2026年春季学期现代偏微分方程作业五

波动方程

不用提交

作业题 1 (习题7.1.2及后续). 设$D \in \mathbb{R}$为常数，$U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有光滑边界的区域，且 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(U)$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T)\times U, \\ u = \varphi,\ \partial_t u = \psi & \text{on } \{t=0\}\times U, \\ u = 0 & \text{on } [0,T]\times \partial U. \end{cases}$$

(1) 证明：对于**任意**常数 $D \in \mathbb{R}$，如上方程至多有一个光滑解 $u \in C^\infty([0,T)\times\overline{U})$.

(2) 设$D = 1$，且已知方程的整体光滑解存在（即可以延拓到$t = +\infty$），定义能量 $E_0(t) := \frac{1}{2}\int_U (\partial_t u(t,\boldsymbol{x}))^2 + |\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明：$\lim\limits_{t\to+\infty} E_0(t) = 0$.

提示：(2) 对 $\varepsilon > 0$，先考虑 $E_\varepsilon(t) := E_0(t) + \varepsilon\int_U u\partial_t u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的能量估计，再证明 ε 适当小时 E_ε, E_0 是可比较的。

作业题 2 (习题7.2.2). 考虑半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0 & t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d; \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ \partial_t u(0,x) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.1}$$

这里 f 是连续函数，且假设 u 在 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ 时趋于零。

(1) 证明如下$E(t)$关于时间是守恒量

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2) + F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad F(u) := \int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s.$$

(2) 给定 $t_0 > 0$ 和 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ 并定义带有顶点 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 的时间倒向光锥 (time-backward light cone) 为

$$K(\boldsymbol{x}_0, t_0) := \{(t,\boldsymbol{x}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d : 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leqslant t_0 - t\},$$

$K(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 边界的弯曲部分为

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0):=\{(t,\boldsymbol{x})\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d : 0\leqslant t\leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=t_0-t\}.$$

定义光锥上的能量通量(energy flux)为

$$e(t):=\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2)+F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0)}\frac{1}{2}|(\partial_t u)\nu-\nabla u|^2+F(u)\,\mathrm{d}S=e(0) \tag{0.2}$$

其中 $\nu:=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$.

(3) 设 $F\geqslant 0$，利用 (2) 证明如果u_0,u_1在$B(\boldsymbol{x}_0,t_0)$中恒为零，那么u在光锥$K(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 内恒为零。

(4) 证明 (3) 对于拟线性波动方程 $\partial_t^2 u-\Delta u+f(u,\partial u)=0$ 的光滑解 u 也成立，其中 f 是局部 Lipschitz 连续的且 $f(0,\mathbf{0})=0$.

提示：(2) 计算 $e'(t)$ 并将其与待证等式的左端进行比较，尤其要思考系数 $1/\sqrt{2}$ 是如何出现的。(4) 考虑 $E(t)=\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2)+u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 并注意到存在依赖于 $\|u,\partial u\|_{L^\infty}$ 的常数 $C>0$ 使得 $|f(u,\partial u)|\leqslant C(|u|+|\partial u|)$成立。

作业题 3 (习题7.3.2). 设$\boldsymbol{\phi}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{S}^m\subset\mathbb{R}^{m+1}$满足如下波映射(wave map)方程

$$\begin{cases}\Box\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}\left(\partial_t\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi}-\sum\limits_{i=1}^d\partial_i\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_i\boldsymbol{\phi}\right), & (t,\boldsymbol{x})\in(0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ \boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}),\quad \partial_t\boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}).\end{cases}$$

初值满足$|\boldsymbol{\phi}_0|^2=1,\boldsymbol{\phi}_1^\top\cdot\boldsymbol{\phi}_0=0$，并假设具有紧支集。

(1) 证明如下能量 $E(t)$ 是守恒量

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\partial_t\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2+\sum_{i=1}^d|\partial_i\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

(2) 设$d=1,m=2$，并假设光滑初值满足：存在$\boldsymbol{y}\in\mathbb{S}^2$ 使得 $(\boldsymbol{\phi}_0-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\phi}_1)\in H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$. 证明：此时波映射方程有光滑的整体解。这里可以默认爆破准则(7.3.18)成立，即

$$\text{解的极大存在时间}T_*<\infty\implies\limsup_{t\to T_*}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha\boldsymbol{\phi}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=\infty.$$

作业题 4 (问题7.4.1 (Levine凹性方法)). 考虑如下聚焦次临界波方程

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - \Delta u = u^3, & (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T) \times \mathbb{R}^3, \\
u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \partial_t u(0, \boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.
\end{cases}
$$

其中初值$u_0, u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$支于球$B(0, R)$内，$R > 0$给定，且满足$E(0) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) - \frac{1}{4}|u_0|^4 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < 0$.

(1) 证明：存在常数 $A > 0$ 使得 $\|\nabla u_0\|_{L^2} > A$，因此满足 $E(0) < 0$ 的初值不可能是小初值。

(2) 令 $I(t) := \int_{\mathbb{R}^3} u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，证明：$I''(t) \geqslant 6 \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 8E(0)$，进而存在 $t_1 \geqslant 0$ 使得对任意 $t \geqslant t_1$ 有 $I'(t) > 0$.

(3) 令 $J(t) := I(t)^{-1/2}$，证明: $J''(t) < 0$, 且对任意 $t \geqslant t_1$ 有 $J'(t) < 0$. 据此得出存在 $T_* < \infty$ 使得 $J(T_*) = 0$, 即 $I(T_*) = +\infty$.