§4 H^1与BMO空间

§3中我们证明了奇异积分是$L^p \to L^p$有界$(1<p<\infty)$的，但在$p=1,\infty$端点处，我们能找到许多反例。那么，我们是否可以找到L^1, L^∞的替代品，使奇异积分算子在这些空间（L^1 or L^∞）之间成为有界算子呢？答案是肯定的。

本章引入Hardy空间H^1以及BMO空间，分别替代L^1, L^∞，并证明C-Z奇异积分算子$H^1 \to L^1$，$L^\infty \to$ BMO有界。

§4.1 H^1与BMO空间的定义

首先要定义什么是"原子"(atom)

<u>Def</u> $a: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$称作原子，若 • a支于一个方体Q

• $\int_Q a(x)dx = 0$

• $\|a\|_{L^\infty} \le \frac{1}{|Q|}$

Thm 4.1.1 设T为Calderón-Zygmund算子，则$\exists C>0$ s.t. $\forall$原子a，

$\|Ta\|_{L^1} \le C$.

<u>证明</u>：显然$a \in L^2$，从而Ta良定。设$Q^* = 2\sqrt{d}\,Q$，中心为c_Q

由于T是L^2有界的

$$\therefore \int_{Q^*} |Ta(x)|dx \le |Q^*|^{1/2}\left(\int_{Q^*} |Ta(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\overset{T\,L^2\text{有界}}{\le} C|Q|^{1/2}\left(\int_Q |a(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\le C$$

又因$\int a = 0$，则

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q^*} |Ta(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}\left|\int_Q K(x-y)a(y)dy\right|dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}\left|\int_Q (K(x-y) - K(x-c_Q))a(y)dy\right|dx.$$

$$\le \int_Q \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |K(x-y) - K(x-c_Q)|dx\,|a(y)|dy \le C$$

$\square$

下面我们用两种方式定义Hardy空间 $H^1(\mathbb{R}^d)$

Def (1) 原子 H^1 空间

$$H^1_{at}(\mathbb{R}^d)=\Big\{\sum_j \lambda_j a_j \;\Big|\; a_j \text{ 为原子},\ \lambda_j\in\mathbb{C} \text{ 且 } \sum|\lambda_j|<\infty\Big\}$$

~~则~~ $\|f\|_{H^1_{at}} := \inf\Big\{\sum_j|\lambda_j| : f=\sum\lambda_j a_j\Big\}$

$(H^1_{at}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^1_{at}})$ Banach. ~~且是 L^1 的子空~~间

$H^1_{at}\subseteq L^1$

(2). 用 Riesz 变换定义:

$$H^1(\mathbb{R}^d)=\{f\in L^1(\mathbb{R}^d) \mid R_j f\in L^1(\mathbb{R}^d),\ 1\le j\le d\}$$

$$\|f\|_{H^1}=\|f\|_{L^1}+\sum_{j=1}^{d}\|R_j f\|_{L^1}.$$

则: **Cor 4.4.1**: 由 Calderón-Zygmund 算子 $T: H^1_{at}(\mathbb{R}^d)\to L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界. □

Thm 4.4.2. $H^1(\mathbb{R}^d)=H^1_{at}(\mathbb{R}^d)$.

此定理的证明参见 Stein 调和分析前3章. □

~~下面再定义~~

下面再定义BMO空间:

Recall: ~~对~~ 给定 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 和方体 Q.

令 $f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f$,

sharp极大函数: $M^\# f(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|$

$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|$ 表示的是 f 在方体 Q 上的"平均振荡". ~~我们称 f~~

若 $M^\# f$ 有界, 则我们称 f 是有界平均振荡的

记 $BMO=\{f\in L^1_{loc}: M^\# f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ $\|f\|_*=\|M^\# f\|_{L^\infty}$

则 $(BMO/\mathbb{R}, \|\cdot\|_*)$ Banach (因 $\|const\|_* = 0$)

可以看见 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|$ 很像 C-Z 分解中定义的坏函数 b

我甚至说这就是 $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b_j|$ $\forall j$. 实际上 C-Z 分解的想法就是"局部常值化"：$f=g+b$. g 定义为 f 在 Q_j 上的积分平均.

b 是"误差部分". 而 $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| \le 2^n\lambda$ 是为了限制其与λ(目标值)的误差大小. 如果误差太大，那么就不断地分割方体. 直到 $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f| \approx \lambda$ 为止.

下面我们来看几条 BMO 空间的简单性质.

Prop 4.1.1

① $M^\# f(x) \le C_d M f(x)$. 此为显见.

② $\frac{1}{2}\|f\|_* \le \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-a|\,dx \le \|f\|_*$

③ $M^\#(|f|)(x) \le 2M^\# f(x)$.

证明是显见的, 留作习题.

□

Rmk：(1). Prop 4.1.1 中不等式② 中间定义了一个与 $\|\cdot\|_*$ 等价的范数

这提为我们证明某个函数 ∈ BMO 提供了一个方法：即, 寻找一个 $a\in\mathbb{C}$ (a 依赖于 Q). 使 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-a|\,dx \le C$. 便有 $f\in BMO$ 空间.

(2) 不等式③ 表明, $f\in BMO \Rightarrow |f|\in BMO$, 但反之是不对的.

~~这说明 BMO 空间中并不是"大小"有界~~

Example $f(x)=\mathrm{sgn}(x)\cdot\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\chi_{\{|x|<1\}}$. 可以证明 $|f(x)|\in BMO$ 但 $f\notin BMO$.

□

下面证明奇异积分~~与BMO~~的 $L^\infty \to BMO$ 有界性

Thm 4.1.3: T 为 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 则 $\forall$ 有界紧支函数 f, $Tf \in BMO$. $\|Tf\|_{*} \le C\|f\|_{L^\infty}$

Pf: Fix 一个方体 Q, 设中心为 c_Q. $Q^* := 2\sqrt{d}\, Q$

令 $f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f - f_1$. $a = Tf_2(c_Q)$.

要估计的是 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - a|\, dx$

$$\le \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(c_Q)|\, dx$$

$$\le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} (K(x-y) - K(c_Q - y)) f(y)\, dy\right| dx$$

$T: L^2 \to L^2$ 有界

$$\le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q^*} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |K(x-y) - K(c_Q - y)|\, dy\, dx \cdot \|f\|_\infty$$

$$\le C\|f\|_{L^\infty}$$

$\square$

Rmk: Thm 4.1.3 ~~是一个~~对"有界函数在 C-Z 算子下的像"这个问题给出了一部分结果. 但由于紧支有界函数在 L^∞ 中没不稠密, 我们不能使用连续性方法将 T 延拓到 L^∞ 上. 所以需要另辟蹊径

设 f 有界. Q 为 $\mathbb{R}^d$ 中以 0 为中心的一个方体. $Q^* = 2\sqrt{d}\, Q$

$f = f_1 + f_2$ 如上. 则: $f_1 \in L^\infty$ 且紧支. Tf_1 良定且 $L^2 \Rightarrow$ a.e. 有限

$\forall x \in Q$, 令 $Tf(x) := Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^d} (K(x-y) - K(-y)) f_2(y)\, dy$

$Tf(x)$ 收敛是因上式 $\le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |K(x-y) - K(-y)|\, dy$.

现设 $\bar{Q}$ 为另一中心在0且包含Q的方体

则 $\forall x\in Q$. $Tf(x)$ 有两个定义. 一是直接定义. 二是按上面的方法.

令 $f_1 = f\chi_{\bar{Q}^*}$. $f_2 = f - f_1$

则用Q. $\bar{Q}$ 定义出的Tf之差为

$$T(f-f_1)(x)+\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}(k(x-y)-k(0-y))f(y)dy$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d\setminus\bar{Q}^*}(k(x-y)-k(0-y))f(y)dy$$

$$=-\int_{\bar{Q}^*\setminus Q^*}k(0-y)f(y)dy \quad \text{它与}x\text{无关}.$$

∴ 二者只差一个const, 进而可以视作BMO空间中同一个元素

∴ 对 $f\in L^\infty$ $Tf(x)=Tf_1(x)+\int_{\mathbb{R}^d}(k(x-y)-k(0-y))f_2(y)dy$

可以作为Tf的定义. 且 $Tf\in BMO$.

借此, 我们可以证明 $\log|x|\in BMO(\mathbb{R})$.

令 $K(x)=\dfrac{1}{\pi x}$ 对 $|x|<a/2$.

$$\pi Hf(x)=P.V.\int_{-a}^{a}\frac{sgn(y)}{x-y}dy+\lim_{A\to\infty}\left(\int_{-A}^{-a}+\int_{a}^{A}\right)\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y}\right)sgn(y)dy$$

$$=2\log|x|-2\log(a)$$

$\Rightarrow H(sgn(x))=\frac{2}{\pi}\log|x|+C$ 而 $sgn(x)\in L^\infty(\mathbb{R})$

所以 $\log|x|\in BMO(\mathbb{R})$.

这个结果与我们定义Hilbert变换的动机一致: 因为的确存在

上半平面的全纯函数, 其实部在趋于实轴的极限为 $sgn(x)$

eg: $F(z)=i\log iz=i\log(x^2+y^2)^{1/2}+\underbrace{arctg(x/y)}_{\text{实部}}$. 令 $y\to0$ 上式 $\to\frac{\pi}{2}sgn|x|+i\log|x|$

$\frac{2}{\pi}\log|x|$

§4.2 BMO插值与John-Nirenberg不等式

在使用插值定理时，我们往往会先证$L^{p_0}\to L^{p_0}$有界性 下面的插值定理表明：$L^{\infty}\to L^{\infty}$有界可以削弱为$L^{\infty}\to BMO$有界.

Thm 4.2.1 设T为线性算子. $L^{p_0}(\mathbb{R}^d)\to L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$有界.

$L^{\infty}(\mathbb{R}^d)\to BMO(\mathbb{R}^d)$有界)

则$\forall p\in(p_0,\infty)$，T为$L^p\to L^p$有界.

证明该插值定理需要先证如下引理

Lemma 4.2.1：$1\le p_0<p<\infty$时. $f\in L^{p_0}$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} M_d f(x)^p dx \le C\int_{\mathbb{R}^d} M^{\#} f(x)^p dx.$$

如果lemma 4.2.1成立. 我们便可用$M_d(Tf)^p$来控制$|Tf|^p$.

用$(M^{\#}Tf)^p$来~~控~~控制$M_d(Tf)^p$

再用~~用~~$M^{\#}$的L^p有界性即可.

具体地，$M^{\#}\circ T$次线性.

$M^{\#}\circ T: L^{p_0}\to L^{p_0}$有界

又：$\|M^{\#}(Tf)\|_{L^\infty}=\|Tf\|_{*}\le C\|f\|_{L^\infty}$

$\therefore M^{\#}\circ T: L^{\infty}\to L^{\infty}$有界　利用Marcinkiewicz插值知道

$M^{\#}\circ T: L^p\to L^p$有界　$p_0<p<\infty$.

设$f\in L^p$紧支. 则$f\in L^{p_0}\Rightarrow Tf\in L^{p_0}$.

对Tf用lem 4.2.1 再结合$|Tf(x)|\le M_d(Tf)(x)$ a.e

即可

□

以下只需证lem 4.2.1

证明 Lem 4.2.1 需要一个小技巧，称作"好-λ不等式"，这在我们要讲二进极大函数时用过。

Claim：$f\in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ for some $p_0\in[1,\infty)$ 则 $\forall\gamma>0$ $\lambda>0$

$$\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>2\lambda,\ M^\# f(x)\le\gamma\lambda\}$$

$$\le 2^d\gamma\,\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>\lambda\}.$$

若 claim 成立，我们用 L^p norm 的分布函数表示：

$\forall N>0$，令 $I_N=\int_0^N p\lambda^{p-1}\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>\lambda\}\,d\lambda$

则 $I_N\le\frac{p}{p_0}N^{p-p_0}\int_0^N p_0\lambda^{p_0-1}\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>\lambda\}\,d\lambda$.

$$\le\frac{p}{p_0}N^{p-p_0}\|M_d f(x)\|_{p_0}^{p_0}\lesssim\|f\|_{p_0}^{p_0}<\infty$$

$\therefore I_N<\infty$

~~$M_d f\in L^{p_0}$~~

现：

$$I_N=2^p\int_0^{N/2}p\lambda^{p-1}\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>2\lambda\}\,d\lambda.$$

$$\le 2^p\int_0^{N/2}p\lambda^{p-1}\Big(\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>2\lambda\ \ M^\# f(x)\le\gamma\lambda\}$$

$$+\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M^\# f(x)>\gamma\lambda\}\Big)\,d\lambda.$$

$$\overset{\text{claim}}{\le}2^{p+d}\gamma I_N+\frac{2^p}{\gamma^p}\int_0^{\gamma N/2}p\lambda^{p-1}\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid M^\# f(x)>\lambda\}\,d\lambda$$

取 $\gamma=2^{-p-d-1}$.

$$\text{便有 } I_N\le\frac{2^{p+1}}{\gamma^p}\int_0^{\gamma N/2}(\qquad\qquad)\,d\lambda.$$

$N\to\infty$ 便有原式

现在还差 claim. 不妨 $f\geq 0$. Fix $\lambda, \gamma>0$

对 f 作水平 λ 的 C-Z 分解, 则 $\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>\lambda\}$ 可以写成一族极大的二进方体并. 设 Q 为其中一个, 则 只用证

$$\mathcal{L}^d\{x\in Q \mid (\quad)\}\leq 2^d\gamma|Q|.$$

设 $\widetilde{Q}$ 为包含 Q 的二进方体, ~~$\widetilde{Q}=2Q$~~ 边长为 Q 的两倍

由极大性 $f_{\widetilde{Q}}\leq\lambda$.

进一步, 若 $x\in Q$ 且 $M_d f(x)>2\lambda$, 则 $M_d(f\chi_Q)(x)>2\lambda$.

对如上 x, $M_d((f-f_{\widetilde{Q}})\chi_Q)(x)\geq$ ~~$M_d f\chi_Q$~~ $M_d(f\chi_Q)(x)-f_{\widetilde{Q}}>\lambda$.

M_d 次线性.

由 M_d 弱(1.1)知

$$\mathcal{L}^d\{x\in Q \mid M_d((f-f_{\widetilde{Q}})\chi_Q)(x)>\lambda\}$$

$$\leq\frac{1}{\lambda}\int_Q|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|dx.$$

$$\leq\frac{2^d|Q|}{\lambda}\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|dx.$$

$$\leq\frac{2^d|Q|}{\lambda}\inf_{x\in Q}M^\# f(x).$$

若 $\begin{cases} \{\}=\phi \ \checkmark \\ \neq\phi. \quad \exists x\in Q \quad M^\# f(x)\leq\gamma\lambda. \quad \therefore\checkmark \end{cases}$ □.

Rmk: 实际上, 我们还有另一插值定理.

Thm 4.2.2: T 次线性, $T: H^1\to L^1$ 有界且 $\exists\, 1<p_1\leq\infty$. 弱 (p_1,p_1) 有界

对 $\forall p\in(1,p_1)$, $T: L^p\to L^p$ 有界

□

证明略

某种程度上来看，Thm 4.2.2 充当了 Thm 4.2.1 的对偶. 而 H^1, BMO 之间的确存在对偶关系. 1971年, Fefferman 和 Stein 证明了

Thm 4.2.3. $H^1(\mathbb{R}^d)$ 的对偶是 $BMO(\mathbb{R}^d)$.

证明见 Stein 调和分析 ch3

$\square$

~~下面,我们~~

下面我们讨论BMO函数的增长速度.

$L^\infty \subseteq BMO$. BMO 不一定有界. 比如 $\log(\frac{1}{|x|})$.

在 $I=(-a,a)$ 上, 其积分平均为 $1-\log a$.

$\forall \lambda>1$. $\mathcal{L}^1\{x\in\mathbb{R} \mid |\log(\frac{1}{|x|})-(1-\log a)|>\lambda\} = 2ae^{-\lambda-1}$.

下面证明, 某种程度上 log 阶的增长已是 BMO 函数可能拥有的最快增长阶数

Thm 4.2.4 (John-Nirenberg 不等式).

$f\in BMO$. 则 $\exists C_1, C_2>0$ 仅与 d 有关 s.t. 对 $\mathbb{R}^d$ 中任何方向的方体 Q, $\forall\lambda>0$.

$$\mathcal{L}^d\{x\in Q \mid |f(x)-f_Q|>\lambda\} \le C_1 e^{-C_2\lambda/\|f\|_*}\mathcal{L}^d(Q).$$

~~若我~~ 借助 John-Nirenberg 不等式, 我们可以证得

Corollary 4.1.2: $\forall p$, $1<p<\infty$

$$\|f\|_{*,p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

是BMO空间上与 $\|\cdot\|_*$ 等价的范数.

Pf：只用证 $\|f\|_{*,p} \le C_p \|f\|_*$. 反向是显然. 利用 John-Nirenberg

由 $\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} e^{-C_2\lambda/\|f\|_*} d\lambda$. 不等式

令 $s = C_2\lambda/\|f\|_*$.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx \le C_1 p \left(\frac{\|f\|_*}{C_2}\right)^p \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds$$

$$= C_1 p \cdot C_2^{-p} \cdot \Gamma(p) \|f\|_*^p$$

□.

于是，利用函数 e^x 的 Taylor 展开. 有

Cor 4.2.3 $f \in BMO$ 给定. 则 $\exists \lambda > 0$ s.t. $\forall$ 方体 Q.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\lambda|f(x)-f_Q|} dx < \infty$$

Cor 4.2.2 还能给出一个判别准则.

Cor 4.2.4：给定函数 f，设 $\exists C_1, C_2, K$ s.t. $\forall$ 方体 Q. $\forall \lambda > 0$.

$$\mathcal{L}^d\{x \in Q \mid |f(x)-f_Q| > \lambda\} \le C_1 e^{-C_2\lambda/K} \mathcal{L}^d(Q).$$

则 $f \in BMO$.

Pf. 只用证 $\forall Q$.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q| dx < \infty$$

而 $\|\cdot\|_* \le \|\cdot\|_{*,p}$ 等价. 所以

~~$\|f\|_{*,p}$~~ 只用证 $\forall Q$. $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

i.e $\frac{1}{|Q|}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathcal{L}^d\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)-f_Q| > \lambda\} d\lambda$

$$\le \frac{1}{\cancel{|Q|}}\int_0^\infty C_1 p \lambda^{p-1} e^{-C_2\lambda/K} \cancel{\mathcal{L}^d(Q)} d\lambda < \infty.$$

□.

下面来证明 John-Nirenberg 不等式，其方法是不断地对"坏区域"作 Calderón-Zygmund 分解，不断地"局部常值化"，来估计 $|f(x)-f_Q|$ 的大小

~~Thm~~

Pf：不妨设 $\|f\|_* = 1$，则 $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx \le 1$ $\forall$ 方体 Q 成立。

对 $f-f_Q$ 作水平为 2 的 C-Z 分解，注意与 L^1 函数 C-Z 分解略有不同的是：分割区域仅是对方体 Q 进行二进分割

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|\,dx \le 1 \text{ 替代 } f\in L^1$$

此时，我们可以得到一列二进方体 $\{Q_{1,j}\}$ s.t.

$$\begin{cases} 2 < \dfrac{1}{|Q_{1,j}|}\displaystyle\int_{Q_{1,j}} |f(x)-f_Q|\,dx \le 2^{d+1} \\ |f(x)-f_Q| \le 2 \quad x \notin \bigcup_j Q_{1,j} \end{cases}$$

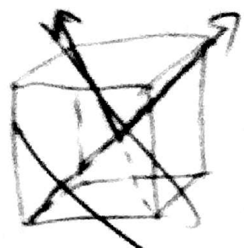
特别地

$$\begin{cases} \sum_j |Q_{1,j}| \le \frac{1}{2}\displaystyle\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx \le \frac{1}{2}\mathcal{L}^d(Q) \\ |f_{Q_{1,j}} - f_Q| = \left|\dfrac{1}{|Q_{1,j}|}\displaystyle\int_{Q_{1,j}} (f(x)-f_Q)\,dx\right| \le 2^{d+1} \end{cases}$$

在每个 $Q_{1,j}$ 上，再对 $f-f_{Q_{1,j}}$ 作水平为 2 的 C-Z 分解

$\Rightarrow$ 得到一列方体 $\{Q_{1,j,k}\}$ 满足

$$\begin{cases} |f_{Q_{1,j,k}} - f_{Q_{1,j}}| \le 2^{d+1} \\ |f(x) - f_{Q_{1,j}}| \le 2 \quad \text{if } x \in Q_{1,j} \setminus \bigcup_k Q_{1,j,k} \\ \sum_k |Q_{1,j,k}| \le \frac{1}{2}|Q_{1,j}| \end{cases}$$



把对应与 $Q_{1,j}$ 的方体 $Q_{1,j}$ 本身的编号为 $Q_{2,j}$

$$\Rightarrow \sum_j |Q_{2,j}| \le \frac{1}{4}|Q|.$$

$$\forall x \in Q_{2,j} \quad |f(x) - f_Q| \le |f(x) - f_{Q_{1,j}}| + |f_{Q_{1,j}} - f_Q|$$

1. 1. 1

$x + y + z = 1.$

$$\le 2 + 2^{d+1} \le 2^{d+2}.$$

不断地重复如上过程. ~~可得一列不~~

$\forall N$, 可得一列不交方体 $\{Q_{N,j}\}$. s.t. $|f(x) - f_Q| \le N \cdot 2^{d+1}$ if $x \notin \bigcup_j Q_{N,j}$.

$$\left\{ \sum_j |Q_{N,j}| \le \frac{|Q|}{2^N} \right.$$

下面 Fix $\lambda > 0$. 设 $\lambda \ge 2^{d+1}$. ~~对~~ $N \cdot 2^{d+1} \le \lambda < (N+1)\, 2^{d+1}$.

$$\text{则 } \mathcal{L}^d\{x \in Q \mid |f(x) - f_Q| > \lambda\} \le \sum_j |Q_{N,j}| \le \frac{|Q|}{2^N} \le e^{-N\log 2}|Q| \le e^{-c_2\lambda}|Q|$$

$c_2 = \log 2 / 2^{d+2}.$

若 $\lambda < 2^{d+1}$ 则 $c_2\lambda < \log\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^d\{x \in Q \mid |f(x) - f_Q| > \lambda\} \le |Q| \le e^{\log\sqrt{2} - c_2\lambda}|Q| = \sqrt{2}\, e^{-c_2\lambda}|Q|$$

$\therefore$ 取 $C_1 = \sqrt{2}$ 即可

$\square$

§4.3 ~~BMO空间的其它刻画~~

BMO空间的交换子刻画

设T为C-Z奇异积分算子，对一个 $b\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，设 $M_b f(x)=b(x)f(x)$.

令 $[b,T]=M_bT-TM_b$　若 $Tf=K*f$ 则 $\forall f\in C_c^\infty$:

$$[b,T]f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}(b(x)-b(y))K(x-y)f(y)\,dy \quad \forall x\notin \mathrm{Spt}(f)$$

显见，若 $b\in L^\infty$ 则 $[b,T]:L^p\to L^p$ 有界 $1<p<\infty$

此时，M_bT，TM_b 也有界，所以，我们可以猜测 $[b,T]$ 也 $L^p\to L^p$ 有界。但由于T有cancellation条件，我们对b的要求可以放宽。

1976~~-1978~~年 Coifman, Rochberg, Weiss 证明了如下结果，并于1978年由Janson完善

Thm 4.3.1: $[b,T]:L^p\to L^p$ 有界 $(1<p<\infty)\iff b\in BMO$.

我们只证：$\Leftarrow$

Pf：不妨 $\|b\|_{*}\le 1$. $A=1$. Fix $f\in S(\mathbb{R}^d)$.

要证：$\forall 1<r<\infty$

$$M^\#([T,b]f)\le C_{r,d}\cancel{(\|Tf\|_{*,r}+\|f\|_{*,r})}\,(M_r(Tf)+M_r(f)) \quad \cdots(*)$$

$$M_r(f)(x)=\sup_{Q\ni x}\left(⨍_Q|f|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

$M_r: L^p\to L^p$ 有界　$1<r<p<\infty$

$\therefore$ 若$(*)$对，则 $\|M^\#([T,b]f)\|_p\lesssim_{d,p}\|f\|_p$.

再由 $\|M_d f\|_p\lesssim_{p,d}\|M^\# f\|_p$ 便有 $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$

$$\|[T,b]f\|_p\lesssim \cancel{\|b\|_*}\,\|f\|_p.$$

证 (iv). 我们任固定一个方体 Q，并不妨设 Q 的中心为 0.

$$Q^* := 2\sqrt{d}\,Q.$$

则
$$[T,b]f = T\big((b-b_{Q^*})f_1\big) + T\big((b-b_{Q^*})f_2\big) - (b-b_{Q^*})Tf$$
$$=: g_1+g_2+g_3$$

其中 $f_1=\chi_{Q^*}f$, $f_2=f-f_1$.

那么:

1.
$$\fint_Q |g_3(x)|\,dx \le \Big(\fint_Q |b-b_Q|^{r'}dx\Big)^{1/r'}\Big(\fint_Q |Tf|^r dx\Big)^{1/r}$$
$$\le C\inf_Q M_r(Tf)$$

2. 取 $1<s<r$，由 $T: L^s\to L^s$ 有界.
$$\fint_Q |g_1(x)|\,dx \le \Big(\fint_Q |g_1(x)|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}}$$
$$\le \Big(\fint_{Q^*} |b-b_Q|^s\,|f(x)|^s dx\Big)^{1/s}$$
$$\le C\inf_Q M_r f$$

3. 令 $a_Q = T\big((b-b_{Q^*})f_2\big)(0)$.

则 $\fint_Q |g_2(x)-a_Q|\,dx$
$$\le C\fint_Q\int_{Q^{*c}} |K(x-y)-K(0-y)|\,|b(y)-b_{Q^*}|\,|f(y)|\,dy\,dx$$
$$\le C\sum_{l\ge 0}\int_{2^{l+1}Q^*\setminus 2^lQ^*} 2^{-l(d+\delta)}\,|b(y)-b_Q|\,|f(y)|\,dy$$
$$\le C\sum_{l\ge 0} 2^{-l\delta}\Big(\fint_{2^{l+1}Q^*}|b(y)-b_Q|^{r'}dy\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\fint_{2^{l+1}Q^*}|f(y)|^r dy\Big)^{\frac{1}{r}}$$
$$\le C\sum_{l\ge 0} l\cdot 2^{-l\delta}\inf_Q M_r f \le C\inf_Q M_r f$$

□