2π 周期的, 并且关于 (t,x,v) 连续, 关于 (x,v) 连续可微. 参数 λ 很小时, 方程可以看成受迫线性振子的一个小扰动. 我们寻找 2π 周期解.

6.3.1 周期解与周期边值条件

若 x 是 2π 周期解, 则它必定满足

$$x(0) = x(2\pi), \qquad x'(0) = x'(2\pi). \tag{6.3.2}$$

反过来, 若 x 在 $[0,2\pi]$ 上解方程 (6.3.1) 并满足 (6.3.2), 则可以把它作 2π 周期延拓. 下面把这个常用事实完整写出.

引理 6.3.1 周期边值条件的等价性

设方程 (6.3.1) 的右端关于 t 是 2π 周期的, 并且该方程初值问题的解唯一. 一个定义在 $[0,2\pi]$ 上的解能够延拓为 2π 周期解, 当且仅当它满足 (6.3.2).

证明. 周期解满足 (6.3.2) 是周期性定义的直接结果.

反过来, 设 x 满足周期边值条件. 对每个整数 k 和 $t\in[2k\pi,2(k+1)\pi]$, 定义 $\widetilde{x}(t)=x(t-2k\pi)$, 由 $x(0)=x(2\pi)$得知, 相邻两个区间上给出的函数值在连接点相同; 由 $x'(0)=x'(2\pi)$, 一阶导数也在连接点相同. 因此 $\widetilde{x}\in C^1(\mathbb{R})$.

在每个开区间 $(2k\pi,2(k+1)\pi)$ 上, 令 $s=t-2k\pi$. 利用 p,f 关于 t 的周期性,

$$\ddot{\widetilde{x}}(t)+\omega_0^2\widetilde{x}(t)=x''(s)+\omega_0^2x(s)=p(s)+\lambda f(s,x(s),x'(s))=p(t)+\lambda f(t,\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t)).$$

右端是连续函数. 由方程可把 $\ddot{\widetilde{x}}$ 定义为这个连续右端减去 $\omega_0^2\widetilde{x}$, 并且相邻区间的二阶导数在连接点具有相同极限. 因此 $\widetilde{x}\in C^2(\mathbb{R})$, 并在所有点满足原方程. 定义还给出 $\widetilde{x}(t+2\pi)=\widetilde{x}(t)$. 故 $\widetilde{x}$ 是所需的周期延拓. □

6.3.2 非共振情形的小参数周期解

记 $x(t;x_0,v_0,\lambda)$ 满足初值 $x(0)=x_0$, $x'(0)=v_0$ 的解. 在下面用到的初值与参数邻域内, 第二章的连续依赖性定理保证这些解都存在于整个 $[0,2\pi]$ 上, 并且解关于 (x_0,v_0,λ) 连续可微.

现在定义周期端点映射

$$\begin{aligned}F(x_0,v_0,\lambda)&=x(2\pi;x_0,v_0,\lambda)-x_0,\\ G(x_0,v_0,\lambda)&=x'(2\pi;x_0,v_0,\lambda)-v_0.\end{aligned}\tag{6.3.3}$$

由引理 6.3.1, 周期初值恰好是方程组 $F(x_0,v_0,\lambda)=0, G(x_0,v_0,\lambda)=0$ 的解. 先令 $\lambda=0$, 据常数变易法得到

$$x(t;x_0,v_0,0)=x_0\cos\omega_0t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0t+\frac{1}{\omega_0}\int_0^t p(s)\sin\big(\omega_0(t-s)\big)\,\mathrm{d}s.\tag{6.3.4}$$

对 t 求导, 得到

$$x'(t;x_0,v_0,0)=-\omega_0x_0\sin\omega_0t+v_0\cos\omega_0t+\int_0^t p(s)\cos\big(\omega_0(t-s)\big)\,\mathrm{d}s.\tag{6.3.5}$$

把 $t=2\pi$ 代入周期边值条件, 得到关于 x_0,v_0 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_0)-1 & \omega_0^{-1}\sin(2\pi\omega_0) \\ -\omega_0\sin(2\pi\omega_0) & \cos(2\pi\omega_0)-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(s)\sin\big(\omega_0(2\pi-s)\big)\,\mathrm{d}s \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi} p(s)\cos\big(\omega_0(2\pi-s)\big)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}. \tag{6.3.6}$$

系数行列式为

$$\Delta_0 = \big(\cos(2\pi\omega_0)-1\big)^2 + \sin^2(2\pi\omega_0) = 2-2\cos(2\pi\omega_0) = 4\sin^2(\pi\omega_0). \tag{6.3.7}$$

所以

$$\Delta_0 \neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \omega_0 \notin \mathbb{N}^*.$$

在非共振条件 $\omega_0\notin\mathbb{N}^*$ 下, 线性方程组 (6.3.6) 有唯一解, 记为 $(\overline{x}_0,\overline{v}_0)$. 由 (6.3.4) 得到 $\lambda=0$ 时唯一的 2π 周期解.

定理 6.3.2　非共振周期解的局部延拓

对方程 (6.3.1), 保持本节开头关于 p,f 的正则性与周期性假设, 并设 $\omega_0\notin\mathbb{N}^*$. 则存在 $\lambda_*>0$,$(\overline{x}_0,\overline{v}_0)$ 的一个邻域 U, 以及在 $\{|\lambda|<\lambda_*\}$ 上连续可微的函数 $x_0=x_0(\lambda)$ 和 $v_0=v_0(\lambda)$, 使得 $x_0(0)=\overline{x}_0, v_0(0)=\overline{v}_0$, 而且从初值 $(x_0(\lambda),v_0(\lambda))$ 出发的解是 2π-周期解. 在 U 内, 这组周期初值是唯一的.

证明. 在点 $(\overline{x}_0,\overline{v}_0,0)$, 未扰动周期解满足 $F(\overline{x}_0,\overline{v}_0,0)=0$, $G(\overline{x}_0,\overline{v}_0,0)=0$. 由 (6.3.4)–(6.3.5), 在 $\lambda=0$ 时有

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_0,v_0)} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega_0)-1 & \omega_0^{-1}\sin(2\pi\omega_0) \\ -\omega_0\sin(2\pi\omega_0) & \cos(2\pi\omega_0)-1 \end{pmatrix}.$$

它的行列式为 $\Delta_0\neq 0$. 因此可在 $(\overline{x}_0,\overline{v}_0,0)$ 处对方程组 $F=G=0$ 使用二维隐函数定理, 得到 $\lambda_*>0$ 以及唯一的连续可微函数

$$x_0=x_0(\lambda),\qquad v_0=v_0(\lambda).$$

由周期端点映射的定义, 相应解满足周期边值条件; 由引理 6.3.1, 它延拓为 2π 周期解. 隐函数定理的局部唯一性说明, 在邻域 U 内没有第二组周期初值. □

定理中的“唯一”是局部唯一: 它只排除初值邻近 $(\overline{x}_0,\overline{v}_0)$ 的其他周期解. 若没有整体的先验估计, 隐函数定理不能排除相距很远的另一支周期解.

若 p 与 f 关于 t 都是 T 周期函数, 则同一端点映射论证可以用于任意周期 $T>0$. 把 (6.3.4)

与 (6.3.5) 中的终点 2π 改为 T, 端点矩阵的行列式为

$$\Delta_T = \big(\cos(\omega_0 T) - 1\big)^2 + \sin^2(\omega_0 T) = 4\sin^2\frac{\omega_0 T}{2}. \tag{6.3.8}$$

因此非共振条件是 $\omega_0 T \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

例 6.3.1

考虑 $x'' + 2x = 3\sin 2\pi t + \lambda x^3$ 的1-周期解.

解. 令 $T = 1, \omega_0 = \sqrt{2}$. 由 $\sqrt{2} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ 得知行列式 (6.3.8) 非零.$\lambda = 0$ 时, 设 $x_*(t) = A\sin 2\pi t$, 代入方程得到 $(2 - 4\pi^2)A\sin 2\pi t = 3\sin 2\pi t$, 故

$$A = \frac{3}{2 - 4\pi^2}.$$

定理 6.3.2 中, 令 $T = 1$ 得到：当 $|\lambda|$ 充分小时, 存在一个与 $x_*(t) = \frac{3}{2-4\pi^2}\sin 2\pi t$ 邻近的 1-周期解, 并且在这个解的邻域内它是唯一的. □

例 6.3.2

考虑$x'' + 2x = \lambda\sin 2\pi t + 5x^3$的1-周期解.

解. 这个方程并不直接具有 (6.3.1) 中“整个非线性项都乘以 λ”的形式, 但周期端点映射方法仍然适用. $\lambda = 0$ 时, $x_*(t) = 0$ 是 1 周期解. 令 F, G 是周期 $T = 1$ 的端点映射. 在 $(x_0, v_0, \lambda) = (0, 0, 0)$ 处, 解恒为零. 分别对初值 x_0, v_0 求导, 变分方程为 $z'' + 2z = 15x(t)^2 z$, 在零解的积分曲线上它是 $z'' + 2z = 0$. 分别取初值 $(z(0), z'(0)) = (1, 0)$ 与 $(0, 1)$, 得到端点变分矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2} & 2^{-1/2}\sin\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2} & \cos\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

所以周期端点映射对 (x_0, v_0) 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2} - 1 & 2^{-1/2}\sin\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sin\sqrt{2} & \cos\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix},$$

其行列式为

$$(\cos\sqrt{2} - 1)^2 + \sin^2\sqrt{2} = 4\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

据隐函数定理, 当 $|\lambda|$ 充分小时, 存在一个邻近零解的 1-周期解, 并且它在该邻域内唯一. □

6.3.3 整数频率与精确共振

现在设 $\omega_0 = n \in \mathbb{N}^*$. 齐次方程 $x'' + n^2 x = 0$ 有两个线性无关的 2π 周期解 $\cos nt$ 与 $\sin nt$. 因此周期函数空间上的线性算子 $\mathcal{L}_n x = x'' + n^2 x$ 满足 $\ker \mathcal{L}_n = \operatorname{span}\{\cos nt, \sin nt\}$. 这就是端点行列式 $\Delta_0 = 0$ 的含义: 周期端点映射的线性化不再可逆.

命题 6.3.3 共振线性方程的可解条件

设 p 是连续的 2π 周期函数. 周期边值问题

$$x'' + n^2 x = p(t), \qquad x(0) = x(2\pi), \qquad x'(0) = x'(2\pi)$$

有解, 当且仅当

$$\int_0^{2\pi} p(t)\cos nt \,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_0^{2\pi} p(t)\sin nt \,\mathrm{d}t = 0. \tag{6.3.9}$$

若条件成立, 全部周期解为一个特解加上 $A\cos nt + B\sin nt$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

证明. 先证必要性. 设 x 是周期解. 把方程乘以 $\cos nt$ 并积分, 得到

$$\int_0^{2\pi} p(t)\cos nt \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (x'' + n^2 x)\cos nt \,\mathrm{d}t.$$

对第一项分部积分两次:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x''\cos nt \,\mathrm{d}t &= [x'\cos nt]_0^{2\pi} + n\int_0^{2\pi} x'\sin nt \,\mathrm{d}t \\ &= [x'\cos nt]_0^{2\pi} + n\,[x\sin nt]_0^{2\pi} - n^2\int_0^{2\pi} x\cos nt \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 n 是整数, 再利用 x, x' 的周期边值条件, 两个边界项均为零. 因此

$$\int_0^{2\pi} x''\cos nt \,\mathrm{d}t = -n^2\int_0^{2\pi} x\cos nt \,\mathrm{d}t,$$

从而第一个正交条件成立.

把方程乘以 $\sin nt$. 对含 x'' 的积分作两次分部积分, 逐步得到

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x''\sin nt \,\mathrm{d}t &= [x'\sin nt]_0^{2\pi} - n\int_0^{2\pi} x'\cos nt \,\mathrm{d}t \\ &= [x'\sin nt]_0^{2\pi} - n\,[x\cos nt]_0^{2\pi} - n^2\int_0^{2\pi} x\sin nt \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

第一项的边界值为零, 第二项因 $x(2\pi)=x(0)$ 而为零. 因此第二个正交条件也成立.

再证充分性. 定义

$$x_p(t)=\frac{1}{n}\int_0^t \sin\big(n(t-s)\big)p(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.3.10}$$

对积分求导, 得到

$$x_p'(t)=\int_0^t \cos\big(n(t-s)\big)p(s)\,\mathrm{d}s,\quad x_p''(t)=p(t)-n\int_0^t \sin\big(n(t-s)\big)p(s)\,\mathrm{d}s=p(t)-n^2x_p(t).$$

所以 x_p 是方程的一个特解, 并且 $x_p(0)=x_p'(0)=0$. 在 $t=2\pi$ 处,

$$\begin{aligned}x_p(2\pi)&=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(2\pi n-ns)p(s)\,\mathrm{d}s=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}p(s)\sin ns\,\mathrm{d}s=0,\\ x_p'(2\pi)&=\int_0^{2\pi}\cos(2\pi n-ns)p(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}p(s)\cos ns\,\mathrm{d}s=0.\end{aligned}$$

这里最后一个等号分别使用了 (6.3.9). 所以 x_p 满足周期边值条件, 并由引理 6.3.1 延拓为周期解.

而任意两个特解之差属于 $\ker\mathcal{L}_n$, 故全部解正是 $x_p+A\cos nt+B\sin nt$. □

例如, 方程 $x''+x=\cos t$ 不满足第一个正交条件, 所以没有 2π 周期解, 用待定系数法得到特解 $x_p(t)=\frac{1}{2}t\sin t$, 其中因子 t 产生随时间线性增长的久期项, 这是外力频率与固有频率相同所造成的精确共振.

在非线性问题中, 线性化算子有核并不等于周期解一定不存在, 而是说明必须另外求解核方向上的相容条件. 写成

$$x(t)=A\cos nt+B\sin nt+w(t),$$

其中 w 与 $\cos nt,\sin nt$ 正交, 在正交补上先求 w, 再把方程投影到核上, 便得到关于 A,B 的有限维方程. 这个过程称为 Lyapunov–Schmidt 约化. 振幅方程可能无解, 也可能产生若干小振幅分支; 结论由非线性的具体形式决定.

6.3.4 拟周期边值问题一瞥

上一小节已经说明，当固有频率满足 $\omega_0=n\in\mathbb{N}^*$ 时，周期函数空间上的算子 $\mathcal{L}_n=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+n^2$ 具有非平凡的核。此时非齐次方程未必有周期解；即使有解，解也不唯一。这是**精确共振**造成的直接后果。这一现象与正规形、小除数以及 KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser) 方法都有联系，但它们处理的并不是同一个层次的问题。要看清其中的区别，最方便的办法是从周期线性方程的Fourier展开出发。

单周期问题中的精确共振与接近共振. 设 g 是光滑的 2π 周期函数，考虑周期边值问题

$$z'' + \omega_0^2 z = g(t).$$

将 g 与待求解 z 展开为Fourier级数：

$$g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{\mathrm{i}kt}, \qquad z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z_k e^{\mathrm{i}kt}.$$

比较每一个Fourier mode，得到

$$\left(\omega_0^2 - k^2\right) z_k = g_k, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{6.3.11}$$

因此，周期问题能否求解，取决于能否除以 $\omega_0^2 - k^2$.

当$\omega_0 = n \in \mathbb{N}^*$, 第 n 与第 $-n$ 个分母为零。若要存在周期解，相应的Fourier系数必须满足 $g_n = g_{-n} = 0$. 对实值函数而言，这恰好等价于上一小节得到的两个正交条件

$$\int_0^{2\pi} g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_0^{2\pi} g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0.$$

所以上一小节的积分条件与这里的Fourier计算描述的是同一个事实：右端不能含有线性算子无法消去的共振模态。

如果 ω_0 不等于整数，但非常接近某个正整数 n，那么周期解仍然存在，只是第 n 个模态可能被大幅放大。例如，$z'' + \omega_0^2 z = \cos nt$ 有周期解 $z(t) = \dfrac{\cos nt}{\omega_0^2 - n^2}$. 由分解 $\omega_0^2 - n^2 = (\omega_0 - n)(\omega_0 + n)$ 可见，当 ω_0 接近 n 时，解的振幅可以很大。这称为**接近共振**。

第 6.3.2 小节使用的周期端点映射给出了同一现象的另一种表示。对 2π 周期边值条件，其线性化的行列式为 $\Delta_0 = 4\sin^2(\pi\omega_0)$. 当 ω_0 趋近整数时，这个行列式趋近于零；在Fourier表示中，则是某个分母 $\omega_0^2 - n^2$ 趋近于零。前一种写法说明周期端点映射接近奇异，后一种写法说明相应Fourier模态上的逆算子很大。

不过，在固定的单周期问题中，接近共振还不是KAM理论中的小除数困难。事实上，只要 $\omega_0 \notin \mathbb{N}^*$ 便有 $\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\omega_0^2 - k^2| > 0$, 以及当 $|k| \to +\infty$ 时, 就有 $|\omega_0^2 - k^2| \to +\infty$. 因此对一个固定的非整数频率而言，至多只有有限个模态可能产生较小的分母，不会出现一列随模态阶数增加而趋于零的分母。本节前面的隐函数定理正是在这种单周期、非共振的情形下使用的，并不需要KAM方法。

非线性共振中为什么会出现正规形 (normal form). 当线性算子的ker非平凡时，非线性项会把不同模态耦合起来，并可能重新产生共振模态。上一小节末尾写出的分解

$$x(t) = A\cos nt + B\sin nt + w(t)$$

正是处理这一问题的起点，其中 w 与 $\cos nt$、$\sin nt$ 正交。

在核的正交补上，线性算子可以求逆，因而可以先求出 w；把方程投影到核上，则得到关于 A 与 B 的有限维方程。这就是Lyapunov–Schmidt约化。所得有限维方程决定共振模态的振幅与相位，通常称为振幅方程。

正规形方法从动力系统的角度整理同一个共振机制。它通过接近恒等的变量代换，逐阶消去能够由线性方程求解的非共振项；如果某项落在核方向上，相应的线性方程无解，这一项便不能被消去，只能保留在正规形中。保留下来的共振项随后用来分析振幅、相位以及可能发生的分岔。

因此，Lyapunov–Schmidt约化与正规形并不是同一种计算方法：前者直接把周期边值问题分解为核方向方程与正交补方向方程，后者则试图用坐标变换简化局部动力系统。不过，它们遇到的障碍相同，都是线性算子在共振方向上不可逆。对本节的有限维周期边值问题，若要研究整数频率处的非线性周期解，通常先考虑Lyapunov–Schmidt约化、平均法、Poincaré–Lindstedt方法或共振正规形，而不是直接使用KAM理论。

下面通过一个Duffing型方程，具体写出接近恒等的坐标变换，并说明哪些项可以消去，哪些项由于共振而必须保留。

例 6.3.3 Duffing型方程的一阶共振正规形

考虑方程

$$x'' + x = \lambda\big(\mu x - x^3\big), \qquad |\lambda| \ll 1, \tag{6.3.12}$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$ 是给定参数。

解. 令 $y = x'$, $z = x - \mathrm{i}y$, 于是得到 $\overline{z} = x + \mathrm{i}y$, $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$. 由方程 (6.3.12) 可得

$$z' = x' - \mathrm{i}y' = y - \mathrm{i}\big[-x + \lambda\big(\mu x - x^3\big)\big] = \mathrm{i}z + \lambda F(z, \overline{z}),$$

其中

$$F(z,\overline{z}) = -\frac{\mathrm{i}\mu}{2}(z+\overline{z}) + \frac{\mathrm{i}}{8}(z+\overline{z})^3 = -\frac{\mathrm{i}\mu}{2}z - \frac{\mathrm{i}\mu}{2}\overline{z} + \frac{\mathrm{i}}{8}z^3 + \frac{3\mathrm{i}}{8}z^2\overline{z} + \frac{3\mathrm{i}}{8}z\overline{z}^2 + \frac{\mathrm{i}}{8}\overline{z}^3.$$

现在作接近恒等的变量代换

$$z = \zeta + \lambda\Phi(\zeta,\overline{\zeta}), \qquad \overline{z} = \overline{\zeta} + \lambda\overline{\Phi(\zeta,\overline{\zeta})}. \tag{6.3.13}$$

下面选取多项式 Φ，使变换后的方程尽可能简单。先推导 Φ 应满足的方程。对 (6.3.13) 求导，得到 $z' = \zeta' + \lambda(\partial_\zeta\Phi\,\zeta' + \partial_{\overline{\zeta}}\Phi\,\dot{\overline{\zeta}})$. 在含 λ 的项中，只需代入零阶关系

$$\zeta' = \mathrm{i}\zeta + O(\lambda), \qquad \dot{\overline{\zeta}} = -\mathrm{i}\overline{\zeta} + O(\lambda).$$

因此，在任意固定的有界 ζ-区域内，成立 $z' = \zeta' + \lambda\left(\mathrm{i}\zeta\,\partial_\zeta\Phi - \mathrm{i}\overline{\zeta}\,\partial_{\overline{\zeta}}\Phi\right) + O(\lambda^2)$. 另一方面又有

$$\mathrm{i}z + \lambda F(z,\overline{z}) = \mathrm{i}\zeta + \lambda\left[\mathrm{i}\Phi(\zeta,\overline{\zeta}) + F(\zeta,\overline{\zeta})\right] + O(\lambda^2).$$

比较以上两式，得到变换后的方程

$$\zeta' = \mathrm{i}\zeta + \lambda\big(F - \mathcal{H}\Phi\big)(\zeta,\overline{\zeta}) + O(\lambda^2), \tag{6.3.14}$$

其中同调算子 $\mathcal{H}$ 定义为

$$\mathcal{H}\Phi = \mathrm{i}\zeta\,\partial_\zeta\Phi - \mathrm{i}\overline{\zeta}\,\partial_{\overline{\zeta}}\Phi - \mathrm{i}\Phi. \tag{6.3.15}$$

在这段多项式计算中，暂时把 ζ 与 $\overline{\zeta}$ 视为形式独立的变量。

对任意非负整数 p,q，直接计算可得 $\mathcal{H}\big(\zeta^p\overline{\zeta}^q\big) = \mathrm{i}(p-q-1)\zeta^p\overline{\zeta}^q$. 因此当 $p-q\neq 1$ 时, 可以通过适当选择 Φ 中的 $\zeta^p\overline{\zeta}^q$ 项消去 F 中对应的单项式；当 $p-q=1$ 时，同调算子在这个单项式上为零，因而该项不能用这种变量代换消去。这种项称为**共振项**。

在 F 的各个单项式中，共振项恰好是 $-\frac{\mathrm{i}\mu}{2}\zeta$, $\frac{3\mathrm{i}}{8}\zeta^2\overline{\zeta}$, 因为它们分别对应 $(p,q)=(1,0)$ 和 $(p,q)=(2,1)$，其余项都是非共振项。取

$$\Phi(\zeta,\overline{\zeta}) = \frac{\mu}{4}\overline{\zeta} + \frac{1}{16}\zeta^3 - \frac{3}{16}\zeta\overline{\zeta}^2 - \frac{1}{32}\overline{\zeta}^3, \tag{6.3.16}$$

则由 (6.3.15) 可得

$$\mathcal{H}\Phi = -\frac{\mathrm{i}\mu}{2}\overline{\zeta} + \frac{\mathrm{i}}{8}\zeta^3 + \frac{3\mathrm{i}}{8}\zeta\overline{\zeta}^2 + \frac{\mathrm{i}}{8}\overline{\zeta}^3.$$

这正好等于 F 的全部非共振部分。于是 (6.3.14) 化为

$$\zeta' = \mathrm{i}\zeta + \mathrm{i}\lambda\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}|\zeta|^2\right)\zeta + O(\lambda^2). \tag{6.3.17}$$

这就是方程 (6.3.12) 的一阶共振正规形。它并没有消去所有非线性项，而是消去了 λ 阶的全部非共振项，只留下同调方程无法消去的共振项。对任意固定的有界 ζ-区域，当 $|\lambda|$ 充分小时，变换 (6.3.13) 是可逆的，并且上面的 $O(\lambda^2)$ 在该区域内一致成立。

接下来说明保留下来的共振项具有什么作用，对 $r>0$，设 $\zeta = re^{\mathrm{i}\theta}$, 由 (6.3.17) 得

$$\dot{r} = O(\lambda^2), \qquad \dot{\theta} = 1 + \lambda\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}r^2\right) + O(\lambda^2).$$

所以，一阶共振项在这一阶上不改变振幅，却改变振动频率。若要寻找周期仍为 2π 的非零周期解，则频率的一阶修正必须为零，从而得到最低阶条件 $-\frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}r^2 = 0$.

当 $\mu>0$ 时，这给出

$$r^2 = \frac{4\mu}{3}. \tag{6.3.18}$$

当 $\mu \leqslant 0$ 时，上述最低阶条件不产生非零的实振幅。

而零阶解可以写成$x_0(t) = A\cos t + B\sin t$, 此时 $z_0(t) = x_0(t) - \mathrm{i}\dot{x}_0(t) = (A - \mathrm{i}B)e^{\mathrm{i}t}$, 进而 $r^2 = A^2 + B^2$, 所以 (6.3.18) 等价于 $A^2 + B^2 = \frac{4\mu}{3}$. □

注记 6.3.1. 若对此方程使用Lyapunov–Schmidt约化，把一阶方程的右端投影到 $\cos t$ 与 $\sin t$ 所张成的核上，也会得到同一个最低阶振幅条件。两种方法揭示的是同一个共振障碍，但计算方式不同：Lyapunov–Schmidt约化直接分解核方向与正交补方向，而正规形方法则明确构造 (6.3.13) 这样的坐标变换，逐项消去非共振项。

最后需要强调，条件(6.3.18)只是消除一阶频率修正的最低阶条件。要据此证明原方程确实存在精确的 2π-周期解，还需要继续控制高阶余项，或者使用 Lyapunov–Schmidt 约化与隐函数定理给出严格论证。

上面的计算只处理有限阶的单频共振，同调方程中只出现有限多个单项式。下面转向多频拟周期问题；此时必须同时求解无穷多个Fourier模态，同调方程才会产生典型的小除数困难。

多频拟周期问题中的小除数. 现在考虑至少含有两个基本频率的情形。设$d \geqslant 2, \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$, 并设这些频率在有理数域上线性无关。若一个函数具有形式 $h(t) = H(\boldsymbol{\omega}t)$, 其中 H 是环面 $\mathbb{T}^d$ 上的周期函数，则称 h 为以 $\boldsymbol{\omega}$ 为频率向量的**拟周期 (quasi-periodic) 函数**。

给定$g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, 考虑拟周期受迫振子方程

$$x'' + \omega_0^2 x = g(\boldsymbol{\omega}t), \tag{6.3.19}$$

并寻找具有相同频率向量的解 $x(t) = X(\boldsymbol{\omega}t)$. 令 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}t \in \mathbb{T}^d$. 由链式法则，方程 (6.3.19) 化为

$$\left[\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\right)^2 + \omega_0^2\right] X(\boldsymbol{\theta}) = g(\boldsymbol{\theta}). \tag{6.3.20}$$

把 g 与 X 展开为环面上的Fourier级数：

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} g_{\boldsymbol{k}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \qquad X(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} X_{\boldsymbol{k}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}}.$$

逐项代入后得到

$$\left[\omega_0^2 - \left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^2\right] X_{\boldsymbol{k}} = g_{\boldsymbol{k}}, \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{6.3.21}$$

这里需要除以

$$\omega_0^2 - \left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^2 = \left(\omega_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\left(\omega_0 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\right). \tag{6.3.22}$$

与单周期情形不同，整数向量 $\boldsymbol{k}$ 有无穷多个方向。即使 (6.3.22) 从不等于零，也可能存在一列整数向量，使 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} \to \omega_0$ 或者 $-\omega_0$. 于是求解 (6.3.21) 时会遇到无穷多个越来越小的分母。这就是所谓的**小除子问题 (small divisor problem).**

为了控制这些分母，一种比较简单粗暴的方法是对频率施加算术非共振条件。例如要求存在常数 $\gamma > 0,\ \tau > 0$ 使得

$$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} \pm \omega_0| \geqslant \frac{\gamma}{(1+|\boldsymbol{k}|)^{\tau}}, \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d. \tag{6.3.23}$$

这类条件常称为一阶Melnikov非共振条件。它并不要求分母与零保持固定距离，而只限制分母趋于零的速度。事实上，两个因子 $\omega_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega},\ \omega_0 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 中至少有一个的绝对值不小于 ω_0。因此 (6.3.23) 推出

$$\left|\omega_0^2 - \left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^2\right| \geqslant \frac{\gamma\omega_0}{(1+|\boldsymbol{k}|)^{\tau}} \ \Rightarrow\ |X_{\boldsymbol{k}}| \leqslant \frac{(1+|\boldsymbol{k}|)^{\tau}}{\gamma\omega_0}|g_{\boldsymbol{k}}|.$$

这个估计表明小除数会造成有限阶的正则性损失。由于 $g \in C^{\infty}(\mathbb{T}^d)$, 其Fourier系数快于任意负幂衰减，因而由上述系数定义的 X 仍属于 $C^{\infty}(\mathbb{T}^d)$.

KAM方法在这里起什么作用. 经典KAM理论研究近可积Hamilton系统

$$H_{\varepsilon}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta}) = h(\boldsymbol{I}) + \varepsilon P(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\theta})$$

中的拟周期不变环面。当$\varepsilon = 0$时，集合 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_*$，该集合上的运动具有频率 $\boldsymbol{\omega} = \nabla h(\boldsymbol{I}_*)$. 而KAM理论要回答的是：加入充分小的扰动以后，其中哪些非共振不变环面仍然存在。

在构造新的坐标变换时，需要反复求解同调方程。最基本的模型是

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\theta}} u = q(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} q(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}.$$

对非零Fourier模态，有

$$u_{\boldsymbol{k}} = \frac{q_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}, \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

因此要控制经典的Diophantine小除数

$$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}| \geqslant \frac{\gamma}{|\boldsymbol{k}|^{\tau}}, \qquad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

若系统还含有椭圆型法向振动，则也会出现 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega} \pm \omega_0$ 这类移位分母；方程 (6.3.20) 正是这种情形的一个线性模型。

仅有算术非共振条件并不能推出KAM结论。经典KAM定理还需要近可积Hamilton结构、适当的非退化条件、足够的正则性或解析性，以及扰动充分小。证明通过快速收敛的迭代逐步修正不变环面，同时补偿每一步除以小分母所带来的损失。标准的非共振KAM定理通常排除精确共振；在精确共振附近，往往先作共振正规形，再研究共振区域内可能保留下来的周期轨道、低维不变环面或其他动力学结构。

注记 6.3.2. 当$\omega_0 \in \mathbb{N}^*$时，周期线性算子具有非平凡的核。这是精确共振问题，需要相容条件、Lyapunov–Schmidt约化、平均法或共振正规形。当参数的绝对值不再很小时，前面的隐函数定理

不能继续提供局部摄动结论。这时可能需要先验估计、全局延拓或分岔理论，但它本身并不意味着出现了小除数。

而在本节所讨论的模型中，只有进入多频拟周期问题以后，求解同调方程时才会出现无穷多个非零但可能趋近于零的分母，从而形成典型的小除数问题。KAM理论是在方程还具有相应结构、非退化性和小扰动性质时，处理这类困难的一套方法。

习题 6.3

习题 6.3.1. 求解周期边值问题 $x''+\lambda x=0,\ x(0)=x(1),\ x'(0)=x'(1)$，并比较它与通常 S–L 边值问题的异同。

习题 6.3.2. 设 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 中 $\boldsymbol{f}$ 对 t 为 T 周期，并满足初值问题的存在唯一性条件。证明解 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 T 周期，当且仅当 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}(T)$。

习题 6.3.3. 设 p 为连续的 2π 周期函数，$g\in C^1(\mathbb{R})$，并且 $n^2<g'(x)<(n+1)^2\ (x\in\mathbb{R})$，其中 n 为正整数。证明 $x''(t)+g(x)=p(t)$ 的 2π 周期解若存在则唯一。

习题 6.3.4 (算术非共振条件下的拟周期解). 设 $\omega_0>0,\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^d$, 且 $\boldsymbol{\omega}$ 各分量在 $\mathbb{Q}$ 上是线性无关的。设 $g\in C^\infty(\mathbb{T}^d\to\mathbb{R})$，并假设存在常数 $\gamma>0,\tau>0$ 满足如下**算术非共振条件**

$$|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}\pm\omega_0|\geqslant\frac{\gamma}{(1+\boldsymbol{k}|)^\tau},\qquad \boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d.$$

证明：$X_k:=\dfrac{g_{\boldsymbol{k}}}{\omega_0^2-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}$ 给出了唯一的光滑函数 $X\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，进而 $x(t):=X(\boldsymbol{\omega}t)$ 是 $x''(t)+\omega_0^2x(t)=g(\boldsymbol{\omega}t)$ 的解. 这里的下标 $\boldsymbol{k}$ 是指以 $\{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\theta}\}$ 展开的 Fourier 系数。

习题 6.3.5 (缺少算术控制时的小除子反例). 设 $d\geqslant 2$ 且存在 $\mathbb{Z}^d$ 中的向量序列 $\{\boldsymbol{k}_j\}$ 满足 $|\boldsymbol{k}_j|\to+\infty$ 以及

$$0<|\omega_0^2-(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{\omega})^2|\leqslant|\boldsymbol{k}_j|^{-1}.$$

(1) 取子列（仍然记作$\{\boldsymbol{k}_j\}$）使得 $\boldsymbol{k}_j\neq\pm\boldsymbol{k}_\ell\ (j\neq\ell)$. 证明：$g(\theta)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\boldsymbol{k}_j|^{-j/2}\left(e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_j\cdot\theta}+e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_j\cdot\theta}\right)$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的光滑函数。

(2) 证明 $\left[\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_\theta\right)^2+\omega_0^2\right]Xg$ 的形式 Fourier 级数解的 Fourier 系数增长快于任意多项式。

(3) 推出该方程不存在 Fourier 意义下的 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 解，因而不存在经典解，并说明习题 6.3.4 中算术非共振条件的作用。

参考文献

[1] 丁同仁、李承治. “常微分方程教程”第三版 高等教育出版社.

[2] Hartman, P. Ordinary Differential Equations (2nd edition). SIAM.

[3] 李思. Ordinary Differential Equations. Tsinghua University.

[4] Sideris, T. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems Atlantis Studies in Differential Equations, Vol. 2, Atlantis Press.

[5] Teschl, G. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems Graduate Studies in Mathematics, Vol. 140, AMS.