§7 Tomas-Stein 限制性估计.

§7.1 问题的由来与约化.

问: $1\le p\le 2$ 时 ~~Φ~~ 能否将一个 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中的函数 f 的 Fourier 变换 ~~$\hat{f}$~~ 限制在 S^{d-1} 上, 使之成为一个 $L^q(S^{d-1})$ $(1\le q\le\infty)$ 函数?

~~这~~ 由共鸣定理知, 这和 Φ $\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^q(S^{d-1})}\lesssim\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ ①

是一样的.

$p=1$, $q=\infty$. ~~显~~ 这是显然的. 但 $p=2$, 不可能.

$1<p<2$ 时, 1960s Stein 给出了一部分答案.

在 §2 的 Sobolev 空间章节中, 由 trace lemma 可知,

$$\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_2\lesssim\|\langle x\rangle^{\sigma}f\|_2 \qquad \sigma>1/2.$$

但①式是平移不变的, ②不是. ① 在非线性 PDE 中会更加有用.

在本章的证明中, 我们会看到 ① 的关键是曲率的存在. 而 Trace lemma 并不区分平坦/弯曲.

$q=2$ 时. 答案由 Thomas-Stein 限制性定理给出.

Thm 7.1.1 (Tomas-Stein). $d\ge 2$ 时. $\exists\, C_d>0$ s.t.

$$\forall f\in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^2(S^{d-1})}\lesssim_d\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

$$p\le p_d:=\frac{2d+2}{d+3}. \qquad p>p_d \text{ 必定不对}.$$

□

在证明之前，我们要指出：S^{d-1} 可以换成任何 $\mathbb{R}^d$ 中的超曲面 S 的紧子集 S_0。
（含非零曲率的）

例如：$S_0 := \{(\xi', |\xi'|^2) \mid \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, |\xi'| \le 1\}$ 是 Schrödinger 方程的特征曲面，它的 Gauss 曲率 $\neq 0$（是截了一部分抛物面）
$\tilde{S}_0 := \{(\xi', |\xi'|) \mid \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, 1 \le |\xi'| \le 2\}$ 有一个方向主曲率 $=0$

$\Rightarrow$ 而 Tomas-Stein 估计在 $\tilde{S}_0$ 上不成立。

下面~~对证明~~我们尝试做一些简化。

$p=1$ 时，$\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^2(S^{d-1})} \le \|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^\infty} |S^{d-1}|^{1/2}$
$\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} |S^{d-1}|^{1/2}$

所以只用证 $p=p_d$ 的情况，便可用 Riesz-Thorin 插值得到结论

但 $p=p_d$ 是最难证的情况，我们后面会介绍非端点 case 的简单证明：

由于我们考虑的是 L^2 估计，所以可以考虑利用对偶

首先，由乘法公式，我们可以得到如下结果：

对 $\forall f, g \in S(\mathbb{R}^d)$，$\forall \mu$：有限测度，成立：$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\mu(\xi)$
$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\bar{g} * \hat{\mu})(x)\, dx$

之后，我们有如下引理

Lemma 7.1.1 设 μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的有限测度 $d \ge 2$，则 TFAE.

(1) $\|\widehat{f\mu}\|_{L^{q}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)}$ $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

(2) $\|\hat{g}\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}$ $\forall g \in S(\mathbb{R}^d)$

(3) $\|\hat{\mu} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}$ $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

(1) $\Rightarrow$ (2)：

证明：$\forall g\in S(\mathbb{R}^d)$.

$$\|\hat{g}\|_{L^2(\mu)} = \sup_{\substack{f\in S \\ \|f\|_{L^2(\mu)}=1}} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\xi)\, f(\xi)\, \mu(d\xi)\right|$$

$$= \sup_f \left|\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \widehat{f\mu}(x)\, dx\right|$$

$$\le \sup_f \|g\|_{L^{q'}} \|\widehat{f\mu}\|_{L^q}$$

$$\lesssim \sup_f \|f\|_2 \|g\|_{q'} \lesssim \|g\|_{q'}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 也是一样的.

从而 $\|\widehat{(\hat{g}\mu)}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\hat{g}\|_{L^2(\mu)}$ ~~$= \|g\|_{L^2(\mu)}$~~

$$\lesssim \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \qquad \forall g\in S(\mathbb{R}^d)$$

而由 $\widehat{\hat{g}\mu} = g * \hat{\mu}$ 知：

$$\|\hat{\mu} * f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{\hat{f}\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$$

$$\lesssim \|\hat{f}\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ (3) 得证.

(3) $\Rightarrow$ (2)：只需注意：

$$\int g(x)(\hat{\mu} * f)(x)\,dx = \int g(x)(\mu\check{f})^\wedge(x)$$

$$= \int \hat{g}(\xi)\, \check{f}(\xi)\, \mu(d\xi)$$

$\therefore$ $|RHS| \lesssim \|g\|_{L^{q'}} \|f\|_{q'}$

令 $f(x) = g(-x)$ 便有 $\|\hat{g}\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|g\|^2_{q'(\mathbb{R}^d)}$ $\square$

取 $\mu = \sigma_{S^{d-1}}$ 仍有

Cor 7.1.1: TFAE

(1). $\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^2(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}$ for $q' = \frac{2d+2}{d+3}$ $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

(2). $\|\widehat{g\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^2(\sigma)}$ for $q = \frac{2d+2}{d-1}$ $g \in S(\mathbb{R}^d)$

(3) 由(1)(2): $f \in S(\mathbb{R}^d)$. $q = \frac{2d+2}{d-1}$

$$\Rightarrow \|f * \widehat{\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}.$$

~~(In fact~~.

Rmk: 实际上: $\|\hat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^p(\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}$. $\forall f \in S$.

$$\Longleftrightarrow \forall g \in S \quad \|\widehat{g\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{p'}(\sigma)}.$$

$\square$

§7.2: Tomas-Stein 非端点情形:

本节证明 $p < p_d = \frac{2d+2}{d+3}$ 时的情况

设 ψ 为 Littlewood-Paley bump. 支于 $\{\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$

则 $\forall x \neq 0$. $\sum_j \psi(\frac{x}{2^j}) = 1$. $\varphi(x) = 1 - \sum_{j \ge 0} \psi(\frac{x}{2^j}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

由 Cor 7.1.1 知. 只需证

$$\|f * \widehat{\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^{p'}} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^d)$$

由 Young 不等式: $\|f * \varphi\widehat{\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\varphi \widehat{\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^r}$.

其中 $1 + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{2}{p'} = \frac{1}{r}$.

所以，只用求ψ_j对应积分核$K_j(x)=\psi(\frac{x}{2^j})\hat{\sigma}_{S^{d-1}}(x)$的估计.

具体而言，我们要证 $\|f*K_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\lesssim 2^{-j\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\forall j\geq 0$, for some small $\varepsilon>0$.

之后，对j求和即可

为此，我们只用证$L^2\to L^2$，$L^1\to L^\infty$估计，之后插值即可.

$$\cdot\ \|f*K_j\|_{L^2}=\|\hat f\|_{L^2}\ \|\hat{K_j}\|_{L^\infty}$$

$$=\|f\|_{L^2}\ \|2^{jd}\hat{\psi}(2^j\cdot)*\sigma_{S^{d-1}}\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim\|f\|_{L^2}\,2^{jd}\,2^{-j(d-1)}$$

$$\approx 2^j\,\|f\|_{L^2}.$$

又：$\|f*K_j\|_{L^\infty}\leq\|f\|_{L^1}\ \|K_j\|_{L^\infty}$

$$\lesssim 2^{-j\frac{(d-1)}{2}}\|f\|_1$$

故插值得：

$$\|f*K_j\|_{p'}\lesssim 2^{-j\theta\frac{d-1}{2}+j(1-\theta)}\|f\|_p$$

$$\frac{1}{p'}=\frac{\theta}{\infty}+\frac{1-\theta}{2}=\frac{1-\theta}{2}$$

$$\therefore\ \Leftrightarrow\ \frac{d-1}{2}\theta-(1-\theta)$$

$$=\frac{d+1}{2}\theta-1>0$$

$$\Leftrightarrow\ (d+1)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}\right)-1>0$$

$$\Leftrightarrow\ p'>\frac{2d+2}{d-1}$$

$$\Leftrightarrow\ P_d<\frac{2d+2}{d+3}=P_d \qquad \square$$

§7.3 端点估计与Knapp反例

在§7.2 非端点估计证明中，若将 p 设为 p_d，则求和会发散。

~~那~~ 那么 我们可以考虑"先求和，后插值"。

具体而言：<u>Recall</u>：Riesz-Thorin 插值定理の证明

基于三线引理，其核心 idea 是对 $T_j: f \mapsto f * K_j$ 以某种（搬到现在）

权重求和：i.e. $T_z = \sum_{j \ge 0} w_j(z) T_j$，$T_z$ 在 $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$

中收敛到一个算子值の解析函数。且：

$T_z: L^1 \to L^\infty$ for $\mathrm{Re}\, z = 1$

$T_z: L^2 \to L^2$ for $\mathrm{Re}\, z = 0$

$\Longrightarrow T_{z=\theta}: L^p \to L^{p'}$ for $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2}$ $\quad 0 \le \theta \le 1$

所以 $w_j(z)$ 的选择一定要慎重，使得 T_θ 在某个 θ 处

正好是"与 $\widehat{\sigma_{S^{d-1}}}$ 卷积"。

复插值证明法：

考虑超曲面 $\xi_d = h(\xi')$，非零曲率，$\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

定义：$M_z(\xi) = \frac{1}{\Gamma(z)} (\xi_d - h(\xi'))_+^{z-1} \chi_1(\xi') \chi_2(\xi_d - h(\xi'))$

其中 $\chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是光滑的截断函数。

$\mathrm{Re}\, z > 0$.

我们证明：(*) $T_z f := (M_z \hat{f})^\vee$ 可以由向 $\mathrm{Re}\, z \le 0$ 作全纯开

拓的方式定义。

这些估计是：

$\|T_z\|_{2\to 2} \le B(z)$ for $\mathrm{Re}\, z = 1$ ① ②

$\|T_z\|_{1\to\infty} \le A(z)$ for $\mathrm{Re}\, z = -\frac{d-1}{2}$ ② ③

$A(z)$, $B(z)$ 在 $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$ 时增长比 $e^{c|z|^2}$ 快

我们将会看到 $(\xi_d - h(\xi'))_+^{z-1}$ 在 $z=0$ 处的奇性会与

$\frac{1}{\Gamma(z)}$ 中 $z=0$ 处的零点抵消

$\Rightarrow M_0(\xi) = \chi_1(\xi')\,\delta_0(\xi_d - h(\xi'))$ （后面会证） ⑤

这说明 $M_0(\xi) \approx$ 曲面测度

再用 Stein 复插值知：$f \mapsto \hat{M_0} * f$ $L^p \to L^{p'}$ 有界

由之前一节计算知，$\frac{1}{p'} = \frac{d-1}{2(d+1)} \Rightarrow p = p_d$.

因此，现在待证的是有 ① ② ③

证：

Recall：$\Gamma(z)^{-1}$ 是整函数，有一阶零点 $z = 0, -1, -2, \dots$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu} \quad \forall z = x+iy, \ \frac{1}{\Gamma(z)} \text{ converge.}$$

$$\therefore \left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right|^2 \le |z|^2 e^{2\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{y}{\nu}\right)^2\right) e^{-2x/\nu}$$

$$\le |z|^2 e^{2\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{\frac{|z|^2}{\nu^2} + \frac{2x}{\nu} - \frac{2x}{\nu}}\right)$$

$$= |z|^2 e^{2\gamma x} e^{\pi^2 |z|^2/6}$$

特别，$\mathrm{Re}\, z = 1$ 时，$\forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$$|M_z(\xi)| \le (1+y^2) e^{2\gamma} e^{\frac{\pi^2}{6}(1+y^2)} \chi_1(\xi') \chi_2(\xi_d - h(\xi'))$$

$$\le C e^{cy^2}.$$

从而 ① 得证. 实际上 optimal 的衰减 $|y|^{1/2}e^{\pi|y|/2}$ as $|y|\to\infty$

再证③. 设 $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$, 则 $\forall\, \mathrm{Re}\, z>0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_z(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \underset{t=\xi_d-h(\xi')}{=} \frac{1}{\Gamma(z)}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^\infty \chi_2(t)\,\varphi(\xi',t+h(\xi'))\,t^{z-1}\,dt\;\chi_1(\xi')\,d\xi'$$

$$\underset{\text{分部积分}}{\overset{t^{z-1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^z}{z}\right)}{=}} -\frac{1}{z\Gamma(z)}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^\infty \partial_t\left(\chi_2(t)\,\varphi(\xi',t+h(\xi'))\right)t^z\,dt\;\chi_1(\xi')\,d\xi' \quad \cdots (\#)$$

右边在 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 时良定.

在 $z=0$ 时 由于 $z\Gamma(z)=1$ at $z=0$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} M_0(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \chi_2(0)\,\varphi(\xi',h(\xi'))\,\chi_1(\xi')\,d\xi'$$

$\Rightarrow$ M_z 在 $z=0$ 处的全纯开拓取值确如 ③ 所示.

易见 $M_0\approx \sigma_S$ $\quad S=\{(\xi',h(\xi'))\mid \xi'\in\mathbb{R}^{d-1}\}$.

这正是我们想要的 $(\widehat{\sigma_S}*f)$

注意到 (#) 给了 $\mathrm{Re}\, z>-1$ 的全纯开拓. 不断地 ~~再次~~ 分部积分

有 $\int_{\mathbb{R}^d} M_z(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi \overset{M_z\text{全纯}}{=} \dfrac{(-1)^k}{z(z+1)\cdots(z+k-1)\Gamma(z)}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\chi_1(\xi')$

$$\int_0^\infty t^{z+k-1}\,\partial_t^k\left(\chi_2(t)\,\varphi(\xi',\xi_d+h(\xi'))\right)dt\,d\xi'$$

$\mathrm{Re}\, z>-k$.

最后还差②的证明, i.e. $\mathrm{Re}\, z = -\frac{d-1}{2}$ 时.

$$\|T_z\|_{1\to\infty} \le A(z).$$

$\|T_z f\|_{L^\infty} \le \cancel{C\|\hat{T}_z\|_\infty}\|f\|_1$
$=$
$\|(M_z \hat{f})^\vee\|_{L^\infty}$
$\le \|M_z \hat{f}\|_{L^1}$
$=$
$\|\check{M}_z * f\|_{L^\infty}$
$\le \|\check{M}_z\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}$.
110455895VX 885-21

证: $T_z f = \check{M}_z * f$ (z 的 [illegible])

$$\|T_z f\|_{L^\infty} = \|\check{M}_z * f\|_{L^\infty} \le \|\check{M}_z\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} = \|\hat{M}_z\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}.$$

因此,需要估计 $\|\hat{M}_z\|_{L^\infty}$.

claim: 设 $N \in \mathbb{Z}_+$, $N > \mathrm{Re}\, z + 1 > 0$, 则

$$\left|\int_0^\infty e^{-2\pi i t\tau}\, t^z \chi_2(t)\,dt\right| \lesssim_N \frac{(1+|z|)^N}{1+\mathrm{Re}\, z}(1+|\tau|)^{-\mathrm{Re}\, z-1}$$

先假设 claim 成立, 下面来计算 $\hat{M}_z(x)$.

设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathrm{Re}\, z > -k$, 则

$$\hat{M}_z(x) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{1}{\Gamma(z)}(\underbrace{\xi_d - h(\xi')}_{\text{令 } t = \xi_d - h(\xi')})_+^{z-1}\chi_1(\xi')\chi_2(\xi_d - h(\xi'))\,d\xi'\,d\xi_d$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty e^{-2\pi i x_d t}\, t^{z-1}\chi_2(t)\,dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i(x'\cdot\xi' + x_d h(\xi'))}\chi_1(\xi')\,d\xi'$$

$$\overset{\text{分部积分}}{\underset{k\text{次}}{=}} \frac{(-1)^k}{\Gamma(z)\, z(z+1)\cdots(z+k-1)}\int_0^\infty \left(e^{-2\pi i x_d t}\chi_2(t)\right)^{(k)} t^{z+k-1}\,dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i(x'\cdot\xi' + x_d h(\xi'))}\chi_1(\xi')\,d\xi'.$$

$\forall\, \mathrm{Re}\, z > -k$.

现设 $\mathrm{Re}\, z = -\frac{d-1}{2}$ 取 k s.t. $1-k \le \mathrm{Re}\, z < 2-k$.

这样在 claim 中 用 $z+k-1$ 换掉 z，令 $N=2$. 倍来

$\widehat{M_z(x)}$ 中第一项积分有上界

$$\left|\int_0^\infty \left(e^{-2\pi i x_d t} \chi_2(t)\right)^{(k)} t^{z+k-1}\, dt\right|$$

$$\lesssim_k \frac{(1+|z|)^2}{k+\mathrm{Re}\, z} (1+|x_d|)^{-\mathrm{Re}\, z}$$

第2项. 用震荡积分同样方法.

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i (x' \cdot \xi' + h(\xi') x_d)} \chi_1(\xi')\, d\xi'\right|$$

$$\lesssim (1+|x_d|)^{-\frac{d-1}{2}}.$$

要注意 以上二式中 $|x_d|$ 的增长相抵消.

$\therefore \mathrm{Re}(z) = -\frac{d-1}{2}$ 时.

$$\|\widehat{M_z}\|_\infty \lesssim_d \left|\frac{1}{\Gamma(z)(z-1)\cdots(z-k+1)}\right| (1+|z|)^2.$$

$$\lesssim |z| \langle z \rangle^2 e^{\gamma \mathrm{Re}\, z} e^{\frac{\pi^2 |z|^2}{12}}$$

$$=: A(z).$$

$\square$

所以现在只差验证 claim. 这需要分两段: $t\tau \gg 1$ or $\lesssim 1$.

· $\underline{t\tau\text{小}}$ 设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\varphi(t) = 1 \quad |t| \le 1$
$= 0 \quad |t| \ge 2$

$0 \le \chi_2 \le 1$. 有:

$$\left|\int_0^\infty e^{-2\pi i t\tau} t^z \varphi(t\tau)\chi_2(t)\,dt\right|$$

$$\le \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z} \varphi(t|\tau|)\,dt.$$

$$\le |\tau|^{-\operatorname{Re} z-1} \int_0^2 t^{\operatorname{Re} z}\,dt$$

$$\lesssim \frac{(1+|\tau|)^{-\operatorname{Re} z-1}}{\operatorname{Re} z+1}.$$

· $t\tau$ 大: $\left|\int_0^\infty e^{-2\pi i t\tau} t^z (1-\varphi(t\tau))\chi_2(t)\,dt\right|$.

$$\lesssim |\tau|^{-N} \int_0^\infty \left|\partial_t^N \left(t^z(1-\varphi(t\tau))\chi_2(t)\right)\right| dt.$$

$$\lesssim_N |\tau|^{-N} |z(z-1)\cdots(z-N+1)| \int_{\frac{1}{\tau}}^\infty t^{\operatorname{Re} z-N}\,dt$$

$$+ |\tau|^{-N}|\tau|^N|\tau|^{-\operatorname{Re} z-1}$$

$$+ |\tau|^{-N} \int_0^1 t^{\operatorname{Re} z} \left|\chi_2^{(N)}(t)\right| dt$$

$$\lesssim_N \left(|z(z-1)\cdots(z-N+1)|+1\right)|\tau|^{-\operatorname{Re} z-1} + |\tau|^{-N}.$$

由于 $\operatorname{Re} z < N-1$. 易知 claim ✓.

□

~~下一节~~下面我们会用 HLS不等式 ~~下午技~~ 大大简化这个利用复杂性的证明

现在来看 Knapp 构造的一个例子，表明 $p_d = \frac{2d+2}{d+1}$ 是 optimal 的

这利用 Cor 7.1.1 (2) 知这等价于证

$$\|\widehat{g\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^2(\sigma)} \qquad q=\frac{2d+2}{d-1} \text{ 是 optimal 的}$$

Fix $\delta>0$ 设 $g\in S$. $g=1$ on $B(e_d=(0,\dots,0,1),\sqrt{\delta})$ $\quad g\geq 0$.

$\operatorname{Supp} g \subset B(e_d, 2\sqrt{\delta})$

则
$$|\widehat{g\sigma}(\xi)| = \left|\int e^{-2\pi i\left(x'\cdot\xi' + \xi_d\left(\sqrt{1-|x'|^2}-1\right)\right)} \frac{g(x',\sqrt{1-|x'|^2})}{\sqrt{1-|x'|^2}}\,dx'\right|$$

$$\geq \left|\int \cos\left(2\pi\left(x'\cdot\xi'+\xi_d\left(\sqrt{1-|x'|^2}-1\right)\right)\right) \frac{g(x',\sqrt{1-|x'|^2})}{\sqrt{1-|x'|^2}}\,dx'\right|$$

要注意，此时 x' 很小 $(|x'|\leq 2\sqrt{\delta})$.

~~$\geq \cos\frac{\pi}{4}$~~

设 $|\xi'| \leq \frac{(\sqrt{\delta})^{-1}}{100}$ $\quad |\xi_d| \leq \frac{1}{100\delta}$

则 $\left|x'\cdot\xi' + \xi_d\left(\sqrt{1-|x'|^2}-1\right)\right|$

$$\leq \sqrt{\delta}\,\frac{1}{100\sqrt{\delta}} + \frac{\delta^{-1}}{100}(\sqrt{\delta})^2 \leq \frac{1}{50}.$$

$\therefore$ 上式 $\geq \cos\frac{\pi}{4}\int g\,d\sigma \gtrsim \delta^{\frac{d-1}{2}}$.

$\widehat{g\sigma}(\xi)$ 的支集大约是一个 $\delta^{-\frac{1}{2}}\times\delta^{-1}$ 的长方体.

$\delta^{-\frac{1}{2}}\times\cdots\times$

所以 $\|\widehat{g\sigma_{S^{d-1}}}\|_{L^q} \gtrsim \delta^{\frac{d-1}{2}}\left(\delta^{-\frac{d-1}{2}}\delta^{-1}\right)^{\frac{1}{q}}$

$$= \delta^{\frac{d-1}{2}-\frac{d+1}{2q}}.$$

又 $\|g\|_{L^2} \lesssim \delta^{\frac{d-1}{4}}$. $\quad$ 所以 $\frac{d-1}{4} \leq \frac{d-1}{2} - \frac{d+1}{2q}$

$\Rightarrow q \geq \frac{2d+2}{d-1}$.

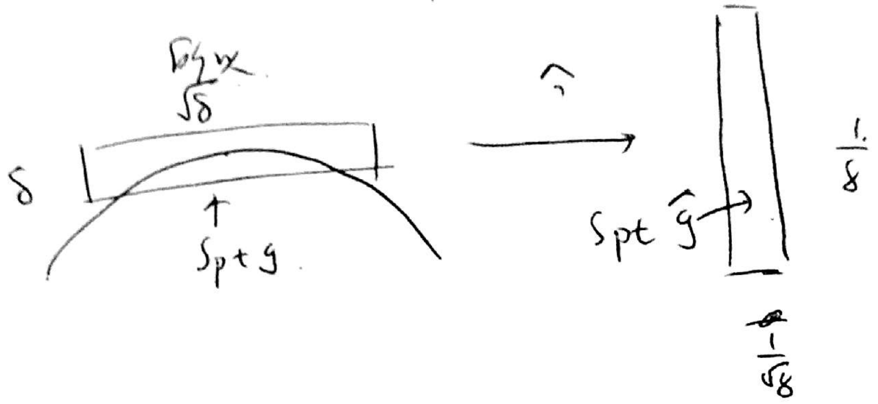
$\square$

Rmk：我们略作对上述证明步骤解释一下（尤其关于Fourier支集）

可以这么想象 ~~f支于 $|x|\le 1$，则 $f(\lambda\cdot)$ 支于~~

$(f(\lambda\cdot))^\wedge = \lambda^{-d}\hat f(\frac{\xi}{\lambda})$. 从而若 x 支集在 $|x|\lesssim\frac{1}{\lambda}$

则 $\hat f$ 支集在 $|\xi|\lesssim\lambda$.



□

~~§7.4 TT* 方法与Strichartz估计~~.

~~现在我们用TT*方法可迅速证明Tomas-Stein限制性估计~~

下面来看HLS不等式的证明。

我们要证的是 $\|f*\hat\mu\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$

其中 $p=p_d=\frac{2d+2}{d+3}$, $\mu=\psi\sigma_S$, $\psi\in C_c^\infty$ 支集很小.

不妨曲面 S 可写作 $x_d=\Phi(x')$.（在 $x'=0\in\mathbb{R}^{d-1}$ 附近）.

$\Phi(0)=0$. $\nabla\Phi(0)=0$. $\mathrm{Hess}\,\Phi(x')\big|_{x'=0}\neq 0$.

令 $x=(x',t)$. 则

$$(f*\hat\mu)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K(x'-y',t-s)f(y',s)\,dy'ds.$$

$K=\hat\mu$. 由震荡积分固相法可得

$$|K(x'-y',t-s)|\lesssim\langle t-s\rangle^{-\frac{d-1}{2}}\quad\forall x',y'\in\mathbb{R}^{d-1}$$

因此，令 $U(t)g(x') := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x'-y', t) g(y') dy'$ $g \in S(\mathbb{R}^{d-1})$

$$\|U(t)g\|_{L^\infty} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{d-1}{2}} \|g\|_1.$$

$$\|U(t)g\|_{L^2} \lesssim \|g\|_{L^2}. \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (K(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1}). \text{ uniformly int}).$$

插值得有：$\|U(t)g\|_{p'} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{d-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|g\|_p.$

$$\|f * \hat{\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \left\| \int_0^\infty \langle t-s \rangle^{-\frac{d-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|f(s)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} ds \right\|_{L^{p'}}$$

由 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式便有

$$\text{上式} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

$$(p = p_d \Rightarrow \frac{d-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}) = \frac{d-1}{d+1}).$$

□.