§5 Littlewood-Paley 理论与几乎正交性

§5.1 Mikhlin-Hörmander 乘子定理

在§3中，我们研究了卷积型奇异积分 $Tf=K*f$ 的 L^p 有界性。而利用"Fourier 变换将卷积变成乘积" ~~这句~~ 这个性质，我们又可以将 Tf 视作 $Tf=(m\hat{f})^\vee$，其中 $\check{m}=K$。从而我们研究的对象变成了 $T_m f(x)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} m(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$ 这样の算子。

设 $m:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 有界，则由 Plancherel 知 $\|T_m\|_{2\to 2}\le\|m\|_\infty$。

设 $K=\check{m}\in S'$，则 $T_m: L^1$ 有界 $\Longleftrightarrow K\in L^1$，$\|T_m\|_{1\to 1}\le\|K\|_1$。

当然，有~~大量~~很多时候，积分核未必 L^1（例如 Hilbert 变换）；因此，我们需要~~给~~给出对乘子 m 更弱的要求，使尽可能多的乘子 m 满足 T_m L^p 有界 $1<p<\infty$。

在此之前，我们先要引入 Littlewood-Paley 分解，这是用于"频率局部化"。

Lem 5.1.1 $\exists\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s.t. $\begin{cases}\operatorname{Spt}(\psi)\subseteq\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\\ \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{x}{2^j}\right)=1 \quad \forall x\neq 0.\end{cases}$

且 $\forall x\neq 0$，至多只有2个 $j\in\mathbb{Z}$ 使 $\psi\left(\frac{x}{2^j}\right)\neq 0$。

进一步地，ψ 可以是径向，非负函数。

Proof：令 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，$\chi(x)=\begin{cases}1 & \forall |x|\le 1\\ 0 & |x|\ge 2\end{cases}$

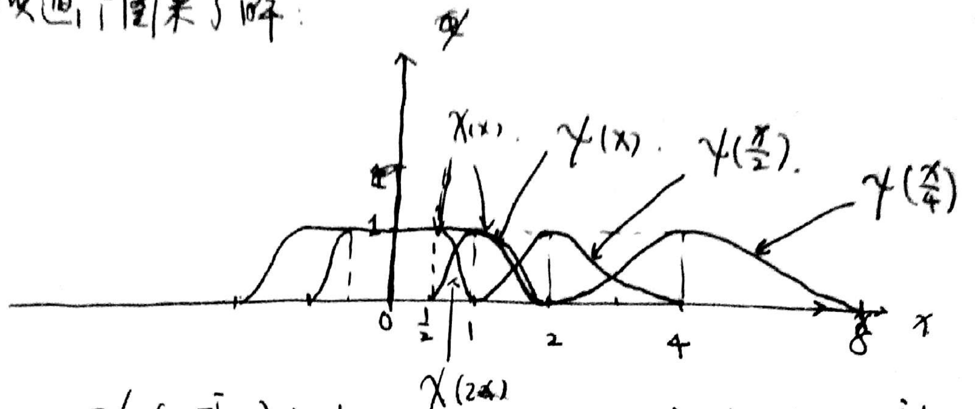
$$\psi(x)=\chi(x)-\chi(2x)$$

则 $\forall N$，$\sum_{j=-N}^{N}\psi(2^{-j}x)=\chi(2^{-N}x)-\chi(2^{N+1}x)$。

$x\neq 0$，则取 N 充分大，使 $\chi(2^{-N}x)=1$，$\chi(2^{N+1}x)=0$

□

我们可以画个图来了解:



$\psi(2^{-j}x)$ 相当于把 x 限制在 2^j 附近（位于 $2^{j-1}\le|x|\le 2^{j+1}$）

在实际应用中，x 往往取成频率变量 ξ

$P_j f := \left(\psi(\frac{\xi}{2^j})\hat f(\xi)\right)^\vee$ 即为对 f 的频率局部化。

下面我们将叙述并证明 Mikhlin 乘子定理。

Thm 5.1.1 (Mikhlin) 设 $m:\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ 满足：对任何长度$\le d+2$的多重指标 γ，

$$|\partial^\gamma m(\xi)|\le B\,|\xi|^{-|\gamma|}\quad \forall \xi\neq 0.$$

则 $\forall 1<p<\infty$, $\exists C=C(d,p)>0$ s.t. $\|(m\hat f)^\vee\|_p \le CB\|f\|_p$ $\forall f\in S$.

Pf: 设 ψ 如 Lem 5.1.1 中所述。

$m_j(\xi):=\psi(\frac{\xi}{2^j})m(\xi)$. $K_j(x)=\check m_j(x)$.

令 $K(x)=\sum_{j=-N}^{N}K_j(x)$.

Claim: $|K(x)|\le \frac{CB}{|x|^d}$, $|\nabla K(x)|\le \frac{CB}{|x|^{d+1}}$.

若 claim 成立，则 K 是 Calderón–Zygmund 核。由 C,B 与 N 无关，令 $N\to\infty$

又 $\|m\|_\infty\le B$. 故 $\|(m\hat f)^\vee\|_2\le B\|f\|_2$.

$\Rightarrow \|(m\hat f)^\vee\|_p \lesssim_{p,d}\|f\|_p$ $\forall f\in S$, $1<p<\infty$

claim 的证明：只证第一条：

由于 $|\partial^\gamma m(\xi)|\lesssim B|\xi|^{-\gamma}$，知

$$|\partial^\gamma m_j(\xi)|\le CB\,2^{-j|\gamma|}\qquad \forall|\gamma|\le d+2.$$

$$\Rightarrow \|\partial^\gamma m_j\|_1\lesssim CB\cdot 2^{-j|\gamma|}\cdot\underbrace{2^{jd}}_{\text{半径 }2^j\text{ 的 annulus 的测度}}$$

所以 $\|x^{\gamma} \check{m}_j(x)\|_\infty \le CB' 2^{j(d-|\gamma|)}$

而 $|x|^k \lesssim_{k,d} \sum_{|\gamma|=k} |x^{\gamma}|$.

故 $|\check{m}_j(x)| \le CB \cdot 2^{j(d-k)} |x|^{-k}$. $\forall 0 \le k \le d+2$
$\forall j \in \mathbb{Z}$
$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
|K(x)| &\le \sum_j |\check{m}_j(x)| \\
&= \sum_{2^j \le |x|^{-1}} |\check{m}_j(x)| + \sum_{2^j > |x|^{-1}} |\check{m}_j(x)| \\
&\underset{\text{用}k=0}{\le} CB \sum_{2^j \le |x|^{-1}} 2^{jd} + \underset{\text{用}k=d+2}{CB} \sum_{2^j > |x|^{-1}} 2^{jd} (2^{j}|x|)^{-d-2} \\
&\le CB |x|^{-d}.
\end{aligned}
$$

$\square$

<u>Rmk</u>. Mikhlin 乘子定理对 m 导数的要求可以放宽为

$$\sup_{R>0} R^{2|\alpha|} \int_{R<|\xi|<2R} |\partial_\xi^\alpha m(\xi)|^2 d\xi \le A^2 < \infty \quad \forall |\alpha| \le k.$$

$k = \lceil \frac{d}{2} \rceil$，该条件称为 Hörmander 条件

<u>Recall</u>: Riesz 变换:

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}(\xi) = \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \widehat{\Delta u}(\xi).$$

而乘子 $\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}$ 满足 Thm 5.1.1 条件.

从而 $\sup_{i,j} \|\partial_i \partial_j u\|_p \lesssim_{p,d} \|\Delta u\|_p$ 可直接由 Mikhlin 乘子定理得到. 同时, 此例也说明: Mikhlin 乘子定理在 $p=1$ 和 ∞ 都不对.

Rmk：Mikhlin乘子定理要求 $f\in S(\mathbb{R}^d)$，此时必有 $m\hat{f}\in S'$，从而 $(m\hat{f})^\vee\in S'$。~~问题~~ 现在想问：$(m\hat{f})^\vee$ 是否 ~~在~~ 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ 有意义（至少是缓增分布）？

若 $1\le p\le 2$，则 ~~$f\in L^2+L^\infty$~~ $\Rightarrow \hat{f}\in L^{p'}$ (Hausdorff-Young)

$\Rightarrow m\hat{f}\in S' \Rightarrow (m\hat{f})^\vee\in S'$

若 $p>2$，$(m\hat{f})^\vee$ 一般不是缓增分布。

§5.2. Littlewood-Paley平方函数

本节来给出Mikhlin乘子定理的一个重要应用。

设 χ_j 如 Lem 5.1.1，令 $P_jf=(\chi_j\hat{f})^\vee$

$\chi_j(\xi)=\chi(2^{-j}\xi)$。

则由Plancherel Thm知：

$$c^{-1}\|f\|_2^2\le\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|P_jf\|_2^2\le\|f\|_2^2,\quad \forall f\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

令 $Sf=\left(\sum_j|P_jf|^2\right)^{1/2}$ 为 ~~f~~ f 的 Littlewood-Paley 平方函数。

那么上式表明 $\|Sf\|_2\approx\|f\|_2$，~~那~~ 对一般的 p，是否也有 $\|Sf\|_p\approx_{p,d}\|f\|_p$ 的结论呢？对 $1<p<\infty$，$f\in S$，答案是肯定的。

Thm 5.2.1（平方函数定理）$1<p<\infty$，

$$\|Sf\|_p\sim_{p,d}\|f\|_p\quad\forall f\in S.$$

在证明之前，我们需要证明 Khinchine 不等式，并借此说明为什么能预测到平方函数定理的结论

Lemma 5.2.1: $1\le p<\infty$, $\exists\, C=C(p)$, s.t.

$$C^{-1}\Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^2\Big)^{p/2} \le \mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^N r_j a_j\Big|^p \le C\Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^2\Big)^{p/2}$$

$\forall N$, $\{a_j\}_1^N \subseteq \mathbb{C}$成立. 其中$\{r_j\}$为Rademacher函数 $r_j(t)=\mathrm{sgn}(\sin(2\pi\, 2^j t))$, $0<t<1$.

Rmk:
若令$\Omega=[0,1]$, $\mathbb{P}=[0,1]$上の Lebesgue 测度 则 $(\Omega, \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{P})$ 为概率空间. $\{r_j(t)\}$ 是一列独立の随机变量. 这是因为 $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}\{r_{j_1}=\varepsilon_1, \dots, r_{j_n}=\varepsilon_n\} = 2^{-n}.\quad \text{~~其中~~}\ \varepsilon_i=\pm 1.$$

直观上来看也是能理解的, 我们只需注意到 在知道某一个r_j的取值(有限个)的情况下, 不能判断其它任何一个r_j的取值.

~~先承认~~ Khinchine不等式的证明, 可参见 ......

下面来证明 Littlewood-Paley 平方函数定理:

Proof: 设$\{r_j\}$为 Rademacher 函数.

令 $m(\xi)=\sum_{j=-N}^{N} r_j\, \psi_j(\xi)$.

$$\text{则 } |\partial^\gamma m(\xi)| \le \sum_{j=-N}^{N} |\partial^\gamma \psi_j(\xi)| = \sum_{j=-N}^{N} 2^{-j|\gamma|}\Big|(\partial^\gamma \psi_j)\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big)\Big| \sim \sum_{j=-N}^{N} |\xi|^{-\gamma}\Big|(\partial^\gamma \psi)\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big)\Big| \lesssim |\xi|^{-\gamma} \qquad \forall \xi\ne 0$$

对每个fix的ξ, 只有三项不是0.

故 m为Mikhlin乘子.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^p\,dx \lesssim \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\sum_{j=-N}^{N} r_j (P_j f)(x)\Big|^p dx \lesssim \|f\|_p^p$$

[Mikhlin.

不等式另一边的证明较为简单:

任取bump函数 $\tilde{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s.t. $\tilde{\chi} = 1$ on $\operatorname{Spt}\chi$

$\operatorname{Spt}\tilde{\chi} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

$\tilde{P}_j$ 为 $\tilde{\chi}$ 对应的 Littlewood-Paley 投影.

则 $\tilde{P}_j P_j = P_j$.

现在

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} |\langle f, g\rangle|$$

而 $\forall f, g \in \mathcal{S}$. $1<p<\infty$

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\sum_j \langle P_j f, \tilde{P}_j g\rangle\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} \|P_j f\|_{\ell^2} \cdot \|\tilde{P}_j g\|_{\ell^2}\, dx$$

$$\le \big\| \|P_j f\|_{\ell^2} \big\|_{L^p} \big\| \|\tilde{P}_j g\|_{\ell^2} \big\|_{L^{p'}}$$

$$\overset{\text{用上一节引}}{\lesssim} \|Sf\|_p \, \|\tilde{S}g\|_{p'}$$

$$\lesssim \|Sf\|_p \, \|g\|_{p'}$$

$\square$

~~cor 5.2.1~~

那么显然我们想把定理的结论推广到一般的 L^p 函数上,

结论如下:

cor 5.2.1:

(1) $1<p<\infty$, 则 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $Sf \in L^p$, 且 $\|Sf\|_p \sim_{p,d} \|f\|_p$.

(2) 设 $f \in \mathcal{S}'$, 且 $Sf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ for some $1<p<\infty$. 则 $f = g + P$,

其中 $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, P 为多项式, 进一步: $Sf = Sg$.

$$\|Sf\|_p \sim_{p,d} \|g\|_p$$

Proof: (1). 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. 则 $\exists\{f_n\}\subseteq S(\mathbb{R}^d)$ $f_n\to f$ in L^p.

只用证: $Sf_k\to Sf$ in L^p.

若有此, 则 ~~$\|Sf_k - Sf\|_p\to 0$. $k\to\infty$~~

$\Rightarrow$ $\|Sf_k\|_p\sim\|f_k\|_p$ 中, 令 $k\to\infty$ 即可.

$$|Sf_k(x)-Sf(x)| = \left|\,\|P_jf_k\|_{\ell_j^2} - \|P_jf\|_{\ell_j^2}\right|$$

$$\le \|P_j(f_k-f)\|_{\ell_j^2}$$

$$\le S(f_k-f)(x)$$

$$\le \liminf_{m\to\infty} S(f_k-f_m)(x).$$

$$\Rightarrow \|Sf_k - Sf\|_p \le \liminf_{m\to\infty}\|S(f_k-f_m)\|_p$$

$$\le C_{p,d}\liminf_{m\to\infty}\|f_k-f_m\|_p \to 0 \text{ as } k\to\infty$$

(2) 只用证 $\forall h\in S(\mathbb{R}^d)$ with $\mathrm{Spt}(\hat{h})\subseteq\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$

$\langle f,h\rangle=\langle g,h\rangle$ 即可 (说明二者差一个支撑点分布).

设 $f\in S'$. h如上.

则 $|\langle f,h\rangle|\le C_p\|Sf\|_p\|\tilde{S}h\|_{p'}$

$$\le C_p\|Sf\|_p\|h\|_{p'}$$

由Hahn-Banach Thm. $\exists g\in L^p$: $\|g\|_p\lesssim_p\|Sf\|_p$

$\langle f,\bar{h}\rangle=\langle g,h\rangle$ $\forall h$如上.

$\Rightarrow f=g+P$. $Sf=Sg$. $(S(P)=0)$

因 $\widehat{P_j(P)}=\psi_j(\xi)\sum a_\alpha\delta^{(\alpha)}$ 支撑 与 ψ_j 支撑不交.

$\Rightarrow \|Sf\|_p=\|Sg\|_p\sim\|g\|_p.$

Rmk：在概率论中，我们有如下结论

Prop 5.2.1：$\{X_j\}$ 为可积 r.v. 且独立，$\mathbb{E}X_j=0$，则 $1\le p<\infty$，

$$\Big\|\sum_{j=1}^n X_j\Big\|_p \sim_p \Big\|\Big(\sum_{j=1}^n |X_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

在此，我们将 X_j 取作 P_jf，$n\to\infty$，那么 $|k-j|>10$ 时，P_kf 与 P_jf 也可视作随机变量，从而，若我们站在 Prop 5.2.1 的角度来看，在 ... 中引入概率论是比较自然的。

Rmk：平方函数定理对 $p=1$ 和 ∞ 都不对，验证留作习题。

~~(1) p=1 时~~ $\cancel{f=\delta_0，则 \widehat{P_jf}(\xi)=\psi_j(\xi)\cdot 1=\psi_j(\xi)}$

(1) $p=1$ 时，不严格地看，取 $f=\delta_0 \Rightarrow Sf(x)\approx |x|^{-d}\notin L^1(\mathbb{R}^d)$

但实际操作时应取一族 L^1-normalised 的逼近恒等。

(2) $p=\infty$ 时，用 $p=1$ 的结果与对偶即可。

□

Rmk：~~对~~设 $1\le q\le\infty$，$1\le p\le\infty$，若我们有 $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$，

成立不等式：$\Big\|\,\|P_jf\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\approx\|f\|_p$，则

则 q 必为 2，这相当于是平方函数定理的逆。

证明：若 $q<2$，令 $f_j(x)=e^{2\pi i\cdot\frac{3}{2}\cdot 2^j x}\varphi(x)$，$\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$ 支于 $|\xi|\le\frac{1}{8}$

$f=\cancel{f_1+f_2+f_3}\sum_{N\ge 3}f_j$

则：$\hat f_j(\xi)=\hat\varphi(\xi-\frac{12}{8}\cdot 2^j)$ 支于 $[\frac{1}{8}+\frac{12}{8}\cdot 2^j,\ \frac{13}{8}+\frac{12}{8}\cdot 2^j]$

$\subseteq[\frac{9}{8}\cdot 2^j,\ \frac{15}{8}\cdot 2^j]\quad\forall j\ge 3$

故 $\hat\psi(\frac{\xi}{2^j})$ 在 $\mathrm{Spt}\,\hat f_j$ 上 $\equiv 1$，（这里 $\psi\in C^\infty$，$\hat\psi$ 支于 $[\frac{7}{8},\frac{17}{8}]$）

$\Rightarrow P_jf_j=f_j\quad\forall j\ge 3$

$\Rightarrow \Big\|\sum_{j\ge 3}^N f_j\Big\|_p=\Big\|\sum_{j\ge 3}^N P_jf_j\Big\|_p\lesssim_p\Big\|\Big(\sum_{j\ge 3}^N|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$

$\lesssim_p\|\varphi\|_p\cdot(N-2)^{1/2}$

$\Rightarrow \cancel{\Big(\sum_{j\ge 3}^N\|f_j\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}=\|\varphi\|_p}$

但左边 同样可求得 $= \|\varphi\|_{L^q}(N-2)^{1/q}$

$q<2$ 令 $N\to\infty$ 会有矛盾!

若 $2<q<\infty$.

我们证明 $\|g\|_{L^p} \lesssim_{p,q} \| \|P_j g\|_{\ell^q}\|_{L^p}$ 不成立

~~实际上~~: 反证. 若成立, 则考虑对偶范数

$$\| \|P_j g\|_{\ell^{q'}}\|_{L^{p'}} = \sup_{\| \|h_j\|_{\ell^q}\|_{L^p}\le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_j g\, \overline{h_j}\, dx\right|$$

$$\le \|g\|_{L^{p'}} \sup_{(\ )} \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{P_j h_j}\right\|_{L^p}$$

$$\lesssim_{p,q} \|g\|_{L^{p'}} \sup_{(\ )} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|P_j\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k h_k\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p}$$

$$\lesssim \|g\|_{L^{p'}} \sup_{(\ )} \sum_{l=-1}^{1} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |P_j P_{j+l}(h_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p$$

$$\lesssim \|g\|_{p'} \sup_{(\ )} \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|h_j|^q\right)^{1/q}\right\|_p$$

$$\lesssim \|g\|_{p'}$$ 但 $p'<2$. 矛盾!

□

Rmk:

~~我们在实变函数中学过~~

Recall: 熟知结论. 若 $\{f_j\}$ 是一族列 Fourier 支集不交的函数, 则 $\|\sum_j f_j\|_2^2 = \sum_j \|f_j\|_2^2$ 但 $p\neq 2$ 时 $\|\sum f_j\|_p \sim \sum\|f_j\|_p$ 未必成立, 这说明 L^p 空间缺乏正交性. 而平方函数作出了弥补.

Exe: $\|\sum_j f_j\|_p^p \approx_p \sum\|f_j\|_p^p$ 不成立.

Ref: Grafakos:

□

~~§5.3 几乎正交原理：Cotlar 引理~~

§5.3：函数空间的 Littlewood-Paley 刻画.

1. Hölder 空间：

在 §3 中，我们曾经证明过强 Calderón-Zygmund 奇异积分的 C^α 有界性，现在，我们可以借用 C^α 的 Littlewood-Paley 刻画来去掉 $|\nabla k(x)| \lesssim |x|^{-d-1}$ 这样的条件.

Lemma 5.3.1：设 $|f| \le 1$，$0<\alpha<1$. 则 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha} \|P_j f\|_{L^\infty} \le A$

并且，使上式成立最小的 $A \sim [f]_{C^\alpha}$.

<u>证明</u>：令 $\varphi_j(x) = \check{\psi}_j(x) = 2^{jd}\check{\psi}(2^j x)$.

则 $\|\varphi_j\|_1 = \|\check{\psi}\|_1 \quad \forall j$.

又因 ψ 是径向、偶函数 $\therefore \forall$ 多重指标 γ. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(x) x^\gamma dx = 0$

$\Rightarrow$)：若 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$. 则：

$$|P_j f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|\,|\varphi_j(y)|\,dy$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} [f]_{C^\alpha} \cdot |y|^\alpha \cdot |\varphi_j(y)|\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} [f]_{C^\alpha}\, |y|^\alpha \cdot 2^{jd} |\check{\psi}(2^j y)|\,dy$$

$$\overset{\eta=2^jy}{=} [f]_{C^\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} 2^{-j\alpha} |\eta|^\alpha |\check{\psi}(\eta)|\,d\eta.$$

$\therefore$ ~~$[f]_\alpha \lesssim |P_j f(x)|$~~.

$$\Rightarrow 2^{j\alpha} |P_j f(x)| \lesssim [f]_{C^\alpha} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |\eta|^\alpha |\check{\psi}(\eta)|\,d\eta$$

$$\lesssim [f]_{C^\alpha}.$$

$\Leftarrow$) 反之. 令 $g_\ell(x) = \sum_{-\ell\le j\le \ell} (P_j f)(x) \quad \forall \ell \ge 0$.

Claim: $\sup_x |g_\ell(x-y) - g_\ell(x)| \lesssim_\alpha A|y|^\alpha$

若 claim 成立. 则 $\{g_\ell(x) - g_\ell(0)\}$ ~~在任~~ 是 $C^\alpha(K)$ 中一致有界集. 其中 $K \subset\subset \mathbb{R}^d$. 又由 claim 可推出等度连续.

由 Ascoli – Arzela 引理知: $g_\ell - g_\ell(0) \rightrightarrows g$. 在任何紧集上成立

(存在子列).

for some $g \in C^\alpha$ with $[g]_{C^\alpha} \le CA$.

现在还要证 f 有同样的性质.

由于 $g_\ell - g_\ell(0) \to g$ in S'. 作 Fourier 变换.

$$\hat{g_\ell} - \delta_0 g_\ell(0) \to \hat{g} \text{ in } S' \quad (\text{因 } \hat{1} = \delta)$$

$$\Rightarrow \sum_{-\ell\le j\le \ell} \psi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi) - \delta_0 g_\ell(0) \to \hat{g} \quad \text{in } S'.$$

所以若 $h \in S$. $\operatorname{Spt} h \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. 则 $\langle \hat{f} - \hat{g}, h\rangle = 0$.

$$\Rightarrow \hat{f} = \hat{g} + \sum_{|\alpha|\le M} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

$$\Rightarrow f = g + \sum_{|\alpha|\le M} \tilde{a}_\alpha x^\alpha.$$

由于 $g(0) = 0$.

$$|(f-g)(x)| \le \|f\|_\infty + |g(x) - g(0)|$$

$$\le 1 + CA|x|^\alpha.$$

$\alpha < 1$. 故 $f-g$ 只能为 cnst.

此时, 我们还剩下 claim 没证:

Fix $y \ne 0$.

$$|g_\ell(x-y) - g_\ell(x)| \le \sum_{2^{-\ell}\le 2^j \le |y|^{-1}} |P_j f(x-y) - P_j f(x)|$$

$$+ \sum_{|y|^{-1} < 2^j \le 2^{-\ell}} 2\|P_j f\|_{L^\infty}$$

$$\le \sum_{2^{-\ell}\le 2^j\le |y|^{-1}} \underbrace{\|\nabla P_j f\|_{L^\infty}}_{\lesssim\, 2^j\|P_j f\|_{L^\infty}} |y| + \sum_{|y|^{-1}<2^j} 2\cdot A\cdot 2^{-j\alpha}.$$

$$\lesssim \sum_{2^j\le |y|^{-1}} \|P_j f\|_{L^\infty} 2^j\,|y| + \sum_{|y|^{-1}<2^j} 2A\cdot 2^{-j\alpha}$$

$$\lesssim \cancel{2^{j(1-\alpha)}A|y| + 2^{j(1-\alpha)}A}$$

$$CA|y|^\alpha. \qquad \text{uniformly in } \ell\ge 1.$$

□

接下来我们~~证明~~介绍关键性的引理

Lemma 5.3.2：设 K 为 C-Z kernel. $\forall \eta\in S(\mathbb{R}^d)$ $\int\eta(x)dx=0$. 必有 $\|T\eta\|_1\le CB$. C 依赖于 η.

先承认上述引理，此时我们可以证明 C-Z in C^α 有界性.

Thm 5.3.1：K 是 Calderón-Zygmund 核. $0<\alpha<1$.

则 $\forall f\in L^2\cap C^\alpha(\mathbb{R}^d)$. $Tf\in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$

$$[Tf]_{C^\alpha}\le C_\alpha B[f]_\alpha. \text{ with } C_\alpha = C(\alpha,d)$$

证明：

Claim：$\|Tf\|_{L^\infty}\lesssim CB([f]_{C^\alpha}+\|f\|_{L^2})$.

承认 claim 成立那么我们只用证：

$$\sup_j 2^{j\alpha}\|P_j Tf\|_{L^\infty}\le CB[f]_{C^\alpha}.$$ 因为这给出的是 $[Tf]_{C^\alpha}$ 的估计.

设 $\tilde\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$. $\tilde\psi=1$ on $\mathrm{Spt}\,\psi$.

设 $\tilde P_j$ 为 $\tilde\psi$ 对应的第 j 个 Littlewood-Paley 投影.

则 $\tilde\psi_j\psi_j=\psi_j$. $\tilde P_j P_j = P_j$

因此：$\|P_j Tf\|_{L^\infty} = \|\tilde{P}_j P_j Tf\|_{L^\infty} = \|\tilde{P}_j T(P_j f)\|_{L^\infty}$

$$\leq \|\tilde{P}_j T\|_{L^\infty\to L^\infty} \|P_j f\|_{L^\infty}$$

$$\leq \|\tilde{P}_j T\|_{L^\infty\to L^\infty} 2^{-j\alpha} C[f]_\alpha .$$

下证：$\sup_j \|\tilde{P}_j T\|_{L^\infty\to L^\infty} \leq CB.$

▸ $\tilde{P}_j T$ 对应的积分核应为.

$$\left(\tilde{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\hat{K}(\xi)\right)^\vee = 2^{jd}\check{\tilde{\psi}}(2^j\cdot) * K.$$

故由Young不等式知. $\|\tilde{P}_j T\|_{L^\infty\to L^\infty} \leq \|2^{jd}\check{\tilde{\psi}}(2^j\cdot)*K\|_{L^1}$

$$= \|\check{\tilde{\psi}} * 2^{-jd}K(2^{-j}\cdot)\|_{L^1} \leq CB$$

令 $\eta = \check{\tilde{\psi}}$ 则 $\int \eta(x)\,dx = \langle 1, \check{\tilde{\psi}}\rangle$

$$= \langle \check{1}, \tilde{\psi}\rangle = \langle \delta, \tilde{\psi}\rangle = \tilde{\psi}(0) = 0$$

$\eta \in S(\mathbb{R}^d)$

故由Lem 5.3.2 知. 上式 $= \|T\eta\|_{L^1} \leq CB.$

而且，此该上界对 j 一致成立. ~~所以 这里证毕~~!

从而 $\sup_j 2^{j\alpha}\|P_j Tf\|_{L^\infty} \leq CB[f]_{C^\alpha}.$

$$\Rightarrow [Tf]_{C^\alpha} \leq CB[f]_{C^\alpha}.$$

于是现在只欠证明 claim:

设 $0<\varepsilon \ll 1$

利用Cancellation.

$$\left|\int_{\varepsilon<|x-y|<1} K(x-y)f(y)\,dy\right| = \left|\int_{\varepsilon<|x-y|<1} K(x-y)(f(y)-f(x))\,dy\right|$$

$$\leq \left|\int_{\varepsilon<|x-y|<1} \frac{1}{|x-y|^{d-\alpha}}\cdot\frac{f(y)-f(x)}{|x-y|^\alpha}\,dy\right|$$

$$\lesssim_{d,\alpha} [f]_{C^\alpha}$$

故 $\varepsilon\to 0$ 即有 $\int_{|x-y|<1}$ 的估计

注意这对 ε 一致成立.

$$\left|\int_{|x-y|>1} K(x-y)f(y)\,dy\right| \lesssim \left|\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^d}f(y)\,dy\right| \leq \left(\int_{|x-y|>1}\frac{1}{|x-y|^{2d}}\right)^{1/2}\|f\|_2 \lesssim_d \|f\|_2$$

□

现在我们来证明 Lem 5.3.2，其方法是对函数进行"原子分解"。将一个函数拆成可列个紧支的原子之和，再分别对每个原子作估计。

Lemma 5.3.3：设 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，$\int f(x)\,dx=0$　$\mathrm{Spt}(f)\subseteq B(0,R)$

且 $\|f\|_{L^\infty}\lesssim R^{-d}$．则 $\|Tf\|_{L^1}\leq CB$．

证明：

$$\int_{\mathbb{R}^d}|Tf(x)|\,dx$$

$$=\int_{|x|\leq 2R}|Tf(x)|\,dx+\int_{|x|>2R}|Tf(x)|\,dx.$$

$$\xrightarrow{\text{Hölder}}\ \lesssim\|Tf\|_2\,R^{d/2}+\int_{\mathbb{R}^d}\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx\,|f(y)|\,dy.$$

$$\lesssim CB\|f\|_{L^2}R^{d/2}+B\|f\|_1$$

f 紧支

$$\lesssim CB\,R^{-d}R^{d/2}R^{d/2}+CB\,\cancel{\|f\|_1}$$

$$\lesssim CB.$$

□

于是，单个"原子"的情况已得到证明．下面再对 η 进行原子分解．

Lem 5.3.4：$\eta\in S(\mathbb{R}^d)$　$\int_{\mathbb{R}^d}\eta(x)\,dx=0$．则（有分解）$\eta=\sum_{\ell\geq1}^{\infty}C_\ell a_\ell$．

其中 $\int a_\ell=0$．　$\|a_\ell\|_{L^\infty}\leq\ell^{-d}$．　$\mathrm{Spt}\,a_\ell\subseteq B(0,\ell)$．$\forall\ell\geq1$

且 $\sum_{\ell\geq1}|C_\ell|\leq C$，$C$ 依赖于 η．

证明：记号：设 $S\subseteq\mathbb{R}^d$．$\mathcal{L}^d(S)<\infty$．$g\in L^1$．

· 令 $\langle g\rangle_S:=\frac{1}{|S|}\int_S g(x)\,dx$．

· $B_\ell=B(0,\ell)$．　$\chi_\ell=\chi_{B_\ell}$．

先在 B_1 上构造：

$$f_1 = (\eta - \langle\eta\rangle_{B_1})\chi_1$$
$$\eta_1 = \eta - f_1$$

之后，设 f_ℓ, η_ℓ 已经构造好了，归纳地构造

$$\begin{cases} f_{\ell+1} = (\eta_\ell - \langle\eta_\ell\rangle_{B_{\ell+1}})\chi_{\ell+1} \\ \eta_{\ell+1} = \eta_\ell - f_{\ell+1} \end{cases} \qquad \ell \geq 1.$$

$$\Rightarrow \eta = \eta_1 + f_1$$
$$= \eta_2 + f_2 + f_1.$$
$$= \cdots = \sum_{\ell=1}^{M} f_\ell + \eta_{M+1}.$$

现在要验证的有：

① $M\to\infty$ 时，η 定义合理

② $a_\ell := f_\ell \dfrac{\ell^{-d}}{\|f_\ell\|_{L^\infty}}$ 满足条件.

$\int a_\ell = 0$

是显然的.

$\mathrm{Spt}\, a_\ell \subseteq B_\ell.$

$\|a_\ell\|_{L^\infty} \leq \ell^{-d}$

现在，令 $c_\ell = \ell^d \|f_\ell\|_{L^\infty}$，还要check $\begin{cases} \sum c_\ell < \infty \\ \|\eta_{M+1}\|_{L^\infty} \to 0. \end{cases}$

$$\eta_1 = \begin{cases} \langle\eta\rangle_{B_1} & \text{on } B_1. \\ \eta. & \text{on } \mathbb{R}^d\setminus B_1. \end{cases} \Rightarrow \eta_2 = \begin{cases} \langle\eta_1\rangle_{B_2} & \text{in } B_2 \\ \eta & \text{in } \mathbb{R}^d\setminus B_2 \end{cases}$$

归纳地有：

$$\eta_{\ell+1} = \begin{cases} \langle\eta_\ell\rangle_{B_{\ell+1}} & \text{on } B_{\ell+1} \\ \eta & \text{on } B_{\ell+1}^c. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\ell = 0$$

口:

$$\left|\langle \eta_l \rangle_{B_{l+1}}\right| \le \frac{1}{|B_{l+1}|}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_{l+1}} |\eta_l(x)|\,dx$$

$$\le \frac{1}{|B_{l+1}|}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_{l+1}} |\eta(x)|\,dx$$

$$\lesssim l^{-20d}.$$

$\Rightarrow \|\eta_{l+1}\|_\infty \lesssim l^{-20d}$.

$\|f_{l+1}\|_\infty \lesssim l^{-20d}$.

而 $\eta = \sum f_l = \sum c_l a_l$.

$\therefore \sum |c_l| = \sum l^d \|f_l\|_\infty$

$\lesssim \sum l^{-19d} < \infty$.

□

至此，我们完成了 Calderón–Zygmund 奇异积分算子的 C^α 有界性证明，以及顺带给出了 C^α 的 Littlewood-Paley 刻画：

作为推论，我们可以得到一个简单的 Schauder 估计.

Cor 5.3.1 : $f \in C_0^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$，则 $\sup\limits_{i,j}[\partial_i\partial_j f]_\alpha \lesssim_{\alpha d} [\Delta f]_\alpha$ $\forall 0<\alpha<1$.

Pf 注意 $\partial_i\partial_j f = R_{ij}(\Delta f)$.

再由 R_{ij} 的 C^α 有界性即得 □

因 $\widehat{\partial_i\partial_j f} = -\xi_i\xi_j \hat f$

$= \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}(-|\xi|^2 \hat f) = \widehat{R_{ij}(\Delta f)}$

2. Sobolev空间 ~~与Besov空间~~ $H^s(\mathbb{R}^d)$

Sobolev空间是PDE研究中最为常见的空间之一. 在§2中我们给出了其Fourier刻画. 但Fourier刻画的缺点是: 无法对频率变量x局部化. 因此, 我们需要Littlewood-Paley刻画.

~~类似地, 我们会引入Besov空间, 其定义这也是流体和色散方程中常用的函数空间. 其定义主要需要用到~~

记号: 设 $\varphi_0 \in C_c^\infty(B(0,2))$. $\psi(x) = \varphi_0(2x) - \varphi_0(x)$.

$$\varphi_0|_{B(0,1)} = 1.$$

令 $\psi_k(x) = \psi\left(\frac{x}{2^k}\right)$. $\varphi_k(x) = \varphi_0\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

则 . $\mathrm{Spt}\,\psi_k \subseteq \{2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}\}$.

. $\mathrm{Spt}\,\varphi_k \subseteq \{|\xi| \le 2^{k+1}\}$

. $\sum \psi_k = 1$. $\forall x \neq 0$

$$\sum_{k\geq 0} \psi_k + \varphi_0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

由于 $\psi_i \psi_j \neq 0$ if $|i-j| \geq 2$

所以 $\frac{1}{3} \le \sum_k \psi_k^2(x) \le 1$.

$$\frac{1}{3} \le \varphi_0^2 + \sum_{k\geq 0} \psi_k^2 \le 1$$

Thm 5.3.2.

$$\|f\|_{H^s} \sim \left\| \|2^{ks} P_k f\|_{L^2} \right\|_{l^2}.$$

$$\|f\|_{H^s} \sim \left(\|P_{\le 0} f\|_{L^2}^2 + \sum_{k>0} 2^{2ks} \|P_k f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Pf: 只证第一条:

$$\|f\|_{\dot H^s}^2 = \left\| |\xi|^s \hat f(\xi) \right\|_{L^2}^2 \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| |\xi|^s \hat f(\xi) \psi_k(\xi) \right\|_2^2 \overset{|\xi|\le 2^{k+1}}{\lesssim} \sum_k 2^{2ks} \|\psi_k \hat f\|_2^2 \overset{\text{Plancherel}}{=} \sum 2^{2ks} \|P_k f\|_2^2$$

$$\underset{|\xi|\geq 2^{k-1}}{\gtrsim} \sum_k 2^{2ks} \|\psi_k \hat f\|_2^2 = \dots$$

$\square$

类似地. $\|f\|_{\dot W^{s,p}} \approx \| 2^{js}\|P_j f\|_{L^p}\|_{\ell^2}$

在使用Sobolev空间的Littlewood-Paley刻画时,我们经常会用到如下~~Berstein~~ Bernstein 不等式

~~Prop~~ Thm 5.3.3 (Bernstein 不等式)

设 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{R}^d$ 是圆环状区域. $B\subseteq\mathbb{R}^d$ 为球 (中心均为原点).

~~则~~ (1) $\forall$ 非负整数 k. $\forall$ $1\le p\le q\le\infty$. $\forall u\in L^p$. 有

$$\operatorname{Spt}\hat u\subseteq\lambda B \Rightarrow \|\partial^k u\|_{L^q} \lesssim \lambda^{k+d(\frac1p-\frac1q)}\|u\|_{L^p}$$

$$\operatorname{Spt}\hat u\subseteq\lambda \mathcal{C} \Rightarrow \|\partial^k u\|_{L^p} \sim \lambda^{k}\|u\|_{L^p}$$

(2) 设 $m\in\mathbb{R}$. $k=2[1+\frac d2]$. $\sigma\in C^k(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ 满足

$\forall$ 多重指标 $|\alpha|\le k$. $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$. $|\partial^\alpha\sigma(\xi)|\lesssim_\alpha|\xi|^{m-|\alpha|}$

则 $\forall 1\le p\le\infty$. $\forall\lambda>0$. $\forall$ Fourier变换支于 $\lambda\mathcal{C}$ 中的 L^p 函数 u.

均有 $\|\sigma(\partial)u\|_{L^p}\lesssim\lambda^m\|u\|_{L^p}$. 其中. $\sigma(\partial)u:=(\sigma\hat u)^\vee$.

Cor 5.3.2 (实用的Bernstein不等式)

- $\|P_{\ge N}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,s,d} 2^{-NS}\||\nabla|^s P_{\ge N}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$
- $\|P_{\le N}|\nabla|^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,s,d} 2^{NS}\|P_{\le N}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$
- $\|P_K|\nabla|^{\pm s}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,s,d} 2^{\pm NS}\|P_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$
- $\|P_{\le N}f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,q,d} 2^{Nd(\frac1p-\frac1q)}\|P_{\le N}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$
- $\|P_N f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,q,d} 2^{Nd(\frac1p-\frac1q)}\|P_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

Thm

□

Proof of 5.3.3

(1). 不妨 $\lambda=1$. 设 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且 $\phi=1$ near B.

则 $\hat u(\xi)=\phi(\xi)\hat u(\xi)$. $\Rightarrow\partial^\alpha u=\partial^\alpha\check\phi * u$.

$\Rightarrow\|\partial^\alpha u\|_{L^q}\le\|\partial^\alpha\check\phi\|_{L^r}\|u\|_{L^p}$ 其中 $1+\frac1q=\frac1r+\frac1p$

~~而 $\|\partial^\alpha \check{\varphi}\|_{L^1} \lesssim \|\partial^\alpha \check{\varphi}\|_{L^\infty} + \|\partial^\alpha \check{\varphi}\|_{L^1}$~~

$\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\approx \|$

注意：这里可以"不対全"$\lambda=1$是伸缩与结果.

一般情况下：$\|\partial^\alpha u\|_{L^q} \lesssim \|(\widetilde{\varphi}(\lambda \cdot))\,|x|^\alpha\,\check{\ })\|_{L^r} \|u\|_{L^p}$

$$= \lambda^{d+|\alpha|} \|(|x|^\alpha \varphi)^\vee(\lambda x)\|_{L^r_x} \|u\|_{L^p}$$

$$\overset{y=\lambda x}{=} \lambda^{d+|\alpha|-\frac{d}{r}} \|((\cdot)^\alpha \varphi)^\vee\|_{L^r} \|u\|_{L^p}$$

$$\lesssim \lambda^{|\alpha|+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^p}$$

$1-\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$

对于 $\hat{u} \in \lambda C$ 的情况：

考虑 $\widetilde{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ $\widetilde{\varphi}=1$ in a nbhd of C.

则 $\hat{u} = \widetilde{\varphi}\,\hat{u}$.

[redacted] 又由 $\dot{H}^{-k}$ 的刻画定理知，$\exists \{A_\alpha\}$

$u = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u$. 其中 $g_\alpha = A_\alpha \cdot \mathcal{F}\left((-i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k} \widetilde{\varphi}(\xi)\right)^\vee$.

余下的证明是一样的.

(2). 考虑支于 annulus 的 $\widetilde{\varphi}$ $\widetilde{\varphi}=1$ on C.

$\therefore\ \sigma(D)u = \lambda^d K_\lambda(\lambda\cdot) * u$，其中 $K_\lambda(x) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\widetilde{\varphi}(\xi)\sigma(\lambda\xi)\,d\xi$

令 $M=[1+\frac{d}{2}]$. 则

$$\langle x\rangle^{2M} K_\lambda(x) = \int (Id-\Delta_\xi)^M e^{ix\xi}\,\widetilde{\varphi}(\xi)\sigma(\lambda\xi)\,d\xi$$

$$= \int e^{ix\xi} (Id-\Delta_\xi)^M (\widetilde{\varphi}(\xi)\sigma(\lambda\xi))\,d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2M} C_{\alpha\beta}\lambda^{|\beta|} \int_{\operatorname{spt}\widetilde{\varphi}} e^{ix\cdot\xi}\partial^\alpha\widetilde{\varphi}(\xi)\,\partial^\beta\sigma(\lambda\xi)\,d\xi$$

在 $\operatorname{spt}\widetilde{\varphi}$ 上，$|\partial^\beta\sigma(\lambda\xi)| \lesssim_\beta \lambda^{m-|\beta|}$

$\rightarrow\ \langle x\rangle^{2M}|K_\lambda(x)| \lesssim_M \lambda^m$. 由于 $2M>d$ 所以 $\|K_\lambda\|_{L^1} \lesssim \lambda^m$

用 Young 不等式即可 $\square$

借此，我们可以证明一些常用的不等式

~~Prop 5.3~~ Thm 5.3.4 ~~Prop 5.3.1~~ (Hardy 不等式) $0\le s<d/2$ 时

$$\| |x|^{-s} f\|_{L^2} \lesssim_{s,d} \|f\|_{\dot H^s}.$$

Pf：不妨 $s>0$.

只用证：$$\int \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx \lesssim_{s,d} \sum_k 2^{2ks}\|P_k f\|_{L^2}^2.$$

左边 $$= \int \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx = \sum_k \int_{2^{k-1}\le|x|\le 2^{k+1}} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx$$

$$\lesssim \sum_k 2^{-2ks}\int_{|x|\le 2^{k+1}} |f(x)|^2\,dx.$$

L-P 分解

$$\lesssim \sum_k 2^{-2ks}\Big(\sum_j\Big(\int_{|x|\le 2^{k+1}} |P_j f|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big)^2.$$

$$\cancel{\lesssim \sum_k 2^{-ks}\sum_j \|P_j f\|_{L^2}}.$$

此时 $$\Big(\int_{|x|\le R} |P_j f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \le \|P_j f\|_{L^2}.$$

另方面 由 Bernstein 不等式

$$\Big(\int_{|x|\le R} |P_j f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} \lesssim_d R^{d/2}\|P_j f\|_{L^\infty}$$

$$\lesssim_d (2^jR)^{d/2}\|P_j f\|_{L^2}.$$

~~将这些~~

所以 $$\sum_k 2^{-2ks}\Big(\sum_j \min\{1,(2^jR)^{d/2}\}\|P_j f\|_{L^2}\Big)^2 \lesssim_{s,d} \sum_j 2^{2js}\|P_j f\|_{L^2}^2$$

i.e $$\Big\|\sum_j \underbrace{\min\{(2^jR)^{-s},(2^jR)^{\frac d2-s}\}}_{\text{绝对收敛}}\, 2^{js}\|P_j f\|_{L^2}\Big\|_{\ell^2} \lesssim_{s,d} \big\|2^{js}\|P_j f\|_{L^2}\big\|_{\ell^2}.$$

∴ 证毕！ □

Thm 5.3.5 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).

设 $1<p<q\le\infty$. $s>0$. $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\theta s}{d}$ for some $0<\theta\le 1$.

则 $\forall\, u\in W_x^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. $\|u\|_{L_x^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{d,p,q,s}\|u\|_{L_x^p}^{1-\theta}\,\|u\|_{\dot W_x^{s,p}(\mathbb{R}^d)}^{\theta}$

若 $q=\infty$，则 $u\in C_x^0(\mathbb{R}^d)$.

证明：首先可以证明，在scaling $u(x)\mapsto\lambda u(x)$，$u(x)\mapsto u(x/\lambda)$ 之下，不等式保持不变.

所以我们不妨设 $\|u\|_{L^p}=\|u\|_{\dot W^{s,p}}=1$.

下面对 u 作 Littlewood-Paley 分解

$u=\sum_k P_k u \Rightarrow \|u\|_{L^q}\le\sum_k\|P_k u\|_{L^q}$

Bernstein $\longrightarrow\ \lesssim\sum_k 2^{kd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|P_k u\|_{L^p}$.

条件 $\longrightarrow\ =\sum_k 2^{k\theta s}\|P_k u\|_{L^p}$

又：$\|P_k u\|_{L^p}\lesssim_{d,p}\|u\|_{L^p}=1$

$\|P_k u\|_{L^p}\lesssim_{d,p,s}2^{-ks}\||\nabla|^s u\|_{L^p}$

$\cancel{故}=2^{-ks}$

故. $\|u\|_{L^q}\lesssim_{d,p,s}\sum_k 2^{k\theta s}\min\{1,N^{-s}\}\lesssim_{\theta,s}1$.

(1) $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{s}{d}$. $\|f\|_{L^q}\lesssim\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$, □.

Cor 5.3.$\cancel{?}$: ~~(1) $1<p<q<\infty$~~

(2) $1<p<q<\infty$. $s>0$ (2) $\frac{1}{p}\le\frac{1}{q}+\frac{s}{d}$ 时

$\|f\|_{L_x^q}\lesssim_{p,q,s,d}\|f\|_{W_x^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$.

□

Rmk: Sobolev 嵌入定理 5.3.5 是sharp的. 实际上我们取一个伸缩后的 bump 函数. 例如 $f=2^{k\alpha}\psi(2^k x)$. $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $k>0$ $\alpha\in\mathbb{R}$

恰好 Sobolev 嵌入公式指标

则 $\|f\|_{L^q}\sim 2^{-\frac{d}{q}k}2^{k\alpha}=2^{k(\alpha-\frac{d}{q})}$.

$\|f\|_{\dot W^{s,p}}\sim 2^{k(s+\alpha-\frac{d}{p})}$ 所以恰好对上了 $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{s}{d}$

~~实际上~~ 凭经验来说，bump 函数几乎是唯一一种构造 Sobolev 嵌入达到最佳估计的例子。

~~Thm 5.3.6.~~

Exercise: $1<p<q<\infty$. $s>0$. $0<\eta\le 1$

(1) 若 $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{s}{d}$. $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}_x}\lesssim 1$. $\|f\|_{L^q_x}\gtrsim \eta$.

则 $\exists k$. $\exists x_0\in\mathbb{R}^d$ s.t. $|P_k f(x_0)|\sim 2^{k\cdot d/q}$

$$\Big(\int_{|x-x_0|\le\frac{c}{2^k}}|P_k f(x)|^r\,dx\Big)^{1/r}\sim N^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}.$$

对任何 $1\le r\le\infty$

和某个大常数 $c(p,q,d,\eta)>0$ 成立。

(2) 若 $\frac{1}{p}<\frac{1}{q}+\frac{s}{d}$. $\|f\|_{W^{s,p}_x(\mathbb{R}^d)}\lesssim 1$, $\|f\|_{L^q_x(\mathbb{R}^d)}\gtrsim\eta$.

则 $\exists k$ s.t. $2^k\sim_{p,q,s,d,\eta}1$. $\exists x_0\in\mathbb{R}^d$ s.t.

$$|P_k f(x_0)|\sim 1.$$

$$\Big(\int_{|x-x_0|\le C}|P_k f(x)|^r\,dx\Big)^{1/r}\sim 1.$$

Hint: For (2) 先设法证明存在 $k\sim 1$. s.t. $\|P_k f\|_{L^q}\gtrsim 1$. 再

~~由于 $\|P_k f\|_{L^p}\lesssim 1$. f~~ 证 $\|P_k f\|_{L^\infty}\gtrsim 1$. 从而 $\exists x_0\in\mathbb{R}^d$, $|P_k f(x_0)|\gtrsim 1$.

之后，注意到 $P_k f=P_{k-2<\cdot<k+2}P_k f$，~~借此来估计~~ 从而我们可将 $P_k f(x_0)$ 写成 $P_k f$ 与一个在 x_0 取 1 的速降函数的乘积。

Rmk. 不严格地说，为了使 Sobolev 嵌入 $\dot{W}^{s,p}\hookrightarrow L^q$ 尽可能 sharp，f 必定包含一个在 x_0 处经过很大 scaling 的 bump 函数。并且 $\hat{f}$ 至少在某一频率 2^k 附近聚集。对 $W^{s,p}\hookrightarrow L^q$ 也是一样，只是 $k\approx 1$。

至此，我们用 Littlewood-Paley 分解和 Bernstein 不等式证明了一些分数阶导数的估计。~~实际上~~除此之外，我们将会看到，

Littlewood-Paley 方法在~~证明~~处理非线性项（例如 $(f,g)\mapsto fg$，$u\mapsto F(u)$）时也十分有用。但在具体介绍之前，我们有必要总结一下 Littlewood-Paley 是如何刻画导数的。

不确定性原理：

(1) 低频部分：若 $\hat{f}(\xi)$ 支于 $\{|\xi|\le 2^k\}$（例如 $f=P_{\le k}g$），则（不严格地说）存在一个小的常数 $c>0$，f 在半径为 $c/2^k$ 的球内差不多为 const.

$\nabla^s f$ 应被 $2^{ks}f$ 控制住，从而在频率 N 之下处作局部化，会带来空间变量大约 $1/N$ 的不确定度，这也是 Heisenberg 的不确定性原理的机制。

~~(2) 高频~~

(2) 高频部分：若 $\hat{f}$ 支于 $\{|\xi|\ge 2^k\}$，eg: $f=P_{\ge k}g$.

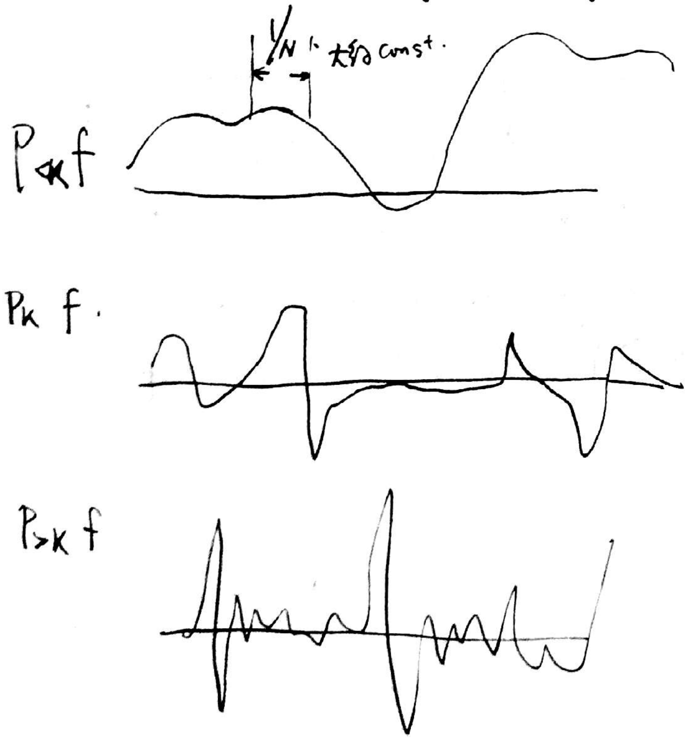
则 $\exists$ 一个大的常数 $C>0$，f 在半径为 C/N 的球内的均值为 0

$\nabla^{-s}f$ 被 $N^{-s}f$ 控制（$N\approx 2^k$）

从而排除一个 $N\approx 2^k$ 的频率，会带来空间变量大约为的振荡

(3) 中频：$|\xi|\sim 2^k=N$

则 $\nabla^s f\sim N^s f$.



下面，我们简要介绍一下Bony仿积分解的方法，它可以用于给出"分数阶"Leibniz rule"，和"链式法则"。

(1) Leibniz rule希望做到的事情是 ~~对(数)阶分部~~

$$\partial^\alpha(fg) \approx f\,\partial^\alpha g + \partial^\alpha f\cdot g.$$

其中中间的低阶导数项会被高阶项控制，从而成为上式的样子。其具体机制如下：设$|\alpha|>0$，为多重指标。

~~① High-L~~ 将 fg 分解为如下形式：

$$fg = \sum_{k,j} P_k f P_j g = \left(\sum_{k\ge j+3} + \sum_{k\le j-3} + \sum_{|k-j|\le 2}\right) P_k f P_j g$$

$$T_g f := \sum_{k\ge j+3} P_k f P_j g,\quad T_f g = \sum_{j\ge k+3} P_k f P_j g,\quad R(f,g) = \sum_{|k-j|\le 2} P_k f P_j g.$$

分别称作 high-low, low-high, equi-frequency interaction.

第3项又称作仿积余项，该分解简称作Bony仿积分解。

① High-low interaction：f的频率远高于g，即 f 比 g"粗糙"得多
(例如 $f=P_N F$，$g=P_{<N} f$)。(例如 $f=\partial u$，$g=u$)。

则 fg 的频率大致与 f 一样，且有：$P_N(f\cdot g)\approx P_N f\cdot g$.
$$\partial^\alpha(fg)\approx \partial^\alpha f\cdot g.$$

② Low-high interaction：f，g调换一下

③ equi-frequency：则 fg的频率 $\lesssim$ f与g的频率

且 $\partial^\alpha(fg)\approx(\partial^\alpha f)g\approx f\cdot(\partial^\alpha g)$.

具体地，分数阶Leibniz rule由如下Moser不等式刻画。

Thm 5.3.6 (Moser 乘子式) 设 $s\ge 0$，则

$$\|fg\|_{H^s}\lesssim_{s,d}\|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}$$

$\forall f,g\in H^s\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 成立。从而 $s>d/2$ 时，$\|fg\|_{H^s}\lesssim_{s,d}\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$

从而这表明，在L^2意义下，$\langle\nabla\rangle^s(fg)\approx(\langle\nabla\rangle^s f)g + f(\langle\nabla\rangle^s g)$、

~~证~~

~~Step 1: High-Low estimate:~~

~~$\|T_f g\|_{\dot{H}^s} = \|2^{sk}$~~

证：不妨 $s>0$.

$$\|fg\|_{H^s} \lesssim \|P_{<0}(fg)\| + \Big(\sum_{k\geq 0} 2^{2ks} \|P_k(fg)\|_{L^2}^2\Big)^{1/2} \cdots (*)$$

$$\|P_k(fg)\|_{L^2} \lesssim \|P_k(P_{<k-3}f)\, g\|_{L^2} + \sum_{j\geq k-3} \|P_k(P_j f) g\|_{L^2}.$$

第一项：High-Low estimate

$$\|P_k(P_{<k-3}f) g\|_{L^2} \lesssim \|P_{<k-3} f \cdot P_{k-2\sim k+2}\, g\|_{L^2}$$
$$\lesssim \|f\|_{L^\infty} \sum_{|j-k|\leq 2} \|P_j g\|_{L^2}.$$

乘以 2^{ks} 代入$(*)$. 此项在$(*)$贡献为 $\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}$.

第2项：

$$\sum_{j\geq k-3} \|P_k(P_j f)\, g\|_{L^2} \lesssim_d \sum_{j\geq k-3} \|(P_j f) g\|_{L^2}.$$
$$\lesssim_d \|g\|_{L^\infty} \sum_{j\gtrsim k} 2^{-js} \|P_j f\|_{L^2}.$$

从而.

$$\Big(2^{ks} \sum_{j\geq k-3} \|P_k((P_j f) g)\|_{L^2}\Big)^2 \lesssim_d \|g\|_{L^\infty}^2 \sum_{j\gtrsim k} 2^{(k-j)s} \|P_j f\|_{L^2}^2.$$

对k求和：$\lesssim \|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty}$

□.

~~一般~~ 以下定理是 Bony 仿积分解的实用结论. 自证：

Thm 5.3.7 (Bony).

(1) $\forall s\in\mathbb{R}$, $\|T_f g\|_{H^s} \lesssim \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}$.

(2) $\forall s,t\in\mathbb{R}$, $s+t>0$. $\|R(f,g)\|_{H^{s+t-d/2}} \lesssim \|f\|_{H^s}\|g\|_{H^t}$.

~~(3). $s+t<\frac{1}{2}$ $\|R(f,g)\|_{H^{s+t-d/2}} \lesssim \|f\|_{H^s}\|g\|_{H^t}$~~

证明之统哥笔记.

(2) 分数阶 chain rule.

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个(非线性), 具有一定光滑性的函数, 例如 $F(x)=|x|^{p-1}x$.

则我们希望有: $\partial^\alpha F(u)\approx F'(u)\partial^\alpha u$. $\alpha>0$.

$$P_{<N}(F(u))\approx F(P_{<N}u).$$

$$P_N(F(u))\approx F'(P_{<N}u)P_N u.$$

Thm 5.3.8 (Schauder 估计). V 为有限维 ~~[illegible]~~ B^* 空间. $s\geq 0$. ~~f~~ $k=\lceil s\rceil$. $F\in C^k_{loc}(V\to V)$. $f\in H^s(\mathbb{R}^d\to V)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d\to V)$. $F(0)=0$. 则 $F(f)\in H^s(\mathbb{R}^d\to V)$. 且 $\|F(f)\|_{H^s}\lesssim\|f\|_{H^s}$

证: $|F(f)|\lesssim|f|$ (因 $F\in C^k_{loc}$. $f\in L^\infty$). $\therefore s=0$ ✓ $\forall s>0$

只需证: $\left(\sum_{k\geq 0}2^{2ks}\|P_k F(f)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}\lesssim_{F,\|f\|_{L^\infty},V,s}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

~~首先~~ 我们先要设法抛掉 $P_N(F(f))$ 中. $F(f)$ 的 "粗糙部分"

Taylor展开 $F(f)$ = smooth main term + rough erratum.

$f=P_{<k}f+P_{\geq k}f.$

由于 f. $P_{<k}f$ 由 $\|f\|_{L^\infty}$ 控制. $F\in C^k_{loc}\Rightarrow$ F Lip on $B(0,C\|f\|_{\infty})$.

则 $F(f)=F(P_{<k}f)+O_{F,\|f\|_\infty,V,d}(|P_{\geq k}f|)$

$\|P_{k}F(f)\|\lesssim\|P_k F(P_{<k}f)\|_{L^2}+\|P_{\geq k}f\|_{L^2}.$

· 第2项: $2^{2ks}\|P_{\geq k}f\|_{L^2}^2\lesssim\sum_{k'\geq k}(k')^s k^s\|P_{k'}f\|_{L^2}^2.$

对 k 求和仅有 $\lesssim\|f\|_{H^s}$

· 第一项: 要证: $\left(\sum_{k\geq 0}2^{2ks}\|P_k F(P_{<k}f)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}\lesssim_{F,\|f\|_\infty,V,s}\|f\|_{H^s}$

$\|P_k F(P_{<k}f)\|_{L^2}\lesssim_{d,k}2^{-2kl}\|\nabla^l F(P_{<k}f)\|_{L^2}^2.$

不断用 chain rule $\lesssim 2^{-2kl}\|\sup_{\substack{l_1+\cdots+l_r=l\\1\leq r\leq l}}|\nabla^{l_1}(P_{<k}f)|\cdots|\nabla^{l_r}(P_{<k}f)|$

$\tilde{P}_0=P_{\leq 0}$

$\tilde{P}_k=P_k.\ k>0$ $\lesssim 2^{-2kl}\|\sup\ \cdots\ \|.$

而由 Bernstein 不等式.

$$\|\nabla^{l_i}(\widetilde{P}_{k_i} f)\|_{L^\infty} \lesssim_{d,l} A\, 2^{k_i l_i} \|f\|_{L^\infty}$$

$1 \le i \le l-1$ $\qquad \lesssim 2^{k_i l_i}$

$i = l$ 时 $\qquad \lesssim 2^{k_i l_i} \|\widetilde{P}_{k_r} f\|_{L^2}.$

$$\therefore \|\nabla^l F(P_{<k} f)\|_{L^2} \lesssim \sup_{\substack{l_1+\cdots+l_r=l \\ 1\le k_1\le\cdots\le k_r\le k}} 2^{k_1 l_1}\cdots 2^{k_r l_r} \|\widetilde{P}_{k_r} f\|_{L^2}$$

$$= \sum_{1\le k_r<k} 2^{k_r l} \|\widetilde{P}_{k_r} f\|_{L^2}^2.$$

$$\therefore \|P_k F(P_{<k} f)\|_{L^2} \lesssim \sum_{1\le k_r<k} 2^{k_r l}\, 2^{-kl} \|\widetilde{P}_{k_r} f\|_{L^2}^2$$

对 k 求和. 即得所求.

□.

§5.4：几乎正交性：Cotlar 引理

回顾§3中C-Z奇异积分L^2有界性的证明，我们用到了Fourier变换化卷积为乘子。这要求C-Z核是平移不变的。下面我用介绍一种方法，避开了上面这种局限性。其方法是Cotlar 引理。该引理也是调和分析中不可或缺的工具。尤其是在T1定理（非卷积型奇异积分L^p有界性）的证明中，更是统领性的idea。

1、几乎正交性：

先从"正交性"一步步说起：

① 考虑 $T: \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

$$\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto \{\lambda_j \xi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}.\quad \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$$ 是一列固定的复数列.

则 $\|T\|_{\ell^2\to\ell^2} = \sup_j |\lambda_j|$.

② 一般地，对一个 Hilbert 空间$\mathcal{H}$，它可以写作 $\mathcal{H} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_j$，

任一$f\in\mathcal{H}$可分解作 $f=\sum_j f_j$，$f_j \in \mathcal{H}_j$

现设T_j为$\mathcal{H}$上的算子且$T_j \mathcal{H}_k = 0$ if $k\neq j$ 并进一步假设T_j的值域在$\mathcal{H}_j$中，则

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j,k}\langle T_j f_j, T_k f_k\rangle = \sum_j \|T_j f_j\|_{H_j}^2$$

$$\leq \sup_j \|T_j\|^2_{\mathcal{H}_j\to\mathcal{H}_j} \sum_j \|f_j\|^2_{\mathcal{H}_j}$$

$$\leq M^2 \|f\|^2_{\mathcal{H}}$$

③ 若 $T=\sum_j T_j$，假定 $\begin{cases} Im(T_j) \perp Im(T_k). \\ Im(T_j^*) \perp Im(T_k^*). \end{cases}$ i.e. $T_k^* T_j = T_k T_j^* = 0$ $\forall j\neq k$

注意到 $\overline{Im(T_j^*)} = (\operatorname{Ker} T_j)^\perp$. 设 $P_j: H \to \overline{Im(T_j^*)}$ 为投影

则 $\forall f\in\mathcal{H}$. $Tf = \sum_j T_j P_j f = \sum_j T_j f_j$. $f_j := P_j f$

$$\Rightarrow \|Tf\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_j \|T_j f_j\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sup_j \|T_j\|^2 \sum_j \|f_j\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$= M^2 \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

~~在~~ 从①→③，我们逐步放宽了对正交性的要求至 $T_j T_k^* = T_j^* T_k = 0 \ \forall j \neq k$.
但仍然对"正交性"要求过高．例如，我们考虑 $T_j = P_j$ 为 Littlewood-Paley 投影．~~我们会~~ P_j 不满足①~③中任一条．但是我们发现，$\|T_j^* T_k\|$ 随着 $|j-k|$ 增大会衰减(到 0)，这也是所谓的"几乎正交"．那么是否有类似的过程来刻画 $\sum P_j$ 的算子范数呢？下面的 Cotlar 引理给出了答案．

$\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间

Lemma 5.4.1 (Cotlar) 设 $\{T_j\}_{j=1}^N$ 是有限多个 $\mathcal{H}$ 上的算子．
$\gamma: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ 满足：

$$\|T_j^* T_k\| \le \gamma^2(j-k), \qquad \|T_j T_k^*\| \le \gamma^2(j-k) \qquad \forall 1 \le k, j \le N$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(l) =: A < \infty.$$

则：$\left\|\sum_{j=1}^N T_j\right\| \le A$.

证明：令 $T = \sum_{j=1}^N T_j$，为证 $\|T\| \le A$，只用证 $\|T^* T\| \le A^2$.

$$(T^* T)^n = \sum_{\substack{j_1 \cdots j_n = 1 \\ k_1 \cdots k_n = 1}}^{N} T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_n}^* T_{k_n}$$

而 $\|T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_n}^* T_{k_n}\| \le \|T_{j_1}\| \cdot \|T_{k_1} T_{j_2}^*\| \cdots \|T_{k_{n-1}} T_{j_n}^*\| \cdot \|T_{k_n}\|$

$\|T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_n}^* T_{k_n}\| \le \|T_{j_1}^* T_{k_1}\| \cdots \|T_{j_n}^* T_{k_n}\|$

从而 $\|T_{j_1}^* T_{k_1} \cdots T_{j_n}^* T_{k_n}\| \le (\|T_{j_1}\| \cdot \|T_{k_n}\|)^{1/2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \|T_{k_i} T_{j_{i+1}}^*\|^{1/2} \cdot \prod_{i=1}^{n} \|T_{j_i}^* T_{k_i}\|^{1/2}$.

令 $B = \sup_{1 \le j \le N} \|T_j\| \le A$.

有 $$\|(T^* T)^n\| \le \sum_{\substack{j_1 \cdots j_n = 1 \\ k_1 \cdots k_n = 1}}^{N} \|T_{j_1}\|^{1/2} \left(\|T_{j_1}^* T_{k_1}\|^{1/2} \|T_{k_1} T_{j_2}^*\|^{1/2}\right) \cdots \left(\|T_{k_{n-1}} T_{j_n}^*\|^{1/2} \|T_{j_n}^* T_{k_n}\|^{1/2}\right) \|T_{k_n}\|^{1/2}$$

$$\le \sum \sqrt{B} \cdot \gamma(j_1 - k_1) \gamma(k_1 - j_2) \cdots \gamma(k_{n-1} - j_n) \gamma(j_n - k_n) \sqrt{B}$$

$$\le N B A^{2n-1}$$ 开 n 次方，$n \to \infty$ 即可． □

下面来看Cotlar引理的应用，首先是~~井~~C-Z奇异积分的L^2有界性。

Corollary 5.4.1：设K为Calderón-Zygmund核，$|\nabla K(x)|\le \frac{B}{|x|^{d+1}}$.

则$\|T\|_{2\to 2}\le CB$.

Proof：不妨$B=1$. 下面开始"凑"Cotlar引理的条件

取ψ为Littlewood-Paley bump函数，$K_j(x)=K(x)\psi\left(\frac{x}{2^j}\right)$.

则：$\forall j$：(i) $\int K_j(x)dx=0$

(ii) $\|\nabla K_j\|_{L^\infty}\lesssim 2^{-j(d+1)}$.

(iii) $\int |K_j(x)|\lesssim 1$.

(iv). $\int |x|\cdot|K_j(x)|\,dx\lesssim 2^j$.

令$T_jf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}K_j(x-y)f(y)dy$. $\forall f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

下面对T_j验证Cotlar引理的条件，注意到$\widetilde{K_j}(x)=\overline{K_j}(-x)$.

则 $(T_j^*T_kf)(x):=\int_{\mathbb{R}^d}(\widetilde{K_j}*K_k)(y)f(x-y)dy$

$(T_jT_k^*f)(x):=\int_{\mathbb{R}^d}(K_j*\widetilde{K_k})(y)f(x-y)dy$

由Young不等式：$\|T_j^*T_k\|_{2\to 2}\le\|\widetilde{K_j}*K_k\|_{L^1}$

也$\le\|K_j*\widetilde{K_k}\|_{L^1}$.

不妨$j\ge k$. 由于$\int K_k(y)dy=0$. 我们有

$$|(\widetilde{K_j}*K_k)(x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\overline{K_j}(y-x)K_k(y)dy\right|$$

$$=\left|\int_{\mathbb{R}^d}(\overline{K_j}(y-x)-\overline{K_j}(-x))K_k(y)dy\right|$$

$$\le\left|\int_{\mathbb{R}^d}\|\nabla K_j\|_{L^\infty}|y||K_k(y)|dy\right|$$

$$\lesssim 2^{-j(d+1)}\cdot 2^k=2^{-j(d+1)+k}$$

由于$\mathrm{Spt}(\widetilde{K_j}*K_k)\subseteq\mathrm{Spt}(\widetilde{K_j})+\mathrm{Spt}(K_k)\subseteq B(0,C\cdot 2^j)$知，

$\|\widetilde{K_j}*K_k\|_{L^1}\lesssim 2^{-|j-k|}$

取 $\gamma^2(\ell)=C2^{-|\ell|}$ 便有: ~~$\|$ 未 $+$~~ 由 Cotlar 引理.

$$\left\|\sum_{j=-N}^{N} T_j\right\|_{2\to 2} \leq C. \quad \forall N\geq 1.$$

而对 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ $\sum_{j=-N}^{N} T_j f(x)\to Tf(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^d$

则 $\int |Tf|^2 \leq \liminf_{N\to\infty} \left|\sum_{-N}^{N} T_j f(x)\right|^2 dx.$

$$\leq C^2\|f\|_2^2.$$

BLT定理

$\Rightarrow \|T\|_{2\to 2} \leq C.$

□

2. Calderón-Vaillancourt 定理:

设 $a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. $\sup_{x,\xi}\left(|\partial_x^\alpha a(x,\xi)|+|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|\right)\leq B.$ $\forall |\alpha|\leq 1+2d$

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi. \quad \forall f\in S(\mathbb{R}^d).$$

对此类拟微分算子T, 我们可利用Cotlar引理巧证.

Thm 5.4.1: 在如上条件下, $T: L^2\to L^2$ 有界.

Pf: 不妨 $B=1$. 设 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. s.t. $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\chi(\xi-k)=1 \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^d$

i.e. $\{\chi(\cdot-k)\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一组 pou.

χ 的存在性种可直接构造: 设 $\eta\geq 0$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 函. 满足

$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\eta(x-k)>0.$ 由于 ψ 一致有下界

则 $\chi=\eta/\psi$ 良定.

令 $\chi_{k\ell}(x,\xi)=\chi(x-k)\chi(\xi-\ell).$

$a_{k\ell}(x,\xi)=a(x,\xi)\chi_{k\ell}(x,\xi).$

~~$T_{k\ell}(x,\xi)$~~ $=(T_{k\ell}f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}a_{k\ell}(x,\xi)f(\xi)d\xi$

$\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$

下面的引理保证了 $\sup_{k,l} \|T_{k,l}\|_{2\to 2} \le C$.

Lemma 5.4.2 (Schur's Test). 在 $(X\times Y, \mu\otimes\nu)$ 上设

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y)\, \nu(dy). \quad K \text{ 可测. 则:}$$

(i) $\|T\|_{1\to 1} \le \sup_{y\in Y} \int_X |K(x,y)|\, \mu(dx) =: A$.

(ii) $\|T\|_{\infty\to\infty} \le \sup_{x\in X} \int_Y |K(x,y)|\, \nu(dy) =: B$

(iii) $\|T\|_{p\to p'} \le A^{1/p} B^{1/p'}$. $1\le p<\infty$

(iv). $\|T\|_{1\to\infty} \le \|K\|_{L^\infty(X\times Y)}$.

□

下面 claim: $\|T_{k',l'}^* T_{k,l}\|_{2\to 2} \lesssim \langle k'-k\rangle^{-2d-1} \langle l'-l\rangle^{-2d-1}$

$\|T_{k',l'} T_{k,l}^*\|_{2\to 2} \lesssim \langle k'-k\rangle^{-2d-1} \langle l'-l\rangle^{-2d-1}$

$\forall k,k',l,l' \in \mathbb{Z}^d$.

若 claim 成立. 对 k,l 求和后 $<\infty$.

由 Cotlar 引理得: $\|\sum_{|k|<N} \sum_{|l|<N} T_{k,l} f\|_2 \le C\|f\|_{L^2}$ $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$

令 $N\to\infty$ 即可完成证明.

证明 claim: $T_{k,l}^* g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi}\, \overline{a_{kl}(x,\xi)}\, g(x)\, dx$.

则 $T_{k,l}^* T_{k',l'} \ne 0 \Rightarrow |k-k'| \le C$.

同样 $T_{k,l} T_{k',l'}^* \ne 0 \Rightarrow |l-l'| \le C$

$T_{k,l}^* T_{k',l'}$ 的积分核为.

$$K_{kl,k'l'}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix(\xi-\eta)}\, \overline{a_{kl}(x,\xi)}\, a_{k',l'}(x,\eta)\, dx.$$

此时由于相函数没有临界点. (将 l, l' 取成使得在 $\overline{a_{k,l}(x,\xi)} a_{k'l'}(x,\eta)$ 支集上 $|\xi-\eta|\ge 1$).

由震荡积分估计. 分部积分 $2d+1$ 次. $|K_{kl,k'l'}(\xi,\eta)| \lesssim |l-l'|^{-2d-1}$.

而积分核关于 ξ,η 对称. 由 Schur test $\|T_{k,l}^* T_{k',l'}\| \lesssim \langle l'-l\rangle^{-2d-1}$

对 k 也是同理

□