§3 Calderón-Zygmund 奇异积分

§3.1: 特例: Hilbert 变换 ~~与 Riesz 变换~~

首先我们考虑一个问题: 任给 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f\in L^p(\mathbb{R})$, 能否找到上半平面的全纯函数 $F_f(z)$, 使得 $Re(F_f(z))$ 限制在实轴上的取值为 f?

由于上半平面是单连通的, 所以只须找出一个调和函数, 其限制在实轴上取 f, 再计算其共轭调和函数即可

$\forall f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$, 我们知:

$$(P_y*f)(x)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt.$$ 是上半平面的调和函数.

且由于 Poisson 核是一族逼近恒等, 故 $y\to 0$ 时 $P_y*f\to f$ a.e. 下面来求共轭调和函数

注意到.

$$(P_y*f)(x)=Re\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)+iy}\,dt\right)$$

$$=Re\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{z-t}\,dt\right)$$

令 $F_f(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{z-t}\,dt$, 则 $F_f(z)$ 为 $\mathbb{R}^2_+$ 上的全纯函数

(因 $\frac{\partial}{\partial \bar z}F_f(z)=0$)

且 $Re(F_f(z))=(P_y*f)(x)$

而 $Im\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{x-t+iy}\,dt\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)(x-t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$

令 $Q_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$.

则 $Im(F_f(z))=(Q_y*f)(x)$.

至此, 我们自然会问, $y\to 0^+$ 时 Q_y*f 是否有点态的极限?

Thm 3.1.1: $1\le p<\infty$ $\forall f\in L^p(\mathbb{R})$, 我们有

$$f*Q_\varepsilon-H_\varepsilon(f)\to 0 \quad \text{as } \varepsilon\to 0^+ \quad \text{a.e. \& } L^p$$

其中: $H_\varepsilon(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy$

证明：直接计算：

$$(Q_\varepsilon * f)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} f(x-t)\,dt - \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt\right)$$

$$\overset{t=\varepsilon s}{=} \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x) \qquad \psi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s} & |s|>1 \\ \frac{s}{s^2+1} & |s|<1 \end{cases}$$

而 $\int \psi = 0$.

且 $\psi \leq \Phi = \begin{cases} \frac{1}{s^2+1} & |s|\geq 1 \\ 1 & |s|<1 \end{cases}$

从而 ψ 有径向递减、非负、可积的控制 $\Rightarrow f * \psi_\varepsilon \to f$ L^p and a.e. as $\varepsilon \to 0^+$

□

上面定义的 $H_\varepsilon(f)$ 称作 f 的截断 Hilbert 变换，当 $f \in S(\mathbb{R})$ 时，$\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)$ 是存在的，i.e. $H(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(f)(x)$. ~~为了证明存在性~~

~~为何存在？只用控制分布H是缓增分布即可（习题）~~

习题：证明如上极限存在 (Hint：令分布 W_0 为 $\langle W_0, \varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \frac{1}{\pi}\int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}dx$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

去证明 $W_0 \in S'(\mathbb{R})$，这是分布；只需利用 $\frac{1}{x}$ 在 $\varepsilon\leq|x|\leq 1$ 积分为0，写成 $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$)

可以计算 $H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{|x-a|}{|x-b|}\right)$

下面我们来证明 Hilbert 变换的 L^p 有界性。

Thm 3.1.2：$1<p<\infty$ 时，$\exists C_p > 0$ s.t. $\|Hf\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p}$, $\forall f \in S(\mathbb{R})$

Step 1: L^2 有界性，我们应该考虑计算 H 对应的 Fourier 乘子是否有界，再利用 Plancherel 恒等式证得 L^2 有界。

Fix any $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

则 $\langle \widehat{W_0}, \varphi\rangle = \langle W_0, \widehat{\varphi}\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} \widehat{\varphi}(\xi)\frac{d\xi}{\xi}$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx\,\frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\frac{d\xi}{\xi}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\left(-\frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin 2\pi x\xi}{\xi}d\xi\right)dx$$

不难证明：$\left| -\frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon \le |\xi| \le \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin 2\pi x\xi}{\xi} d\xi \right| \le C$，$C$ 与 ε 无关。

当 $\varepsilon \to 0$ 时，由控制收敛

$$\langle \widehat{W_0}, \varphi \rangle \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon \le |\xi| \le \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi} d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) (-i \operatorname{sgn} x) \, dx .$$

$\therefore \widehat{W_0}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)$. 因此 ~~并对~~ $\forall f \in S(\mathbb{R})$，$\widehat{(Hf)}(\xi) = \hat{f}(\xi)(-i \operatorname{sgn} \xi)$

$\|\widehat{Hf}\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} \Longrightarrow$ ~~即~~ $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$.

至此，我们已证得 $H: L^2 \to L^2$ 是 等距同构

又因 $(-i\operatorname{sgn}\xi)^2 = -1$，我们可得 $H^* = -H$.

Step 2：~~弱 L^1 有界~~：

~~由于 $x \le \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.~~

再生公式：对实值 Schwarz 函数 f.

$H(f)^2 = f^2 + 2H(f H(f))$.

由之前的讨论知，$f + iH(f)$ ~~延 $\mathbb{R}^2_+$ 上 可~~ 可以全纯开拓到 $\mathbb{R}^2_+$ 上。

从而 $(f + iH(f))^2 = f^2 - H(f)^2 + i \cdot (2fH(f))$ 也可

$\therefore f^2 - H(f)^2$ 在上半平面中可延拓为调和函数 u，u 的共轭 调和函数 v 必有边值 $H(f^2 - H(f)^2)$

$\therefore H(f^2 - H(f)^2) = 2fH(f)$. 据 $H^2 = -Id$ 两边再用 H 作用

$$H(f)^2 - f^2 = 2H(fH(f)).$$

Step 3：L^{2^k} 有界性：

$k=1$ 已证，设对某个 $k \in \mathbb{N}^*$，$\|Hf\|_{L^{2^k}} \le C \|f\|_{L^{2^k}}$.

则 $\|Hf\|_{L^{2^{k+1}}} \overset{p=2^k}{=} \|(Hf)^2\|_{L^p}^{\frac{1}{2}} = \|f^2 + 2H(fH(f))\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}$

$$\leq \left(\|f^2\|_{L^p} + \|2H(fH(f))\|_{L^p}\right)^{1/2}.$$

$$\leq \left(\|f\|_{L^{2p}}^2 + 2C\|fH(f)\|_{L^p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\|f\|_{L^{2p}}^2 + 2C_p\|f\|_{L^{2p}}\|Hf\|_{L^{2p}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}}\right)^2 - 2C_p\frac{\|H(f)\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \|Hf\|_{L^{2p}} \leq C'\|f\|_{L^{2p}}.$$ #

Step 4: 由 Riesz-Thorin 插值知. ~~在~~ $2\leq p<\infty$ 时

$$\|Hf\|_p \leq C_p\|f\|_p.$$

对 $1<p\leq 2$.

$$\|Hf\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}|\langle Hf, g\rangle|.$$

$$= \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leq 1}|\langle f, \underbrace{H^*g}_{=-Hg}\rangle|$$

$$\leq \|f\|_{L^p}\|H^*g\|_{L^{p'}} \overset{2\leq p<\infty}{\leq} \|f\|_{L^p}\cdot C_{p'}$$

□

Hilbert 变换在 $\mathbb{R}^d$ 中也有推广:

对 $f\in S(\mathbb{R}^d)$. 令 $R_j(f)(x) = C_d\ \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy.$

$C_d = \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)/\pi^{d+1/2}$, $R_j(f)$ 称作 f 的(第 j 个) Riesz 变换.

用与之前相同的方法. 可证得. $\widehat{R_jf}(\xi) = \frac{-i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi).$

. $R_j: L^p\to L^p$ 有界 $1<p<\infty$

. $\sum_{j=1}^d R_j^2 = -Id.$

□

§3.2 Calderón-Zygmund 奇异积分

§3.1中，我们证明了一类特殊的"奇异积分" Hilbert 变换具有L^p有界性。但在证明中，我们用到了Hilbert变换独有的性质(再生公式)。对具有一般形式的奇异积分，我们需要引入Calderón-Zygmund分解来证明其L^p有界性。

<u>Def</u>：设 $K: \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ 满足如下条件：
存在常数 B，使得

① $|K(x)| \leq B/|x|^d \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

② $\displaystyle\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)|\, dx \leq B. \quad \forall y \neq 0$

③ $\displaystyle\int_{r<|x|<s} K(x)\, dx = 0 \quad \forall 0<r<s<\infty$

此时称 K 为 Calderón-Zygmund 核。
并定义 $\displaystyle Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x-y) f(y)\, dy \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^d)$.

~~条件~~②称作Hörmander条件，~~在如下情况~~ 实际上，若 $|\nabla K(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^{d+1}} \ \forall x \neq 0$ 成立，则②自动满足。

<u>check</u>：Fix $x, y \in \mathbb{R}^d$ $|x| > 2|y|$. x, $x-y$ 用线段 $x-ty$ $(0\leq t\leq 1)$ 连接
且 $\{x-ty \mid 0\leq t\leq 1\}$ 含于 $B(x, \frac{|x|}{2})$

$$\therefore |K(x) - K(x-y)| = \left| -\int_0^1 \nabla K(x-ty)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\nabla K(x-ty)| \cdot |y|\, dt$$

$$\leq 1 \cdot |y| \cdot B \cdot \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-d-1}$$

我们称满足①②③的积分核为强Calderón-Zygmund核 ※

~~人若~~
易见：Hilbert变换中的 $K(x) = \frac{1}{x}$ 满足①-③条件。
Riesz $\quad K_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|^{d+1}}$

所以它们是Calderón-Zygmund 奇异积分。
它们甚至使①②的$\leq$达到了sharp.

下面逐步证明 $T: L^p \to L^p$ 有界 $(1<p<\infty)$

Thm 3.2.1 $T: L^p \to L^p$ 有界 $1<p<\infty$ $\|T\|_{L^p\to L^p} \le CB$, C 与 p, d 有关

证明: 我们要验证的实际上只有 L^2 有界性 和 弱 $(1,1)$ 有界性. 之后, 利用 Marcinkiewicz 插值和对偶即可完成. 具体来说, 我们要证.

~~Prop 3.2.1: $\|T\|$~~

Claim 1: $\|T\|_{2\to 2} \le CB$.

Claim 2: $\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid |Tf(x)|>\lambda\} \le \frac{CB}{\lambda}\|f\|_{L^1}$. $\forall \lambda>0$.

若两个 claim 均成立, 则由 Marcinkiewicz 插值知: $1<p\le 2$ 时, $T: L^p \to L^p$ 有界: 而 $2\le p<\infty$ 时. $1<p'\le 2$.

$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle, \quad T^*g = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} K^*(x-y)g(y)\,dy$$

易证得 $K^*(x)=\overline{K(-x)}$, 从而 K^* 也满足 ①~③. 因此.

$$\|Tf\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} |\langle Tf, g\rangle| = \sup_{\|g\|_{p'}\le 1} |\langle f, T^*g\rangle|$$

$$\le \|f\|_p \|T^*g\|_{p'}$$

从而得到 T の L^p 有界性.

$$\le \|f\|_p \cdot CB.$$

下面先证 claim 1. 我们对积分作截断:

对 $0<r<s<\infty$. 令 $(T_{r,s}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(y)\chi_{\{r<|y|<s\}}(y) f(x-y)\,dy$

$$m_{r,s}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\chi_{\{r<|x|<s\}}(x) K(x)\,dx.$$

由 Plancherel Thm. 只用证 $\sup_{0<r<s}\|m_{r,s}\|_\infty \le CB$ ……(*)

若(*)成立, 则 $\|T_{r,s}\|_{2\to 2} = \|m_{r,s}\|_\infty \le CB$. 对 r, s 一致成立.

而 $\forall f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $Tf(x) = \lim_{\substack{r\to 0\\ s\to\infty}} (T_{r,s}f)(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}^d$.

由 Fatou 引理 (不妨 $f\ge 0$) 知 $\|T\|_{2\to 2} \le CB$. ✓

为证 (*)，我们分离两部分估计。

$$\left|\int_{r<|x|<\frac{1}{|\xi|}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,dx\right| \underset{\text{利用③}}{=} \left|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} (e^{-2\pi i x\cdot\xi}-1)K(x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_{|x|<|\xi|^{-1}} 2\pi|x|\cdot|\xi|\,|K(x)|\,dx.$$

$$\leq 2\pi|\xi|\int_{|x|<|\xi|^{-1}} \frac{B}{|x|^{d-1}}\,dx.$$

$$\leq CB\cdot|\xi|\cdot|\xi|^{-1} = CB.$$

而 $\cancel{\int_{\frac{1}{|\xi|}<|x|<s} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx}$ 的

$|\xi|>\frac{1}{|x|}$ 的估计不能采用如上方法，因 $\frac{1}{|x|^{d}}$ 在无穷附近不可积！

此时，我们采用一个"扰动"这个小技巧在证明 Riemann-Lebesgue 引理时用过.(Stein Real Analysis. exe 3.22)

$$\int_{s>|x|>|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = -\int_{s>|x|>|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi i\left(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\cdot\xi}\,dx$$

$$= -\int_{|\xi|^{-1}<\left|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right|<s} K\left(x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$

设上式左边为 A

$$\Rightarrow 2A=\cancel{\int_{s>|x|>|\xi|^{-1}} K(x) - K(x-\ldots)}$$

$$2A = \int_{s>|x|>|\xi|^{-1}} \left(K(x)-K\left(x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx. + \underline{O(1)}$$

类似于 $|\xi|<\frac{1}{|x|}$ 的估计方法即可

$$\Rightarrow |2A| \leq \int_{|x|>|\xi|^{-1}} \underbrace{\left|K(x)-K\left(x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\right|}_{\text{用一下条件②}}\,dx + CB$$

$\leq CB$.

claim 证毕！

#

下面来证明 claim 2. 即 T是弱(1,1)的，这需要用到 Calderón-Zygmund 分解：

Recall lemma 1.3.1 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，$\lambda>0$. 则 f 可分解为 $f=g+b$.

满足：(i) $|g(x)|\le\lambda$

(ii) $b=\sum_{Q\in\mathcal{B}}\chi_Q f$

(iii) $\mathcal{B}=\{Q\}$ 是一列不交的方体，$\lambda<\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|\le 2^d\lambda$

(iv) $\left|\bigcup_{Q\in\mathcal{B}}Q\right|\le\frac{\|f\|_1}{\lambda}$.

现在令 $f_1=g+\sum_{Q\in\mathcal{B}}\chi_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q f$

$$f_2=b-\sum_{Q\in\mathcal{B}}\chi_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q f.$$

$$=\sum_{Q\in\mathcal{B}}\chi_Q\left(f-\frac{1}{|Q|}\int_Q f\right).$$

$b=\sum_{Q\in\mathcal{B}}\chi_Q f$

则：$f=f_1+f_2$. $\|f_1\|_\infty\le 2^d\lambda$.

$\|f_2\|_1\le 2\|f\|_1$. $\|f_1\|_1\le\|f\|_1$.

$\int_Q f_Q=0\quad\forall Q\in\mathcal{B}$.

于是：

$$\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|Tf(x)|>\lambda\}\le\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|Tf_1(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}+\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|Tf_2(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}.$$

$$\le\frac{C}{\lambda^2}\|Tf_1\|_2^2+\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,|Tf_2(x)|>\tfrac{\lambda}{2}\}.$$

首先：$\frac{C}{\lambda^2}\|Tf_1\|_2^2\le\frac{C}{\lambda^2}\|f_1\|_2^2\le\frac{C}{\lambda^2}\|f_1\|_\infty\|f_1\|_1$

$\le\frac{C}{\lambda}\|f_0\|_1$ ✓

其次：对 Tf_2 的估计. 我们需要对方体进行伸缩

$\forall Q\in\mathcal{B}$ 令 Q^* 是以 Q 的中心为中心，边长为 $2\sqrt{d}$ 倍 Q 的边长的方体，且各边与 Q 的各边平行。

于是：$\mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d \mid |Tf_2(x)|>\frac{\lambda}{2}\}$

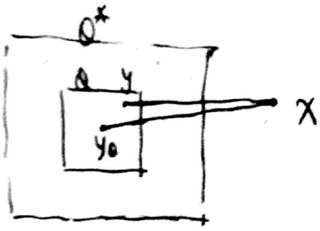
$\leq \mathcal{L}^d(\bigcup_{\mathcal{B}} Q^*) + \mathcal{L}^d\{x\in\mathbb{R}^d\setminus\bigcup_{\mathcal{B}} Q^* \mid |Tf_2(x)|>\frac{\lambda}{2}\}$

$\leq c\sum_{Q\in\mathcal{B}}|Q| + \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\bigcup Q^*}|Tf_2(x)|\,dx$

$\overset{C\text{-}Z(iv)}{\leq} \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1} + \frac{2}{\lambda}\sum_{Q\in\mathcal{B}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}|Tf_Q(x)|\,dx$

此时我们要利用 $\int f_Q=0$，强行在 Tf_Q 中插入一项，造出可以用②的形式

$\forall x\in\mathbb{R}^d\setminus Q^*$，$Tf_Q(x)=\int_Q K(x-y)f_Q(y)\,dy$



$=\int_Q \big(K(x-y)-K(x-\underbrace{y_Q}_{Q\text{的中心}})\big)f_Q(y)\,dy$

$\therefore \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}|Tf_Q(x)|\,dx$

$\leq \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}\int_Q|K(x-y)-K(x-y_Q)|\,|f_Q(y)|\,dy\,dx$

$\leq \int_Q\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}|K(x-y)-K(x-y_Q)|\,dx\,|f_Q(y)|\,dy$

而 $x\in\mathbb{R}^d\setminus Q^*$，$y\in Q$ 时，$|x-y_Q|\geq 2|y-y_Q|$.

$\therefore \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}|K(x-y_Q+(y-y_Q))-K(x-y_Q)|\,dx\leq B$

$\therefore$ 上式 $\leq B\int_Q|f_Q(y)|\,dy \leq 2B\int_Q|f(y)|\,dy$

$\therefore \sum_{Q\in\mathcal{B}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*}|Tf_Q(x)|\,dx \leq \frac{4B}{\lambda}\int|f(y)|\,dy$

$\Rightarrow \mathcal{L}^d\{x \mid |Tf(x)|>\lambda\}\leq\frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1}$ □

至此，我们证明了 $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$. $\|Tf\|_{L^p} \le \cancel{\|f\|_{L^p}}\, C(p,d)B\|f\|_p$

而 $S(\mathbb{R}^d)$ 在 L^p 中稠密，所以 $\|T\|_{L^p\to L^p} \le C(p,d)B$

□

~~下面再证明~~

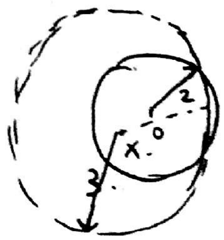
下面再证明奇异积分的 C^α 有界性，这与 Schauder 估计有关.

设 $0<\alpha<1$. ~~令 $C^\alpha(\mathbb{R}) = \{f\in C(U)$~~

$$[f]_{C^\alpha} = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \qquad \|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha}.$$

由于 C^α 函数未必在 ∞ 处衰减，所以在用奇异积分算子作用到 C^α 函数上时，我们不妨设函数紧支，来避免可能出现的问题

Thm 3.2.2. 设 K 为强 Calderón-Zygmund 核，$0<\alpha<1$. 则 $\forall f\in C^\alpha$ 且 $\mathrm{Spt}\, f\subset B(0,1)$，成立 $\|Tf\|_{C^\alpha} \le C(\alpha,d)\|f\|_{C^\alpha}$.



证：不妨 $\|f\|_{C^\alpha} \le 1$. $B=1$.

则 $\forall |x|\le 2$.

$$|Tf(x)| = \left|\int K(x-y)f(y)\,dy\right|$$

$$= \left|\int_{|x-y|\le 3} K(x-y)(f(y)-f(x))\,dy\right|$$

$$\le \int_{|x-y|\le 3} |K(x-y)||f(y)-f(x)|\,dy \le \int_{|x-y|\le 3} |x-y|^{-d+\alpha} \le C.$$

另一方面，若 $|x|>2$. 则 $\forall |y|<1$. ~~$|x-y|>1$~~ $|x-y|\ge 1$

$$\Rightarrow |K(x-y)| \le \frac{1}{|x-y|^d} \le 1.$$

$$|Tf(x)| = \left|\int K(x-y)f(y)\,dy\right| \le \int |K(x-y)||f(y)|\,dy \le C$$

现在设 x' 满足 $|x'-x| = \delta<1$. 来估计 $[Tf]_{C^\alpha}$.

$$|Tf(x)-Tf(x')| \le \left|\int_{|y|<3\delta} k(y)(f(x-y)-f(x'-y))\,dy\right| \to I_1$$

$$+\left|\int_{|y|\geq 3\delta} k(y)(f(x-y)-f(x'-y))\,dy\right| \to I_2$$

$$I_1 \le \int_{|y|<3\delta} |k(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy + \int_{|y|\le 3\delta} |k(y)|\cdot|f(x'-y)-f(x)|\,dy$$

$$+\left|\underbrace{\int_{|y|<3\delta} k(y)\,(f(x)-f(x'))\,dy}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right| \quad (由\ \text{Cancellation}).$$

$$\le \int_{|y|<3\delta} |y|^{-d+\alpha}\,dy \le C_d\delta^{\alpha}.$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^1} \underbrace{\left(\chi_{\{|y|\geq 3\delta\}}(y)\,k(y)\right)}_{记作\ K_\delta(y)} (f(x-y)-f(x'-y))\,dy$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x-y)-K_\delta(x'-y)|\cdot|f(y)-f(x)|\,dy$$

$f(x)$ 由出现们是利用 Cancellation.

~~若要~~上式 $\neq 0$ 时. 需要 $|x-y|>3\delta$.

$|x'-y|>3\delta$.

此时. 上式

$$\le \int_{|x-y|>3\delta} \frac{\delta\,|x-y|^{\alpha}}{|x-y|^{d+1}}\,dy \le C\delta^{\alpha}.$$

这样便完成了证明

□

<u>Rmk</u>. 在 §5 中, 我们会用 Littlewood-Paley 理论给出另一证明.

那个证明更加复杂, 但好处是不需要 $|\nabla k(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^{d+1}}$ 的条件.

§3.3 齐次奇异积分核的点态收敛

之前证明奇异积分 L^p 有界性时，我们都是先对 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ 证明，再将其延拓到 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上。这是因为 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ 时，$Tf(x)$ 的逐点取值有意义，但 f 仅在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中时，$Tf(x)$ 的逐点取值未必有意义。

于是，本节就是为了搞清楚：~~何时~~ 当 T 满足何种条件时，对 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$Tf(x)=P.V.\int_{\mathbb{R}^d}K(x-y)f(y)\,dy \quad 对\ (a.e.)\ x\in\mathbb{R}^d\ 有定义？$$

回忆：在 §1 中证明 Lebesgue 微分定理时，我们利用 Hardy-Littlewood 极大算子（同时也是 $\frac{1}{|B|}\int_B f$ 这族算子的极大算子）来~~控制~~ ~~弱 L^1 的界~~，界住 $\limsup\limits_{\varepsilon\to0^+}T_\varepsilon-\liminf\limits_{\varepsilon\to0^+}T_\varepsilon$。之后去证明极大算子的弱 L^1 有界，使上、下极限不相等的集合为零测，便完成证明。

对于奇异积分，我们要考虑的是 $T^*f(x)=\sup\limits_{\varepsilon>0}\left|\int_{|y|>\varepsilon}K(y)f(x-y)\,dy\right|$。

我们希望用 Hardy-Littlewood 极大函数控制 T^*，再用弱 L^1 有界性完成证明。但遗憾的是，最终的结论~~对~~并不是对任何奇异积分算子成立。我们会证明：$K(x)$ 为度 $-d$ 齐次核时，结论成立。即

$$K(x)=\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^d}\qquad x\neq0.\quad \Omega:S^{d-1}\to\mathbb{C}\ \ C^1 函数$$

$$\int_{S^{d-1}}\Omega(x)\,\sigma(dx)=0$$

的积分核。

特别地，Riesz 变换就是这样的积分核。

易证，如上 $K(x)$ 是 Calderón-Zygmund 奇异积分核。

Thm 3.3.1：设 $K(x)=\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^d}$ 如上所述，则 $\forall 1\le p<\infty$，$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon f=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}K(x-y)f(y)\,dy \quad 对\ a.e.\ x\in\mathbb{R}^d\ 成立。$$

证明：令 $T^*f=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|y|>\varepsilon}K(y)f(x-y)dy\right|$

~~断言~~ claim：$(T^*f)(x)\le C_d\left(M(Tf)(x)+Mf(x)\right)$　C_d 为某个仅与 d 有关的绝对常数

特别地，T^* 强 L^p $(1<p<\infty)$，弱 L^1 有界

若 claim 成立，则我们考虑 $\Lambda(f)(x)=\left|\limsup_{\varepsilon\to0}(T_\varepsilon f)(x)-\liminf_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon f(x)\right|$

显见 $\Lambda(f)\le 2T^*f$

令 $X=\{f\in L^p(\mathbb{R}^d)\mid \Lambda(f)=0\}\subset L^p(\mathbb{R}^d)$

显见 $S(\mathbb{R}^d)\subseteq X$，所以只用证 X 是 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中的闭集即可

为此，设 ~~$f_n\in$~~ X，$\{f_n\}\subseteq X$，$f_n\to f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$

则 $\Lambda(f)=\Lambda(f-f_n)$

$1<p<\infty$ 时，$\|\Lambda f\|_p=\|\Lambda(f-f_n)\|_p\le\|2T^*(f-f_n)\|_p$

$\cancel{\le\|2T^*f\|_p\le 2C\|f\|_p}$

$\lesssim\|f-f_n\|_p$　[因为 T, M 均 L^p 有界 $(1<p<\infty)$

$\to 0$

$p=1$ 时　$\cancel{\|\Lambda f\|_1\le 2\|T^*(f-f_n)\|_1}$

$\cancel{\le 2}$

$$\mathcal{L}^d\{x\mid|\Lambda f|>\alpha\}\le\mathcal{L}^d\left\{x\,\middle|\,|T^*(f-f_n)|>\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$\le\frac{2C}{\alpha}\|f-f_n\|_{L^1}\to0\qquad\forall\alpha>0$$

$\Rightarrow\ \Lambda f=0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow X\overset{\text{闭}}{\subset}L^p\\ S\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow X=L^p(\mathbb{R}^d)$. 证毕

此时只用证 claim 成立

~~我们要想办法证明 $T_\varepsilon f\le$~~

Recall：若 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 为一族逼近恒等，且由有径向递减、非负可积的控制，则 $\sup_{\varepsilon>0}|\phi_\varepsilon*f|\le CM(f)$

所以我们可以尝试利用此定理

令 $\tilde{K}(x)=K(x)\chi_{\{|x|\geq 1\}}$ $\tilde{K}_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d}\tilde{K}(\frac{x}{\varepsilon})=K(x)\chi_{\{|x|\geq\varepsilon\}}$

选取 bump 函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\varphi\geq 0$ $\int\varphi\,dx=1$

令 $\Phi=\varphi*K-\tilde{K}$

由 φ 之定义知 $\varphi*K$ 有定义

$$\Phi_\varepsilon=(\varphi*K)_\varepsilon-\tilde{K}_\varepsilon$$

K度-d齐次

$$=\varphi_\varepsilon*K_\varepsilon-\tilde{K}_\varepsilon\overset{\downarrow}{=}\varphi_\varepsilon*K-\tilde{K}_\varepsilon$$

$\therefore\ \forall f\in S(\mathbb{R}^d)$. $K_\varepsilon*f=\varphi_\varepsilon*(K*f)-\Phi_\varepsilon*f$.

所以, 由 ..... 可得,

$$T_\alpha^* f\leq C\left(M(Tf)+M(f)\right).$$

□.

接下来我们说明一下, 取 $K(x)=\frac{\Omega(\frac{x}{|x|})}{|x|^d}$ 是有道理的.

一之奇异积分是卷积 $Tf=K*f$, 若从乘子角度考虑, 我们可以写成 $Tf=(\hat{K}\hat{f})^\vee$. 因此, 我们令 $T_m f=(m\hat{f})^\vee$. m为度0齐次 $m\in C^\infty(\mathbb{R}^d\setminus 0)$

此时若 $f\in S(\mathbb{R}^d)$, 则 $T_m f=\check{m}*f$. $\check{m}\in S'(\mathbb{R}^d)$.

由 m度0齐次 知 $K=\check{m}$ 为度-d齐次. 故 $\forall\lambda>0$.

$$\langle\widehat{m(\lambda\cdot)},\varphi\rangle=\langle m,\lambda^{-d}\hat{\varphi}(\lambda^{-1}\cdot)\rangle=\langle m,\widehat{\varphi(\lambda\cdot)}\rangle$$

$$=\langle\hat{m},\varphi(\lambda\cdot)\rangle=\langle\lambda^{-d}\hat{m}(\lambda^{-1}\cdot),\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^d).$$

特别地, 常值函数度0齐次, 把它选为m, 则 $\check{m}=c\delta$ 为度-d齐次的分布.

下面我们~~对这样的积分核对应~~由乘子构造的积分核给出一个刻画.

Prop 3.3.1 $m\in C^\infty(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ 度0齐次, $\langle m\rangle_{S^{d-1}}:=\frac{1}{|S^{d-1}|}\int_{S^{d-1}}m(x)\,\sigma(dx)$

则 $\hat{m}\in S'(\mathbb{R}^d)$ $\hat{m}=\langle m\rangle_{S^{d-1}}\delta_0+\text{p.v.}K_\Omega$, 其中 $K_\Omega=\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^d}$.

$\langle\Omega\rangle_{S^{d-1}}=0$

$\Omega\in C^\infty(S^{d-1})$.

证明 不妨 $\langle m\rangle=0$. 令 $u_j=\partial_j^d m\in S'(\mathbb{R}^d)$. 则 u_j 度 $-d$ 次齐次

$\langle u_j\rangle_{S^{d-1}}=0$

从而 u_j 的积分主值存在. 且

$$u_j=\mathrm{p.v.}\,u_j+\underbrace{\sum_\alpha}_{\text{有限和}} C_\alpha\partial^\alpha\delta_0 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ 成立主要因为 $\forall u,v\in S'$ 若满足 $\forall\varphi\in S$, $\operatorname{supp}\hat\varphi\subseteq\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, $\langle u,\hat\varphi\rangle=\langle v,\hat\varphi\rangle$

~~则对~~

则 $u-v$ 是一个多项式.

从而 $\hat u-\hat v=\sum_\alpha C_\alpha\partial^\alpha\delta_0$ （本质上是：支于原点的分布必是 δ_0 及其各阶分布导数的有限线性组合）

此时 u_j 与 $\mathrm{p.v.}\,u_j$ 就是支于原点的分布

$\Rightarrow$ 相差 $\sum C_\alpha\partial^\alpha\delta_0$

又因 u_j 度 $-d$ 齐次 $\therefore\sum_\alpha C_\alpha\partial^\alpha\delta_0$ 只能是 $C_j\delta_0$.

$$\Rightarrow\ \hat u_j=\underbrace{\widehat{\mathrm{p.v.}\,u_j}}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})\text{ 度 }0\text{ 齐次}}+c_j.$$

check: $\exists\ \chi(\xi)$ 支于 0 附近. C_0^∞ 且径向.

$$\forall x\neq0.\quad \widehat{\mathrm{p.v.}\,u_j}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j^d m(\xi)\,\chi(\xi)\left(e^{-2\pi i x\xi}-1\right)d\xi$$

$$+\sum_{j=1}^d\frac{x_j}{2\pi i|x|^2}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\left(\partial_j^d m(\xi)\,(1-\chi(\xi))\right)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi$$

由于度 $-d$ 齐次 $\therefore$ 令 $\hat m(x)=\dfrac{\Omega(x/|x|)}{|x|^d}$ $\quad x\neq0$ $\quad\Omega\in C^\infty(S^{d-1})$

设 $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$. 径向. 则 $\langle\hat m,\varphi\rangle=\langle m,\hat\varphi\rangle=0$. (~~因 m~~ ↑因 $\langle m\rangle_{S^{d-1}}=0$.

$$\| \qquad \int_0^\infty\int_{S^{d-1}}m(\rho\omega)\,\hat\varphi(\rho\omega)\,dS_\omega\,d\rho$$

radial

$\therefore\ \langle\Omega\rangle_{S^{d-1}}=0$

$\Rightarrow$ $\hat m-\mathrm{p.v.}\,K_\Omega$ 支于 0. 从而是 $\sum_\alpha C_\alpha\partial^\alpha\delta_0$ 型的.

再用 $\hat m$ 度 $-d$ 齐次知 $\hat m-\mathrm{p.v.}\,K_\Omega=c\,\delta_0$.

两边在 S^{d-1} 积分有 $c=\langle m\rangle_{S^{d-1}}$

$\square$

§3.4. Riesz变换与分数阶积分.

设 $\Delta u = f$, in $\mathbb{R}^d$. $f \in S(\mathbb{R}^d)$. 由PDE理论知.

$d=2$时. $u(x) = C_2 \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|) f(y)\, dy$

是 $\Delta u = f$ 的解.

$d \geq 3$时. $u(x) = C_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-2}}\, dy$

积分核 $\log|x|$, $|x|^{2-d}$ 称作牛顿位势.

求导后,可验证. ~~d≥3时~~

$d \geq 3$时. $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = C_d \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x-y) f(y)\, dy + \frac{1}{d} \delta_{ij} f(x)$.

作为积分主值积分.

其中. $K_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} & i \neq j \\ \frac{x_i^2 - d^{-1}|x|^2}{|x|^{d+2}} & i = j \end{cases}$.

$d=2$时 $K_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} & i=j \\ \frac{-2x_i x_j}{|x|^2} & i \neq j \end{cases}$.

C-Z.

可以看见 $K_{ij}(x)$是积分核

$K_i(x) = \partial_i \left(\frac{1}{|x|^{d-1}}\right) = C_d \cdot \frac{x_i}{|x|^{d+1}}$ 也为C-Z积分核.

设 K_i, K_{ij} 对应的C-Z算子为 R_i, R_{ij}. 则 R_i 也称为Riesz变换

$R_{ij}(\Delta \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$. $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$. 从而我们有椭圆 $W^{2,p}$ 估计

corollary 3.4.1: $u \in S(\mathbb{R}^d)$. 则 $\sup\limits_{1 \leq i,j \leq d} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,d} \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

$1 < p < \infty$.

$\sup\limits_{1 \leq i,j \leq d} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{C^\alpha} \leq C_{\alpha,d} [\Delta u]_{C^\alpha}$.

$0 < \alpha < 1$. □.

cor 3.4.1 第2个式子为Schauder估计的雏形

下面我们证明 $p=1,\infty$ 都不对.

不妨 $d\geq 3$. 设 Φ_d 为牛顿位势. $\Delta\Phi_d=\delta_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 分布意义上正确.

但 $\frac{\partial \Phi_d}{\partial x_i \partial x_j}=K_{ij}=\begin{cases}\frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} & i\neq j\\ \frac{x_i^2-\frac{1}{d}|x|^2}{|x|^{d+2}} & i=j\end{cases} \notin L^1(B(0,1))$.

下面说一下细节.

设 $\varphi\geq 0$. $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 为一族逼近恒等. $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\chi(0)\neq 0$ 是一个 bump function

$u_\varepsilon(x):=(\varphi_\varepsilon * \Phi_d)(x)\cdot\chi(x)$.

~~$\Delta u_\varepsilon=(\Delta\varphi_\varepsilon)*\Phi_d(x)$~~

$\Delta u_\varepsilon=(\Delta\varphi_\varepsilon * \Phi_d(x))\,\chi(x)+\varphi_\varepsilon * \Phi_d(x)\Delta\chi(x)+(\nabla\varphi_\varepsilon(x) * \Phi_d(x))\cdot\nabla\chi(x)$

∞

~~$\int \Delta u_\varepsilon$~~

~~$\Delta u_\varepsilon \geq 0$~~

~~$\Delta\varphi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^d}\sum\partial_{x_i}^2\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$~~

~~$=\frac{1}{\varepsilon^d}\sum_i\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi_{x_ix_i}(\frac{x}{\varepsilon})$~~

~~$=\frac{1}{\varepsilon^{d+2}}\Delta\varphi(\frac{x}{\varepsilon})=\frac{1}{\varepsilon^2}(\Delta\varphi)_\varepsilon$~~. Φ_d

$\|\Delta u_\varepsilon\|_1\lesssim\|\chi\|_{W^{2,\infty}}\ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1}\ \|\Phi_d\|_{L^1(B(0,R))}$

Poincaré

$\lesssim 1$. $\forall\varepsilon>0$ 对.

但 $\limsup_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L^1}=\infty$

$\therefore$ L^1 无有界性.

L^∞ 也无. 最后再看一种特殊的奇异积分.

对 $0<\alpha<d$ 令 $(I_\alpha f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|x-y|^{\alpha-d}f(y)\,dy$ $f\in S(\mathbb{R}^d)$

I_α 称作 Riesz 位势.

Thm 3.4.1: $0<\alpha<d$ $1\leq p<q<\infty$ $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{d}$.

则: (1) $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. $I_\alpha(f)$ 对 a.e. x 绝对收敛

(2) 若 $p>1$ 则 $\|I_\alpha f\|_q\leq A_{p,q}\|f\|_p$.

略.

Cor 3.4.2. (H-L-S) 不等式 $0\leq s<d/2$. $\frac{1}{2}-\frac{1}{q}=\frac{s}{d}$.

则 $\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{s,d}\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$.

令 $g=(-\Delta)^{s/2}f$. 则 $f=I_s\cdot g$ 套用 Thm 3.4.1 即可 $\square$

证明 (1) 令 $K(x) = |x|^{-d+\alpha}$.

$T: f \longmapsto K * f$.

$K = K_1 + K_\infty$. 其中 $K_1 = K(x)\chi_{\{|x|\le\mu\}}$

$K_\infty = K(x)\chi_{\{|x|>\mu\}}$

$K_1 * f$ a.e. 绝对收敛. 因为 $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow K_1 * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

而 $\int |K_\infty|^{p'} = \int_{|x|\ge\mu} |x|^{(-d+\alpha)p'} dx < \infty$

这是因为 $(-d+\alpha)p' < -d \iff q < \infty$

$\therefore$ a.e. 绝对收敛.

(2).

$$\mathcal{L}^d\{x : |K*f| > 2\lambda\}$$

$$\le \mathcal{L}^d\{x : |K_1 * f| > \lambda\} + \mathcal{L}^d\{x : |K_\infty * f| > \lambda\}$$

$$\le \frac{\|K_1 * f\|_p^p}{\lambda^p} + \mathcal{L}^d\{x : |K_\infty * f| > \lambda\}$$

$$\le \cancel{\frac{\|K_1\|_p^p}{\lambda^p}}\ C \cdot \frac{\mu^{\alpha p}}{\lambda^p} + \mathcal{L}^d\{x : |K_\infty * f| > \lambda\}$$

而 $\|K_\infty * f\|_\infty \le \|K_\infty\|_{p'} \|f\|_p \le \|K_\infty\|_{p'}$

$= \tilde{C} \cdot \mu^{-d/q}$.

$\therefore$ 取 $\tilde{C} \cdot \mu^{-d/q} = \lambda$. 便有 $\mathcal{L}^d\{x : |K_\infty * f| > \lambda\} = 0$

$\Rightarrow$ $m\{x : |K*f| > 2\lambda\} \le \cancel{\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{q}}$

$\left(\frac{C \cdot \mu^\alpha}{\lambda}\right)^{pq}$

$\therefore$ 弱 (p,q) $1 \le p < q < \infty$ $\stackrel{\text{要}}{=} C' \lambda^{-q}$ $\underset{\text{不妨}\|f\|_p = 1}{=}$ $C'\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$

$\Rightarrow$ 弱 $(1,q)$ $1 \le p < q\ \infty$

~~任意~~ $\forall p < q$ $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $p + \varepsilon < q$

$\therefore$ 弱 $(p+\varepsilon, q)$

$\therefore \forall 1 < p < q < \infty$ 由 Marcinkiewicz 插值

$\Rightarrow$ 强 (p,q) □

§3.5 含权奇异积分 含权奇异积分

本节讨论，对权函数 w，是否仍有强 L^p $(1<p<\infty)$ 或弱 L^1 有界性？

我们要证明的是

Thm 3.5.1: $w\in A_p$ 时，则 T 为 $L^p(w)\to L^p(w)$ 的有界算子。（T 为 Calderón-Zygmund 算子）

Thm 3.5.2: $w\in A_1$ 时， $w\{x\in\mathbb{R}^d \,\big|\, |Tf(x)|>\lambda\}\le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f|w\,dx$

证明之前，我们需要2个引理：

<u>lemma 3.5.1</u>: T 为 Calderón-Zygmund 算子，则 $\forall s>1$

$$M^{\#}(Tf)(x)\le C_s M(|f|^s)(x)^{1/s}$$

其中 $M^{\#}f(x)=\sup\limits_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-f_Q|$.

Pf: $\forall s>1$，任给定 x 及包含 x 的方体 Q.

要证：$\exists a$，$\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf(y)-a|\,dy\le C\,M(|f|^s)(x)^{1/s}$

~~令~~ 下面我们模仿 Thm 1.4.1 (A_1 刻画).

令 $f=f_1+f_2$，$f_1=f\chi_{2Q}$

$a=Tf_2(x)$.

则 $\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf(y)-a|\,dy$

$$\le\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(y)|\,dy+\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_2(y)-Tf_2(x)|\,dy.$$

$s>1$. $T: L^s\to L^s$ 　Hölder

$$\Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(y)|\,dy\le\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\le C\left(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q}|f(y)|^s\,dy\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\le 2^{d/s}\,C\,M(|f|^s)(x)^{1/s}$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(y) - Tf_2(x)|\, dy$$

$$\le \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\int_{\mathbb{R}\setminus 2Q} (K(y-z) - K(x-z)) f(z)\, dz\right| dy$$

$$\le \frac{C}{|Q|}\int_Q \int_{\mathbb{R}\setminus 2Q} \frac{|y-z|}{|x-z|^{d+1}} |f(z)|\, dz\, dy$$

$$\le \frac{C}{|Q|}\int_Q \ell(Q) \sum_{k\ge 1}\int_{2^k\ell(Q)<|x-z|<2^{k+1}\ell(Q)} \frac{|f(z)|}{|x-z|^{d+1}}\, dz\, dy$$

$$\le C\ell(Q)^{\delta} \sum_{k\ge 1} \frac{1}{(2^{k+1}\ell(Q))^{d+1}} \int_{|x-z|<2^{k+1}\ell(Q)} |f(z)|\, dz.$$

$$\le CMf(x)$$

$$\le C\, M(|f|^s)(x)^{1/s}$$

□

lem 3.5.2: $w\in A_{p_0}$, $1\le p_0<p<\infty$. 若 $M_d f\in L^{p}(w)$, 则

$$\|M_d f\|_{L^p(w)} \le C\|M^\# f\|_{L^p(w)}.$$

~~证明:~~ ~~...~~: 3.5.2的证明将在证明 $L^\infty\to BMO$ 有界性时再给出

□

~~3.5.1~~

下面可以开始证明 Thm 3.5.1

不妨设 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Fix $w\in A_p$.

由 ~~lem~~ …… 知: $\exists s>1$ $w\in A_{p/s}$

由于 $Tf(x)\le M_d(Tf)(x)$ a.e.

$$\Rightarrow \int |Tf|^p w \le \int (M_d(Tf))^p w \le C\int_{\mathbb{R}^d} (M^\#(Tf))^p w$$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^d} M(|f|^s)^{p/s} w$$

$$\le C\int |f|^p w$$

只用证 $\forall f$, $Tf(x) \in L^p(w)$

设 $\operatorname{spt} f \subseteq B(0,R)$ 则 $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{|x|<2R} |Tf(x)|^p w(x)\,dx \le \left(\int_{|x|<2R} w(x)^{1+\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

由倒向Hölder不等式 $\left(\int_{|x|<2R} |Tf(x)|^{\frac{p(1+\varepsilon)}{\varepsilon}}\,dx\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$

$\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $\int_{|x|<2R} w(x)^{1+\varepsilon}\,dx < \infty$

而第2项也 $< \infty$

因 $Tf \in L^q$, $1<q<\infty$.

$$\Rightarrow |Tf(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y)\,dy\right|$$

$$\le B\int_{|y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d}\,dy \le \frac{B\,\|f\|_\infty}{|x|^d}.$$

$$\therefore \int_{|x|>2R} |Tf(x)|^p\,w(x)\,dx \le C\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^kR<|x|<2^{k+1}R} \frac{w(x)}{|x|^{dp}}\,dx$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty} (2^kR)^{-dp} \cdot w(B(0, 2^{k+1}R))$$

$w \in A_p$ $\therefore \exists\, q<p$ $w \in A_q$.

$\Rightarrow w(B(0, 2^{k+1}R)) \le C \cdot 2^{kdq}$ 代入即知 级数收敛.

$\therefore Tf \in L^p(w)$ 且 $T: L^p(w) \to L^p(w)$ 有界

$\square$

下面再证 Thm 3.5.2. 这与C-Z奇异积分算子 L^p 有界性的证明极为类似

Pf: 对 f 作水平 λ 的 Calderón-Zygmund 分解

$f=g+b$. 由 $w\in A_1$ 知 $w\in A_2$

$$\therefore w\{x\in\mathbb{R}^d \mid |Tg(x)|>\lambda\} \le \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^d}|Tg|^2 w(dx)$$
$$\le \frac{C}{\lambda^2}\int |g|^2 w(dx)$$
$$\le \frac{2^d C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|g|\, w(dx)$$

∴ 只用证 $\int |g|w \le C\int |f| w$

而在 $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup Q_j$ 中 $g=f$.

在 Q_j 中, $w\in A_1$ 表明

$$\int_{Q_j}|g|\,w(dx) \le \int_{Q_j}\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|\,dy\ w(x)\,dx$$
$$=\int_{Q_j}|f(y)|\frac{w(Q_j)}{|Q_j|}dy$$
$$\le C\int_{Q_j}f(y)w(y)dy \quad ✓$$

再估计 b:

$$w\Big(\bigcup_j Q_j^*\Big) \le \sum_j w(Q_j^*) \le C\sum_j w(Q_j) = C\sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}|Q_j|.$$

由 C-Z 分解 $\lambda<\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f$.

$$\therefore w\{x\in \bigcup Q_j^* \mid |Tb(x)|>\lambda\} \le C\sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}\cdot\frac{1}{\lambda}\int_{Q_j}f$$
$$\le C\int |f|w$$

设 c_j 为 Q_j 中心. $\int_{Q_j} b_j = 0$

$$\Rightarrow w\{x\in\mathbb{R}^d \setminus \bigcup Q_j^* \mid |Tb|>\lambda\}$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q_j^*} |Tb_j(x)|\, w(x)\,dx.$$

$$= \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q_j^*} \left|\int_{Q_j} \big(K(x-y) - K(x-c_j)\big)\, b_j(y)\,dy\right| w(x)\,dx.$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j}|b_j(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q_j^*}\frac{|y-c_j|}{|x-c_j|^{d+1}}\, w(x)\,dx\right)dy$$

模仿 lem 3.5.1 知. $(\qquad)\le C\,Mw(y)$

$$\overset{w\in A_1}{\le} C\,w(y)$$

$$\therefore \text{上式} \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|b|w \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}(|f|+|g|)\,w$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f|\,w.$$

□

~~模仿 Cor~~