§6 T1定理及其应用.

§6.1 卡尔松测度.(Carleson)

Def: $\mathbb{R}^{d+1}_+$ 上的正测度 ν 称作Carleson测度,若 $\forall$ 方体 $Q\subseteq\mathbb{R}^d$.
$\nu\big(Q\times(0,\ell(Q))\big)\le C|Q|$, 最佳常数 C 记作 $\|\nu\|$, 称作
ν 的Carleson常数.

例如. $\mathbb{R}^2_+$ 上的 $dr\,d\theta$ 为Carleson测度.

@. 实际上. Carleson 测度 ~~对一般~~ 定义中所涉及的不等式,对一般的可测集也对. 具体,我们有:
有意义的结果

Prop 6.1.1 设 ν 为 $\mathbb{R}^{1+d}_+$ 中的Carleson测度. $E\subseteq\mathbb{R}^d$ 为开集.
定义 $\hat{E}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}_+ \mid B(x,t)\subseteq E\}$. 则 $\nu(\hat{E})\le C\|\nu\|\mathcal{L}^d(E)$

证明. 对 χ_E 作水平为 $1/2$ 的 Calderón-Zygmund 分解.
则得到一列不交的二进方体 $\{Q_j\}$. s.t. $E\subseteq\bigcup_j Q_j$.
$\mathcal{L}^d(E)\le\sum_j|Q_j|\le 2\mathcal{L}^d(E)$.

设 $(x,t)\in\hat{E}$. 则 $\exists j$. $x\in Q_j$. 记 $\widetilde{Q_j}=2Q_j$.

则 $\widetilde{Q_j}\cap E^c\ne\emptyset$.

因此.由于 $B(x,t)\subseteq E$ 知. $t<\sqrt{d}\,\ell(\widetilde{Q_j})$
$=2\sqrt{d}\,\ell(Q_j)$.

$\Rightarrow \hat{E}\subseteq\bigcup_j Q_j\times(0,2\sqrt{d}\,\ell(Q_j))$.

$$\nu(\hat{E})\le\sum_j\nu\big(Q_j\times(0,2\sqrt{d}\,\ell(Q_j))\big)$$
$$\le\|\nu\|(2\sqrt{d})^d\sum_j\mathcal{L}^d(Q_j).$$
$$\le\|\nu\|\,2\,(2\sqrt{d})^d\,\mathcal{L}^d(E)$$
□

Rmk: 该命题的逆也是对的

下面给出Carleson测度的两种刻画

1. ~~Carlse~~ ν为$\mathbb{R}^{1+d}_+$的Carleson测度 $\Longleftrightarrow$ Poisson 积分算子为 $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d) \to L^p(\mathbb{R}^{d+1}_+, \nu)$ 的有界算子.

Prop 6.1.2：ϕ 有界、可积，正值、径向递减. 对 $t>0$ 令 $\phi_t(x) = t^{-d}\phi(\frac{x}{t})$. 则 ν为 Carleson测度 $\Longleftrightarrow$ $\forall 1<p<\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^{1+d}_+} |\phi_t * f(x)|^p \, d\nu(x,t) \le C\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p \, dx, \quad C\approx \|\nu\|.$$

<u>Proof</u>: $\Longrightarrow$) 若ν为Carleson测度. 令 $M_\phi f(x) = \sup\{|\phi_t * f(y)| : |x-y|<t\}$

~~$\forall y\in B(x,t)$~~

~~$|\phi_t * f(y)| = \frac{1}{t^d}\int\phi(\frac{x}{t})$~~ ~~$\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\frac{y-z}{t})f(z)\,dz.$~~

~~$\le \|\phi\|_{L^\infty} Mf(x)\,dx.$~~

由ϕ的条件知，$M_\phi f(x) \le C Mf(x)$.

从而 $\int_{\mathbb{R}^{1+d}_+} |\phi_t*f(x)|^p \, d\nu(x,t) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\,\nu\{(x,t)\,|\,|\phi_t*f(x)|>\lambda\}\,d\lambda$.

令 $E_\lambda = \{x\in\mathbb{R}^d \mid M_\phi f(x)>\lambda\}$ 则 $\{(x,t)\,|\,|\phi_t*f(x)|>\lambda\}\subseteq \widehat{E_\lambda}$.

故由Prop 6.1.1 上式 $\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\cdot C\|\nu\|\,\mathcal{L}^d(E_\lambda)\,d\lambda.$

$$= C\|\nu\|\int_{\mathbb{R}^d} M_\phi f(x)^p\,dx.$$

$$\le C\|\nu\|\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,dx.$$

$\Longleftarrow$)：设$B\subseteq\mathbb{R}^d$ 是中心x_0，半径r的球.

设$(x,t)\in\hat{B}$ (i.e. $B(x,t)\subseteq B$).

则 $|\phi_t*\chi_B(x)| = \int_{B(x_0,r)}\phi_t(x-y)\,dy \ge \int_{B(0,t)}\phi_t(y)\,dy = \int_{B(0,1)}\phi(y)\,dy = A$

$\Longrightarrow \nu(\hat{B}) \le \frac{1}{A^p}\int_{\mathbb{R}^{d+1}_+}|\phi_t*\chi_B(x)|^p\,d\nu(x,t) \lesssim C\,\mathcal{L}^d(B)$

由Prop 6.1.1 Rmk知. 结论成立 $\square$

2. Carleson 测度的 BMO 刻画

Prop 6.1.3: $b\in BMO$. $\psi\in S$ $\int\psi=0$. 则

$$d\nu := |b*\psi_t(x)|^2\frac{dx\,dt}{t}$$ 是 Carleson 测度

$$\|\nu\| \lesssim \|b\|_{BMO}^2$$

Cor 6.1.4: ϕ、ψ 如上，$b\in BMO$

则 $$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |\phi_t*f(x)|^p|\psi_t*b(x)|^2\frac{dx\,dt}{t}$$
$$\lesssim \|b\|_{BMO}^2\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p\,dx$$

下面证明 Prop 6.1.3.

证明：任固定一个 $\mathbb{R}^d$ 中的方体 Q. 不妨设 Q 中心在原点（因 BMO 函数平移之后仍为 BMO 函数）. 令 $Q^*=2\sqrt{d}\,Q$. $b_{Q^*}=\fint_{Q^*}b$.

则：$$\nu(Q\times(0,\ell(Q)))=\int_0^\infty\int_0^{\ell(Q)}|b*\psi_t(x)|^2\frac{dx\,dt}{t}$$

$$\le 2\int_Q\int_0^{\ell(Q)}|(b-b_{Q^*})\chi_{Q^*}*\psi_t(x)|^2\frac{dx\,dt}{t}$$
$$+2\int_Q\int_0^{\ell(Q)}|(b-b_{Q^*})\chi_{Q^{*c}}*\psi_t(x)|^2\frac{dx\,dt}{t}$$

$$=I_1+I_2$$

$$I_1\le 2\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty|\widehat{(b-b_{Q^*})\chi_{Q^*}}(\xi)|^2|\hat\psi(t\xi)|^2\frac{d\xi\,dt}{t}$$

由于 $\hat\psi(0)=\int\psi=0$. $|\hat\psi(t\xi)|\le c\min\{|t\xi|,|t\xi|^{-1}\}$

故 $$\int_0^\infty|\hat\psi(t\xi)|^2\frac{dt}{t}\lesssim\int_0^{1/|\xi|}|t\xi|^2\frac{dt}{t}+\int_{1/|\xi|}^\infty|t\xi|^{-2}\frac{dt}{t}$$
$$\lesssim 1$$

$$\therefore I_1\lesssim\int_{Q^*}|b-b_{Q^*}|^2\lesssim|Q|\,\|b\|_{BMO}^2$$

设 Q_k^* ~~是中心在原点的方体~~ $= 2^k Q^*$.

相当于把方体3外一圈一圈地分层

则 $I_2 \le 2\int_Q \int_0^{l(Q)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_{k+1}^* \setminus Q_k^*} (b(y) - b_{Q^*}) \psi_t(x-y)\, dy\right|^2 \frac{dx\,dt}{t}$

因 $x \in Q$, 若 $y \notin Q_k^*$ 则 $|x-y| \ge 2^{k-1} l(Q)$

所以, 由 $\psi \in S \Rightarrow |\psi_t(x-y)| \lesssim t^{-d} (t^{-1} 2^k l(Q))^{-d-1}$

代入 I_2 有 $I_2 \lesssim \int_Q \int_0^{l(Q)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{2^k l(Q)} \|b\|_{BMO}\right)^2 \frac{dx\,dt}{t}$

$\lesssim |Q| \cdot \|b\|_{BMO}^2$

□

Rmk: Prop 6.1.3 の逆也对, 即: ψ. ν 如上. 若 ν 为 Carleson 测度, 则 $b \in BMO$, 证明见 Stein 调和分析 ch4.

#

接下来可以叙述 T1 定理.

§6.2 T1 定理 ~~的证明~~ 及其应用

T1 定理实际上讲的是非卷积型奇异积分算子 L^2 有界性 (进而容易得到 L^p 有界). 具体地, 设函数 $K: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta \to \mathbb{C}$ 满足

(Δ: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ の对角线)

① $|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^d}$

$\exists \delta > 0$ s.t.

② $|K(x,y) - K(x,z)| \lesssim \frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$ if $|x-y| > 2|y-z|$

③ $|K(x,y) - K(w,y)| \lesssim \frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$ if $|x-y| > 2|x-w|$

~~则~~ 称这样的 K 为标准核 (standard kernel)

由①～③知，K满足

②'：$\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x-y)-K(x,z)|\, dx \lesssim 1$

③'：$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x,y)-K(w,y)|\, dy \lesssim 1$

类似于C-Z奇异积分L^p有界性的证明，我们有如下结论

Thm 6.2.1：设$T: L^2\to L^2$有界，$K: \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\Delta$满足 ∀紧支$L^2$函数f.
$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)dy$　$x\notin$ Spt f. 若T满足②'③'，则T弱(1,1)，
强(p,p)，$1<p<\infty$. □

现设定义关于K的奇异积分算子T：
∀$f,g\in S(\mathbb{R}^d)$ & Spt f, Spt g 紧且不交，
有　(*)　$\langle Tf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy$.

则T^*对应的积分核$\tilde{K}(x,y)=K(y,x)$.

注记. 若$T: L^2\to L^2$有界，则对$f\in L^\infty$，我们可以定义$Tf\in BMO$.
但现在问题是，我们事先并不知T是L^2有界的，作为替代，
我们可以对$f\in C_b^\infty$先去定义Tf，$Tf\in C_c^\infty$且积分平均为0

现固定$g\in C_{c,0}^\infty$，Spt g $\subseteq B(0,R)$，$f\in L^\infty\cap C^\infty$
固定$\psi_1,\psi_2\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，Spt $\psi_1\subseteq B(0,3R)$，$\psi_1=1$ in $B(0,2R)$
$\psi_1+\psi_2=1$.
则$f\psi_1\in S(\mathbb{R}^d)$，$\langle T(f\psi_1), g\rangle$是可以定义的

若 f 紧支，则由(*)知

$$\langle T(f\psi_2), g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\psi_2(y) g(x)\,dx\,dy$$

但对一般的 f，并不一定紧支，此时我们定义 $\langle T(f\psi_2), g\rangle$ 为

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (K(x,y) - K(0,y)) f(y)\psi_2(y) g(x)\,dx\,dy$$

(由于 $\int g = 0$ 知，当 f 紧支时，以上两式契合)

上面这个积分也是有定义的，因为 ψ_2 的支集远离原点，

对 $g \in C_0^\infty$

从而 $|K(x,y) - K(0,y)| \lesssim \frac{|x|^\delta}{|y|^{d+\delta}}$ 可积。

所以，现在我们可定义 Tf 如下

(#) $\langle Tf, g\rangle = \langle T(f\psi_1), g\rangle + \langle T(f\psi_2), g\rangle$

由于 $\int g = 0$，所以上式与 ψ_1, ψ_2 选取无关。

下面我们利用(#)式定义 $T1$ 和 T^*1。

· 给定 $f \in C^\infty \cap L^\infty$，我们称 $Tf \in BMO$ 是指 $\exists\, b \in BMO$ s.t. $\forall g \in C_{c,0}^\infty$，$\langle Tf, g\rangle = \langle b, g\rangle$。又由 $C_{c,0}^\infty$ 在 H^1 中稠密，以及 H^1-BMO duality

我们可知这其价于 $|\langle Tf, g\rangle| \le C\|g\|_{H^1}$。

为了陈述 $T1$ 定理，我们还需引入一个定义。

<u>Def</u>：称算子 T 是具有"弱有界"(WBP)，若对 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的任一有界集 B，$\exists\, C_B > 0$，s.t. $\forall \phi_1, \phi_2 \in B$，$x \in \mathbb{R}^d$，$R > 0$

有 $|\langle T\phi_1^{x,R}, \phi_2^{x,R}\rangle| \le C_B R^d$。

其中 $\phi_i^{x,R}(y) = \phi_i\left(\frac{y-x}{R}\right)$

即
若算子T是 L^p 有界，则 $T\in WBP$.

现给定一个 标准核K，（i.e. $K(x-y)=-K(y-x)$） ... (**)
斜对称

则我们可定义 $\langle Tf,g\rangle=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{|x-y|\geq\varepsilon}K(x-y)f(y)g(x)\,dy\,dx$

$$\overset{K\text{斜对称}}{=}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}K(x-y)\big(f(y)g(x)-f(x)g(y)\big)\,dy\,dx$$

易证，该积分绝对收敛（插项 $f(y)g(y)$，中值定理）

(**) 是WBP的。实际上，只用注意 $\langle T\phi_1^{z,R},\phi_2^{z,R}\rangle=R^d\langle T_{z,R}\phi_1,\phi_2\rangle$

其中 $T_{z,R}$ 是 (**) 中的T，将积分核换成 $R^dK(Rx+z,Ry+z)$ 所对应的算子，它也是标准核。

现在可以叙述T1定理：

Thm 6.2.2　$T:\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 是对应标准核K的奇异积分算子，它能延拓为 $L^2\to L^2$ 的有界算子 $\Longleftrightarrow$

(1) $T1\in BMO$

(2) $T^*1\in BMO$

(3) T WBP.

Rmk：(1)(2) 是必要的，这由奇异积分 $L^\infty\to BMO$ 有界性即可得出

(3) 的必要性：考虑 $d=1$ 的微分算子 $\partial:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

与 Kernel 0 对应，但 ∂ 不可能为 $L^2\to L^2$ 有界算子，这是因为 ∂ 不满足 WBP.

Cor 6.2.1　K standard kernel + 斜对称

T如 (**) 所述，则 T L^2有界 $\Longleftrightarrow$ $T'1\in BMO$

□

现在证明T1定理：

Proof：Step1：若$T1=T^*1=0$.

T WBP.

我们要设法构造一列算子R_N. 每个R_N均是有限和的形式.

要求：$R_N \to T$ in some sense

· 能对$\{R_N\}$用Cotlar引理（取$\mathcal{H}=L^2$）.

(1) 构造Cotlar引理条件

现固定一个$\phi \in S(\mathbb{R}^d)$：$\operatorname{Spt}\phi \subseteq B(0,1)$ $\int\phi=1$ $\phi_j(x)=2^{-jd}\phi(\frac{x}{2^j})$

径向函数

$S_j f := \phi_j * f$ $\Delta_j = S_j - S_{j-1}$

则我们形式上有 $T=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(S_jT\Delta_j + \Delta_jTS_j - \Delta_jT\Delta_j)$. 具体而言. 是：

Lemma 6.2.1 令 $R_N=\sum_{j=-N}^{N} S_jT\Delta_j + \Delta_jTS_j - \Delta_jT\Delta_j$

则 $\forall f,g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. $\langle R_Nf,g\rangle \to \langle Tf,g\rangle$

※.

Lemma 6.2.1 表明. 证明$T: L^2\to L^2$有界. 只用证$\{R_N\}$是$L^2\to L^2$

一致有界的. 这样之后. 对$\{R_N\}$用Cotlar引理即可. R_N的每个

求和项中有三项，我们只对$T_j=S_jT\Delta_j$作估计，余下两项的估计是类似的.

Proof：$\Delta_j=S_j-S_{j-1}$ 代入知.

$$R_N=\sum_{j=-N}^{N} S_jT(S_j-S_{j-1})+(S_j-S_{j-1})TS_j - (S_j-S_{j-1})T(S_j-S_{j-1})$$

$$=S_NTS_N - S_NTS_{N-1} + S_NTS_N - S_{N-1}TS_N - S_NTS_N + S_NTS_{N-1} + S_{N-1}TS_N - S_{N-1}TS_{N-1}$$

$$+\cdots$$

$$=S_NTS_N - S_{N-1}TS_{N-1}.$$

抵消后 bbb

由于 $S_{N+1}f \to f$ in $S(\mathbb{R}^d)$，以及 $T: S \to S'$ 连续知

$$\langle S_{N+1} T S_{N+1} f, g\rangle \to \langle Tf, g\rangle \quad \text{as } N\to\infty$$

故只用证 $\langle S_N T S_N f, g\rangle \to 0$ as $N \to +\infty$ 这会用到 T 是 WBP 的。

对 $N \geq 1$，定义函数 $f_N(x) = 2^{dN}(\phi * f(2^N\cdot))(x)$。

则 $\{f_N\}$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的有界集（由 $\|\partial^\alpha f_N\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty}$ 有一致上界，& $\{f_N\}$ 位于一个固定的紧集中）

类似对 g 定义 g_N，则由 WBP 性质

$$|\langle Tf_N(2^{-N}\cdot), g_N(2^{-N}\cdot)\rangle| \lesssim 2^{dN}$$

而 $f_N(2^{-N}x) = 2^{dN}(\phi * f(2^N\cdot))(x)$

$$= 2^{dN} S_N f(x)$$

$$g_N(2^{-N}x) = 2^{dN} S_N g(x)$$

所以 $|\langle T S_N f, S_N g\rangle| \lesssim 2^{-dN}$ 令 $N\to\infty$ 即可

□

(2) 对 $T_j = S_j T \Delta_j$ 的积分核进行估计

令 $\psi = \phi - \phi_1$，$\phi_j^x(u) = 2^{-jd}\phi\left(\frac{x-u}{2^j}\right)$

$$\psi_j^y(u) = 2^{-jd}\psi\left(\frac{u-y}{2^j}\right)$$

则 $\forall f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T_j f, g\rangle = \langle T\Delta_j f, S_j g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \langle T\psi_j^y, \phi_j^x\rangle f(y) g(x)\, dy\, dx$$

故积分核为 $K_j(x, y) = \langle T\psi_j^y, \phi_j^x\rangle$。

现在开始估计 K_j

Lemma 6.2.2: $p(x) = \langle x\rangle^{-d-\delta}$，$\delta>0$ 是标准核定义中出现的常数，$p_j(x) = 2^{-jd}p(2^{-j}x)$ 则

(1) $|K_j(x,y)| \lesssim P_j(x-y)$

(2) $|K_j(x,y)-K_j(w,y)| \lesssim \min\{1, 2^{-j}|x-w|\}\left(P_j(x-y)+P_j(w-y)\right)$

对 y 变量也有类似结论

(3) $\forall x.\ \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} K_j(x,y)\,dx = 0$

<u>证明</u>：(1) ① ~~$|x-y|$~~ $|x-y| \le 10\cdot 2^{j}$ 时. 令 $\tilde{\phi}(u) = \phi(u-2^{-j}(x-y))$.

则 $\tilde{\phi}$ 跑遍了 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中的一个有界集. 又 $\phi_j^x = \tilde{\phi}_j^y$

故由 WBP 性质：

$|K_j(x,y)| = |\langle T\psi_j^x, \tilde{\phi}_j^y\rangle| \le C\cdot 2^{-jd} \le C\cdot P_j(x-y)$

② $|x-y| \ge 10\cdot 2^{j}$. 则 ψ_j^x, ψ_j^y 支集不交.

从而 $K_j(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \phi_j(x-u)K(u,v)\psi_j(v-y)\,du\,dv$

$\overset{\int\psi=0}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \phi_j(x-u)\left(K(u,v)-K(u,y)\right)\psi_j(v-y)\,du\,dv$

由于 $|x-u|, |v-y| \le 2^{j}$ $|u-y| \approx |x-y|$

故上式 $\lesssim \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \phi_j(x-u)\psi_j(v-y)\cdot \frac{|v-y|^\delta}{|u-y|^{d+\delta}}\,du\,dv$ $\lesssim 2^{j\delta}$

$\sim \frac{2^{j\delta}}{|x-y|^{d+\delta}} \lesssim P_j(x-y)$.

(1) 至此得证.

(2) 若 $|w-x| \ge 2^{j}$ 则由 (1) 即得

所以设 $|w-x| < 2^{j}$

若 u 在线段 $\overline{wx}$ 上. 则 $P_j(u-y) \le C\cdot(P_j(x-y)+P_j(w-y))$

故只需证. $|D_x K_j(x,y)| \lesssim 2^{-j}P_j(x-y)$.

这是显然的，因 $K_j(x,y)=\langle T\psi_j^y,\ \phi_j^x\rangle = 2^j\langle T\psi_j^y,\ \phi_j^x\rangle$

(5). 实际上. $\int K_j(x,y)dy=0 \Leftrightarrow T(1)=0$

$\int K_j(x,y)dx=0 \Leftrightarrow T^*1=0$

$\int_{|y|\le R} K_j(x,y)dy=\langle Th,\phi_j^x\rangle$, $h(u)=2^{-jd}\int_{|y|\le R}\psi\left(\frac{u-y}{2^j}\right)dy$

若 $|u|>R+2^{j+1}$ 则 由 $Spt\ \psi\subseteq B(0,2)$ 知. $|u-y|\le 2^{j+1}$ 时 $\psi=0$

所以. 此时 $h=0$.

又因 $\int\psi=0$ 且 ψ 紧支. 所 $|u|\le R-2^{j+1}$ 时. h 也是 0

让 R 充分大, 这样 h. ϕ_j^x 支集不交, 进而我们可用(※)

来估计: $|\langle Th,\phi_j^x\rangle| \lesssim \int_{||u|-R|<2^{j+1}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{2^{-jd}}{|u-v|^d}\phi\left(\frac{v-x}{2^j}\right)dv\,du.$

$\lesssim 2^{-j}R^{d-1}R^{-d}\to 0$ as $R\to\infty$

对 $\int K_j(x,y)dx=0$.

若 $R>2^j$ 则. $\int_{|x|\le R}K_j(x,y)dx$

$=\int_{|x|\le R}K_j(x,y)dx-\underbrace{\langle T\psi_j^y,1\rangle}_{T^*1=0}$

$=\langle\psi_j^y,T^*h\rangle$. 其中 $h(u)=2^{-jd}\int_{|x|\le R}\phi\left(\frac{u-x}{2^j}\right)dx$

由于 $\int\phi=1$. $Spt\ \phi\subseteq B(0,1)$ 故.

$|u|\le R-2^j$ 时. $h(u)=0$.

对 R 充分大: ψ_j^x, h 支集不交. 故由(※).

$\langle\psi_j^y,T^*h\rangle=\int_{|v-y|\le 2^{1+j}}\int_{|u|>R-2^j}(K(u,v)-K(u,y))h(u)2^{-jd}\psi\left(\frac{v-y}{2^j}\right)du\,dv$

故由 K 的标准估计.知

$|\text{上式}|\lesssim 2^{-jd}\int_{|v-y|\le 2^{j+1}}\int_{|u|>R-2^j}\frac{|v-y|^\delta}{|u-y|^{d+\delta}}du\,dv$

$$\lesssim 2^{j\delta}\int_{|u|>R/2}\frac{du}{|u|^{d+\delta}}\to 0 \quad as\ R\to\infty$$

□

(3). 验证 Cotlar 引理条件.

目前只差对 $\|T_jT_k^*\|_{L^2\to L^2}$ 的估计. 易得 $T_jT_k^*$ 对应的积分核是 $A_{jk}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}K_j(x,z)K_k(y,z)\,dz$ 它实际上满足如下估计.

Lemma 6.2.3:

对 $\forall x$. $\int_{\mathbb{R}^d}|A_{j,k}(x,y)|\,dy\lesssim 2^{-\delta|j-k|}$

$\int_{\mathbb{R}^d}|A_{jk}(x,y)|\,dx\lesssim 2^{-\delta|j-k|}$

<u>证明</u>.

$$|A_{j,k}(x,y)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}K_j(x,z)\big(K_k(y,z)-K_k(y,x)\big)\,dz\right|$$

$$\overset{6.2.2}{\lesssim}\int_{\mathbb{R}^d}P_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}\big(P_k(z-y)+P_k(x-y)\big)\,dz$$

易见: $\int_{\mathbb{R}^d}P_k(z-y)\lesssim 1$. $\int_{\mathbb{R}^d}P_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}\,dx\lesssim 2^{-\delta|k-j|}$

那么. $\int\cdots\lesssim\int_{\mathbb{R}^d}P_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}\int_{\mathbb{R}^d}P_k(z-y)+P_k(x-y)\,dy\,dz$

$\lesssim 2^{-\delta|k-j|}$.

而(2) $\lesssim\int_{\mathbb{R}^d}P_k(z-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d}P_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}\,dx\right)dz$

+ x与z换个位置

□

(4) 套用 Cotlar 引理：

现在只用证 $\|T_j T_k^*\|_{2\to 2} \lesssim 2^{-\delta|j-k|}$

实际上，$\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$，

$$\|T_j T_k^* f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} A_{jk}(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |A_{jk}(x,y)|\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |A_{jk}(x,y)| |f(y)|^2 dy \right) dx$$

$$\lesssim 2^{-2\delta|j-k|} \|f\|_2^2$$

对 $T_j T_k^*$ 也是一样，不再重复证明。这样对 R_N^ε 使用 Cotlar 引理

便完成了证明：

Step 2：$T1$，T^*1 未必为 0，

此时我们希望从 T 出发，构造一个 $\tilde{T}$，使 $\tilde{T}1 = \tilde{T}^*1 = 0$。

从而先对 $\tilde{T}$ 证明 L^2 有界性，再对 T 证，这得益于如下引理。

Lemma 6.2.4：任给定 $b \in BMO$，都存在一个 C-Z 算子 L

s.t. $L1 = b$，$L^*1 = 0$。

若该引理正确，则设 $T1 = b_1$，

$T^*1 = b_2$，

由 6.2.4 知，$\exists\ b_1, b_2$ s.t. $L_1 1 = b_1$，$L_1^* 1 = 0$，

$L_2 1 = b_2$，$L_2^* 1 = 0$。

令 $\tilde{T} = T - L_1 - L_2^*$，便有 $\tilde{T}1 = \tilde{T}^*1 = 0$

由 ① $\Rightarrow \tilde{T}$ L^2 有界，又 L_1，L_2 为 C-Z 核也 L^2 有界

故 T L^2 有界，至此 $T1$ 定理得证 □

余下只用证 Lemma 6.2.4. 实际上，L被称作"仿积算子".

Pf: 要证的有: ① L满足T的类似估计

② L^2有界性

③ $L1=b$, $L^*1=0$.

① L的积分核是

$$K(x,y)=c\int_0^\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}\psi_t(x-z)(\psi_t*b)(z)\,\phi_t(z-y)\,dz}\frac{dt}{t}$$

$$=:c\int_0^\infty K_t(x,y)\frac{dt}{t}$$

Fix $z\in\mathbb{R}^d$. 设Q为以z为中心，边长2t的方体. $b_Q=\fint_Q b$

则由 $\int\psi=0$ 知,

$$|(\psi_t*b)(z)|=\left|\int_Q\psi_t(z-y)\,b(y)\,dy\right|$$

$$=\left|\int_Q\psi_t(z-y)(b(y)-b_Q)\,dy\right|$$

$$\lesssim 2^d\|b\|_{BMO}\|\psi\|_{L^\infty}$$

$$\therefore |K_t(x,y)|\le 2^d\left|\int_{\mathbb{R}^d}\psi_t(x-z)\,\phi_t(z-y)\,dz\right|\cdot\|b\|_{BMO}\|\psi\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim 2^d\|\psi\|_{L^\infty}\|\psi_t\|_{L^\infty}\|b\|_{BMO}\|\phi_t\|_1$$

$$\lesssim\frac{1}{t^d}\|b\|_{BMO}.$$

而在 $|x-y|>2t$ 时. $K_t(x,y)=0$. 故实际上,我们证明了

$$|K_t(x,y)|\lesssim\|b\|_{BMO}\,t^{-d}\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{-d-2}.$$

$$\Rightarrow K(x,y)\lesssim\frac{\|b\|_{BMO}}{|x-y|^d}$$

类似地，我们可以证明：

$$|\nabla_x K(x-y)|+|\nabla_y K(x-y)| \lesssim \frac{\|b\|_*}{|x-y|^{d+1}}$$

令 $\delta=1$ 知，积分核 K 是 Standard kernel.

① ② L^2 有界性：令 $g\in S(\mathbb{R}^d)$，$\|g\|_{L^2}\le 1$.

则 $\langle Lf,g\rangle = c\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty (\psi_t * b)(x)\,(\phi_t * f(x))\,(\psi_t * g(x))\,\frac{dt\,dx}{t}$

$$\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |\psi_t * b(x)|^2 |\phi_t * f(x)|^2 \frac{dt\,dx}{t}\right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |\psi_t * g(x)|^2 \frac{dx\,dt}{t}\right)^{1/2}$$

由 cor 6.1.1 知：第一项 $\lesssim \|b\|_{BMO}\|f\|_{L^2}$.

第2项：$\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |\psi_t * g(x)|^2 \frac{dx\,dt}{t}$

$$=\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\psi_t}\,\hat{g}|^2 d\xi \cdot \frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(t\xi)|^2 d\xi \,\frac{dt}{t}$$

$$\lesssim \|g\|_2^2$$

$\therefore |\langle Lf,g\rangle| \lesssim \|b\|_{BMO}\|f\|_2\|g\|_2$. $\therefore L^2$ 有界

③ $L1 = b \qquad L^* 1 = 0$

$\forall t>0$. 我们有: $(\psi_t * ((\psi_t * b) g \phi_t * \cdot))^* = \phi_t * ((\psi_t * b)\psi_t * \cdot)$.

由 $\int \psi = 0$ 知. $\psi * 1 = 0 \qquad \therefore L^* 1 = 0$

下求 $L1$. $\forall g \in C_{c,0}^\infty$

~~由~~ 由于 $\forall x$. $(\phi_t * 1)(x) = 1$

故:

$$\langle L1, g\rangle = c\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t * b(x) \underbrace{\phi_t * 1(x)}_{=1} \psi_t * g(x) \frac{dx\,dt}{t}$$

$$= c\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} b(x)\, \psi_t * \psi_t * g(x) \frac{dx\,dt}{t}$$

欲使上式 $= \langle b, g\rangle$. 我们需要:

$$c\int_0^\infty \psi_t * \psi_t * g \frac{dt}{t} = g \qquad \text{in } H^1.$$

作Fourier变换知. 这等价于 $\forall \xi \neq 0$

$$c\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1$$

由 ψ 径向知. 该积分不依赖于 ξ 故 c 的值得以确定. □

至此, T1定理证明结束.

接下来看T1定理的应用 ~~主要推了~~ 首先要看,什么样的积分核满足standard kernel的条件. 在此,我们着重介绍 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分:

设 A 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lipschitz 函数. $\Gamma = (t, A(t))$ 为复平面上的曲线.

任给 $f \in S(\mathbb{R})$ 令 $C_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,(1+iA'(t))}{t+iA(t)-z}\, dt$.

$C_\Gamma f(z)$ 定义了开集 $\Omega_+ = \{z=x+iy\in\mathbb{C} \mid y>A(x)\}$ 上的全纯函数.

它在 Γ 上的边值由 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} C_\Gamma f(x+i(A(x)+\varepsilon))$ 给出.

i.e. $$\frac{1}{2}f(x)+\frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)\,(1+ia(t))}{x-t+i(A(x)-A(t))}\,dt.$$

于是,我们考虑 $$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y+i(A(x)-A(y))}\,dy$$

其积分核为

$$K(x,y)=\frac{1}{x-y+i(A(x)-A(y))}$$ 满足 $\delta=1$ 的估计.

进一步,我们可以展开 K 的分母 仅需：（$\|A'\|_\infty<1$ 时）.

$$K(x,y)=\frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{\infty}\left(i\,\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k.$$

$\forall k\geq 0$. 令 $$T_k f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

对应的核为 $K_k(x,y)=\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{1}{x-y}$ 满足 $\delta=1$ 的估计

T_k 被称作 Calderón 交换子.

Corollary 6.2.2 (1) $T_k: L^2$ 有界. 且 $\exists C>0$ $\|T_k\|_{2\to 2}\leq C^k\|A'\|_\infty^k$.

(2). $\exists\,\varepsilon>0$, 若 $\|A'\|_\infty\leq\varepsilon$, 则 K 为 C-Z 算子

Pf: (2) 由(1)显见, 只用证(1).

由 T1 定理证明知, T 的算子 norm 线性依赖于估计中的常数.

在 cor 6.2.1 中 $\|T\|_{L^2\to L^2}$ 依赖于 $\|T_k 1\|_{BMO}$ 和 K 的常数.

~~难点~~ 由于 K_k 是 standard kernel. $|K_k|\leq C_1(k+1)\|A'\|_\infty^k$.

故只需证 $\exists C>0,\ \forall k,\ \|T_k 1\|_{*} \le C^{k+1}\|A'\|_{L^\infty}^{k}$ $\cdots(*)$

若证得 $(*)$，则设 $C\ge C_1$ $\Rightarrow \|T_k\| \le C_2\left(C_1(k+1)+C^{k+1}\right)\|A'\|_{L^\infty}^{k}$

$$\le 2C_2 C^{k+1}\|A'\|_{L^\infty}^{k}$$

我们对 k 归纳来证明 $(*)$。

① $k=0$ 时 T_0 是 Hilbert 变换，$\Rightarrow T_0 1=0$

设对 k 成立，由 对 $k+1$

$T_{k+1}1 = T_k A'$ (细节自证)

$$\Rightarrow \|T_{k+1}1\|_{BMO} = \|T_k A'\|_{BMO} \le \|T_k\|_{L^\infty\to BMO}\|A'\|_{L^\infty}$$

$$\le C_3\left(C_1(k+1)\|A'\|_{L^\infty}^{k} + \|T_k\|_{L^2\to L^2}\right)\|A'\|_{L^\infty}$$

$$\le C^{k+2}\|A'\|_{L^\infty}^{k+1}.$$

□.

§6.3. Lipschitz 曲线上的柯西积分与 Tb 定理

设 $\Gamma=\{(x,A(x))\mid x\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一条 Lipschitz 曲线。

沿 Γ 的柯西积分为

$$C_\Gamma(f)(z) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi i}\int_{\substack{\zeta\in\Gamma\\ |\mathrm{Re}\,\zeta-\mathrm{Re}\,z|>\varepsilon}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \quad\cdots(*)$$

其定义的合理性由如下命题保证，证明见GTM 250.

Prop 6.3.1 设 $f\in C^\infty(\Gamma)$ 且 $|\zeta|\to\infty$ 时 $f(\zeta)\to 0$.

则对 a.e. $z\in\Gamma$ $C_\Gamma f(z)$ 可按上式 $(*)$ 定义；且

进一步地，对 a.e. $z\in\Gamma$ $\lim_{\delta\downarrow 0} F(z+i\delta) = \frac{1}{2}C_\Gamma(f)(z) - \frac{1}{2}f(z)$

$\lim_{\delta\downarrow 0} F(z-i\delta) = \frac{1}{2}C_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2}f(z)$ □

这一节我希望证明 C_Γ 在 L^2 有界性

Thm 6.3.1 C_Γ maps $L^2(\mathbb{R})$ to itself

为证明这个定理，我们要作出大量的铺垫工作。

1. Cauchy 积分的预解式 ~~与 L^2 有界性的归化~~

设 H 是 Γ 上的函数，令

$$C_\Gamma(H)(x+iA(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{H(y+iA(y))(1+iA'(y))}{y+iA(y)-x-iA(x)}dy$$

令 $h(y) = H(y+iA(y))$.

则 $$\int_\Gamma |H(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}} |h(y)|^2 (1+|A'(y)|^2)^{1/2} dy \approx \int_{\mathbb{R}} |h(y)|^2 dy.$$

~~故这等价于考虑~~

~~又因为 $1+iA'$ 有上、下界，且能被"吸收掉"~~ 所以

~~我们实际上~~

故等价于考虑 $$C_\Gamma h(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{h(y)(1+iA'(y))}{y-x+i(A(y)-A(x))}dy \quad (\#)$$

Recall: $\dfrac{1}{y-x+i(A(y)-A(x))}$ 应是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle$ 上的标准核.

Note: $\dfrac{1+iA'(y)}{y-x+i(A(y)-A(x))}$ 不是. 因 $1+iA'(y)$ 没有光滑性.

但 C_Γ 的 L^p ~~其~~ 有界性仍等价于

$$\tilde{C}_\Gamma(h)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{h(y)}{y-x+i(A(y)-A(x))}dy$$

这是因为 $1+iA'$ 上下有界且可积的缘故.

尽管 C_Γ 看上去形式简单, 但似乎较为实用的是(#)式,

$1+iA'(y)$ 的出现是非常关键的.

在T1定理证明中, 我们会用到了形如 $\int_0^\infty P_t T_t Q_t \frac{dt}{t}$ 的"预解式". P_t, Q_t 为恒等逼近算子. 在此, 我们也希望能照搬此法. 构造 C_Γ 相关的"预解式".

$$\forall s>0. \text{令} \quad C_\Gamma(h)(x;s)=\frac{1}{i\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{h(y)(1+iA'(y))}{y-x+i(A(y)-A(x))+is}dy \quad \cdots (\#1)$$

则: Fact:

① $C_\Gamma(h)(x;s)\to 0$ as $s\to\infty$

② $C_\Gamma(h)(x;s)=C_\Gamma(h)(x)+h(x)$ as $s\to 0$.

验证略去, 细节见 GTM 250.

2. L^2 估计的简化

在②的验证中, 我们实际上可以证明

$$C_\Gamma h(x)+h(x)=\int_0^\infty s^2\frac{d^2}{ds^2}C_\Gamma(h)(x;s)\frac{ds}{s}$$

$$=4\int_0^\infty s^2\frac{d^2}{ds^2}C_\Gamma(h)(x;2s)\frac{ds}{s}$$

$$=-\frac{8}{\pi i}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{s^2h(y)(1+iA'(y))}{(y-x+i(A(y)-A(x))+2is)^3}dy\frac{ds}{s}$$

$z=x+iA(x)$

$H(z)=h(x)$

$$=-\frac{8}{\pi i}\int_0^\infty\int_\Gamma\frac{s^2 H(\zeta)}{(\zeta-z+2is)^3}d\zeta\frac{ds}{s}$$

Fact: $\frac{1}{(\zeta-z+2is)^3}=-\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\zeta-w+is)^2}\frac{1}{(w-z+is)^2}dw$

代入知

$$G(h)(x)+h(x)=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\left(\int_\Gamma\frac{s}{(w-z+is)^2}\left(\int_\Gamma\frac{sH(\zeta)}{(\zeta-w+is)^2}d\zeta\right)dw\right)\frac{ds}{s}$$

将 $z=x+iA(x)$ 代入，并记：

$$\theta_s(x,y)=\frac{s}{(y-x+i(A(y)-A(x))+is)^2}$$

$$\textcircled{H}_s(h)(x)=\int_{\mathbb{R}}\theta_s(x,y)\,h(y)\,dy$$

则我们有：

$$G_\Gamma h(x)+h(x)=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \textcircled{H}_s\big((1+iA')\,\textcircled{H}_s((1+iA')h)\big)(x)\frac{ds}{s}$$

令 $M_b(h)=b\cdot h$.

则 $$C_\Gamma(h)+h=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \textcircled{H}_s M_{1+iA'}\textcircled{H}_s M_{1+iA'}(h)\frac{ds}{s}$$ ... (**)

下面用 L^2 norm 对其来估计：

$$\left\langle\int_0^\infty \textcircled{H}_s M_{1+iA'}\textcircled{H}_s M_{1+iA'}(h)\frac{ds}{s},\,g\right\rangle$$

$$=\int_0^\infty\left\langle M_{1+iA'}\textcircled{H}_s M_{1+iA'}(h),\,\textcircled{H}_s^*(g)\right\rangle\frac{ds}{s}$$

$$\lesssim\left(\int_0^\infty\|\textcircled{H}_s M_{1+iA'}(h)\|_2^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty\|\textcircled{H}_s(g)\|_2^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

因此，我们要证明的是：$\left(\int_0^\infty\|\textcircled{H}_s(h)\|_{L^2}^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}\lesssim\|h\|_{L^2}$

3. 一种特殊情况：

至此，我们已将原问题化成了一个 "T_1-type" 问题. 本节的讨论将在

$\mathbb{R}^d$ 中进行：

设 $\forall s>0$, $\exists$ 一列函数 $\{\theta_s\}$ on $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ s.t.

①′: $|\theta_s(x,y)| \lesssim \frac{1}{s^d}\frac{1}{(1+\frac{|x-y|}{s})^{d+\delta}}$

②′: $|\theta_s(x,y)-\theta_s(x,y')| \lesssim \frac{1}{s^d}\frac{|y-y'|^\gamma}{s^\gamma}$ $\quad 0<\gamma,\delta<\infty$

$\Theta_s(h)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\theta_s(x,y)h(y)dy$ ... ~~(***)~~ (##). 这对任何 $h\in L^p$ $\forall 1\le p\le\infty$ 都对

~~Thm 6.3.2~~:

Lemma 6.3.1: $s>0$. θ_s, Θ_s 如上, 设 $\forall s>0$. $\Theta_s(1)=0$.

则 $\forall f\in L^2$ $\left(\int_0^\infty \|\Theta_s f\|_{L^2}^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2}\lesssim_{d,\delta}\|f\|_{L^2}$.

Rmk: $\Theta_s 1=0$ 并不是一个容易成立的条件，但是 至少对Cauchy积分的预解式不对

加上此条件，我们的证明可以得到简化. 最后再说说去掉

这条假设. 这条假设给出了一个思路：应该寻找 Θ_s 在某个特定

函数上的作用.

Pf. 设 ψ 是支于 $\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$ 的 bump, $\psi_s=s^{-d}\psi(\frac{\cdot}{s})$.

记 Q_s 为对应 ψ_s 的 Littlewood-Paley 投影

则 且: $\int_0^\infty Q_s^2\frac{ds}{s}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N Q_s^2\frac{ds}{s}=Id$. $\quad$ in $S'/\mathcal{P}$.

$\Rightarrow \Theta_t=\Theta_t\int_0^\infty Q_s^2\frac{ds}{s}=\int_0^\infty\Theta_t Q_s^2\frac{ds}{s}$.

证明该引理的关键一步是

$$(*1):\ \|\Theta_t Q_s\|_{L^2\to L^2} \lesssim_{n,\psi} \min\left\{\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right\}^{\varepsilon}$$

若(*1)成立，则引理的证明是容易的：

选取 $G(x,t)$ s.t. $\displaystyle\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|G(x,t)|^2dx\,\frac{dt}{t}\le 1$,

我们利用对偶表示来完成证明：

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}G(x,t)\,\Theta_t(f)(x)\,dx\,\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}G(x,t)\int_0^\infty\Theta_t Q_s^2(f)(x)\,\frac{ds}{s}\,dx\,\frac{dt}{t}$$

$$\lesssim\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|G(x,t)|^2dx\cdot\min\left\{\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right\}^{\varepsilon}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|\Theta_t Q_s(Q_s(f))(x)|^2dx\,\min\left\{\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right\}^{-\varepsilon}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

注意到 $\displaystyle\sup_{t>0}\int_0^\infty\min\left\{\frac{t}{s},\frac{s}{t}\right\}^{\varepsilon}\frac{ds}{s}\lesssim_{\varepsilon}1.$

则上式 $\displaystyle\lesssim\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|\Theta_t Q_s(Q_s(f))(x)|^2dx\,\min\left\{\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right\}^{-\varepsilon}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$

$$\lesssim\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|Q_s(f)|^2dx\,\min\left\{\frac{s}{t},\frac{t}{s}\right\}^{2\varepsilon-\varepsilon}\frac{dt}{t}\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

$$\lesssim\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|Q_s(f)(x)|^2dx\,\frac{ds}{s}\right)^{1/2}$$

$\lesssim\|f\|_{L^2}$. 对 $G(x,t)$ 取sup即得.

于是只用证(*1)式即可，~~第一件事是~~需要寻找积分核并验证standard kernel的估计:

证明的关键是用到 $\Theta_t(1)=0$ $Q_s(1)=0$

积分核为 $L_{t,s}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}\theta_t(x-z)\psi_s(z-y)\,dz$.

由于 $(y,z)\mapsto\psi_s(z-y)$ 满足 ① 中 $\delta=1$ 的情况.

(2)'

则只用证:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|L_{t,s}(x,y)|\,dy\lesssim\min\left\{\frac{t}{s},\frac{s}{t}\right\}^{C}\quad ③$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|L_{t,s}(x,y)|\,dx\lesssim\min\left\{\frac{t}{s},\frac{s}{t}\right\}^{C}\quad ④$$

其中 $C=\frac{1}{4}\frac{\min(\delta,1)}{d+\min(\delta,1)}\min(\gamma,\delta,1)$

就可用 Schur's test 导出结果.

首先,我们观察到.

$s\le t$ 时
$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{s^{-d}\min\{2,(t^{-1}|u|)\}^{\gamma}}{\left(1+\frac{|u|}{s}\right)^{d+1}}\,du\lesssim_d\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}\min\{\gamma,1\}}$$

$t\le s$ 时
$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{t^{-d}\min\{2,s^{-1}|u|\}^{\gamma}}{\left(1+\frac{|u|}{t}\right)^{d+\delta}}\,du\lesssim_d\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2}\min\{\delta,1\}}$$

现在若 $s\le t$. 我们用 $Q_s(1)=0$ ($\forall s>0$) 可得.

$$|L_{t,s}(x,y)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\theta_t(x,z)-\theta_t(x,y)\right)\psi_s(z-y)\,dz\right|$$

$$\lesssim\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\min\left\{2,\left(\frac{|z-y|}{t}\right)^{\gamma}\right\}}{t^d}\frac{s^{-d}}{\left(1+\frac{|z-y|}{s}\right)^{d+1}}\,dz$$

$$\lesssim_d\frac{1}{t^d}\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}\min\{\gamma,1\}}$$

$$\lesssim_d\min\{t^{-1},s^{-1}\}^{d}\min\left\{\frac{t}{s},\frac{s}{t}\right\}^{\frac{1}{2}\min(\gamma,\delta,1)}$$

类似，利用 $\Theta_t(1)=0$ 可在 $0<t\le s$ 时，有

$$|L_{t,s}(x,y)| \lesssim \min\{\tfrac{1}{t},\tfrac{1}{s}\}^d \min\{\tfrac{t}{s},\tfrac{s}{t}\}^{\frac{1}{2}\min\{r,\delta,1\}}$$

又：
$$|L_{t,s}(x,y)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |\theta_t(x,z)|\,|\psi_s(z-y)|\,dz$$

$$\lesssim \frac{\min\{\frac{1}{t},\frac{1}{s}\}^n}{(1+\min\{\frac{1}{t},\frac{1}{s}\}|x-y|)^{d+\min\{\delta,1\}}}$$

$\therefore$

$$|L_{t,s}(x,y)| \lesssim \frac{\min\{\frac{s}{t},\frac{s}{t}\}^{\frac{1}{2}\min\{r,\delta,1\}(1-\beta)}\min\{\frac{1}{t},\frac{1}{s}\}^n}{(\qquad)^\beta}\quad \forall 0<\beta<1$$

取 $\beta=\dfrac{d+\frac{1}{2}\min(\delta,1)}{d+\min(\delta,1)}$ 对 x or y 积分即得

□

4. T(b) 定理.

现在将 $\Theta_s(1)=0$ 去掉，这需要引入如下定义

<u>Def</u>: $b:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 有界，若还 $\exists C_0>0$ s.t. $\operatorname{Re} b(x)\ge C_0$ 对 a.e. $x\in\mathbb{R}^d$ 成立 则称 b 为增积函数 (accretive function)

Thm 6.3.1 的证明将由下一引理完成

Lemma 6.3.2: 设 θ_s 如 6.3.1 所述，Θ_s 为核为 θ_s 的奇异积分算子。若存在增积函数 b s.t. $\Theta_s(b)=0$ 对任何 $s>0$ 成立，则

$$\left(\int_0^\infty \|\Theta_s f\|_{L^2}^2\frac{ds}{s}\right)^{1/2} \lesssim_{b,d} \|f\|_{L^2}\quad \forall f\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

~~充分~~ 若lemma 6.3.2 成立，则我们取 $b=1+iA'$.

并验证：

$$\Theta_s(1+iA')(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{s(1+iA'(y))}{(y-x+i(A(y)-A(x))+is)^2}\,dy$$

$$=\frac{-s}{y-x+i(A(y)-A(x))+is}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=0-0=0.$$

完全胜利！

至此我们也能看见，在约化原积分时不丢掉 $1+iA'$ 这项是有原因的。否则 $\Theta_s(1)\neq 0$，我们用不了 $T1$ or Tb 定理.

下面来证明 lem 6.3.2：

设 $\Phi\geq 0$ 是 Schwartz 函数. $\Phi_s(x)=s^{-d}\Phi(s^{-1}x)$. $\int\Phi=1$.

$P_s(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_s(x-y)f(y)\,dy$ 是恒逼近.

$P_s(1)=1$.

则：$\Theta_s=\left(\Theta_s-M_{\Theta_s(1)}P_s\right)+M_{\Theta_s(1)}P_s$.

这样我们强行构造了 $\Theta_s-M_{\Theta_s(1)}P_s$ 这个~~算子~~满足 $\Theta_s(1)=0$ 的算子；因为

$$\left(\Theta_s-M_{\Theta_s(1)}P_s\right)(1)=\Theta_s(1)-\Theta_s(1)P_s(1)=0$$

于是，只用对 ~~M~~ $M_{\Theta_s(1)}P_s$ 进行估计.

而这只用证 $|\Theta_s(1)(x)|^2 \frac{dxds}{s}$ 是 Carleson 测度. …(☆)

此时我们会用到 $\Theta_s(b)=0$.

$$P_s(b)\Theta_s(1) = P_s(b)\Theta_s(1) - \Theta_s P_s(b) + (\Theta_s P_s(b) - \Theta_s b)$$

这样只用证 $|\Theta_s(b)(x) - \Theta_s P_s(b)(x)|^2 \frac{dxds}{s}$, ①

$$|\Theta_s P_s(b)(x) - P_s b(x)\Theta_s(1)(x)|^2 \frac{dxds}{s} \quad ②$$

为 Carleson 测度即可.

若 ① ② 成立 $\Rightarrow |P_s(b)(x)\Theta_s(1)(x)|^2 \frac{dxds}{s}$ 也是

Carleson 测度. 再利用 b 是增程函数:

$$|P_s(b)| \geq \mathrm{Re}\, P_s(b) = P_s(\mathrm{Re}\, b)$$

$$\geq P_s(C_0) = C_0.$$

$$\Rightarrow |\Theta_s(1)(x)|^2 \leq \frac{1}{C_0^2}|P_s(b)(x)\Theta_s(1)(x)|^2$$

$\Rightarrow$ (☆) 是 Carleson 测度. ✓

先证 ①.

$\Theta_s P_s$ 的积分核为 $L_s(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_s(x,z)\Phi_s(z-y)dz$

满足 × . ××.

从而 $R_s = \Theta_s - \Theta_s P_s$ 也满足

又 $R_s(1)=0$ 　故 R_s 可满足 lem 6.3.1 的要求

$\Rightarrow$ ① Carleson.

对②. 令. $T_s(f)(x) = \Theta_s P_s(f) - P_s(f)(x)\Theta_s(1)(x)$.
其积分核 $L_s(x,y) - \Theta_s(1)(x)\,\Phi_s(x-y)$ 也满足. xx. xx.
且 $T_s(1)=0$. 再用lem 6.3.1即可

<u>Rmk</u>: 若将 Θ_s 换成 $\tilde{\Theta}_s = \Theta_s M_{1/\Theta_s(1)}$. $\tilde{\Theta}_s(1)=0$ 成立, 但
$\operatorname{Ker}\tilde{\Theta}_s$ 不满足 xx.

□

T(b)定理证毕.

关于Calderón 交换子估计. Cauchy 积分 L^p有界性
(CoifMan - McIntosh - Meyer Thm), 会用到仿积方法,
它也是多线性调和分析的开端. Ref: Muscalu & Schlag Vol 2
Ch4. 此处稍作介绍!