§1 Hardy-Littlewood 极大函数

§1.1 逼近恒等的点态收敛

Def: 设 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int \phi = 1$. $\forall \varepsilon>0$ 令 $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. 则称 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族"逼近恒等".

之所以称 $\{\phi_\varepsilon\}$ 为"逼近恒等", 是因为用 ϕ 与某个 L^1 函数 f 卷积后, $\varepsilon\to 0$ 时, $\phi_\varepsilon * f$ 会以某种方式趋近于 f. 在 PDE 中, 我们常取 $\phi(x) = C\exp(\frac{1}{|x|^2-1})\chi_{\{|x|\le 1\}}$, $\phi_\varepsilon * f$ (f 为某个 L^p or Sobolev 函数) 会是光滑函数(卷积的性质, 因此 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$), 且 $\phi_\varepsilon * f \longrightarrow f$ in L^p 和 a.e.

从而达到 用"光滑函数"逼近"粗糙函数"的 ~~本质~~ 目的. 与粗糙函数本身逼近的

上面的 mollifier 例子中, $\phi_\varepsilon * f \to f$ a.e 是用到了 ϕ ~~基~~本身的光滑性, 但对一般的 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 并不一定有 a.e. 收敛, 只有 L^p 收敛.

Thm 1.1.1 设 $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族~~逼近~~恒等 则 $\|\phi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$ $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$

证明:

$$(\phi_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\phi_\varepsilon(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\phi(\tfrac{y}{\varepsilon})\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(y)\,dy$$

$$\overset{z=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\varepsilon z)\phi(z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z)\left(f(x-\varepsilon z) - f(x)\right)dz$$

由 L^p ($1\le p<\infty$) 范数平移连续性得,

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall |h|<\delta$, $\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$

又由 $\int\phi = 1$, $\phi \in L^1$ 知

For fixed $\delta>0$, $\exists t$ 充分小, $\displaystyle\int_{|z|\ge\frac{\delta}{t}} |\phi(z)|\,dz \le \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}$

$$\therefore \|\phi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \le \int_{|z|<\frac{\delta}{t}} |\phi(z)|\cdot\|f(\cdot+\varepsilon z) - f(\cdot)\|_{L^p}\,dz$$

$$+ 2\|f\|_p \int_{|y|\ge\frac{\delta}{t}} |\phi(y)|\,dy$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

从而 $\exists$ 子列 $\varepsilon_k \to 0$ s.t. $\varphi_{\varepsilon_k} * f \to f$ a.e. 但何时能保证序列收敛？

这需要对 $\varphi_\varepsilon * f$ 的上界有一个一致的(与ε无关的)控制，而这个控制可以用 Hardy-Littlewood 极大函数完成.

Def：设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，定义其 Hardy-Littlewood 极大函数为

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \sup_{r>0} \frac{1}{V_n r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)|dy \quad \#$$

~~撤去 sup 看一些~~ 此时 我们观察到 $K(x) = \frac{1}{V_n}\chi_{B(0,1)}(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $\int K(x) = 1$

于是 $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K(\frac{x}{\varepsilon})$ 也是一族逼近恒等

$$\Rightarrow Mf(x) = \sup_{\varepsilon>0} (|f| * K_\varepsilon)(x)$$

此时 我们猜测，若卷积核 φ 都是径向且递减的 L^1 函数，H-L 极大函数 Mf 也可以一致地控制住 $(f * \varphi_\varepsilon)(x)$

Thm 1.1.2 设 $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 φ 径向，非负，递减，则 $\sup_{\varepsilon>0} |\varphi_\varepsilon * f(x)| \le \|\varphi\|_{L^1} Mf(x)$

证明：只证 $\varphi(x)$ 是简单函数的情形，对一般满足如上条件的 φ，我们可以找一列简单函数 $\varphi^n \nearrow \varphi$ a.e. 从而可用 φ^n 的结论逼近 φ 的结论

具体细节略去.

设 $\varphi(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{r_j}}(x)$，$a_j > 0$

则 $(\varphi * f)(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{r_j}} * f(x) = \sum_j a_j |B_{r_j}| \left(\frac{1}{|B_{r_j}|}\chi_{B_{r_j}} * f\right)(x)$

$$\le \left(\sum_j a_j |B_{r_j}|\right) Mf(x) = \|\varphi\|_{L^1} Mf(x)$$

$\square$

由此定理，再结合下面将要证明的 H-L 极大函数 L^p 有界性定理即得结论.

~~§1.2 L^p 有界性~~

下面引进一个概念（强 $L^p \to L^q$ / 弱 $L^p \to L^q$ 有界）

Def：设 (X,μ)，(Y,ν) 是测度空间，$T: L^p(X,\mu) \to \{f: Y \to \mathbb{C} \mid f \text{ 是 } \nu\text{-可测}\}$

称 T 是弱 (p,q) 有界的 $(q<\infty)$，若 $\nu\{y \in Y \mid |Tf(y)| > \lambda\} \le \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$

T 是强 (p,q) 有界的 若 $\|Tf\|_q \le C\|f\|_p$

弱 (p,∞) 有界的定义与强 (p,∞) 一样.

Exercise: 证明: 强(p,q) → 弱(p,q) ~~(Hint: Chebys~~

~~Then~~ 借此概念, 我们可以引入如下定理

Thm 1.1.3: 设 $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 $L^p(X,\mu)$ 上的一族线性算子. 令 $T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|$
若 T^* 是弱(p,q)的, 则 $\mathcal{F}=\{f\in L^p(X,\mu)\,|\,\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} T_\varepsilon f(x)=f(x)\ \text{a.e.}\}$ (for some ε_0) 是 $L^p(X,\mu)$ 中的闭集.

先假设 Thm 1.1.3 正确, 此时取 $(X,\mu)=(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^d)$. $T_\varepsilon f(x)=(\varphi_\varepsilon * f)(x)$. 易知:
$\forall f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. $T_\varepsilon f\to f$ a.e. as $\varepsilon\to 0^+$ 而 $C_c^\infty \overset{\text{dense}}{\subseteq} L^p$ $(1\le p<\infty)$
故, 我们只用证 ~~T^*是~~ H-L 极大函数是弱(p,q)的, 便由 Thm 1.1.2 得 T^* 是
弱(p,q)的. 再由 Thm 1.1.3 知 $\underbrace{C_c^\infty \subseteq \mathcal{F}}_{\text{若}\varphi\text{满足1.1.2的条件}} \subseteq L^p$, $\underbrace{\Rightarrow \overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}=L^p}_{\mathcal{F}\text{闭}}$
$\Rightarrow \forall f\in L^p$. $\varphi_\varepsilon * f\to f$ a.e. as $\varepsilon\to 0^+$

于是我们现在的任务有:
① 证明 Thm 1.1.3
② 证明 H-L 极大函数弱(p,q).

<u>Proof of thm 1.1.3</u>: 设 $f_n\in\mathcal{F}$ $f_n\to f$ in $L^p(X,\mu)$. 则 $T f_n(x)\to f_n(x)$ a.e.

于是 $\mu(\{x\in X\,|\,\limsup_{\varepsilon\to\varepsilon_0}|T_\varepsilon f(x)-f(x)|>\alpha\})$ ← 因 $T_\varepsilon f_n\to f_n$ a.e.

$\le \mu(\{x\in X\,|\,\limsup_{\varepsilon\to\varepsilon_0}|T_\varepsilon(f-f_n)(x)-(f-f_n)(x)|>\alpha\})$

$\le \mu\{x\in X\,|\,T^*(f-f_n)(x)>\frac{\alpha}{2}\}+\mu\{x\in X\,|\,(f-f_n)(x)>\frac{\alpha}{2}\}$

$\le \underbrace{\left(\frac{2c}{\lambda}\|f-f_n\|_p\right)^q}_{T^*\text{弱(p,q)}}+\underbrace{\left(\frac{2}{\lambda}\|f_n-f\|_p\right)^p}_{\text{Chebyshev不等式}}\to 0$ as $n\to\infty$

$\mu\{x\in X\,|\,\limsup_{\varepsilon\to\varepsilon_0}|T_\varepsilon f(x)-f(x)|>0\}\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu\{x\in X\,|\,\limsup_{\varepsilon\to\varepsilon_0}|T_\varepsilon f(x)-f(x)|>\frac{1}{k}\}$

$=0.$

□

§1.2 Marcinkiewicz 插值定理

~~Hardy-L~~ 现在我们~~只用~~证明Hardy-Littlewood 极大函数是弱(1,1) 强(p,p) $(1<p\le\infty)$

若证得以上结论 则~~证~~我们可以~~证明~~得出

cor 1.2.1: 设 $\phi\in L^1(\mathbb{R}^d)$，$\phi$ 有径向,非负递减的 L^1 控制函数 ψ，$f\in L^p$ $(1\le p<\infty)$ 则

~~lim~~ $\phi_\varepsilon * f(x) \to f(x)\cdot\int\phi$ a.e. as $\varepsilon\to 0^+$

□

Thm 1.2.1 Mf 弱(1,1), 强(p,p) $1<p\le\infty$

先证弱(1,1), 这需要用到Vitali覆盖引理

Lemma 1.2.1 设 $\{B_1,\dots,B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中有限个开球, 则存在子集 $\{B_{j_1},\dots,B_{j_l}\}$

其中任两球不交 且 $\sum_{r=1}^{l}|B_{j_r}|\ge\frac{1}{3^d}|\bigcup_{i=1}^{k}B_i|$

证明: 不妨设 $|B_1|\ge\dots\ge|B_k|$.

令 $j_1=1$. ~~在除去 B_{j_1} 之外的球中 设~~ j_2

下面归纳构造 $\{B_{j_1},\dots,B_{j_l}\}$. $j_1=1$ 也已构造 设 $j_1,j_2,\dots,j_{l-1}$ 已经选取好了,

现在 $j_l=\inf\{s>j_{l-1}\mid B_s\cap\bigcup_{m=1}^{l-1}B_{j_m}=\phi\}$

由于总共只有有限个球 所以如此操作必在有限步内停止.

现在注意到, 若 $m\notin\{j_1,\dots,j_l\}$ 则 B_m 必与某个 B_{j_r} 相交 $(j_r<m)$ 这样 $3B_r\supset B_m$

令它大的

于是 $|\bigcup_{i=1}^{k}B_i|\le|\bigcup_{r=1}^{l}3B_{j_r}|\le 3^d\sum_{r=1}^{l}|B_{j_r}|$

□

~~现在我们可以证明 $|\{x\in\mathbb{R}^d\mid Mf(x)>\alpha\}|\le\frac{3^d}{\alpha}\int_{\{Mf>\alpha\}}|f(y)|dy\le\frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1}$ (从而弱(1,1))~~

~~首先 令 $E_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^d\mid Mf(x)>\alpha\}$ 则 E_α 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开集.~~

~~事实上 $\forall x\in E_\alpha$ $\exists$ 开球 $B_x\ni x$ s.t. $⨍_{B_x}|f|>\alpha$.~~

在证明弱(1,1)时, 为了计算上的方便, 我们令 $\tilde{M}f(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy$

Exercise: $\tilde{M}f$ 弱(p,p), 强(p,p) 均与M等价

Claim: ~~$\tilde{M}f$~~ $|\{Mf>\alpha\}|\le\frac{3^d}{\alpha}\int_{\{Mf>\alpha\}}|f(y)|dy\le\frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1}$

首先 $E_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^d\mid Mf(x)>\alpha\}$ 是开集.

事实上 $\forall x\in E_\alpha$ $\exists B_x\ni x$ s.t. $⨍_{B_x}|f|>\alpha$ 从而 B_x 中任一点~~处~~处的 $\tilde{M}f>\alpha$

$\Rightarrow B_x\subseteq E_\alpha$ $\Rightarrow E_\alpha$ 开.

设K是E_α的紧子集 $\forall x\in K$, $\exists B_x\ni x$, $\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(y)|dy>\alpha$.

由K紧知. K可由$\{B_x\}_{x\in K}$有限覆盖. 设$K\subset\{B_{x_1}\dots B_{x_k}\}$

由Vitali覆盖引理知,

$$|K|\le\left|\bigcup_{i=1}^{k}B_{x_i}\right|\le 3^d\sum_{j=1}^{l}|B_{x_{i_j}}|\le\frac{3^d}{\alpha}\int_{B_{x_{i_j}}}|f(y)|dy\le\frac{3^d}{\alpha}\int_{E_\alpha}|f(y)|dy$$

对全体$K\subset\subset E_\alpha$取sup即得(因Lebesgue测度内正则) $\Rightarrow$弱(1.1)得证

显见, Mf是(∞,∞)型的, 于是由下面的Marcinkiewicz插值定理即可证明

M强(p.p) $1<p<\infty$

Def 次线性

Thm1.2.2 (Marcinkiewicz插值)

设(X,μ), (Y,ν)是两个测度空间, $1\le p_0<p_1\le\infty$, 设$T: L^{p_0}+L^{p_1}(X,\mu)$ $\to\{f: Y\to\mathbb{C}\,|\,f$可测$\}$

是弱(p_0,p_0), 弱(p_1,p_1)的次线性算子, 则$\forall p_0<p<p_1$.

T是强(p,p)的

证明. 给定$f\in L^p$. $\forall\alpha>0$. f可作分解 $f=f_0+f_1$, $f_0=f\chi_{\{|f(x)|>c\alpha\}}$

则$f_0\in L^{p_0}(\mu)$, 且$f_1\in L^{p_1}(\mu)$. $f_1=f\chi_{\{|f(x)|\le c\alpha\}}$

$|Tf(x)|\le|Tf_0(x)|+|Tf_1(x)|$ 其中c是待定的正常数.

从而 $\mu\{x:|Tf(x)|>\alpha\}\le\mu\{x:|Tf_0(x)|>\frac{\alpha}{2}\}+\mu\{x:|Tf_1(x)|>\frac{\alpha}{2}\}$

(1) 若$p_1=\infty$. 则设 $\|Tf\|_{L^\infty}\le A_1\|f\|_{L^\infty}$ $\forall f\in L^\infty$

此时 取$c=\frac{1}{2A_1}$ 则$\mu\{x:|Tf_1(x)|>\frac{\alpha}{2}\}=0$. (因ess sup$|Tf_1(x)|\le A_1\|f_1\|_\infty\le A_1\cdot\frac{\alpha}{2A_1}=\frac{\alpha}{2}$

而$\mu\{x:|Tf_0(x)|>\frac{\alpha}{2}\}\le\left(\frac{2A_0}{\alpha}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}$

$$\therefore\|Tf\|_p^p=\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mu\{x:|Tf(x)|>\alpha\}d\alpha$$

$$\le\int_0^\infty p\alpha^{p-1}\frac{2^{p_0}A_0^{p_0}}{\alpha^{p_0}}\|f_0\|_{p_0}^{p_0}d\alpha$$

$$=\int_0^\infty p\alpha^{p_0-1-p_0}\cdot(2A_0)^{p_0}\int_{\{|f(x)|>c\alpha\}}|f(x)|^{p_0}d\mu\,d\alpha$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}p(2A_0)^{p_0}\int_X|f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/c}\alpha^{p-1-p_0}d\alpha\,d\mu$$

$$=\frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}\cdot(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p.$$

② $p_1<\infty$ 则 $\mu\{x:|Tf_1(x)|>\frac{\alpha}{2}\}\le\left(\frac{2A_1}{\alpha}\|f_1\|_{p_1}\right)^{p_1}$ $i=0,1$

$$\|Tf\|_p^p\le\int_0^\infty p\alpha^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}|f(x)|^{p_0}\,d\mu\,d\alpha$$

$$+\int_0^\infty p\alpha^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_{\{x:|f(x)|>c\alpha\}}|f(x)|^{p_1}\,d\mu\,d\alpha$$

$$=\left(\frac{p}{p-p_0}\cdot\frac{(2A_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}}+\frac{p}{p-p_1}\cdot\frac{(2A_1)^{p_1}}{c^{p-p_1}}\right)\|f\|_p^p$$

□

于是我们证明了Hardy-Littlewood极大算子是强(p,p) $(1<p\le\infty)$，弱$(1,1)$的次线性算子.

□

①直接到Lebesgue微分定理
②不强L^1有界的例
③$L\log L$有界

§1.3 极大函数与A_p权

设μ为$\mathbb{R}^d$上的正值Borel测度，我们可以类似定义

$$(M_\mu f)(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|\,dy,\quad\forall f\in L^1_{loc}(\mu).$$

问：为什么要把Lebesgue测度换成一般的Borel测度讨论？

这是因为我们接下来要讨论含权的极大函数，设权函数$w(x)\ge0$，则$d\mu=w(x)dx$ 也即定义了一个$\mathbb{R}^d$上的正值Borel测度. 在实际应用中 $w(x)$常取作$|x|^a$，以得到奇异积分 or Sobolev估计.

接下来，我们希望加权极大函数仍有L^p有界性. 从之前的证明，我们知道它依赖于弱$(1,1)$. 而要成立弱$(1,1)$，我们必须对测度μ作出如下要求：$\mu(2B)\le A\,\mu(B)$ $\forall$球$B\subseteq\mathbb{R}^d$. 在此条件下.

Prop 1.3.1 设μ满足如上条件：则

$$\mu\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,(M_\mu f)(x)>\alpha\}\le C_A\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mu)}\qquad\forall\alpha>0$$

$$\|M_\mu f\|_{L^p(\mu)}\le C_{p,A}\|f\|_{L^p(\mu)}\qquad 1<p\le\infty.$$

证明：留作习题

□

设 $w \geq 0$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数，我们希望：$\forall 1<p<\infty$，$\forall f \in L^p(w)$，$\int_{\mathbb{R}^d} (Mf)^p w(x)dx \lesssim_p \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p w(x)dx$

即使无法做到强 L^p，那么也要求弱 L^p：$w\{Mf > \alpha\} \lesssim_p \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p w(x)dx$

其中 $w(E) = \int_E w(x)dx$。

我们假设带权弱 L^p 对 $1 \leq p < \infty$ 成立，设 B 为任一球，$f \geq 0$，且 $f(B) := \int_B f(y)dy > 0$。

令 $\alpha \in (0, \frac{f(B)}{|B|})$，则 $B \subseteq \{x \mid M(f\chi_B)(x) > \alpha\}$

$\Rightarrow w(B) \leq w\{x \mid M(f\chi_B)(x) > \alpha\}$

$\leq C_p \cdot \frac{1}{\alpha^p} \int_B |f(y)|^p \cancel{dy}\, w(y)dy$

$\Rightarrow \quad w(B)\left(\frac{f(B)}{|B|}\right)^p \leq C_p \int_B |f(y)|^p w(y)dy$

令 $f = \chi_E$，$\forall E$ 为 B 的可测子集，则 $w(B)\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \leq C_p\, w(E)$ $\int_E w(x)dx$

Exercise：从上式证明：

$E = \{w(x) = 0\}$

① 要么 $w > 0$ a.e.，要么 $w = 0$ a.e.

② 要么 $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$，要么 $w = \infty$ a.e.

Pf：① 令 $E = \{x \in \mathbb{R}^d \mid w(x) = 0\}$，则 $w(E) = \int_E w(y)dy \equiv 0$

~~若 $w=0$ a.e.~~ ∴ 左边必 $=0$。

$E = \{w(x) < \infty\}$

要么：$\forall$ 球 B，$w(B) = 0 \Rightarrow w = 0$ a.e.

要么 $|E| = 0 \Rightarrow w > 0$ a.e.

$\int_N$

② 若 $\forall B$，$w(B) < \infty$，则 $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\int_B w(x)dx \frac{|E|}{|B|}$ $= \infty$

否则 $\exists B$ $w(B) = \infty$ 从而对包含 B 的更大球成立，

于是 $\forall$ 可测集 S（至少是有界集）$\exists$ 包含 B 的大球 B'，$S \subseteq B'$，

$w(E) = \int_E w(x)$

$\rightarrow \quad w(S) = \infty \quad \rightarrow \quad w = \infty$ a.e.

□

为了使含权极大函数做到强/弱 L^p 估计，我们要对 w 加些限制条件，这些条件称作 A_p 条件，它是由 $w(B)\left(\frac{f(B)}{|B|}\right)^p \le C(p)\int_B |f(y)|^p w(y)dy$ 得到，而且我们将会看到 这个条件 $\Leftrightarrow$ Mf 含权弱 L^p 估计。

~~Thm 1.3.1~~

~~Def. 称 w 满足 A_p 条件（记作 $w\in A_p$）若~~

~~① $Mw \le C(1)w$ a.e.~~

Prop 1.3.2：若 $w\{Mf>\lambda\} \le C(p)\lambda^{-p}\int |f(x)|^p dx$ 对 $p=1$ 成立，则 $Mw \le C(1)w$ a.e.

若上式对 $1<p<\infty$ 成立，则 $⨍_B w\left(⨍_B w^{1-p'}\right)^{p-1} \le C(p)$ $\forall$ 球 $B\subseteq\mathbb{R}^d$

Rmk：$Mw\le C(1)w$ a.e. 称作 A_1 条件

$⨍_B w\left(⨍_B w^{1-p'}\right)^{p-1} \le C(p)$ 称作 A_p 条件

~~Thm 1.3.1~~

反之：若 $w\in A_p$ $(1\le p<\infty)$ 则 $w\{Mf>\lambda\} \le C(p)\lambda^{-p}\int |f(x)|^p dx$ $1\le p<\infty$.

从而 $w\in A_p$ 与 Mf 含权 w 弱 L^p 有界等价.

Proof of 1.3.2：

由于 wdx 是 doubling measure 那么仍有 Lebesgue 微分定理成立.

设 x 为 wdx 的一个 Lebesgue 点.

在 $w(B)\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \le C(p)w(E)$ 中 取 $p=1$. ~~$E\ni x\in B$~~

便有 $\frac{w(B)}{|B|} \le C(1)\frac{w(E)}{|E|}$ ~~$\forall B\ni x$~~

取 $E=B(x,r)$ $r\to 0$ 由 lebesgue 微分定理

$\frac{w(B)}{|B|} \le C(1)w(x)$ ~~$\forall B\ni x$~~ a.e. $x\in B$.

~~这可以得出 M~~ 这与 $Mw(x)\le C(1)w(x)$ a.e. 等价.

首先 $Mw(x)\le C(1)w(x) \Rightarrow \frac{w(B)}{|B|}\le C(1)w(x)$ 是显然的

反之 若 $Mw(x)>Cw(x)$，那么 $\exists$ 一个包含 x 的小球 B，$\frac{w(B)}{|B|}>Cw(x)$. x 含于 B 的一个充分小邻

$\exists x$ 全测度的 把 B 换成一个包含 B 的"有理球"也对

而后者为 $\mathbb{R}^d$ 的可数子集

所以使 $\frac{w(B)}{|B|}>Cw(x)$ 的 x 零测.

若 $1<p<\infty$ 则由 $w(B)\left(\frac{f(B)}{|B|}\right)^p \le C(p)\int_B |f(y)|^p w(y)dy$

特令 $f=w^{1-p'}\chi_B$ 便有 $w(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^p \le C(p)\int_B w^{1-p'}$

$\Rightarrow ⨍_B w\left(⨍_B w^{1-p'}\right)^{p-1} \le C(p)$ $\forall B\subseteq\mathbb{R}^d$ □

追真现2

Prop 1.3.3.

(1) $A_p \subset A_q$, if $1 \le p < q$

(2) $w \in A_p \iff w^{1-p'} \in A_{p'}$

(3). $w_0\, w_1 \in A_1 \Rightarrow w_0 w_1^{1-p} \in A_p$

证明: (1). 若 $p=1$ 则

$$\cancel{\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \le \sup_{x\in B} w(x)^{(1-q')(q-1)} = \sup_{x\in B} w(x)^{-1}}$$

$$\cancel{= \left(\inf_{x\in B} \frac{1}{w(x)}\right)^{-1}}$$

要证 $\fint_B w \left(\fint_B w^{1-p'}\right)^{q-1} \le C(q)$

$$\cancel{\le C\left(\frac{w(B)}{|B|}\right)^{-1}}.$$

现有 $Mw \le C(1) w$ 即 $\forall B \ni x$ $\fint_B w \le C(1) w(x)$ $\forall B \ni x$

$q' = \frac{q}{q-1}$

$1-q' = \frac{-1}{q-1}$

$1-\frac{q}{q-1} = \frac{q-1}{q-1}$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-q'}\right)^{q-1} \le \sup_{x\in B} w^{(1-q')(q-1)} = \sup_{x\in B} w^{-1}$$

$$= \left(\inf_{x\in B} w(x)\right)^{-1}$$

$$\le C(1) \frac{|B|}{w(B)}$$

$$\therefore \fint_B w \left(\frac{1}{|B|}\int w^{1-q'}\right)^{q-1}$$

$$\le C(1) \cdot \int \frac{|B|}{w(B)} \frac{1}{|B|}\int w\, dx \le C(1).$$

若 $p>1$ $\left(\fint_B w^{1-q'}\right)^{q-1} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\frac{1}{q-1}} dx\right)^{q-1}$

$$\cancel{= |B|^{1-q}\left(\int_B (w^{-1})^{\frac{1}{q-1}} dx\right)^{q-1}}$$

$1-p' = \frac{-1}{p-1}$

$$\cancel{= |B|^{1-q}} = |B|^{1-q}\left(\left(\int_B w^{-\frac{1}{q-1}\cdot\frac{q-1}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{q-1}}\right)^{q-1} \cdot \left(\int_B 1^{\frac{q-1}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q-1}}$$

$$= |B|^{1-q} |B|^{q-p} \left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}$$

$1-\frac{1}{q-1} - \frac{q-p}{q-1}$

$=$

$$= \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1}.$$ ✓

(2) $w^{1-p'}$ 的 $A_{p'}$ 条件 $\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)^{p'-1} \le C$

两边 $p-1$ 次方即可

(3). 要证 $\left(\frac{1}{|B|}\int_B w_0 w_1^{1-p}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w_0^{1-p'} w_1\right)^{p'-1} \le C.$ $\quad w_0 \cdot \left(\frac{1}{w_1}\right)^{p-1}$

由 A_1 条件 $\forall x\in Q.\quad i=0,1$

$\frac{1}{w_i(x)} \le \sup_{x\in B}\frac{1}{w_i(x)} = (\inf w_i(x))^{-1} \le C\left(\frac{w_i(B)}{|B|}\right)^{-1} = C\frac{|B|}{w_i(B)}$

代入上式

左 $\le \left(\frac{1}{|B|}\int_B C^{p-1} w_0 \frac{|B|^{p-1}}{w_1(B)^{p-1}}\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{C^{p'-1}|B|^{p'-1}}{w_0(B)^{p'-1}} w_1\right)^{p'-1}$

$\cancel{\lesssim \frac{|B|^{p-1}}{w_1(B)^{p-1}} \frac{1}{|B|} w_0(B) \cdot |B|^{(p'-1)(p'-2)} w_1(B)^{p'-1} \frac{1}{w_0(B)^{(p'-1)p'}}} = 1$

$|B|$ $\cancel{p-2+(p'-1)(p'-2)} = p-2+\left(\frac{1}{p-1}\right)\left(\frac{2-p}{p-1}\right)$ $\quad p-2p+2 \quad p'-1=\frac{1}{p-1}$

$\cancel{p'-1=\frac{1}{p-1}}$

$\lesssim \frac{1}{|B|} w_0(B) \frac{|B|^{p-1}}{w_1(B)^{p-1}}\left(\frac{w_1(B)}{|B|}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{|B|}{w_0(B)}\right) \lesssim 1$ $\quad \frac{w_0(B)}{|B|}\left(\cancel{\frac{|B|}{w_1(B)}}\right)^{p-1}$

$\square$ $\quad \frac{1}{|B|^{p'-1}} w_1(B)^{p'-1}\left(\frac{|B|}{w_0(B)}\right)^{\cancel{p'-1}\ 2}$

$(p'-p)(p-1) =$

特别 $p=2$. A_2 条件为 $\fint_B w \fint_B \frac{1}{w} \le C \quad \forall B\subseteq\mathbb{R}^d$

$\square$

为了证明 thm1.3.1. 我们需要引入如下技巧: Calderón-Zygmund 分解, 其思想与概率论中的"停时"类似.

Lemma 1.3.1 (Calderón-Zygmund) 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. $\lambda>0$. 则 f 可以分解为 $f=g+b$, 满足

① $|g(x)|\le\lambda$.

② $b=\sum_{\mathcal{B}=\{Q\}}\chi_Q f$.

③ $\mathcal{B}=\{Q\}$ 是不交的方体 且 $\lambda<\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|\le 2^d\lambda$

④ $\left|\bigcup_{Q\in\mathcal{B}}Q\right| < \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$

证明：$\forall l\in\mathbb{Z}$ 令 D_l 是如下二进方体的集合

$$D_l=\left\{\prod_{i=1}^{d}[2^l m_i,2^l(m_i+1))\;\middle|\; m_1\cdots m_d\in\mathbb{Z}\right\}$$

于是：若 $Q\in D_l$. $Q'\in D_l$ 则 $Q\cap Q'=\phi$ or $Q\subset Q'$ or $Q'\subset Q$

也就是说：任2个二进方体要么不交，要么有包含关系

设 l_0 充分大 s.t. $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|dx\le\lambda \quad \forall Q\in D_{l_0}$

对每个 $Q\in D_{l_0}$，考虑其子方体，即长为 2^{l_0-1} 的方体(共 2^d 个)(由Q分割而来的)，任取其中一个 Q'，

$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|dx\le\lambda$

or $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)|dx>\lambda$

若 >，则把 Q' 归入B中，结束B的选取，否则接着割 Q'。

此时 $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f|dx\le\frac{2^d}{|Q|}\int_Q|f|dx\le 2^d\lambda$. 故 ③成立

若 ≤，接着割 Q'，不断重复此过程。

这样得到的 B 满足 ③.

且 $\left|\bigcup_B Q\right|\le\sum_B|Q|<\sum_B\frac{1}{\lambda}\int_Q|f(x)|dx\le\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx=\frac{\|f\|_1}{\lambda}$

设 $x_0\in F:=\mathbb{R}^d\setminus\bigcup_B\overline{Q}$ 则 $\exists Q_j\ni x_0 \downarrow x_0$ with $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx\le\lambda$

由Lebesgue微分定理，$|f(x_0)|\le\lambda$ a.e. $x_0\in F$

令 $g=f-\sum_{Q\in B}\chi_Q f$ 即有 $|g|\le\lambda$ a.e.

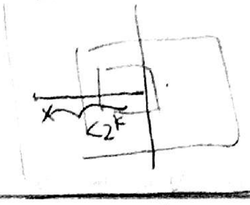
$\square$

λ称作C-Z分解的"高度"，从③可以看出，C-Z分解与H-L极大函数有着密切的关系

从③易见，我们有 $\{Mf>C(d)\lambda\}\supset\bigcup_{Q\in B}Q$

下面我们证明：把方体扩成边长为之前的2倍，便有反向的包含关系

Lemma 1.3.2: $\{x\in\mathbb{R}^d: Mf(x)>C(d)\lambda\}\subseteq\bigcup_{Q\in B}2Q$



证明：我们令 $M'f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r}|f(x-y)|dy$ 其中 $Q_r=[-r,r]^d$ ~~是以x为~~

易证 M, M' 相互控制，下面只用证 $\{x\in\mathbb{R}^d \mid M'f(x)>4^d\lambda\}\subseteq\bigcup_{B}2Q$

Fix $x\notin\bigcup 2Q$ 并设 $\tilde{Q}$ 是 以 x 为中心的方体，其边长记为 $l(\tilde{Q})$.

选取 $k\in\mathbb{Z}$ s.t. $2^{k-1}\le l(\tilde{Q})<2^k$ 于是 $\tilde{Q}$ 与 $m\le 2^d$ 个 D_k 中的方体相交

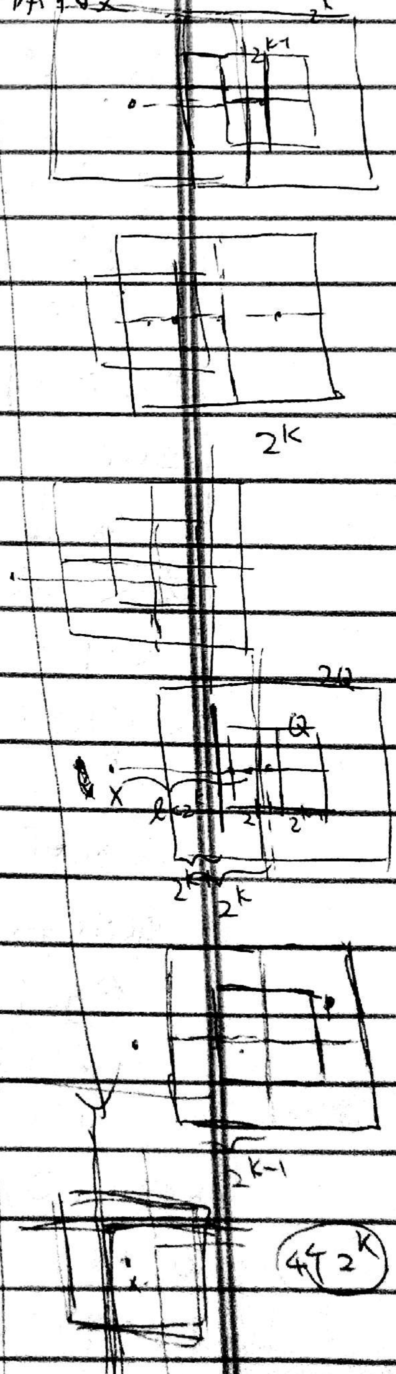
记它们为 $R_1,\dots,R_m$. 任一 R_i 不会包含于任一 $Q\in B$ 中 否则 $x\in\bigcup_B 2Q$

$\therefore \int_{R_i}|f|\le\lambda$

于是 $\frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f|=\frac{1}{|\tilde{Q}|}\sum_{i=1}^{m}\int_{\tilde{Q}\cap R_i}|f|$

$$\le\sum_{i=1}^{m}\frac{2^{kd}}{|\tilde{Q}|}\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i}|f|\le\frac{2^{kd}}{2^{(k-1)d}}m\lambda\le 4^d\lambda.$$

□



Lemma 1.3.3: ∀可测函数 $w\ge 0$, $1\le p<\infty$, $\exists C_p$ (仅与 p, d 有关)

s.t. $$\int_{\{Mf>\lambda\}}w(x)dx\le\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|(Mw)(x)dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}(Mf)^p(x)w(x)dx\le C_p\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p(Mw)(x)dx$$

$1<p<\infty$

证明：若第一个成立，只用再证 $\|Mf\|_{L^\infty(w(x))}\lesssim\|f\|_{L^\infty(Mw)}$，便可由 Marcinkiewicz 插值定理得到 $1<p<\infty$ 的估计式.

先证 L^∞ 估计. 若 $Mw(x)=0$ ∀x，则 $w=0$ a.e. ⇒ ✓

于是不妨 ∀x $Mw(x)>0$. 若 $a>\|f\|_{L^\infty(Mw)}$，则

$$\int_{\{x:|f(x)|>a\}}Mw(x)dx=Mw\{x:|f(x)|>a\}=0$$

$\Rightarrow |f(x)|\le a$ a.e. $(\mathcal{L}^d)$ $\Rightarrow Mf(x)\le a$ a.e.

$\Rightarrow \|Mf\|_{L^\infty(w)}\le a$.

令 $a\downarrow\|f\|_{L^\infty(Mw)}$ 即可

再证弱(1,1)估计 不妨设 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且非负（若 $f\in L^1(Mw)$，则 $f_n = f\chi_{B(0,n)} \nearrow f$，$f_n\in L^1$）

Fix $\lambda>0$，设 $\mathcal{B}=\{Q\}$ 是 f 在高度 λ 的 Calderón-Zygmund 分解

由上一引理，则 $\{x\in\mathbb{R}^d \mid M'f(x) > c(d)\lambda\} \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{B}} 2Q$

于是 $\int_{\{x: M'f(x)>4^d\lambda\}} w(x)\,dx$

$$\int_{\{Mf>c(d)\lambda\}} w(x)\,dx \overset{\text{lem}}{\leq} \sum_{Q\in\mathcal{B}} 2^d|Q|\fint_{2Q} w(x)\,dx$$

$$\overset{\text{C-Z分解}}{\leq} 2^d/\lambda \sum_{Q\in\mathcal{B}} \int_Q |f(y)| \left(\fint_{Q^*} w(x)\,dx\right) dy$$

$$\overset{Mw\text{定义}}{\leq} 2^d/\lambda \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, Mw(y)\,dy$$

w假设可积不变. □

下面可以证明 Thm 1.3.1：若 $w\in A_p$，则 $w\{Mf>\lambda\} \leq C(p)\frac{1}{\lambda^p}\int|f(x)|^p w(x)\,dx$

证明：$p=1$ 时 由 lem 1.3.3 + A_1 条件 $Mw\leq C(1)w$ a.e. 即得.

下设 $1<p<\infty$

先从 A_p 条件推出 $w(B)\left(\frac{f(B)}{|B|}\right)^p \leq C(p)\int_B |f(y)|^p w(y)\,dy$

实际上

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f|\right)^p = \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|w^{\frac{1}{p}}w^{-\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f|^p w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}\right)^{p-1}$$

$$\leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)|^p w(x)\,dx\right)\frac{|B|}{w(B)}$$

$$\Rightarrow w(B)\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f|\right)^p \leq C\int_B|f(x)|^p w(x)\,dx$$

再令 $f=\chi_E$，$E\subseteq B$ 仍有 $w(B)\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p \leq C(p)w(E)$

下面 Fix $f\in L^p(w(x))$ WLOG $f\geq 0$. $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$.

对 f 作高度为 $c(d)\lambda$ 的 Calderón-Zygmund 分解. $c(d)$ 是一个很小的常数

则 $\{Mf>\lambda\}\subset \bigcup_{Q\in\mathcal{B}} 2Q$

$$w\{Mf>\lambda\} \le \sum_{Q\in\mathcal{B}} w(Q^*) \le C\sum_{Q\in\mathcal{B}} w(Q) \overset{\text{刚刚证得.}}{\le} C\sum_{Q\in\mathcal{B}}\left(\frac{Q}{\alpha f(Q)}\right)^p \int_Q |f|^p w$$
$$\le C\lambda^{-p}\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p w$$

$\square$

Thm1.3.2:

下面我们证明：$1<p<\infty$ 时，$w\in A_p \Leftrightarrow M: L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$ 强有界

i.e. $\int_{\mathbb{R}^d}(Mf)^p(x)w(x)dx \le C(p)\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p w(x)dx$

~~正~~证明会采用两种方法，一个是根据Calderón-Zygmund分解引进"二进极大函数" M_d，另一个是对 $w\in A_p$ 引入"反向Hölder不等式"。我们先用二进极大函数证明 ~~A_p~~ 权强 L^p 有界

~~读~~

Def: $(M_d f)(x) := \sup_{\substack{Q\ni x \\ Q\text{为二进方体}}} \fint_Q |f(y)|dy$

Exercise: (1) $\{M_d f>\lambda\} = \bigcup_{Q\in\mathcal{B}} Q$. (2) M_d 弱(1,1).

(3). $\forall$ doubling measure μ, 有 $\mu\{Mf>C(d)\lambda\} \le C(d)\mu\{M_d f>\lambda\}$

Hint: (2) 将 $M_d f$ 写成 $(M_d f)(x) = \sup_k |E_k f(x)|$. $E_k f = \sum_{Q\in D_k}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f\right)\chi_Q(x)$.

令 $\Omega_k = \{x\in\mathbb{R}^d \mid E_k f(x)>\lambda$ 且 $\forall j<k$. $E_j f(x)\le\lambda\}$，于是 $\mathcal{B} = \bigsqcup_k \Omega_k$.

之后利用(1)即可

(3) 结合 Lemma 1.3.2.

Proof of Thm1.3.2: 由Exercise知，只用证：$\int_{\mathbb{R}^d}(M_d f)^p(x)w(x)dx \le C\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^p w(x)dx$.

~~$\forall k\in\mathbb{Z}$~~.

$\forall k\in\mathbb{Z}$. 对 f 作高度为 C_0^k ($C_0 := C_0(d)$ 是一个常数) 的Calderón-Zygmund分解，每次C-Z分解会得到"坏方体"，记作 $\mathcal{B}_k$，$\mathcal{B} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_k$.

$\forall Q\in\mathcal{B}$ 令 $E(Q) := Q - \bigcup_{\substack{Q'\in\mathcal{B}\\ Q'\subsetneq Q}} Q'$，即Q挖去Q中所有坏的真子方块

于是 $\int_{\mathbb{R}^d}(M_d f)^p(x)\,w(x)\,dx = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_{\{x\in\mathbb{R}^d \mid M_d f(x)>\lambda\}} w(x)\,dx.$

$$= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_{\bigcup_{Q\in\mathcal{B}}\{x\in Q \mid \fint_Q f>\lambda\}} w(x)\,dx$$

Exercise.

$$\overset{(*)}{=} \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_{\bigcup_{Q\in\mathcal{B}}\{x\in\mathbb{R}^d \mid \fint_Q f>\lambda\}} \chi_{E(Q)}(x)\,w(x)\,dx \underset{\text{Tonelli}}{\le} \sum_{Q\in\mathcal{B}}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{E(Q)}(x)\,w(x)\int_0^{\fint_Q f} p\lambda^{p-1}\,d\lambda\,dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \sum_{Q\in\mathcal{B}} w(E(Q))\cdot\left(\fint_Q|f|\right)^p \quad (*)$$

$(*)$ 我们 $E(Q)$ 是为了去掉其中含有 Q 的部分 ~~的~~，易知，若 Q 是中等高为 C_0^k 的 C-Z 分解中的某个坏方体，则 Q 可能在方体 Q' 成为 $C_0^{k'}$ $(k'>k)$ 的 C-Z 分解中某个坏方体（$Q'\subsetneq Q$ 表明 Q' 比 Q 坏）。Recall 坏方体定义。

由构造，只要 C_0 充分大，我们可以使 $|E(Q)|>\frac{|Q|}{2}$，$\forall Q\in\mathcal{B}$.（这样，一个坏方体变得更坏，就要缩小很多）

因此，若我们令 $\sigma=w^{1-p'}$，则 $\sigma\in A_{p'}$，可得 $\sigma(E(Q))>C_0\,\sigma(Q)$ for some C_0. ?

因 C_0^k 的坏选择 $C_0^k<\fint_Q|f|<2^dC_0^k$. 更高坏，那么 k' 应有 $2^dC_0^k<C_0^{k'}<\fint_{Q'}|f|<\ldots$ 而 C_0 大 $C_0^{k'}$ 越来越大趋近 ∞，而 f 在方体 Q' 上平均值 $>C_0^{k'}$ 的点更少。

$$\sigma(E(Q))=\int_{E(Q)}\sigma(x)\,dx$$

~~由~~ $\fint_B\sigma\fint_B\sigma^{(1-p')}\le C(p')$

$$\Rightarrow \sigma(B)\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^p\le C(p)\,\sigma(E).$$

E 取成 $E(Q)$，B 取成 Q 的外接球即可

$$\therefore (*)\text{ RHS } = C\sum_{Q\in\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q|f|\sigma^{-1}\,\sigma\,dx\right)^p\sigma(E(Q))\cdot\left(\frac{w(E(Q))}{\sigma(E(Q))}\right)\left(\frac{\sigma(Q)}{|Q|}\right)^p$$

为后面的估计做准备

$\sigma(E(Q))\sim\sigma(Q)$

$$\lesssim C\sum_{Q\in\mathcal{B}}\left(\qquad\right)^p\cdot\sigma(E(Q))\cdot\left(\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^p\cdot\left(\frac{\sigma(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}\right)$$

$w\in A_p$ 用 A_p 条件 $\lesssim C(p)$ $\frac{\sigma(Q)}{\sigma(E(Q))}\lesssim\ldots$

$$\lesssim C\int_{\mathbb{R}^d}\left(M_\sigma(f\sigma^{-1})\right)^p\sigma,$$

M_μ 相对于 L^p 有界

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\sigma^{1-p} = \int_{\mathbb{R}^d}|f|^p w$$

$\blacksquare$

下面再介绍~~未知~~倒向Hölder不等式，包含x的

为了方便，下面我们提到的A_p条件均是把"球"换成了"包含x的方体Q"

首先 $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \le \|f\|_{L^\infty(w)}$ 是显然的，因 $w(E)=0 \Longleftrightarrow \mathcal{L}^d(E)=0$.

*又若 $w\in A_q$，则 $M: L^q(w)\to L^{q,\infty}(w)$ 弱有界，再由Marcinkiewicz插值仅有 M 强(p,p) $\forall p>q$

而我们要证的结论表明 $p=q$ 也对.

Thm 1.3.1 证明：设 $w\in A_p$

$\boxed{\text{注意!}}$ 若 $\exists q\in(1,p)$，~~使~~使 $w\in A_q$，则由上述结论表明 $\forall p>q$ M 强(p,p)有界，再用 M 弱$(1,1)$和强(p,p)把$(1,q]$间的强有界性插值出来即可，那么我们只用证明这个q的存在性，而它由倒向Hölder不等式给出

$\square$

Thm 1.3.3 (倒向Hölder不等式). $w\in A_p$ for some $1\le p<\infty$ 则 $\exists C>0$，$\varepsilon>0$ 仅与p和(p)有关 s.t. $\forall$方体Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w$$

先假设Thm 1.3.3成立，那么我们有如下推论

Cor 1.3.1 (1) $A_p=\bigcup\limits_{1<q<p} A_q$ $\quad 1<p<\infty$

(2) 若 $w\in A_p$ $1\le p<\infty$，则 $\exists\varepsilon>0$，$w^{1+\varepsilon}\in A_p$

(3) 若 $w\in A_p$ $1\le p<\infty$，则 $\exists\delta>0$ s.t. 给定方体Q和它的一个可测子集S成立 $\dfrac{w(S)}{w(Q)}\le C\left(\dfrac{|S|}{|Q|}\right)^\delta$ 该式称作A_∞条件，记作 $w\in A_\infty$

Cor的证明：(1)若 $w\in A_p$，则 $w^{1-p'}\in A_{p'}$ $\therefore \exists\varepsilon>0$ 由倒向Hölder:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{(1-p')(1+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}$$

取指标q s.t. $q'-1=(p'-1)(1+\varepsilon)$，则 $q<p$ 且在上式两边乘以$\int_Q w$ 即得 $w\in A_q$

从而 $A_p=\bigcup\limits_{q<p}A_q$ (这样Thm 1.3.2中 q的存在性即得证)

(2) 若 $p>1$ 则我们选取 $\varepsilon>0$ 充分小使 w，$w^{1-p'}$ 均满足指数为$1+\varepsilon$的倒向Hölder不等式

若 $p=1$ 则 $\forall$方体Q a.e. $x\in Q$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\le C\left(\fint_Q w\right)^{1+\varepsilon}\le Cw(x)^{1+\varepsilon}$$

(3) Fix $S\subseteq Q$.

$$w(S)=\int_Q \chi_S w \le \left(\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}|S|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \underset{\text{Reverse Hölder}}{\le} Cw(Q)\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ 即可

$\square$

下面只证 reverse Hölder

Pf：这需要一个引理：

Lemma 1.3.4：$w\in A_p$ $1\le p<\infty$. 则 $\forall\alpha\in(0,1)$ $\exists\beta\in(0,1)$ s.t. 给定方体 Q 和可测子集 S with $|S|\le\alpha|Q|$. $w(S)\le\beta w(Q)$.

证明是显然的，留作习题 ($w(Q)\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p\le C_p w(S)$ 中 S 换成 $Q\setminus S$) #

Fix a cube Q. 记 $\frac{w(Q)}{|Q|}=\lambda_0$. $\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$

对 w 作高度为 $\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k$ 的 Calderón-Zygmund $\underbrace{\text{分解}}_{\text{待定常数}}$ 关于方体 Q.

$\forall\lambda_k$. 我们得到一列方体 $\mathcal{B}_k=\{Q_{k,j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

s.t. $w(x)\le\lambda_k$. $\forall x\notin\Omega_k=\bigcup Q_{k,j}$

$$\lambda_k<\frac{1}{|Q_{k,j}|}\int_{Q_{k,j}}w\le 2^d\lambda_k$$

则 $\Omega_{k+1}\subset\Omega_k$

Fix 某个 Q_{k,j_0} at height λ_k. 则 $Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1}=\bigsqcup_{\text{某些}i}Q_{k+1,i}$.

$$\Rightarrow|Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1}|=\sum_i|Q_{k+1,i}|$$

$$\le\frac{1}{\lambda_{k+1}}\sum_i\int_{Q_{k+1,i}}w\le\frac{1}{\lambda_k}\int_{Q_{k,j_0}}w\le\frac{2^d\lambda_k}{\lambda_{k+1}}|Q_{k,j_0}|$$

Fix $\alpha<1$. 选取 λ_k s.t. $\lambda_k/\lambda_{k+1}=\alpha\cdot 2^{-d}$ 从而 $\lambda_k=\left(\frac{2^d}{\alpha}\right)^k\frac{w(Q)}{|Q|}$.

$$\Rightarrow|Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1}|\le\alpha|Q_{k,j_0}|$$

则由 Lem 1.3.4 $\exists\beta<1$ $w(Q_{k,j_0}\cap\Omega_{k+1})\le\beta w(Q_{k,j_0})$

$$\Rightarrow w(\Omega_{k+1})\le\beta w(\Omega_k)\Leftarrow\ldots$$

$$\Rightarrow w(\Omega_k)\le\beta^k w(\Omega_0)$$

同理 $|\Omega_k|\le\alpha^k|\Omega_0|$ $\therefore\left|\bigcap_k\Omega_k\right|=0$

$$\Rightarrow\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}=\frac{1}{|Q|}\int_{Q\setminus\Omega_0}w^{1+\varepsilon}+\frac{1}{|Q|}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}}w^{1+\varepsilon}$$

$$\le\lambda_0^{\varepsilon}\frac{w(Q)}{|Q|}+\frac{1}{|Q|}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{k+1}^{\varepsilon}w(\Omega_k)=\lambda_0^{\varepsilon}\frac{w(Q)}{|Q|}+\frac{1}{|Q|}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^d}{\alpha}\right)^{\varepsilon(k+1)}\lambda_0^{\varepsilon}\beta^k w(\Omega_0)$$

再 Fix $\varepsilon>0$ s.t. $\left(\frac{2^d}{\alpha}\right)^{\varepsilon}\beta<\frac{1}{2}$ 即可

□

§1.4 A_p权的极大函数刻画与外插不等式

本节我们利用H-L极大函数来刻画A_p权条件，~~并~~并具体构造出权函数. 最后证明：若一个算子$L^r(w)$有界 且$w\in A_r$ 则 $\forall p$. $w\in A_p$ 且 ~~T~~ 该算子$L^p(w)$有界. 这个结果称作外插定理.

A_1权的极大函数刻画

Thm 1.4.1 (1) 设$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $Mf(x)<\infty$ a.e. 若 $0\le\delta<1$. 则 $w(x)=Mf(x)^\delta\in A_1$ 其A_1常数仅依赖于δ

(2) 反之，若$w\in A_1$. 则 $\exists f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. $\exists\delta<1$. $\exists$函数$K(x)$. 满足.

$K(x)$, $K^{-1}(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. $w(x)=K(x)Mf(x)^\delta$

证明：(1) 只用证：$\forall f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. w/ $Mf<\infty$ a.e. $\forall$方体Q ~~$\forall$ a.e. $x\in Q$~~ 成立下式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf)^\delta \le C\,Mf(x)^\delta \quad \text{a.e. } x\in Q.$$

Fix Q. 将f分解为 $f_1=\chi_{2Q}$ 与 $f_2=\chi_{(2Q)^c}$. $\Rightarrow Mf\le Mf_1+Mf_2$. $\forall x$

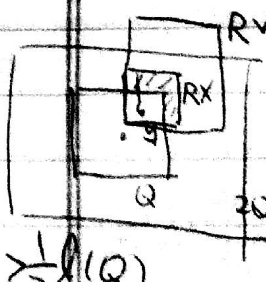
$$\Rightarrow \forall 0\le\delta<1.\quad (Mf(x))^\delta \le Mf_1(x)^\delta+Mf_2(x)^\delta$$

由M弱(1,1)，我们有：$\forall 0<\nu<1$. E为有限测度集、$\exists C(\nu)>0$ s.t.

$$\int_E |Mf(x)|^\nu dx \le C_{(\nu)}|E|^{1-\nu}\|f\|_{L^1}^\nu$$

事实上.
$$\int_E |Mf(x)|^\nu dx = \int_0^\infty \nu\lambda^{\nu-1}\left|\{x\in E \mid |Mf(x)|>\lambda\}\right| d\lambda$$
$$\le \int_0^\infty \nu\lambda^{\nu-1}\min\{|E|,\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}\}\,d\lambda.$$
$$=\nu\int_0^{C\|f\|_1/|E|}\lambda^{\nu-1}|E|\,d\lambda+\nu\int_{C\|f\|_1/|E|}^\infty C\lambda^{\nu-2}\|f\|_1\,d\lambda$$
$$\lesssim_\nu |E|^{1-\nu}\|f\|_1^\nu$$

现在
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Mf_1(x)|^\delta dx \le \frac{C_\delta}{|Q|}|Q|^{1-\delta}\|f\|_{L^1}^\delta \le C_\delta\Big(\frac{1}{|Q|}\int_{2Q} f\Big)^\delta.$$
$$\le 2^{d\delta}C_\delta Mf(x)^\delta$$



再估计Mf_2. 注意到 若$y\in Q$. R是方体 且$y\in R$. $\int_R|f_2|>0$. 则必有 $\ell(R)>\frac{1}{2}\ell(Q)$

于是 $\exists$常数C_d(仅依赖于d) s.t. 只要$x\in Q$. 就有$x\in C_dR$. 画个图看即可

$$\Rightarrow \frac{1}{|R|}\int_R|f_2| \le \frac{C_d^d}{|C_dR|}\int_{C_dR}|f_2|\le C_d^d Mf(x) \Rightarrow Mf_2(y)\le C_d^d Mf(x)\ \forall y\in Q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_2(y)^\delta dy \le C_d^{d\delta}Mf(x)^\delta$$

(2) 反之，假设 $w\in A_1$. 那么由反向Hölder不等式知，$\exists \varepsilon>0$ s.t.

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w.$$

再由A_1条件 $Mw(x)\le C(1)\,w(x)$ a.e. 知

$$\left(M(w^{1+\varepsilon})(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \le CMw(x) \le CC(1)\,w(x) \quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^d.$$

但由Lebesgue微分定理知

$$w(x)\le 1\left(M(w^{1+\varepsilon})(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

$\therefore$ 令 $\delta=\frac{1}{1+\varepsilon}$, $f=w^{1+\varepsilon}$. 就有 $w(x)\le Mf(x)^{\delta}\le Cw(x)$.

令 $k(x)=\frac{w(x)}{Mf(x)^{\delta}}$ 即得 (2)

□

Rmk: Thm 1.4.1 (1) 中 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ 可以换成任一有限 Borel doubling 测度 μ (需满足 $M\mu(x)<\infty$ a.e.)

这是因为弱(1,1)条件仍成立. 特别地，由 $M\delta(x)=C|x|^{-d}$ 则 $|x|^a\in A_1 \Leftrightarrow -d<a\le 0$

再由 ~~$w\in A_p \Leftrightarrow w^{1-p'}\in A_{p'}$ 知~~ $w_0, w_1\in A_1 \Rightarrow w_0 w_1^{1-p}$ 知 $|x|^a\in A_p \Leftrightarrow -d<a<d(p-1)$. 且此范围 sharp.

□

下面证明A_p权的外插定理：

Thm 1.4.2: Fix r, $1<r<\infty$. 若 $T: L^r(w)\longrightarrow L^r(w)$ 有界, $\forall w\in A_r$. 且 $\|T\|_{r\to r}$ 仅与 w 的 A_r 常数有关. 则 $\forall 1<p<\infty$. $\forall w\in A_p$ 有 $T: L^p(w)\to L^p(w)$ 有界

证明：外插定理的证明分两步

① 先证. 若 $1<q<r$. $w\in A_1$. 则 T 是 $L^q(w)$ 有界的.

② 再证：任给 $1<p<\infty$, $1<q<\min(p,r)$, 若 $w\in A_{p/q}$ 则 T 是 $L^p(w)$ 有界的.

若①②得证. 那么任给 $w\in A_p$, 我们由 Cor 1.3.1 知. $\exists q>1$ s.t. $w\in A_{p/q}$ 再由②即得结论

下面依次证明①②

Pf of ①: 由 Thm 1.4.1 知. 因为 $r-q<r-1$. 所以 $(Mf)^{\frac{r-q}{r-1}}\in A_1$

$\xRightarrow{\text{Exercise 前例}}$ $w(Mf)^{q-r}\in A_r$.

因此 $$\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q w=\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q (Mf)^{-\frac{(r-q)q}{r}}\underbrace{(Mf)^{\frac{(r-q)q}{r}}}_{\text{强行构造}} w^{\frac{q}{r}} w^{\frac{r-q}{r}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^r w^1 (Mf)^{q-r}\right)^{q/r}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|Mf|^q w\right)^{\frac{r-q}{r}}.$$

$\frac{r-q}{r}+\frac{q}{r}=1$

T是$L^r(w)$有界的，$w(Mf)^{q-r}\in A_q$　　$w\in A_q$ (由Exercise)

$$\le C\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^r w (Mf)^{q-r}\right)^{q/r}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^q w\right)^{\frac{r-q}{r}}$$

$|f(x)|\le Mf(x)$ a.e., $q-r<0$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^d}|f|^q w$$　　① 得证

pf of ②　Fix $w\in A_{p/q}$，则 $\|(Tf)^q\|_{L^{\frac{p}{q}}(w)}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^p w\,dx\right)^{\frac{q}{p}}$

由对偶表示知 $\exists u\in L^{(\frac{p}{q})'}(w)$. $\|u\|_{L^{(\frac{p}{q})'}(w)}=1$. s.t.

$$\text{上式}=\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q\cdot u\cdot w(x)\,dx$$

$$\cancel{\le\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q M((wu)^s)^{\frac{1}{s}}}$$

$\forall s>1$. $wu\le M((wu)^s)^{1/s}\in A_1$. 故. $\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q wu\le\int_{\mathbb{R}^d}|Tf|^q\left(M(wu)^s\right)^{\frac{1}{s}}$

$$\le C\int_{\mathbb{R}^d}|f|^q\left(M(wu)^s\right)^{1/s}$$

由于$w\in A_{p/q}$. 所以 $w^{1-(p/q)'}\in A_{(p/q)'}$

$\therefore$ 对s充分接近1. $w^{1-(p/q)'}\in A_{(p/q)'/s}$

$$=C\int_{\mathbb{R}^d}|f|^q w^{q/p}\left(M(wu)^s\right)^{\frac{1}{s}}w^{-q/p}$$

$$\le C\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p w\right)^{q/p}\left(\int_{\mathbb{R}^d}M((wu)^s)^{\frac{(p/q)'}{s}}w^{1-(\frac{p}{q})'}\right)^{\cdots}$$

于是

$$\text{上式}\le C\int_{\mathbb{R}^d}(wu)^{(p/q)'}w^{1-(p/q)'}dx$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p w\right)^{q/p}$$

$$=C\|f\|^q_{L^p(w)}\underbrace{\int u^{(\frac{p}{q})'}w(x)\,dx}_{=1}=C\|f\|^q_{L^p(w)}$$

开q次方即可

□

<u>Rmk</u>：外插定理也可以按照以下方式叙述：

给定$s\ge1$. 若T是$L^r(w)\to L^r(w)$的有界线性算子, $\forall w\in A_{r/s}$，则$\forall p>s$. $T: L^p(w)\to L^p(w)$ 有界, $w\in A_{p/s}$