§2 $\mathbb{R}^d$中的Fourier变换

§2.1 Schwartz空间

设μ是$\mathbb{R}^d$上的复Borel测度，则我们定义 $\hat{\mu}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mu(dx)\quad \forall \xi\in\mathbb{R}^d$

为测度μ的Fourier变换。显见 $\|\hat{\mu}\|_\infty \le \|\mu\|$ (全变差)

若$\mu(dx)=f(x)dx$，则上式变为 $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,dx$，这就给出了$L^1$函数的Fourier变换

易见 $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{f\in L^1(\mathbb{R}^d)} C(\mathbb{R}^d)$. 实际上，我们将会证明 Riemann-Lebesgue引理，得到 $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d)\to C_0(\mathbb{R}^d)$

Lemma 2.1.1 设μ如上 $(\tau_y\mu)(E):=\mu(E-y)$.

(1) $\widehat{\tau_y\mu}(\xi)=e^{-2\pi i\xi\cdot y}\hat{\mu}(\xi)\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d$

(2) 令$e_\eta(x)=e^{2\pi i x\cdot\eta}$，则 $\widehat{e_\eta\mu}(\xi)=\hat{\mu}(\xi-\eta)$.

(3). $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$，则 $f*g$ 对a.e. x绝对收敛. $f*g\in L^1(\mathbb{R}^d)$. $\widehat{f*g}=\hat{f}*\hat{g}$

(4) 若$f\in L^p$ $1\le p\le\infty$. $g\in L^1$，则 $f*g\in L^p$ with $\|f*g\|_p\le\|f\|_p\|g\|_1$

(5) A为$d\times d$实方阵. $\det A\neq 0$ 则 $\widehat{f\circ A}=\frac{1}{|\det A|}\hat{f}\circ(A^{-1})^T$. 特别地. 令$f_\lambda(x)=f(\lambda x)$ 则 $\hat{f}_\lambda(\xi)=\lambda^{-d}\hat{f}(\xi/\lambda)$

<u>证明</u>: (1) $\widehat{\tau_y\mu}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\mu(x-y)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x+y)\cdot\xi}\,d\mu(x)$

$$=e^{-2\pi i y\cdot\xi}\hat{\mu}(\xi)$$

(2) $\widehat{e_\eta\mu}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{2\pi i x\cdot\eta}\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot(\xi-\eta)}\,d\mu(x)=\hat{\mu}(\xi-\eta)$

(3). 只用证 $f*g\in L^1 \Rightarrow |f*g(x)|<\infty$ a.e. & $\widehat{f*g}=\hat{f}\cdot\hat{g}$.

$$\int|f*g(x)|dx=\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\right|dx\le\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,dy\,dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\,dy\left(\int|f(x-y)|\,dx\right)=\|g\|_1\|f\|_1<\infty$$

$\Rightarrow |f*g(x)|<\infty$ a.e.

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2\pi i x\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}f(x-y)\,e^{-2\pi i y\cdot\xi}g(y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}g(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\,dy\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\,dx$$

$$=\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi).$$

(4) $\|f*g\|_p \le \left\| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,dy \right\|_{L^p_x}$

$= \left\| \| f(x-y) g(y) \|_{L^1_y} \right\|_{L^p_x}$

$\overset{\text{广义Minkowski}}{\le} \left\| \| f(x-y)\, g(y) \|_{L^p_x} \right\|_{L^1_y} = \|f\|_p \|g\|_1$

(5) $\widehat{f\circ A}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(Ax)\,dx \xrightarrow[\substack{dx=\frac{dy}{|A|} \\ x=A^{-1}y}]{y=Ax} \int e^{-2\pi i (A^{-1}y)\cdot\xi} f(y) \frac{dy}{|A|}$

$= \int e^{-2\pi i y\cdot (A^{-1})^T\xi} f(y) \frac{dy}{|A|} = \frac{1}{|A|} \hat{f}((A^{-1})^T\cdot\xi)$. $\square$

下面我们希望证明 $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$，这与 Parseval 等式的本质是一样的。
但上式只对 $f\in L^1\cap L^2$ 有定义，否则积分会不收敛。为了证此，我们引入一个"好的"函数空间，让 Fourier 变换在此空间上可以无障碍进行，这就是 Schwartz 空间

记号：$\forall$ 多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$，$|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_d$

$\forall x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$，记 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$，$\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}$.

Def：$S(\mathbb{R}^d) = \{ f\in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall$ 多重指标 α,β，$x^\alpha\partial^\beta f(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^d)\}$

从而 Schwartz 函数即为那些自身和各阶导数速降的函数（衰减比任何阶多项式都快）。

称 $f_n \to g$ in $S(\mathbb{R}^d)$，若 $\|x^\alpha\partial^\beta(f_n-g)\|_{L^\infty} \to 0$，as $n\to\infty$ $\forall\alpha,\beta$.

令 $P_{\alpha,\beta}(f) = \|x^\alpha\partial^\beta f\|_{L^\infty}$，则 $(S(\mathbb{R}^d), P_{\alpha\beta})$ 是 Fréchet 空间，而 Fréchet 空间可度量化。
$P_{\alpha\beta}(\cdot)$ 为 $S(\mathbb{R}^d)$ 上的半范数　　从而由 Schwartz 半范数完全刻画了 $S(\mathbb{R}^d)$ 的

由于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subseteq S(\mathbb{R}^d)$，故 $\forall 1\le p<\infty$，$S(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p(\mathbb{R}^d)$；显见 $f\mapsto x^\alpha\partial^\beta f$ 是 $S(\mathbb{R}^d)$ 到自身的连续线性算子。但不只如此，Fourier 变换也有类似的性质

Prop 2.1.2 Fourier 变换是 Schwartz 空间到自身的连续线性算子

证明. 易见: $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ (分部积分可得)

$\partial^\beta \hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\beta|}\widehat{x^\beta f}(\xi)$. (积分号下求导)

$\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$ 我们有. $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. 且 $\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

从而 $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^d)$

连续性: 设 $f_n \to 0$ in $S(\mathbb{R}^d)$. 则 $\|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f_n}\|_{L^\infty} \lesssim_{\alpha,\beta} \|\partial_x^\alpha x^\beta f_n\|_{L^1} \xrightarrow{\text{DCT}} 0$ as $n \to \infty$

□

§2.2 Fourier 逆变换公式.

至此我们自然会问. Fourier 变换是否是 $S(\mathbb{R}^d)$ 到自身的"满射", 答案是肯定的

~~Thm~~ Prop 1.2.1 Fourier 变换是 $S(\mathbb{R}^d)$ 到自身的满射. 且 $\forall f \in S(\mathbb{R}^d)$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

证明: 我们希望将 $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,dx$ 代入上式得到 $f(x)$

但带回去之后. 若换序就会有 $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(x-y)\xi}\,d\xi\right)dy$ 这样的项.

而 $\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(x-y)\xi} = \delta(x-y)$ 这在目前并不良定.

那么我们插入一族逼近恒等来规避这个问题

Exercise: $\widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$

Hint: $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ (不妨设 $d=1$) 则 $\varphi'(x) = -2\pi x\varphi(x)$

作 Fourier 变换後有 $(\hat{\varphi})'(\xi) = -2\pi\xi\hat{\varphi}(\xi)$. 解这个 ODE. 并注意 $\hat\varphi(0) = \int e^{-\pi x^2} = 1$.

高维的拆成分量 (用 Fubini) 化成重积分.

于是 $\widehat{e^{-\pi\varepsilon^2|x|^2}}(\xi) = \varepsilon^{-d} e^{-\pi|\xi|^2/\varepsilon^2}$ $\forall \varepsilon > 0$ ※

现在 Fix $f \in S(\mathbb{R}^d)$. 由 $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 用 DCT 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\,d\xi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

$$\text{而左边} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(x-y)\xi} e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\,d\xi\, f(y)\,dy$$

$$= \int \varepsilon^{-d} e^{-\pi\varepsilon^2|x-y|^2} f(y)\,dy$$ 令 $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} e^{-\pi\varepsilon^2|x-y|^2}$

则 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族逼近恒等 (因 $\phi_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\hat\phi_1 \in L^1$) 令 $\varepsilon \to 0$ 时 上式 $\to f(x)$ □

Corollary 2.2.1: $\forall f\in S(\mathbb{R}^d)$, $\|\hat f\|_2=\|f\|_2$. 从而由B.L.T定理知 $\forall f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\|\hat f\|_2=\|f\|_2$

证明、 $\forall f,g\in S(\mathbb{R}^d)$ 有 $\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat g(\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}\hat f(x)g(x)\,dx$.

这由Fubini定理即得

$$\Rightarrow \int \hat f(\xi)\,\overline{\hat g(\xi)}\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\hat{\overline{\hat g}}(x)\,dx$$

但 $\hat{\overline{\hat g}}=\overline{\check{\hat g}}=\bar g \Rightarrow \langle \hat f,\hat g\rangle_{L^2}=\langle f,g\rangle_{L^2}$

$\Rightarrow \|f\|_2=\|\hat f\|_2$

□

cor 2.2.2 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat f=0$ a.e. 则 $f=0$.

□

cor 2.2.3. 设 μ 是紧支于 $\mathbb{R}^d$ 的测度, 则 $\hat\mu$ 可以延拓为 $\mathbb{C}^d$ 上的整函数.
从而 $\hat\mu$ 不可能在 $\mathbb{R}^d$ 中的任一开集中为0.

Pf: $\hat\mu$ 可以延拓为 $F(\zeta)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i z\cdot\zeta} f(z)\,dz$. 再由Liouville定理即可 □

~~Thm~~

§2.3 L^p函数的Fourier变换: Exercise (R-L引理)

现在我们已有了 $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d)\longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)\subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$. 且 $\|\mathcal{F}\|_{L^1\to L^\infty}\le 1$

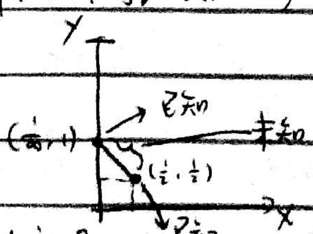
$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$ $\|\mathcal{F}\|_{L^2\to L^2}=1$

那么, 我们是否可以对一般的L^p函数定义Fourier变换呢? 下面本节将证明若 $1<p<2$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, 则 $\hat f\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. 这个结论称作Hausdorff-Young不等式.

Thm 2.3.1 (Hausdorff-Young) $1\le p\le 2$. 则 $\|\hat f\|_{p'}\le\|f\|_p$.

我们观察到, $\mathcal{F}$ 在 $(1,\infty)$, $(2,2)$ 两处有界. 对一般的 (p,p') $(1<p<2)$, 它介于两个已知的端点之间, 实际上, 我们考虑 ~~...~~ $x+y=1$,
则上述关系如图所示

H-Y不等式的结果本质上是一个"插值"结果



若我们用Marcinkiewicz插值, 那样只能得到 $L^p\to L^{p'}$ 有界, 但 $\|\mathcal{F}\|_{p\to p'}\le 1$ 并不能得出. 所以, 我们需要一个条件, 结论更强的插值定理, 即Riesz-Thorin插值.

Thm 2.3.2 (Riesz-Thorin) 设 ~~T是测度空间(X,μ)→~~

设有测度空间 (X,μ) (Y,ν)。T: $L^{p_0}(X,\mu)\to L^{q_0}(Y,\nu)$ 有界

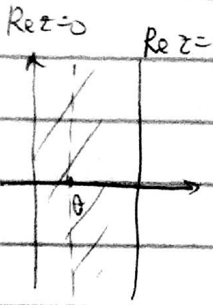
$L^{p_1}(X,\mu)\to L^{q_1}(Y,\nu)$

$\|T\|_{p_i\to q_i}=M_i$, $i=0,1$, 则 $T: L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)$ 有界

且 $\|T\|_{p\to q}\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$

这其中 $p.q.\theta$ 满足: $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$

$\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$



Rmk: 需要指出的是，Riesz-Thorin插值定理对复值函数仍成立. 其证明是复分析方法. 我们从复平面上的条状区域 $0\le \mathrm{Re}(z)\le 1$ 出发, 上述条件 T 会给出一个全纯函数 Φ, 从而 $\|Tf\|_{q_i}\le M_i\|f\|_{p_i}$, $i=0,1$, 可以转化为 Φ 在 $\mathrm{Re}\,z=0$, $\mathrm{Re}\,z=1$ 上的有界性. 结论则是 Φ 在 $(\theta,0)$ 处的有界性 □

我们的关键步骤如下:

Lemma 2.3.1 (Hadamard三线引理)

设 $\Phi(z)$ 是如上带状区域(不含边界) S 中的全纯函数, 且在 $\bar{S}$ 上连续.

若 $M_0=\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(iy)|$, $M_1=\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(1+iy)|$ 则 $\sup_{y\in\mathbb{R}}|\Phi(\theta+iy)|\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ $\forall 0\le\theta\le1$

~~Rmk: 该引理~~ 先假设

证明: Step 1: 若 $M_0=M_1=1$ 且 $\sup_{0\le x\le1}|\Phi(x+iy)|\to0$ as $|y|\to\infty$

如此作出假设是有原因的, 尤其是对 Φ 的衰减性假设. 该假设使得 Φ 的最大模必在一个有界集中达到 从而我们可以使用极大值原理 (极大值原理在无界区域上不成立).

设 $M=\sup_{z\in\bar{S}}|\phi(z)|>0$ 设 z_n 是 S 中的一列点 s.t. $|\phi(z_n)|\to M$

由于我们假设了 Φ 的衰减性, 故 $\{z_n\}$ 不可能趋于 ∞. 从而 $\{z_n\}$ 是有界的点列. 从而有收敛子列 $z_{n_j}\to z_0\in\bar{S}$.

据极大值原理 (在 D 中使用, 且 $D\supseteq\{z_n\}$, D是个大矩形) 知 $z_0\in\partial S$ $\Rightarrow M=|\phi(z_0)|\le M_1=1$.

那么在加上 $M_0=M_1=1$, $\sup_{0\le x\le1}|\Phi(x+iy)|\to0$ as $|y|\to\infty$ 的条件下, 成立结论

续

Step 2：若只假设 $M_0=M_1$，去掉Step 1中对 Φ 附加的衰减性条件.

我们令 $\Phi_\varepsilon(z)=\Phi(z)\,e^{\varepsilon(z^2-1)}$ $\forall\varepsilon>0$.

则 $e^{\varepsilon(z^2-1)}=e^{\varepsilon((x+iy)^2-1)}=e^{\varepsilon((x^2-1-y^2)+2ixy)}$ $x=0,1$ 时 $|\Phi_\varepsilon(z)|\le 1$ 都成立.

且 $\sup\limits_{0\le x\le 1}|\Phi_\varepsilon(x+iy)|\to 0$ as $y\to+\infty$ （因 $x^2-1-y^2<0$），Φ_ε 有界.

故由Step 1知 $\sup\limits_{0\le\theta\le 1}|\Phi_\varepsilon(\theta+iy)|\le 1$ 令 $\varepsilon\to 0$ 即得结论

Step 3 再去掉 $M_0=M_1=1$ 的条件.

令 $\tilde\Phi(z)=M_0^{z-1}M_1^{-z}\Phi(z)$. 则 $\tilde\Phi$ 满足Step 2的条件 $\Rightarrow|\tilde\Phi|\le 1$ in S

$\Rightarrow|\Phi|\le M_0^{1-z}M_1^{z}$

$\square$

Proof of Thm 2.3.2：现在我们可以严格证明Riesz-Thorin插值定理了

由 L^p 范数的对偶表示知：$\|Tf\|_q\le M\|f\|_p \Longleftrightarrow$

$\left|\int(Tf)g\,d\nu\right|\le M\|f\|_p\|g\|_{q'}$ with $\|g\|_{q'}=1$

下面我们不妨设 $p<\infty$，$q>1$（其它情况方法类似，比这容易）.

先设 $f\in L^p$ 且是简单函数，$\|f\|_p=1$；g 也是简单函数

令 $f_z=|f|^{\gamma(z)}\dfrac{f}{|f|}$，$\gamma(z)=p\left(\dfrac{1-z}{p_0}+\dfrac{z}{p_1}\right)$.

$g_z=|g|^{\delta(z)}\dfrac{g}{|g|}$，$\delta(z)=q'\left(\dfrac{1-z}{q_0'}+\dfrac{z}{q_1'}\right)$.

则 ① $\forall\theta\in(0,1)$（实数），$f_\theta\equiv f$ （Recall插值指标的条件）

② $\begin{cases}\|f_z\|_{p_0}=1 & \text{if } \operatorname{Re}z=0\\ \|f_z\|_{p_1}=1 & \text{if } \operatorname{Re}z=1\end{cases}$ （直接算）

③ $\begin{cases}\|g_z\|_{q_0'}=1 & \text{if } \operatorname{Re}z=0\\ \|g_z\|_{q_1'}=1 & \text{if } \operatorname{Re}z=1.\end{cases}$

现在令 $\Phi(z)=\int(Tf_z)\,g_z\,d\nu$，$f=\sum a_k\chi_{E_k}$ $g=\sum b_j\chi_{F_j}$（均是有限和）.

则 $f_z=\sum\limits_k|a_k|^{\gamma(z)}\dfrac{a_k}{|a_k|}\chi_{E_k}$. $g_z=\sum\limits_j|b_j|^{\delta(z)}\dfrac{b_j}{|b_j|}\chi_{F_j}$.

$$\Rightarrow \Phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)} |b_j|^{\delta(z)} \frac{a_k}{|a_k|}\frac{b_j}{|b_j|}\left(\int T(\chi_{E_k})\chi_{F_j}\,d\nu\right)$$

可以证明：$\Phi(z) \in H(S)\cap C(\bar{S})$

由Hölder不等式知

Re $z=0$ 时 $|\phi(z)| \le \|Tf_z\|_{q_0}\|g_z\|_{q_0'} \le M_0$

Re $z=1$ 时 $|\phi(z)| \le \|Tf_z\|_{q_1}\|g_z\|_{q_1'} \le M_1$.

由三线引理便有 $|\phi| \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ on Re $z=\theta$

特别地，取 $z=\theta$，$|\phi(\theta)| = \left|\int (Tf)g\,d\nu\right| \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$，这个恰好是我们要求的．

对一般的 $f\in L^p$ 由于现设 $p<\infty$，故简单函数在 L^p 中稠密，则由BLT定理即可对T作保范延拓．

$p=\infty$ 时，直接用Hölder不等式即可．其余情况略去．证毕．

$\square$

~~太~~ 取 $T=$ Fourier变换，则 Hausdorff-Young 不等式成立．

$\square$

利用~~Haus~~ Riesz-Thorin插值，我们可以证明卷积Young不等式，这是个极有用的结论．

Prop 2.3.1 (Young不等式) 设 $1\le p\le q\le r\le\infty$ 且 $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$.

则 $\|f*g\|_q \le \|f\|_p\|g\|_r$.

令 $T(f) := f*g$ for a fixed $g\in L^r$.

Proof: 易证/已知 $\|Tf\|_{L^\infty} \le M\|f\|_{L^{r'}}$ (Hölder不等式)

$\|Tf\|_{L^r} \le M\|f\|_{L^1}$ (Lemma 1.1.1)

设一般的q有 $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{\infty} \Rightarrow \theta = \frac{r}{q}$

则对应的 $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{r'} = \frac{r}{q} + \frac{1-\frac{r}{q}}{r'} = \frac{r}{q} + 1 - \frac{1}{r} - \frac{r}{q}\cdot\frac{1}{r'}$

$= \left(1-\frac{1}{r}\right) + \frac{r}{q}\cdot\frac{1}{r}$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{r}$ 符合！即可用Riesz插值证明

$\square$

Rmk：Riesz-Thorin插值看似简单，实际有着较深刻的背景：它已经具有抽象插值方法的雏形. 在证明Tomas-Stein限制性估计时，我们会用到解析算子族的Stein复插值定理（相关定义和证明略去），叙述如下

Thm 2.3.3（Stein 复插值）. 设 (X,μ)，(Y,ν) 是σ-有限测度空间 $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$. S 是三线引理中的带状域. 设 $T(\cdot)$ 是定义在 $\bar{S}$ 上，取值于 $\mathcal{L}(L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)\to L^{q_0}(Y,\nu)+L^{q_1}(Y,\nu))$ 上的一致有界的连续函数，且在 S 中解析. T 满足

① $T(z): L^{p_0}\cap L^{p_1}\to L^{q_0}\cap L^{q_1}$ $\forall z\in \bar{S}$

② $\forall y\in\mathbb{R}$，$T(iy)\in\mathcal{L}(L^{p_0}(X,\mu)\to L^{q_0}(Y,\nu))$ 且 $M_0=\sup_{y\in\mathbb{R}}\|T(iy)\|_{p_0\to q_0}<\infty$

$T(1+iy)\in\mathcal{L}(L^{p_1}\to L^{q_1})$ 且 $M_1=\sup_{y\in\mathbb{R}}\|T(1+iy)\|_{p_1\to q_1}<\infty$

则 $\forall\, 0<\theta<1$ $T(\theta): L^{p_\theta}(X,\mu)\to L^{q_\theta}(Y,\nu)$，且 $\|T(\theta)\|_{p_\theta\to q_\theta}\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$

$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$，$\frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$ □

Banach空间的抽象插值理论主要由 Gagliardo, Lions, Calderón, Peetre 等人证明. 其中以Calderón-Lions抽象插值最为实用. 在介绍该定理之前，我们先介绍其基本框架

现设V是拓扑线性空间，A^0 A^1 是两个Banach空间（分别赋予范数 $\|\cdot\|^{(0)}$，$\|\cdot\|^{(1)}$）A^0，A^1 可连续嵌入V. 定义 $\|a\|_{A^0\cap A^1}=\max\{\|a\|^{(0)},\|a\|^{(1)}\}$，则 $(A^0\cap A^1,\|\cdot\|_{A^0\cap A^1})$ Banach

定义 $\|a\|_{A^0+A^1}=\inf\{\|a_0\|^{(0)}+\|a_1\|^{(1)}\mid a=\underset{A_0}{a_0}+\underset{A_1}{a_1}\}$ 则 $(A^0+A^1,\|\cdot\|_{A^0+A^1})$ Banach

例如 $A^0=L^{p_0}$ $A^1=L^{p_1}$ $1\le p_0<p_1\le\infty$

则 L^{p_θ} 为 L^{p_0}，L^{p_1} 的"中间"空间

Def. 设 $T: A^0+A^1\to A^0+A^1$ 是线性算子，且满足

(1) T在每个 A^i 上的限制是 A^i 到自身的有界线性算子

(2) $T|_A: A\to A$ 有界线性

则称A为 A^0 与 A^1 的线性插值空间

那么 Riesz-Thorin 插值表明 L^{p_θ} 是 L^{p_0} 与 L^{p_1} 的线性插值空间

算子插值与插值空间理论考虑如下问题:

(1) 给定两个 Banach 空间 A^0、A^1，如何表示 A^0、A^1 之间所有的线性插值空间

(2) - - - - - - - - ，如何构造插值空间

(3) 设 $T: A^0+A^1 \to B^0+B^1$ 且 $T|_{A_j}: A_j \to B_j$ 有界线性

若 A 为 A^0、A^1 的插值空间，那么是否 $\exists B$，B 是 B^0、B^1 的插值空间，且 $T|_A: A \to B$ 有界线性

(4) 设 A 是 A^0、A^1 按某种方式构造的插值空间，B 是 B^0、B^1 按同一种方式构造的插值空间，是否每个线性算子 $T: A^0+A^1 \to B^0+B^1$ 也把 A 映到 B？

$T|_{A_j}: A_j \to B_j$ 连续

(1) 由 Gagliardo 给出

(1)(3) 由 Gagliardo、Lions、Calderón 给出（复插值法）

(2)(4) Lions–Peetre–Calderón 插值

下面介绍 Calderón 复插值法：

Def 设 B Banach，区域 $D \subseteq \mathbb{C}$，$T: D \to B$，$z \mapsto b(z)$ 称作解析算子是指 $\forall l \in B^*$，$z \mapsto l(b(z))$ 是 D 上的全纯函数

Def：$\mathcal{F}(X_0, X_1)$ 表示 ~~$S \to X_0+X_1$ 的~~ 全体满足以下条件 的 $f: S \to X_0+X_1$，

① $f \in H(S) \cap C(\bar{S})$

② $\|f\|_{X_0+X_1}$ 有界

③ $\forall t \in \mathbb{R}$，$f(it) \in X_0$，$t \mapsto f(it)$ 是 $\mathbb{R} \to X_0$ 的连续函数，且 $\|f(it)\|_{X_0}$ 有界

- - - - $f(1+it) \in X_1$，$t \mapsto f(1+it)$ 是 $\mathbb{R} \to X_1$ - - - $\|f(1+it)\|_{X_1}$ 有界

令 $|||f||| = \|f\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)} = \max\left\{\sup_t \|f(it)\|_{X_0}, \sup_t \|f(1+it)\|_{X_1}\right\}$

则 $(\mathcal{F}(X_0, X_1), |||\cdot|||)$ Banach

$\forall 0 \le t \le 1$，记 $N_t = \{f \mid f \in \mathcal{F}, f(t) = 0\}$，$X_t = \mathcal{F}(X_0, X_1)/N_t$

令 $\|a\|_{X_t} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)}, f \in \mathcal{F}(X_0, X_1), f(t) = a\}$，则 $(X_t, \|\cdot\|_{X_t})$ 是 Banach 空间

且是 X_0、X_1 的插值空间。

同时 推出 有

Thm 1.3.4 (Calderón) Y_0, Y_1 Banach，$T: X_0+X_1 \to Y_0+Y_1$ 线性，且 $T|_{X_j}: X_j \to Y_j$ 有界 M_j，
则 $T: X_t \to Y_t$，$\|T\|_{X_t\to Y_t} \le M_0^{1-t} M_1^{t}$

□

~~下面~~

引入 Calderón-Lions 插值定理之前，我们先来说明一些基本概念。

Def：设 X 是复线性空间，称 X 上两个范数 $\|\cdot\|^{(0)}, \|\cdot\|^{(1)}$ 是一致范数，若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|^{(i)}=0$ & $\{x_n\}$ 在 $\|\cdot\|^{(j)}$ 下 为柯西列，
可推出 ‘$\|x_n\|^{(i)} \to 0 \quad \|x_n\|^{(j)} \to 0 \quad i,j=0,1,\ i\neq j$’。

若 $\|\cdot\|^{(0)}$，$\|\cdot\|^{(1)}$ 一致，则定义 $\|x\|_{+} = \inf\{\|y\|^{(0)}+\|z\|^{(1)} \mid x=y+z\}$，这里 X_0, X_1 分别是复线性空间 X 在 $\|\cdot\|^{0}, \|\cdot\|^{1}$ 下的完备化空间。

则我们可以证明：$\|\cdot\|_{+}$ 是范数。设 X_0, X_1, X_+ 是 X 在 $\|\cdot\|^{(0)}, \|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|_{+}$ 下的完备化空间，那么 X 的恒等映射可以延拓为 $X_0 \to X_+$，$X_1 \to X_+$ 上的连续~~线性~~单射。

令 $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X_0, X_1)$，则 $(\mathcal{F}(X), |||\cdot|||)$ Banach，且 $\forall t\in[0,1]$ $N_t = \mathrm{Ker} f$ 在 $|||\cdot|||$ 下是闭子空间

现在可以叙述

Thm 1.3.5 (Calderón-Lions 插值) 设 $\|\cdot\|_X^{(0)}, \|\cdot\|_X^{(1)}$ 是复线性空间的一致范数，
X_0, X_1 是对应的完备化空间；类似定义 Y_0, Y_1。

设 $T: S \longrightarrow \mathcal{L}(X_+, Y_+)$ 是一致有界、连续、全纯的算子，且满足

① $T(t): X \to Y \quad \forall\, 0<t<1$

② $\forall y\in\mathbb{R}$，$T(iy) \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$，且 $M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(iy)\|_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)} < \infty$

$$T(1+iy) \in \mathcal{L}(X_1, Y_1) \text{ 且 } M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(1+iy)\|_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)} < \infty$$

且 $\forall\, 0<t<1$ 有 $T(t): X_t \to Y_t$ 且 $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_t,Y_t)} \le M_0^{1-t} M_1^{t}$

□

特别地，令 $X_t = L^{p_t}$，$Y_t = L^{q_t}$ 便得到 Stein 复插值定理。

本节这些定理的证明均可参见 苗长兴 教授 所著的《调和分析及其在偏微分方程中的应用》一书 §4.5。

□

§2.4 缓增分布与Sobolev空间

Def. S' = S上的全体连续线性泛函，称作缓增分布

$u_n \to u$ in S' 定义为 $\forall \phi \in S$ $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ as $n\to\infty$

S'赋予弱*拓扑

显见 $L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^d)$

$$\langle f, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x)dx$$

显见，由定义 $u\in S' \Longleftrightarrow |\langle u,\phi\rangle| \le C\sum_{|\alpha|,|\beta|\le N}\|x^\alpha\partial^\beta\phi\|_{L^\infty}$ $\forall\phi\in S$

显见：若$u\in S'$，则$\partial^\alpha u\in S'$（这里$\partial^\alpha u$是分布导数，其定义为$\langle\partial^\alpha u,\phi\rangle=\langle u,\partial^\alpha\phi\rangle(-1)^{|\alpha|}$）

$\psi u\in S'$，其中ψ是慢增函数（多项式增长）.

~~另外 dirac $\delta\in S'$~~，

显见，任何全变差有限的Borel测度$\in S'$，从而$\delta\in S'$. 实际上，$\hat\delta=1$，$\hat 1=\delta$.

Check: $\langle\hat\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,\hat\varphi\rangle=\hat\varphi(0)=\int_{\mathbb{R}^d}1\cdot\varphi(x)dx=\langle 1,\varphi\rangle$.

至此，任何L^p函数的Fourier变换都有意义，它至少会是个缓增分布.

Exercise：$u\in S'(\mathbb{R}^d)$，若$x^\alpha\partial^\beta u\in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\forall\alpha,\beta$ 则 $u\in S(\mathbb{R}^d)$

（只需证 $x^\alpha\partial^\beta u\in L^1(\mathbb{R}^d)$即可，乘以$\langle x\rangle^{-\frac{d+1}{2}}$再乘以$\langle x\rangle^{\frac{d+1}{2}}$，用Cauchy-Schwartz）

下面的引理表明，支于0点的缓增分布是δ及其各阶导数的有限线性组合. 这里一个分布F的支集是 $\operatorname{Spt}F$ = 使$F=0$的最大开集的补集.

Prp ~~Lemma~~ 2.4.1 设$u,v\in S'$，$\langle u,\hat\varphi\rangle=\langle v,\hat\varphi\rangle$ $\forall\varphi\in S$ 且 $\operatorname{Spt}\hat\varphi\subset\mathbb{R}^d$ 时成立，则$u-v$=某个多项式P

由于是紧支分布，故一定是缓增分布

证：换言之，我们要证明如下：设F为支于原点的分布，则 $F=\sum_{|\alpha|\le N}a_\alpha\partial_x^\alpha\delta$

i.e. $\langle F,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\le N}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha(\partial_x^\alpha\varphi)(0)$ $\forall\varphi\in S$（换成C^∞也可）

引 lemma 2.4.1 设F_1是支于原点的分布，且存在正整数N s.t.

① $|\langle F_1,\varphi\rangle|\le C\|\varphi\|_N = C\sup_{|\alpha|,|\beta|\le N}|x^\alpha\partial_x^\beta\varphi|$ $\forall\varphi\in C_c^\infty$

② $F_1(x^\alpha)=0$ $\forall|\alpha|\le N$

则$F_1=0$.

Proof of lem: 设 $\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\cancel{\eta(x)=0}$ $\eta(x)=\begin{cases}1 & |x|\leq\frac{1}{2}\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$

$\eta_\varepsilon(x):=\eta(\frac{x}{\varepsilon})$

由于 F_1 支于原点, 故 $\langle F_1,\eta_\varepsilon\varphi\rangle=\langle F_1,\varphi\rangle$

同样 $\langle F_1,\eta_\varepsilon x^\alpha\rangle=\langle F_1,x^\alpha\rangle\equiv 0$. $\forall|\alpha|\leq N$

$\therefore\langle F_1,\varphi\rangle=\langle F_1,\eta_\varepsilon\underbrace{(\varphi(x)-\sum_{|\alpha|\leq N}\frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}x^\alpha)}_{\text{记作 }R(x)}\rangle$ $\quad|R(x)|\lesssim|x|^{N+1}$.

$|\partial_x^\beta R(x)|\lesssim_\beta|x|^{N+1-|\beta|}$. $|\beta|\leq N$.

而 $|\partial_x^\beta\eta_\varepsilon(x)|\begin{cases}\lesssim_\beta\varepsilon^{-|\beta|}\\ =0 & \forall|x|\geq\varepsilon.\end{cases}$

$\therefore$ 由 Leibniz Rule, $\|\eta_\varepsilon R\|_N\lesssim\varepsilon$.

由条件可知 $|\langle F_1,\varphi\rangle|\lesssim\varepsilon\to 0$

$\square$

Pf of Prop 2.4.1: 令 $F_1=F-\sum_{|\alpha|\leq N}a_\alpha\partial_x^\alpha\delta$. $a_\alpha=\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}F(x^\alpha)$.

这个 N 是如下结论中的 N:

"设 F 是 $S'(\mathbb{R}^d)$, 则 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, s.t. $\forall\varphi\in S$. $|\langle F,\varphi\rangle|\lesssim\|\varphi\|_N$"

~~Exercise~~ 由于 $\langle\partial_x^\alpha\delta,x^\beta\rangle=\begin{cases}(-1)^{|\alpha|}\alpha! & \alpha=\beta\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

$\therefore$ 对 F_1 用 lem 1.4.4 即有 $F_1=0$. $\Rightarrow F=\sum_{|\alpha|\leq N}a_\alpha\partial^\alpha\delta$.

$\square$

~~Exercise: $\forall 0<\alpha<d$ 考虑: $|x|^{-\alpha}$ 的 Fourier 变换是 $C_{\alpha,d}|\xi|^{\alpha-d}$~~

Prop 2.4.2 $u\in S'(\mathbb{R}^d)$ 是度 σ 齐次的 (i.e. $F_a=a^\sigma F$, 其中 $\langle F^a,\varphi\rangle:=\langle F,\varphi^a\rangle$, $\varphi^a(x)=a^{-d}\varphi(\frac{x}{a})$)

则 $\hat{u}$ 是度 $-d-\sigma$ 齐次的.

记 $\langle F^a,\varphi\rangle=\langle F,\varphi_a\rangle$, $\varphi_a(x)=\varphi(ax)$

~~证明~~ 证: $\langle(\hat{u})_a,\varphi\rangle=\langle\hat{u},\varphi^a\rangle=\langle u,(\varphi^a)^\wedge\rangle$

$=\langle u,(\varphi^\wedge)_a\rangle$

$=\langle u^a,\varphi^\wedge\rangle=a^{-d}\langle u_{a^{-1}},\hat{\varphi}\rangle$

$=a^{-d-\sigma}\langle u,\hat{\varphi}\rangle=a^{-d-\sigma}\langle\hat{u},\varphi\rangle$

$\therefore\hat{u}$ 是度 $-d-\sigma$ 齐次

$\square$

Cor 2.4.1: $|x|^{-\alpha}$ 的 Fourier 变换为 $C(\alpha,d)|x|^{-\alpha-d}$.

$\square$

~~下面我们介绍个Poisson~~

上面提到，任一~~Borel~~ Radon 测度也可以作Fourier变换，实际上

Lem 2.4.2：若 μ 为 $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ 上的Borel测度，且 $\int_{\mathbb{T}^d} e^{-ix\cdot k}\, d\mu(x) = 0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}^d$

则 $\mu = 0$。

证明：由Stone-Weierstrass引理知，三角多项式在 $C(\mathbb{T}^d)$ 中稠密，从而我们的假设表明 $\forall$三角多项式 P，$\int_{\mathbb{T}^d} P(x)\, d\mu(x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x)\, d\mu(x) = 0 \quad \forall f\in C(\mathbb{T}^d).$$

由Riesz表示定理，便有 $\mu\equiv 0$（$C_0(X)$，X紧度量空间，的对偶是符号Radon测度！）

□

据此，我们可以证明Poisson求和公式。

Thm 2.4.1：$\phi\in S(\mathbb{R}^d)$，则 $\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\phi(x+m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\hat{\phi}(m)\, e^{2\pi i x\cdot m}$

特别地，有：$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\phi(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\hat{\phi}(m)$

证明：令 $Q := [\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$，则 $g(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\phi(x+m)$ 依~~L级数~~范数收敛，在 $L^1(Q)$ 中一致收敛。

$\therefore \forall k\in\mathbb{Z}^d$，其Fourier系数

$$g_k = \int_Q e^{-2\pi i x\cdot k} g(x)\, dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\int_Q \phi(x+m)\, e^{-2\pi i x\cdot k}\, dx$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\int_{[0,1]^d+m}\phi(x)\, e^{-2\pi i x\cdot k}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\, e^{-2\pi i x\cdot k}\, dx = \hat{\phi}(k)$$

由 g, ϕ Fourier系数相同，由lem 2.4.2 即得结论。 □

下面，我们借助Fourier变换，对S'中元素的可微性进行刻画，~~并介绍~~

~~Def~~：设 $s\in\mathbb{R}$．令 $\Lambda_s f=(\langle\xi\rangle^s\hat{f})^\vee$．其中 $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{\frac12}$．

~~由于 $\Lambda_s: S'\to S'$ 是连续映射．~~

Def：$H^s(\mathbb{R}^d)=\{f\in S'(\mathbb{R}^d)\mid \Lambda_s f\in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ 为(非齐次)Sobolev空间．

① $\xi\mapsto\langle\xi\rangle^s$ 是 C^∞，慢增的映射，则 $\Lambda_s: S'\to S'$ 是连续线性算子．

又 $\Lambda_s^{-1}=\Lambda_{-s}$．故 $\Lambda_s: S'\to S'$ 是同构．$f\mapsto\Lambda_s f$

② $H^s(\mathbb{R}^d)$ 是Hilbert空间，$\langle f,g\rangle_{(s)}:=\int\Lambda_s f\,\overline{\Lambda_s g}=\int\langle\xi\rangle^{2s}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$ 为内积

$$\|f\|_{H^s}=\|\Lambda_s f\|_2\underset{\text{Plancherel}}{=}\|\langle\xi\rangle^s\hat{f}\|_2$$

③ $(H^s(\mathbb{R}^d))'=H^{-s}(\mathbb{R}^d)$．证明见Folland实分析 Prop 9.16

④ $t<s$．则 $H^s\overset{\text{dense}}{\subseteq}H^t$（依$H^t$ norm）．$\|\cdot\|_{H^t}\lesssim\|\cdot\|_{H^s}$

⑤ $S(\mathbb{R}^d)\overset{\text{dense}}{\subseteq}H^s(\mathbb{R}^d)$．

⑥ $\Lambda_t: H^s\to H^{s-t}$ 是等距．

①－⑥自行验证。

Rmk．$\widehat{\Lambda_s f}=\langle\xi\rangle^s\hat{f}$，这相当于是"$f$的前$s$阶导数"求Fourier变换（Recall $\widehat{\partial^\alpha f}\approx\xi^\alpha\hat{f}$）

实际上．可以证明．$\forall k\in\mathbb{Z}$．$\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_{L^2}$ 与 $\|\Lambda_k f\|_2$ 是等价范数．

下面我们着重讨论Sobolev空间与常见函数空间的嵌入关系，并在最后证明迹定理．

先看一个简单且实用的结论

Prop 2.4.2：设 $s>\frac{d}{2}$．$2\le p\le\infty$．则 $\forall f\in H^s(\mathbb{R}^d)$，$\|f\|_p\lesssim_{s,d}\|f\|_{H^s}$

事实上．$H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)\cap L^p(\mathbb{R}^d)$．（此时）

证明：$p=2$是显然的

$p=\infty$：设 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ $\|f\|_{L^\infty}\le\|\hat{f}\|_{L^1}\le\|\langle\xi\rangle^{-s}\|_2\|\langle\xi\rangle^s\hat{f}\|_2$

$$\xrightarrow[\langle\xi\rangle^{-s}\in L^2]{s>\frac{d}{2}}\lesssim_{s,d}\|f\|_{H^s}$$

再由Riesz-Thorin插值即可

$H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ 利用Fourier逆转公式，Riemann-Lebesgue引理即可．自证 □

Cor 2.4.2. 由对偶：$s<-\frac{d}{2}$ 时. $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,s} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

Warning：$s=\frac{d}{2}$ 时. $H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$！

反例：~~d=2~~ 这里给出 $d=2$ 时的一个反例：

设 $\chi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 支于 $B(0,1)$. 且在 0 附近 $=1$. 令 $u(x)=\chi(x)\log(-\log|x|)$

可以证明：$|\partial_j u(x)| \lesssim \frac{1}{|x|\,|\log|x||}$ $\Rightarrow u\in H^1(\mathbb{R}^2)$. 但 $u\notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$

我们后面会证明：~~[illegible]~~ $H^{d/2}$ 的嵌入与BMO空间有关. □

Prop 2.4.3. $s>\frac{d}{2}$ 时：$\forall f,g\in H^s(\mathbb{R}^d)$. $\|fg\|_{H^s} \lesssim_{s,d} \|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$.

说明 $s>\frac{d}{2}$ 时. Sobolev空间是代数.

证明：只用证 $f,g\in S(\mathbb{R}^d)$ 的情况.

$\|fg\|_{H^s}^2 = \cancel{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)}\langle\xi$

$= \|\widehat{(fg)}\langle\xi\rangle^s\|_2 = \|(\hat{f}*\hat{g})\cdot\langle\xi\rangle^s\|_2$.

$= \left\|\int \hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\langle\xi\rangle^s d\eta\right\|_{L^2_\xi}$

由于：$|\xi|\le|\xi-\eta|+|\eta|$. 故. $\langle\xi\rangle^s \lesssim_s \langle\xi-\eta\rangle^s+\langle\eta\rangle^s$. (可以分 $\frac{|\xi|}{|\eta|}\in[\frac{1}{2},2]$ or not 分别谈)

代入上式

$\lesssim_s \left\|\int \hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\langle\xi-\eta\rangle^s d\eta\right\|_{L^2_\xi} + \left\|\int \hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\langle\eta\rangle^s d\eta\right\|_{L^2_\xi}$

$= \|(\hat{f}\langle\cdot\rangle^s)*\hat{g}\|_2 + \|\hat{f}*(\langle\cdot\rangle^s\hat{g})\|_2$.

$\le \|\hat{f}\langle\xi\rangle^s\|_2\cdot\|\hat{g}\|_1 + \|\hat{f}\|_1\cdot\|\langle\xi\rangle^s\hat{g}\|_2$.

$= \|f\|_{H^s}\|\underbrace{(\hat{g}\langle\xi\rangle^s)\langle\xi\rangle^{-s}}\|_{L^1} + \|(\hat{f}\langle\xi\rangle^s)\langle\xi\rangle^{-s}\|_{L^1}\|g\|_{H^s}$

$\lesssim_{s,d} \|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$. 用 Cauchy - Schwarz

□

Rmk：对一般的 $s>0$，$f,g\in H^s\cap L^\infty$，成立Moser不等式

$\|fg\|_{H^s} \lesssim_{s,d} \|f\|_{H^s}\|g\|_{\infty} + \|f\|_{\infty}\|g\|_{H^s}$

$s>\frac{d}{2}$ 时. 由 Prop 2.4.2 也可推出 Prop 2.4.3. 但Moser不等式要用 Littlewood-Paley 证明，此处暂时不讲.

Cor 2.4.3 若 $s>k+\frac{d}{2}$ 则 $H^s \hookrightarrow C_0^k$. 从而若 $f\in\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$, 则 $f\in C^\infty$.

~~证明: $H^s\hookrightarrow C_0^k$ 同 Prop 2.4.2. 下证后一半~~: 显见

□

~~下面我们~~

至此，我们只知道了 s 很大($s>\frac{d}{2}$)时的Sobolev嵌入. 对一般的 $s\in\mathbb{R}$, H^s 能否嵌入某些常见的函数空间呢?(例如 L^p).

此时,我们需要借助齐次Sobolev空间来回答此问题:

Def: $\dot H^s(\mathbb{R}^d)=\{f\in S_h'(\mathbb{R}^d) \mid |\xi|^s\hat f\in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

其中 $S_h'(\mathbb{R}^d)=\{f\in S'(\mathbb{R}^d)\mid \forall$多项式 P, $(P(\partial)\hat f)(0)=0\}\cong S'/\underbrace{\mathcal{P}}_{\text{全体多项式}}$

(相当于抹去了支于原点处的一堆 δ).

~~注意~~: Rmk: ① 若 $u\in S'(\mathbb{R}^d)$ 且 $\hat u(\xi)$ 在0附近可积, 则 $f\in S_h'(\mathbb{R}^d)$.

所以, 按这一条理解 S_h' 也行. ← 因为 $f\in S'$ 是否在 S_h' 中, 取决于低频($\xi\approx 0$)部分的行为.

② 非零常数 $\notin S_h'(\mathbb{R}^d)$. ~~局部可积~~

③ $\dot H^s$ 刻画的是"第 s 阶导数" $\in L^2$.

更多的细节,请移步 Bahouri 等人所著的 Fourier Analysis and Nonlinear PDE 一书.

我们下面讨论 $\dot H^s$ 的Sobolev嵌入, 在这前, 我们有几点要尤其注意!

Warning! ① $\dot H^s$ 是Hilbert空间 $\Longleftrightarrow$ $s<\frac{d}{2}$

$s\geq\frac{d}{2}$ 的反例见上面那书26页

不过: $s\geq\frac{d}{2}$ 的情况, 我们已经对 H^s 做出来了, 所以不是很害怕!

对一般的 s, $|||u|||_{\dot H^s}:=\|\hat u\|_{L^1(B(0,1))}+\|u\|_{\dot H^s}$ 可使 $(\dot H^s, |||\cdot|||)$ Banach.

但并不再是Hilbert空间, 与 $\|\cdot\|_{\dot H^s}$ norm 也不等价

② $S_h'(\mathbb{R}^d)$ 依弱*拓扑不是 $S'(\mathbb{R}^d)$ 的闭子空间

下面证明.

Thm 2.4.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev不等式).

$f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $0<\gamma<d$, $1<p<q<\infty$, $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{\gamma}{d}$

则 $\||\cdot|^{-\gamma}*f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\lesssim_{p,q,d}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

若在H-L-S不等式中令 $s=d-\nu$，$p=2$，则 $\frac{1}{q}+1=\frac{1}{2}+\frac{\nu}{d}=\frac{3}{2}-\frac{s}{d}$

$\Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{s}{d}=\frac{d-2s}{2d} \Rightarrow q=\frac{2d}{d-2s}$，记此指标为 2^*.

代回 ~~由~~ H-L-S不等式为：$\| |\cdot|^{s-d} * f \|_{2^*} \lesssim_{s,d} \|f\|_{L^2}$

Recall：$|\cdot|^{\alpha}$ 的 Fourier 变换为 $|\cdot|^{\alpha-d}$.

$\Rightarrow \| (|\xi|^{-s}\hat{f})^{\vee} \|_{2^*} \lesssim_{s,d} \|\hat{f}\|_{L^2}$.

令 $f=\partial^s\phi$.

$\Rightarrow \|\phi\|_{2^*} \lesssim_{s,d} \| |\xi|^s \hat{\phi}\|_2 \doteq \|\phi\|_{\dot{H}^s}$

所以，作为推论：

Thm 2.4.3 (Gagliardo—Nirenberg-Sobolev).

$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ with $\|\phi\|_{2^*} \lesssim_{s,d} \|\phi\|_{\dot{H}^s}$.

Cor 2.4.4. 由对偶知：当 $1<p<2$ 时 $L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$，$s=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})d$. (<0).

□

于是现在只用证明HLS不等式，该不等式有多种证法，在此我们采用极大函数法

Proof. $(|\cdot|^{-\nu}*f)(x)=\int f(x-y)\frac{1}{|y|^{\nu}}dy=\underbrace{\int_{|y|>R}}_{I_1}+\underbrace{\int_{|y|\le R}}_{I_2}$

R目前待定，R可以与x有关(注意上面只是对y积分而已)

$I_1 \le \|f(x-y)\|_{L^p_y} \cdot \| |y|^{-\nu}\chi_{\{|y|>R\}}\|_{L^{p'}_y}$

$=\|f\|_p \int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{p'\nu}}dy$ 　　而 $\frac{1}{p'}=\frac{\nu}{d}-\frac{1}{q}$ ~~$\frac{1}{p'\nu}=\frac{1}{d}-\frac{1}{q\nu}$~~

$\Rightarrow p'\nu=d(1+\frac{p'}{q})>d$.

$\therefore$ 上式 $\lesssim_{p,q,d} R^{-\frac{d}{q}}\|f\|_p$

I_2：关键是消灭 $y\simeq 0$ 时的奇异性，我们对积分区间作二进分解，该技巧我们在证极大函数逐点收敛 证逼近恒等的逐点收敛时也用过。

$I_2=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-(j+1)}R\le|y|\le 2^{-j}R} f(x-y)\frac{dy}{|y|^{\nu}} \le \sum_{j=0}^{\infty}(2^{-(j+1)}R)^{-\nu}\int_{2^{-(j+1)}R\le|y|\le 2^{-j}R}|f(x-y)|dy$

$\le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\nu}R^{-\nu}\int_{|y|\le 2^{-j}}\frac{|f(x-y)|}{(2^{-j}R)^d}dy\,(2^{-j}R)^d$ 　　(这步强行构造极大函数)

$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\nu - jd + j\nu} R^{d-\nu} Mf(x) \overset{\nu<d}{=\!=} C_{p.q.d} R^{d-\nu} Mf(x)$.

于是

$I_1 + I_2 \lesssim \|f\|_p R^{-\frac{d}{q}} + R^{d-\nu} Mf(x)$.

取 $R = \|f\|_p^{p/d} / Mf(x)^{p/d}$ (使两项相当).

则上式 $\lesssim_p \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} (Mf)^{\frac{p}{q}}$

~~⇒~~ 现在. $\||\cdot|^{-\nu} * f\|_q \lesssim_p \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \|(Mf)^{\frac{p}{q}}\|_q$

$= \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} \|Mf\|_p^{p/q} \overset{\text{极大函数}L^p\text{有界性}}{\lesssim} \|f\|_p^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q}$

$= \|f\|_p$

□

~~而~~ $\|u\|_{\dot{H}^s} \leq \|u\|_{H^s}$. 所以. $\|u\|_{L^{2^*}} \leq \|u\|_{H^s}$ 也对. (放到前面去)

再扯一句 H是$\hookrightarrow$ Orlicz Moser-Trudinger Ineq

~~Rmk~~

若你学过 Evans in PDE, 那么你应该了解 ~~Sobo~~ 紧嵌入. 即 $W^{k,p}(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(U)$. $1 \leq q < \frac{dpk}{d-kp}$.

但那要求 U有界. 现在我们的 $U = \mathbb{R}^d$, 这样的紧嵌入不再成立, 因为我们可以通过平移到无穷远破坏掉紧性:

设 $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. $f_n(x) = f(x + ne_1)$. 则 $f_n \rightharpoonup 0$ in H^s.

若 $H^s \hookrightarrow\hookrightarrow L^q$. 则 $\|f_n\|_{L^q} \to 0$. 这不可能. 因 $\|f_n\|_q = \|f\|_q$.

$H^s(\mathbb{R}^d)$的紧嵌入可由乘一个 Schwartz 函数完成.

Thm 2.4.4 (Rellich). 设 ~~如~~ $t < s$. 乘一个 Schwartz 函数是 $H^s \to H^t$ 的紧算子.

证明: 设 $\varphi \in \mathcal{S}$, 要证的是: $\forall$ 满足 $\sup_n \|u_n\|_{H^s} \leq 1$ 的 H^s函数列 $\{u_n\}$, 存在子列 $\{u_{n_k}\}$. s.t. $\{\varphi u_{n_k}\}$ 在 $H^t(\mathbb{R}^d)$ 中收敛.

由 H^s 自反知. $\exists$子列 (仍记作 u_n) $u_n \rightharpoonup u$ in $H^s(\mathbb{R}^d)$. $\|u\|_{H^s} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^s} \leq 1$.

令 $v_n = u_n - u$ ~~则 $\sup_n \|\varphi v_n\|_{H^s}$ 我们断言 $\sup_n$~~

我们证明 $\sup_n \|\varphi v_n\|_{H^s} \leq C$. 这依赖于如下断言,

Lemma 2.4.5 乘一个Schwartz 函数是 H^s到自己的连续映射.

暂时承认 ~~lem~~ lem 2.4.5. 由 $\sup_n \|\varphi v_n\|_{H^s} \leq C$, 下面要证 $\|\varphi v_n\|_{H^t} \to 0$.

直接计算：$\forall R>0$ 有

$$\int \langle\xi\rangle^{2t} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi \le \int_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^t |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi$$

$$+ \int_{|\xi|\ge R} (1+|\xi|^2)^{t-s} \underbrace{(1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi}_{H^s \text{ norm}}$$

Cauchy-Schwarz

$$\le \int_{|\xi|\le R} (1+|\xi|^2)^t |\widehat{\varphi v_n}(\xi)|^2 d\xi + \frac{\|\varphi v_n\|_{H^s}^2}{(1+R^2)^{s-t}}.$$

由 $\{\|\varphi v_n\|_{H^s}\}$ 一致有界 $\therefore \forall \varepsilon>0.\ \exists\ R>0$

s.t. $\frac{1}{(1+R^2)^{s-t}} \|\varphi v_n\|_{H^s}^2 < \varepsilon$.

下面对 $\int_{|\xi|\le R}$ 估计. 关键是拆掉 $\widehat{\varphi v_n}(\xi)$

$$\widehat{\varphi v_n}(\xi) = \int \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta = \int \langle\eta\rangle^{2s} \langle\eta\rangle^{-2s} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta$$

令 $\psi_\xi(\eta) = \left(\langle\eta\rangle^{-2s}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\right)^\vee$. 则 上式 $= \int \langle\eta\rangle^{2s} \hat{\psi}_\xi(\eta)\hat{v}_n(\eta)d\eta$

$$= \langle \psi_\xi, v_n \rangle_{H^s}$$

由 $v_n \rightharpoonup 0$ in $H^s(\mathbb{R}^d)$

$\therefore \forall \xi\in\mathbb{R}^d$ 上式 $\to 0$ i.e. $\widehat{\varphi v_n}(\xi) \to 0$ $\forall \xi\in\mathbb{R}^d$ as $n\to\infty$

~~从而 换 sup~~ 下面断言：$\sup\limits_{\substack{|\xi|\le R\\ n\in\mathbb{Z}_+}} |\widehat{\varphi v_n}(\xi)| \le M < \infty$

若断言成立，则对 ~~$\int_{|\xi|\le R}$~~ $\int_{|\xi|\le R}$ 用控制收敛定理即可.

断言证明如下：

$$|\widehat{\varphi v_n}(\xi)| \le \|v_n\|_{H^s} \left(\int \langle\eta\rangle^{-2s} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

由 $\hat{\varphi}\in S$ 知 ~~$\exists A>0$ s.t.~~ $|\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{d}{2}+|s|+1}}$

代回去.

$$|\widehat{\varphi v_n}(\xi)| \lesssim \int_{|\eta|\le 2R} \langle\eta\rangle^{-2s} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 d\eta + \int_{|\eta|>2R} \langle\eta\rangle^{-2s} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^2 d\eta.$$

$$\lesssim \int_{|\eta|\le 2R} \langle\eta\rangle^{2|s|} + \int_{|\eta|\ge 2R} \langle\eta\rangle^{2|s|} (1+|\xi-\eta|^2)^{-\frac{d}{2}-|s|-1} d\eta.$$

这时注意，$\left.\begin{array}{l}|\xi|\le R\\ |\eta|\ge 2R\end{array}\right\} \Rightarrow |\xi-\eta|\ge \frac{|\eta|}{2}$

$\therefore$ 上式 $\lesssim (1+R^2)^{|s|+\frac{d}{2}} + \int \langle\eta\rangle^{-\frac{d}{2}-1}\,d\eta$

取 $R=1$ ~~上~~ 上式 $\lesssim 1 \Rightarrow$ 断言成立. 定理证毕.

$\square$

补下还差引理 2.4.3 的证明；~~但这是~~

Pf: $\widehat{\varphi u}=\hat\varphi * \hat u$.

令 $U_s(\xi)=\langle\xi\rangle^{s}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat\varphi(\xi-\eta)|\cdot|\hat u(\eta)|\,d\eta$.

由于 $\langle\xi\rangle^s \le \left(1+2(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)\right)^{s/2}$

$\le 2^{s/2}\langle\xi-\eta\rangle^s\langle\eta\rangle^s$ 知.

故. $|U_s(\xi)|\le 2^{\frac{|s|}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi-\eta\rangle^s|\hat\varphi(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^s|\hat u(\eta)|\,d\eta$

$=2^{\frac{|s|}{2}}\left(\langle\cdot\rangle^s|\hat\varphi|\right)*\left(\langle\cdot\rangle^s|\hat u|\right)$.

由 Young 不等式 $\|U_s(\xi)\|_{L^2}\lesssim 2^{\frac{|s|}{2}}\|\langle\cdot\rangle^s|\hat u|\|_{L^2}\cdot\|\langle\cdot\rangle^s|\hat\varphi|\|_{L^1}$

$\le 2^{|s|/2}\|u\|_{H^s}\underbrace{\|\langle\cdot\rangle^s\hat\varphi\|_{L^1}}_{\lesssim 1}$ 因 $\varphi\in\mathcal{S}$ $\square$

~~对 s=~~ 最后我们证明 Sobolev 迹定理.

考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的 $d-1$ 维超平面 $\{x_1=0\}$. 由于它是 $\mathcal{L}^d$-零测的，我们无法对一个 L^p 函数 $u(x_1,x')$ ($x'=(x_2,\dots,x_d)$，下同) 定义它在该超平面上的取值 i.e. $\gamma u(x'):=u(0,x')$ 并不良定. 但迹定理告诉我们，我们可以先定义 $\gamma:\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ 再连续延拓，延拓的最终结果是 $H^s(\mathbb{R}^d)\to H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})$ 即丢半阶导数. $\phi\mapsto\phi(0,x')$.

注意这个 s 必须加以限制！

Thm 2.4.5 (Trace lemma). $\boxed{s>\frac12}$ 则

$\gamma:\begin{cases}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})\\ \phi\longmapsto\gamma\phi:=\phi(0,x')\end{cases}$ 可以连续延拓到 $H^s(\mathbb{R}^d)\to H^{s-\frac12}(\mathbb{R}^{d-1})$ 并成为满射

证明: 先证 $\mathrm{Im}\,\gamma \subseteq H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$

由 $S \overset{\text{dense}}{\subset} H^s$ 故我们要证. $\exists C>0$ s.t. $\forall \phi \in S$ $\|\gamma(\phi)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} \le C\|\phi\|_{H^s}$

注意到

$$\phi(0,x') = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x'\cdot\xi'}\,\hat{\phi}(\xi_1,\xi')\,d\xi_1\,d\xi' \qquad (x_1=0 \text{ 所以 } e^{ix_1\xi_1} \text{ 没了})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{2\pi i x'\cdot\xi'}\left(\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(\xi_1,\xi')\,d\xi_1\right)d\xi'$$

$$\Rightarrow \widehat{\gamma\phi}(\xi') = \int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(\xi_1,\xi')\,d\xi_1.$$

$$\Rightarrow |\widehat{\gamma\phi}(\xi')|^2 \le \int_{\mathbb{R}}(1+\xi_1^2+|\xi'|^2)^{-s}\,d\xi_1 \cdot \int_{\mathbb{R}}|\hat{\phi}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi_1$$

$*$ $s>\frac{1}{2}$ 保证了第一个积分有限, 直接计算有 $\int(1+\xi_1^2+|\xi'|^2)^{-s}\,d\xi_1 = C_s(1+|\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}$

$C_s = \int(1+x^2)^{-s}\,dx$

$$\Rightarrow \|\gamma(\phi)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}} \lesssim_s \|\phi\|^2_{H^s}$$

再证满射, 我们希望找到 γ 的"逆" i.e. $R: H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \to H^s(\mathbb{R}^d)$.

s.t. $\gamma R v = v$ $\forall v \in S(\mathbb{R}^{d-1})$

$\|Rv\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|v\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}$

设 $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. $\rho(0)=1$.

$$Rv(x) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{2\pi i x'\cdot\xi'}\rho(x_1\langle\xi'\rangle)\,\hat{v}(\xi')\,d\xi'$$

$$\Rightarrow \widehat{Rv}(\xi) = \int e^{-2\pi i t\xi_1} e^{2\pi i x'\cdot\xi'}\rho(t\langle\xi'\rangle)\,\hat{v}(\xi')\,dt.$$

$$= \langle\xi'\rangle^{-1}\hat{\rho}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right)\hat{v}(\xi').$$

$$\Rightarrow \|Rv\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi_1|^2+|\xi'|^2)^s\langle\xi'\rangle^{-2}\left|\hat{\rho}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right)\right|^2|\hat{v}(\xi')|^2\,d\xi$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^d}\left(1+\left(\frac{|\xi_1|}{\langle\xi'\rangle}\right)^2\right)^s\langle\xi'\rangle^{2s-2}\left|\hat{\rho}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right)\right|^2|\hat{v}(\xi')|^2\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(1+\left(\frac{|\xi_1|}{\langle\xi'\rangle}\right)^2\right)^s\left|\hat{\rho}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right)\right|^2\langle\xi'\rangle^{-1}\,d\xi_1\right)\langle\xi'\rangle^{2s-1}|\hat{v}(\xi')|^2\,d\xi'$$

~~由 ρ 对 ξ 的限制~~. 由 $\hat{\rho} \in S$ 知 $\left(1+\left(\frac{|\xi_1|}{\langle\xi'\rangle}\right)^2\right)^s\hat{\rho}\left(\frac{\xi_1}{\langle\xi'\rangle}\right) \lesssim_N \left(1+\left(\frac{|\xi_1|}{\langle\xi'\rangle}\right)^2\right)^{s-N}$ N 充分大.

代入上式 $\lesssim_N \|v\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}}$ 证毕.

$\gamma R v = v$ 显然.

$\square$

~~§2.5 第一型震荡积分~~

§2.5 第一型震荡积分（支撑曲面上的Fourier变换）

下面我们对"震荡积分"这一调和分析中最重要、最困难、也至今仍在发展的领域作一个入门介绍。震荡积分在色散方程、流体方程，以及数论的格点估计问题中十分重要，与此同时，至今仍未完全解决的调和分析四大猜想（限制性估计、Bochner-Riesz、局部光滑性、Kakeya猜想）也都围绕震荡积分展开。

首先看一个例子，考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的 Schrödinger 方程，

$$\begin{cases} i\partial_t\psi+\Delta\psi=0 \\ \psi(0)=\psi_0\in S(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

由Fourier变换可得：$\hat{\psi}(\xi,t)=e^{-4it\pi^2|\xi|^2}\hat{\psi_0}(\xi)$.

$$\Rightarrow \psi(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}e^{-4it\pi^2|\xi|^2}\hat{\psi_0}(\xi)\,d\xi.$$

现在，对上式右边的积分式，我们按如下方式看待：

记 令 $P=\{(\xi,-2\pi|\xi|^2)\mid \xi\in\mathbb{R}^d\}\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$.

定义 P 上的测度 $\mu(d\xi,d\tau)=\hat{\psi_0}(\xi)d\xi$

由于，对任何连续函数 F 均有 $\int_{\mathbb{R}^{d+1}}F(\xi,\tau)\,\mu(d\xi,d\tau)=\int_{\mathbb{R}^d}F(\xi,-2\pi|\xi|^2)\hat{\psi_0}(\xi)d\xi$

所以，解可以写作 $\psi(x,t)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}e^{2\pi i(x\cdot\xi+t\tau)}\mu(d\xi,d\tau)$

换句话说，我们现在将 Schrödinger 方程的解写成了一个支撑在曲面 P 上的测度 μ 的反Fourier变换。因而此（本质上）要了解方程解的基本性质，就化为了支撑在曲面上的测度的Fourier变换的性质，而尤其是衰减性。

Exercise: 上述 Schrödinger 方程解有衰减估计 $\|\psi(t)\|_{L^\infty}\lesssim_d t^{-\frac{d}{2}}\|\psi_0\|_{L^1}$

□

现在我们设 $S \subset \mathbb{R}^d$ 是超曲面 (i.e. $\dim S = d-1$). S的Gauss曲率(主曲率之积)非零 $d\sigma$ 是 S上的(Lebesgue测度).

设 $\beta(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $d\mu(x) := \beta(x)\, d\sigma(x)$.

$$\Rightarrow \widehat{d\mu}(\xi) = \int_S e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\mu(x).$$

我们最终目的是证明: $|\widehat{d\mu}(\xi)| \lesssim \langle\xi\rangle^{-\frac{d-1}{2}}$.

- Gauss曲率非零有什么用?

~~若Gauss~~的考虑 S是 $\mathbb{R}^d$ 中的超平面, 此时不妨 $S = \{x_d = 0\}$. $x' = (x_1, \dots x_{d-1})$.

则 $\forall \phi \in S(\mathbb{R}^{d-1})$. $\widehat{\phi\, \mathcal{L}^{d-1}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i x'\cdot\xi'} \phi(x')\, dx'$.

这是一个Schwartz函数, 但并不依赖 ξ_d. 从而沿 ξ_d 方向无任何衰减.

i.e. 在超平面一点处, $\widehat{d\mu}$ 在该点(关于平面的)法向无衰减. $\Longrightarrow$ 做不了衰减估计.

局部来看, 我们(可)将超曲面S参数化.

~~设 $x' = (x_2, \dots, x_d)$ $h(x')$ 是 C^∞ 函数.~~ $S = \{(h(x'), x') \mid x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}\}$

~~令… $\Rightarrow d\sigma(x) = \sqrt{1+|\nabla h|^2}\, dx'$~~

~~Gauss曲率 $K = (1+|\nabla h|^2)^{-\frac{d+1}{2}} \cdot \det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}\right)$~~ $\neq 0$.

~~$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i \langle (h(x'), x'), \xi\rangle} \beta(h(x'), x') \sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}\, dx'$.~~

我们不妨设 S过原点, 且S在原点处的切超平面为 $\{x_d = 0\}$.

则在原点附近 S 可以表示成 $x_d = \phi(x_1, \dots, x_{d-1})$. $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$.

$\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$,

对 $(d-1)\times(d-1)$ 方阵 $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)(x_0)$, 其特征值 $\lambda_1, \dots \lambda_d$ 称作 S在 x_0 处的主曲率, 其乘积(Gaussian curvature) $K = \det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)(x_0)$

所以, 我们要研究的积分化作

2π 抄了无所谓

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\lambda\Phi(x';\eta)} a(x)\, dx' \quad \text{for some real-valued } a(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$$

$\Phi(x';\eta) = x'\cdot\eta = x_1\eta_1 + \dots + x_{d-1}\eta_{d-1} + \phi(x_1 \dots x_{d-1})\eta_d$, η 为 $\mathbb{R}^d$ 中的单位向量

$\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0 \quad \det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)(0) \neq 0$ $\lambda = |\xi| > 0$. $\xi = \lambda\eta$.

该积分的估计分作两部分

① η 充分接近 $\eta_N=(0,\cdots,0,1)$,
or $\eta_S=(0,\cdots,0,-1)$

② η 不在 η_N,η_S 的小邻域内.

①中: $\nabla_{x'}\Phi(x',\eta_N)\big|_{x'=0}\equiv 0$ (因 η_N 前 $d-1$ 分量全是0)

$\det\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}\right](0,\eta_N)\neq 0$ (相当于是 $\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial_j\partial_k}\right) & 0\\ 0 & \partial_{dd}\Phi\end{pmatrix}$)

这等价于 Gauss 曲率 $\neq 0$ 的假设

从而对 η_N 的一个小邻域 必有 $\det\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}\right](x(\eta),\eta)\neq 0$.

这种情形是: 相函数 Φ 有临界点, 且此临界点非退化 (二阶导方阵非奇异)

② : $\nabla_{x'}\Phi(x',\eta)=(\eta_1,\cdots\eta_{d-1})+\eta_d\nabla\phi(x)$.

而 $(\eta_1^2+\cdots+\eta_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}\geq c>0$

$\nabla\phi(x)=O(x)$ as $x\to 0$

$\therefore\ |\nabla_x\Phi(x',\eta)|\geq c'>0$.

这属于: 相函数没有临界点之情况

现在我们的研究对象可以抽象成

$I(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\lambda\Phi(y)}\,~~a(y)\,dy~~\,a(\lambda,y)\,dy$. 其中 $\Phi(0)=0$, $\nabla\Phi(0)=0$, 且若 y_0 为 Φ 的临界点 则 $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j\partial y_k}\right)(y_0)\neq 0$.

① Φ 无临界点 i.e. $|\nabla\Phi|\geq c>0$

② Φ 有非退化临界点

~~这两种~~ 下面我们证明: ① 情况 $I(\lambda)\lesssim\lambda^{-N}$ $\forall N\in\mathbb{Z}_+$

② 情况 $I(\lambda)\lesssim\lambda^{-d/2}$

若①②对 那么支撑曲面上的测度的 Fourier 变换有 $|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}$ 衰减就得证.

Φ没有临界点的情况极其简单，只需不断地分部积分造出λ的衰减即可

Nonstationary phase

Thm 2.5.1 若令 $I(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(\xi)}a(\xi)\,d\xi$ ~~且~~ $\nabla\phi\neq 0$. 则

$|I(\lambda)|\lesssim \lambda^{-N}$ $\forall N\in\mathbb{N}^+$ as $\lambda\to+\infty$

Pf 证明：只用注意到

$$\frac{1}{i\lambda}\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\cdot\nabla(e^{i\lambda\phi(\xi)}) = e^{i\lambda\phi(\xi)}.$$

(想象一维的情况 $\cancel{(e^{i\lambda\phi(\xi)})'=\frac{1}{i\lambda}}$ $e^{i\lambda\phi(\xi)}=\frac{1}{i\lambda\phi'(\xi)}(e^{i\lambda\phi(\xi)})'$.

∴ 令 $L=\frac{1}{i\lambda}\frac{\nabla\phi\cdot\nabla}{|\nabla\phi|^2}$

则可以算出 $L^*=\frac{i}{\lambda}\nabla\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2}\right)$

∴ $\forall N\in\mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}|I(\lambda)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(\xi)}a(\xi)\,d\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} L^N(e^{i\lambda\phi(\xi)})\,a(\xi)\,d\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(\xi)}(L^*)^N a(\xi)\,d\xi\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left|(L^*)^N a(\xi)\right|d\xi \lesssim \lambda^{-N}\end{aligned}$$

□

下面来看有临界点的情况，在这种情况下 做不到无穷阶(任意多项式)衰减是因为分部积分时(分母会出ϕ')，在临界点处$\nabla\phi=0$，造成积分没意义，换句话说，我们不能直接对$I(\lambda)$作分部积分，但我们可以把临界点(的一个小邻域)抠掉，在剩下的部分进行分部积分，之后单独处理临界点附近的部分.

我们先看一维震荡积分 $I_\alpha(\lambda)=\int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}a(\lambda,\xi)\,d\xi$ $\Phi(0)=\Phi'(0)=0$. $\Phi'(\xi)\neq 0$ on $\mathrm{Spt}_\xi\, a(\lambda,\cdot)\setminus\{0\}$. $\Phi''(0)\neq 0$. ，再假设 $|\partial_\xi^\gamma\partial_\lambda^\alpha a(\lambda,\xi)|\lesssim(1+\lambda)^{-\alpha}$.

1d Stationary Phase

Thm 2.5.2：此时 $\forall\alpha$, $|\partial_\lambda^\alpha I(\lambda)|\lesssim_\alpha \cancel{(1+\lambda)}\ (1+\lambda)^{-\frac{1}{2}-\alpha}$

~~Rmk：证明之前~~

证明：在进入关键步骤之前，我们首先对$I(\lambda)$进行约化.

$$\partial_\lambda^\alpha I(\lambda)=\sum_{j+k=\alpha}\frac{\alpha!}{j!\,k!}\int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}(i\Phi(\xi))^j\,\partial_\lambda^k a(\lambda,\xi)\,d\xi$$

Φ只有临界点(非退化) $\xi=0$，于是在0处Taylor展开Φ 有

$\Phi(\xi) = \xi^2 \eta(\xi)$ Φ on $\mathrm{Supp}_\xi\, a$ η是一个C^∞函数.

$\Rightarrow \Phi^\alpha = \xi^{2\alpha}\eta(\xi)^\alpha$.

因此 Thm 2.5.2 可由如下引理直接得出 (相当于把Φ简化成了幂函数) □

Lemma 2.5.1 (Van der Corput 引理).

设Φ如上所述，则 $\forall k\in\mathbb{N}$，$\left|\int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}\xi^k a(\lambda,\xi)\,d\xi\right| \lesssim_k \lambda^{-\frac{k+1}{2}}$

证明.

现在开始抠临界点，要注意，不能直接将积分区域拆成 $\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty$，因为那样的话 $a(\lambda,\xi)\chi_{\xi\in(0,\varepsilon)}$ or $\chi_{\xi\in(\varepsilon,\infty)}$ 的光滑性丢失。所以，我们引进一个0附近的光滑截断
- ①是为了保证振幅函数 a 的光滑性
- ②是为了频率局部化，将ξ选取到我们想要的值.

②是有目的的，因为在临界点附近，我们并没有太多处理手段，所能做的都只是硬算 or 提出 L^∞ norm. 所以ξ的局部化显得极其重要，下面的证明细节能看出这一点.

现取 $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，$\rho = \begin{cases} 1 & 0\le y\le 1 \\ 0\le\rho\le 1 \text{ smooth} & 1<y<2 \\ 0 & y\ge 2\end{cases}$

取一个 $\delta>0$ (待定). 将 $I_k = \int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}\xi^k a(\lambda,\xi)\,d\xi$ 拆成两部分.

$$I_k = \int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}\xi^k a(\lambda,\xi)\underbrace{\rho\left(\frac{\xi}{\delta}\right)}_{\text{相当于限制到}\xi\lesssim\delta}d\xi + \int_0^\infty e^{i\lambda\Phi(\xi)}\xi^k a(\lambda,\xi)\left(1-\rho\left(\frac{\xi}{\delta}\right)\right)d\xi$$

$$=: \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$|\mathrm{I}| \lesssim \int_0^{2\delta} \xi^k\,d\xi \lesssim \xi^{k+1}$ (所以我们对临界点附近的积分真的没什么可做的)

II 中. 先令 $L = \frac{1}{i\lambda\Phi'}\frac{d}{d\xi}$. 则 $L^* = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{i\lambda\Phi'}$

$$|II| \overset{\text{分部积分}}{=} \left|\int e^{i\lambda\Phi}(L^*)^N\left(\xi^k a(\lambda,\xi)\left(1-\rho\left(\tfrac{\xi}{\delta}\right)\right)\right)d\xi\right|$$

$$\le \int_{\xi>\delta}\left|(L^*)^N\left(\xi^k a(\lambda,\xi)\left(1-\rho\left(\tfrac{\xi}{\delta}\right)\right)\right)\right|d\xi$$

L^* 中有 $\frac{1}{\phi'}$. 由于 $\phi(\xi)=\xi^2\eta(\xi)\gtrsim\xi^2$ 知 $(\phi'(\xi))^{-1}\lesssim\frac{1}{\xi}$.

所以 上式右边 $\le \lambda^{-N}\max\{\xi^{k-2N}, \xi^{k-N}\delta^{-N}\}$

λ^{-N} 的出现是因为 $(L^*)^N$ 带了 λ^{-N} 的 decay, 这很容易看出.

ξ^{k-2N} 是 N 阶导全落在 ξ^k 头上. $L^*(\xi^k) = \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{d}{d\xi}(\xi^k) \sim \lambda^{-1}\xi^{k-2}$.

即 L^* 作用一次, ξ 的幂次降低 2. 作用 N 次自然降低 $2N$

$\xi^{k-N}\delta^{-N}$ 是 N 阶导全落在 $1-\rho(\frac{\xi}{\delta})$ 头上. 这个很容易看出.

L^* 落在 a 头上无所谓 (回看 a 的假设, a 对 ξ 求导, 有界性不变).

设 $\mathrm{Spt}\, a \subseteq (-c, c)$. 则 取 $N \ge k+2$

$$|II| \le \lambda^{-N}\int_\delta^c\left(\xi^{k-2N}+\xi^{k-N}\delta^{-N}\right)d\xi \lesssim C\lambda^{-N}\delta^{1+k-2N}.$$

从而 $|I_k(\lambda)| \le |I|+|II| \lesssim \delta^{1+k}+\lambda^{-N}\delta^{1+k-2N}$

让右边两项相等, 取 $\delta=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 即有 $|I_k(\lambda)| \lesssim \lambda^{-\frac{k+1}{2}}$ □

很多时候, 我们要用到变系数的 thm 2.5.2. 具体来说 设 $\Phi(x,y)\in C^\infty$ 实值. $\partial_y\Phi(0,0)=0$. $\partial_y^2\Phi(0,0)\ne 0$. 那么对 $\partial_y\Phi$ 用隐函数定理. 有 $\exists$ 光滑函数 $y=y(x)$ s.t. $\partial_y\Phi(x,y(x))=0$.

对 x 求导: $\partial_{xy}\Phi(x,y(x)) + y'(x)\,\partial_y^2\Phi(x,y(x)) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{\partial_{xy}\Phi}{\partial_y^2\Phi}$

此时我们考虑的是

$$I(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\Phi(x,y)}a(\lambda,x,y)\,dy$$

$a\in C^\infty$. $\mathrm{Spt}_y\, a$ 很小. s.t. $y(x)$ 是 $\partial_y\Phi(x,y(x))=0$ 唯一解

且 $|\partial_\lambda^\alpha\partial_x^{\beta_1}\partial_y^{\beta_2}a(\lambda,x,y)| \lesssim (1+\lambda)^{-\alpha}$.

「由隐函数定理可以保证做到」.

Corollary 2.5.1 设 a, Φ 如上. 则 $\forall \alpha, \beta \geq 0$

$$\left| \partial_\lambda^\alpha \partial_x^\beta \left(e^{-i\lambda\Phi(x,y(x))} I(x,\lambda) \right) \right| \lesssim C_{\alpha\beta} (1+\lambda)^{-\frac{1}{2}-\alpha}. \quad x\text{充分小}.$$

证明. 我们希望通过化简 ~~来~~ 将问题归结到 Van der Corput 引理上, 所以先算相位函数

令 $\tilde{\Phi}(x,y) = \phi(x,y) - \phi(x,y(x))$.

则 $\tilde{\Phi}(x,y(x)) = 0$.

~~我们~~ $\beta = 0$ 时.

$$\partial_\lambda^\alpha \left(e^{-i\lambda\Phi(x,y(x))} I(x,\lambda) \right)$$

$$= \sum_{j+k=\alpha} \frac{\alpha!}{j!k!} \int \partial_\lambda^j \left(e^{i\lambda\tilde{\Phi}(x,y)} \right) \cdot \underbrace{\partial_\lambda^k a(\lambda,x,y)}_{\lesssim (1+\lambda)^{-k}} dy$$

$$\lesssim \int \left(\cancel{i\tilde{\Phi}(x,y)} \right) \partial_\lambda^j \left(e^{i\lambda\tilde{\Phi}(x,y)} \right) (1+\lambda)^{-k} dy$$

$$\lesssim \partial_\lambda^j \int e^{i\lambda\tilde{\Phi}(x,y)} \cdot (1+\lambda)^{-k} dy \underset{\text{Thm 2.5.2}}{\lesssim} (1+\lambda)^{-\frac{1}{2}-j-k} = (1+\lambda)^{-\frac{1}{2}-\alpha}.$$

$\beta \neq 0$ 时. ~~展开相位函数 (在 $y=y(x)$ 处)~~, 易知 $y(x)$ 为 $\tilde{\Phi}(x,y)$ 的二阶零点.

$$\cancel{\tilde{\Phi}(x,y) = \phi(x,y) - \Phi(x,y(x))}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(y-y(x))^2 \cdot (\partial_x}$$

由于 ∂_x 落在 a 头上不影响任何估计. 所以只用看 ∂_x 落在 $e^{-i\lambda\phi(x,y(x))}$ 上.

先看 $\partial_x \left(e^{-i\lambda\phi(x,y(x))} \right) = -i\lambda \left(\partial_x \phi(x,y(x)) + \underbrace{y'(x) \partial_y \phi(x,y(x))}_{0} \right)$

$$= -i\lambda \partial_x \phi(x,y(x)).$$

$$\therefore \partial_x \left(e^{-i\lambda\tilde{\Phi}} \right) = -i\lambda \left(\partial_x \phi(x,y) - \partial_x \phi(x,y(x)) \right)$$

$$= -i\lambda \left(\partial_{xy} \phi(x,y(x)) (y-y(x)) + o(y-y(x)) \right)$$

而由隐函数定理. $\partial_{xy} \phi(x,y(x)) = -y'(x) \partial_y^2 \Phi(x,y(x))$

$\beta\neq 0$ 时，我们展开相函数，记 $\bar{y}(x)$ 为 Φ 二阶零点

$$\tilde{\Phi}(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi(x,y(x))$$

$\partial_y\Phi(x,y(x))=0 \longrightarrow$ $\cancel{=\frac{1}{2}(y-y(x))^2\Phi_{yy}(x,y(x))\cdot\eta}$

$$=\frac{1}{2}(y-y(x))^2\psi(x,y) \quad \text{for some smooth } \psi.$$

于是：$\partial_x(e^{i\lambda\tilde{\Phi}(x,y)})=i\lambda\left((y-y(x))y'(x)\psi(x,y)+(y-y(x))^2\partial_x\psi(x,y)\right)$.

我们要证明是求一次 ∂_x 不改变 λ 的幂次，因此，要设法消掉上式的 λ.

回顾 Van der Corput 引理，当被积项出现 y^k 时，λ 衰减次数会增加 $\frac{k}{2}$ 次

而 $y(x)\approx 0$，所以要设法造出 $(y-y(x))^2$，这样代入 Van der Corput 引理

（因为本来就在 0 附近用的隐函数定理）

便能制造出额外的 λ^{-1} 与上面的 λ 抵消.

因此，唯一的困难在于怎么对付 $y'(x)$，

由隐函数定理 $y'(x)=-\dfrac{\phi_{xy}(x,y(x))}{\phi_{yy}(x,y(x))}$.

现在在 $y=y(x)$ 处展开 $\phi_y(x,y)$. 有：

$$\phi_y(x,y)=\underbrace{\phi_y(x,y(x))}_{=0}+\phi_{yy}(x,y(x))(y-y(x)).$$

代入上式便有 $y'(x)=-\dfrac{\phi_{xy}}{\phi_y}(x,y)\cdot(y-y(x))$

这样

$$\partial_x\left(\int e^{i\tilde{\Phi}(x,y(x))}a(\lambda,x,y)\,dy\right)\lesssim\lambda^1\int e^{i\frac{(y-y(x))^2}{2}\psi}\cdot\underbrace{(y-y(x))^2}_{\approx y^2\cdot\text{因 }y(x)\approx 0}\cdot\tilde{a}(\lambda,x,y)\,dy$$

$$\underset{\text{Van der Corput}}{\lesssim}\lambda^1\lambda^{-1-\frac{1}{2}}=\lambda^{-\frac{1}{2}}$$

说明 ∂_x 作用上来不改变 λ 幂次，证毕，

于是化为 $\beta=0$ 的情况. □

Rmk：类似于 Van der Corput 引理，我们可以证明.

若 $\Phi^{(j)}(0)=0 \quad 0\le j\le k-1$. 且 $\Phi^{(k)}(0)\neq 0$. 则 $|I(\lambda)|\lesssim\lambda^{-\frac{1}{k}}$.

具体证明见 Stein 调和分析 8.1 节

□.

下面讨论高维震荡积分.

$I(\lambda)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi(\xi)}a(\lambda,\xi)d\xi \quad \lambda>0$

设 Φ 实值 C^∞ $\quad \mathrm{Spt}\, a$ 紧,

$\nabla\Phi(\xi_0)=0 \quad \det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)(\xi_0)\neq 0 \quad$ i.e. ξ_0 为 Φ 的唯一非退化临界点

设 $|\partial_\lambda^\alpha\partial_\xi^\gamma a(\lambda,\xi)|\lesssim(1+\lambda)^{-\alpha}$

本节结果如下

Thm 2.5.3 ($\mathbb{R}^d$ stationary phase) 设 0 是如上所述 Φ 的一个非退化临界点

则若 $\nabla\Phi(\xi)\neq 0$ on $\mathrm{Spt}_\xi\, a(\lambda,\cdot)\backslash\{0\}$ 仍有 $|\partial_\lambda^\alpha I(\lambda)|\lesssim_\alpha(1+\lambda)^{-\frac{d}{2}-\alpha}$

证明: 我们希望将 d 维振荡积分化成一维的, 再套用一维的结论, 正好契合.

但现在问题是: ① 即使 $\Phi(\xi)\simeq\xi^T\cdot H(0)\xi$ 是个二次型, Φ 也未必有变量分离的形式. (除非 Hess(0) 对角)

② Van der Corput 引理有无 $\mathbb{R}^d$ 版本.

要知道 Van der Corput 引理是我们证明 Type I 震荡积分的核心工具

若①②有一个做不到, 那么就寸步难行了. 但幸运的是, ①② 均可做到, 这样 Thm 2.5.3 便由如下引理得出

首先

lemma 2.5.2. 若 $Q(\xi)=\frac{1}{2}(\xi_1^2+\cdots+\xi_j^2-\xi_{j+1}^2-\cdots-\xi_d^2)$

则 $\partial_\lambda^\alpha\int e^{i\lambda Q(\xi)}a(\lambda,\xi)d\xi\lesssim\lambda^{-\frac{d}{2}-|\alpha|}$.

结论显然. 特么都分离变量了.

lemma 2.5.3 (Van der Corput). 令 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_d^{\alpha_d}$

则 $\left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\lambda Q(\xi)}a(\lambda,\xi)\xi^\alpha d\xi\right|\lesssim_\alpha(1+\lambda)^{-\frac{d+|\alpha|}{2}}$.

且若 $|\alpha|$ 奇, 右边可以改进为 $-\frac{d+1+|\alpha|}{2}$

证明 对 d 归纳.

d=1 即为一维 Van der Corput 引理.

设对 d-1 成立. d 时, 用 Fubini 定理

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda Q(\xi)} a(\lambda,\xi)\,\xi^{\alpha}\,d\xi$$

$Q(\xi') = Q(\xi) - \frac{\xi_1^2}{2}$

$$= \cancel{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\lambda Q(\xi')} a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha_1}\,d\xi_1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\lambda Q(\xi')} \underline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\frac{\xi_1^2}{2}} a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha}\,d\xi_1\right)} (\xi')^{\alpha'}\,d\xi'$$

!! $\tilde{a}(\lambda,\xi') \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$

且 $\left|\partial_\lambda^j \partial_{\xi'}^{\gamma'} \tilde{a}\right| \lesssim (1+\lambda)^{-\frac{1+\alpha_1}{2}-j}$

再用归纳假设 便有

$$\left|\lambda^{\frac{1+\alpha_1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\lambda Q(\xi')} \tilde{a}(\lambda,\xi')(\xi')^{\alpha'}\,d\xi'\right| \lesssim (1+\lambda)^{-\frac{[(d-1)+|\alpha'|]}{2}}$$

$$\lesssim (1+\lambda)^{-\frac{d+|\alpha|}{2}}.$$

若α奇 不妨α_1奇 则 $\alpha_1 \geq 1$（说明可以承受一次分部积分带来的 ξ_1^{-1}）.

~~同理~~ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\xi_1^2/2} a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha_1}\,d\xi_1.$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\lambda}\frac{d}{d\xi_1}\left(e^{i\lambda\frac{\xi_1^2}{2}}\right) a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha_1-1}\,d\xi_1$$

分部积分 $= \frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\frac{\xi_1^2}{2}} \partial_{\xi_1} a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha_1-1}\,d\xi_1.$

$$+\frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\frac{\xi_1^2}{2}} a(\lambda,\xi_1,\xi')\,\xi_1^{\alpha_1-2}\,d\xi_1$$ 若$\alpha_1=1$ 则没这项 因为求导为0.

从而 这一层积分 至少给出 λ^{-1} 的衰减.

即化为上面的一般情况

之后 还剩 $d-1$ 维 带来积分 decay ~~按归纳假设~~ 应为 $\lambda^{-\frac{d-1}{2}-\frac{|\alpha|-1}{2}}$

∴ 合起来 $\lesssim \lambda^{-\frac{d+1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}$ □

现在还差②. 即任何一个满足条件的相位函数, 可否在 $\xi=0$ 附近找到合适的坐标卡, 使之成为 $Q(\xi)$ 的形式呢? 那么 Morse 引理给出了肯定的答案.

lemma 25.4 (Morse) 设 Φ 在 $\xi=0$ 处有非退化临界点，$\Phi(0)=0$，则 $\exists\,\xi=0$ 附近有 Smooth chart $\xi\mapsto\tilde{\xi}$ s.t.

$$\Phi(\tilde{\xi})=\frac{1}{2}(\tilde{\xi}_1^2+\cdots+\tilde{\xi}_j^2-\tilde{\xi}_{j+1}^2-\cdots-\tilde{\xi}_d^2).$$

Pf：由于 Hess $\Phi(0)$ 非退化 ∴ 可通过换基，使得

$$\text{Hess}\,\Phi(0)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_j\partial\xi_k}(0)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \partial_{\xi_1}\Phi=0\quad \partial_{\xi_1}^2\Phi\neq0\quad \text{at } \xi=0.$$

由隐函数定理，$\exists$ 光滑函数 $\bar{\xi}_1=\bar{\xi}_1(\xi')$ s.t. $\partial_{\xi_1}\Phi(\bar{\xi}_1,\xi')=0$.

作变量代换：$\xi\longmapsto(\xi_1-\bar{\xi}_1,\ \xi')$.

则不妨 $\bar{\xi}_1=0 \Rightarrow \partial_{\xi_1}\Phi(0,\xi')=0$.

Taylor展开 $\Phi(\xi)=\Phi(0,\xi')+c(\xi)\frac{1}{2}\xi_1^2$　$c(\xi)\in C^\infty$，且在0附近 >0.

∴ 令 $\tilde{\xi}_1(\xi)=\sqrt{c(\xi)}\,\xi_1$，便有 $\Phi(\xi)=\frac{1}{2}\tilde{\xi}_1^2+\tilde{\Phi}(\xi')$，之后归纳即得

□

Rmk：看需要注意，Morse引理仅是locally的结果，但我们已假设 $\xi\neq0$ 时 $\nabla\Phi\neq0$

从而不妨可也设 $\text{Spt}_\xi\, a$ 充分小，化为local的情形

□

$\mathbb{R}^d$ 也有变系数的情况，证明如法炮制，我们只给出结果。

设 $\Phi(x,y)\in C^\infty$　$\partial_y\Phi(0,0)=0$.　$\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_j\partial y_k}\right)\neq0$　at $(0,0)$.

则据隐函数定理，$\partial_y\Phi(x,y(x))=0$ 在 x 小时有唯一解 $y=y(x)$，$y(x)$ 称作 Φ 的驻相点，Stationary phase point

对 $I(x,\lambda)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\lambda\Phi(x,y)}a(\lambda,x,y)\,dy$　$\text{Spt}_y a$ 充分小

且 $|\partial_\lambda^\alpha\partial_x^{\beta_1}\partial_y^{\beta_2}a(\lambda,x,y)|\lesssim(1+\lambda)^{-\alpha}$.

则 $|\partial_\lambda^\alpha\partial_x^\nu I(x,\lambda)|\lesssim_{\alpha,\nu}(1+\lambda)^{-\frac{d}{2}-\alpha}$.

□

最后，我们用~~该~~震荡积分法求估计 $B(0,\lambda)$ 中格点个数

Thm 2.5.5 (Hlawka Thm).

设 $N(\lambda)=\#\{j\in\mathbb{Z}^d \mid |j|\le\lambda\}$，$B=B(0,1)\subseteq\mathbb{R}^d$

则 $N(\lambda)=\mathrm{Vol}(B)\cdot\lambda^d+O(\lambda^{d-2+\frac{2}{d+1}})$

<u>Pf</u>: Step1 光滑化:

Fix $\beta\in C_c^\infty(B(0,\frac{1}{2}))$，$\int\beta=1$，$\beta\geq 0$

设 $\chi_\lambda=\chi_{B(0,\lambda)}$ 则对 $\varepsilon>0$ 定义光滑化

令 $\tilde{\chi}_\lambda(\varepsilon,x):=(\varepsilon^{-d}\beta(\frac{\cdot}{\varepsilon})*\chi_\lambda)(x)$

$$\tilde{N}(\varepsilon,\lambda)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\tilde{\chi}_\lambda(\varepsilon,j)$$

而 $N(\lambda)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\chi_\lambda(j)$.

Step 2: 比较 $\tilde{N}$ 与 N. ~~估计~~

if $|x|\notin[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$

由 β 支撑于 $B(0,\frac{1}{2})$ 中，所以 $\tilde{\chi}_\lambda$ 与 χ_λ 支集至多差 ε i.e. $\chi_\lambda(x)=\tilde{\chi}_\lambda(\varepsilon,x)$

$\Longrightarrow$ $\tilde{N}(\varepsilon,\lambda-\varepsilon)\leq N(\lambda)\leq \tilde{N}(\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$ 于是只用估计 $\tilde{N}$.

Step 3 Poisson求和公式 (Thm 2.4.1) 表明:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}f(j)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}(j)$$

令 $f=\tilde{\chi}_\lambda(\varepsilon,x)$，则 $\hat{f}=\hat{\chi}_\lambda(\xi)\hat{\beta}(\varepsilon\xi)$.

代入Poisson求和公式有:

$$\tilde{N}(\varepsilon,\lambda)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\hat{\chi}_\lambda(j)\hat{\beta}(\varepsilon j)$$

$$=\lambda^d\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\hat{\chi}_1(\lambda j)\hat{\beta}(\varepsilon j)$$

<u>Recall</u>: $\hat{f}(0)=\int f e^{-2\pi i 0\cdot x}dx=\int f$. 所以，单独拿出 $j=0\in\mathbb{Z}^d$ 那项.

得: $\tilde{N}(\varepsilon,\lambda)=\mathrm{Vol}(B)\lambda^d+\lambda^d\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\hat{\chi}_1(\lambda j)\hat{\beta}(\varepsilon j)$

由 cor 2.5.3 $\hat{\chi}_1(\xi)\lesssim(1+|\xi|)^{-\frac{d+1}{2}}$

$\left\{\beta\in C_0^\infty\Rightarrow|\hat{\beta}(\xi)|\lesssim(1+|\xi|)^{-N}\quad\forall N\right.$

故 $\tilde{N}(\varepsilon\lambda) \lesssim Vol(B) + \lambda^d \cdot \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus 0} (1+|\lambda j|)^{-\frac{d+1}{2}} (1+|\varepsilon j|)^{-N}$

用黎曼积分 之X

$$\approx \int_{|\xi|\geq 1} (1+\lambda|\xi|)^{-\frac{d+1}{2}} (1+|\varepsilon\xi|)^{-N} d\xi$$

$$= \int_{1\leq|\xi|\leq\frac{1}{\varepsilon}} + \int_{|\xi|>\frac{1}{\varepsilon}}$$

$\downarrow$ 此时 $\varepsilon\xi$ 小. 只看前一项.

$\downarrow$ 此时. $|\xi| \gtrsim \frac{1}{\varepsilon}$ 直接代入. ~~第一项放成~~ 1.

$$\lesssim \lambda^{-\frac{d+1}{2}} \varepsilon^{-\frac{d-1}{2}} + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \varepsilon^{-d}.$$

~~取 ε~~

$$\lesssim \lambda^{-\frac{d+1}{2}} \varepsilon^{-\frac{d-1}{2}}.$$

$\therefore \tilde{N}(\varepsilon,\lambda) = Vol(B)\lambda^d + O(\lambda^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon^{-\frac{d-1}{2}})$.

λ 换成 $\lambda\pm\varepsilon$. ~~而 $(\lambda\pm\varepsilon)^{\frac{d-1}{2}} = \lambda^{\frac{d-1}{2}} + O(\varepsilon\lambda^{\frac{d-1}{2}-1})$~~.

而 $(\lambda\pm\varepsilon)^d = \lambda^d + O(\varepsilon\lambda^{d-1})$

$\therefore N(\lambda) = Vol(B)\lambda^d + O(\varepsilon\lambda^{d-1} + \lambda^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon^{-\frac{d-1}{2}})$

取 $\varepsilon = \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}}$ 使上述两项相等. 仅有余项 $= O(\lambda^{d-2+\frac{2}{d+1}})$

$\square$