2026年春季学期现代偏微分方程作业五答案

波动方程

章俊彦　　yx3x@ustc.edu.cn

截止时间：无

作业题 1 (习题7.1.2及后续). 设$D \in \mathbb{R}$为常数，$U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有光滑边界的区域，且 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(U)$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } (0,T)\times U, \\ u = \varphi,\ \partial_t u = \psi & \text{on } \{t=0\}\times U, \\ u = 0 & \text{on } [0,T]\times \partial U. \end{cases}$$

(1) 证明：对于**任意**常数 $D \in \mathbb{R}$，如上方程至多有一个光滑解 $u \in C^\infty([0,T)\times\overline{U})$.

(2) 设$D = 1$，且已知方程的整体光滑解存在（即可以延拓到$t = +\infty$），定义能量 $E_0(t) := \frac{1}{2}\int_U (\partial_t u(t,\boldsymbol{x}))^2 + |\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明：$\lim\limits_{t\to+\infty} E_0(t) = 0$.

提示：(2) 对 $\varepsilon > 0$，先考虑 $E_\varepsilon(t) := E_0(t) + \varepsilon\int_U u\partial_t u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的能量估计，再证明 ε 适当小时 E_ε, E_0 是可比较的。

证明. (1) 唯一性. 设 $u, v \in C^\infty([0,T)\times\overline{U})$ 是两个满足同一初边值条件的光滑解，令 $w := u - v$，则它满足初值为零的阻波动方程。定义能量

$$E_w(t) := \frac{1}{2}\int_U \left((\partial_t w(t,\boldsymbol{x}))^2 + |\nabla w(t,\boldsymbol{x})|^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在w的方程两边乘以 $\partial_t w$ 并在分部积分得

$$0 = \int_U \left(\partial_t^2 w + D\partial_t w - \Delta w\right)\partial_t w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_U (\partial_t w)^2 + |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + D\int_U (\partial_t w)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

因此$E_w'(t) = -D\int_U (\partial_t w)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，对任意 $D \in \mathbb{R}$ 都有 $|E_w'(t)| \leqslant |D|\int_U (\partial_t w)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2|D|E_w(t)$. 由于 $E_w(0) = 0$，由 Grönwall 不等式得到 $E_w(t) = 0$ 对任意 $t \in [0,T)$ 成立。于是

$$\partial_t w = 0, \qquad \nabla w = 0 \qquad \text{in } [0,T)\times U.$$

又由 $w(0,\boldsymbol{x})=0$ 得 $w\equiv 0$，所以光滑解至多唯一。

(2) 阻尼情形的能量衰减. 若 $D=1$，方程可写作 $\partial_t^2 u+\partial_t u-\Delta u=0$，今定义

$$E_0(t):=\frac{1}{2}\int_U \left((\partial_t u(t,\boldsymbol{x}))^2+|\nabla u(t,\boldsymbol{x})|^2\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

与上面相同，乘以 $\partial_t u$ 并积分可得 $E_0'(t)=-\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 0$. 由这一点仅可得到 $E_0(t)$ 单调下降，但不能直接推出极限为零。为得到严格衰减，我们引入校正量 $M(t):=\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

利用方程 $\partial_t^2 u=\Delta u-\partial_t u$ 和边界条件 $u|_{\partial U}=0$，计算得到

$$\begin{aligned}M'(t)&=\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u\partial_t^2 u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u(\Delta u-\partial_t u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U u\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式，存在常数 $C_U>0$ 使得 $\|u\|_{L^2(U)}\leqslant C_U\|\nabla u\|_{L^2(U)}$. 因此存在只依赖于 U 的常数 $C>0$，使得 $|M(t)|\leqslant CE_0(t)$. 取 $0<\varepsilon<1$ 足够小使得 $\varepsilon C\leqslant\frac{1}{2}$，并定义修正能量 $E_\varepsilon(t):=E_0(t)+\varepsilon M(t)$, 则 $\frac{1}{2}E_0(t)\leqslant E_\varepsilon(t)\leqslant\frac{3}{2}E_0(t)$.

另一方面，

$$\begin{aligned}E_\varepsilon'(t)=E_0'(t)+\delta M'(t)&=-\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\delta\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\delta\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=-(1-\delta)\int_U(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\delta\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

于是 $E_\varepsilon'(t)\leqslant-2\min\{1-\delta,\delta\}E_0(t)\leqslant-\frac{4}{3}\min\{1-\delta,\delta\}E_\varepsilon(t)$. 再次由 Grönwall 不等式，存在 $c>0$ 使得 $E_\varepsilon(t)\leqslant E_\varepsilon(0)e^{-ct}$. 由于 $E_0(t)\leqslant 2E_\varepsilon(t)$，故得到

$$E_0(t)\leqslant 2E_\varepsilon(0)e^{-ct}\to 0,\qquad t\to+\infty.$$

□

作业题 2 (习题7.2.2). 考虑半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta u+f(u)=0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d;\\ u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}),\ \partial_t u(0,x)=u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{0.1}$$

这里 f 是连续函数，且假设 u 在 $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时趋于零。

(1) 证明如下$E(t)$关于时间是守恒量

$$E(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2)+F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\qquad F(u):=\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s.$$

(2) 给定 $t_0>0$ 和 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$ 并定义带有顶点 $(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 的时间倒向光锥 (time-backward light cone) 为

$$K(\boldsymbol{x}_0,t_0):=\{(t,\boldsymbol{x})\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d:0\leqslant t\leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant t_0-t\},$$

$K(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 边界的弯曲部分为

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0):=\{(t,\boldsymbol{x})\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d:0\leqslant t\leqslant t_0,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=t_0-t\}.$$

定义光锥上的能量通量(energy flux)为

$$e(t):=\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2)+F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Gamma(\boldsymbol{x}_0,t_0)}\frac{1}{2}|(\partial_t u)\nu-\nabla u|^2+F(u)\,\mathrm{d}S=e(0) \tag{0.2}$$

其中 $\nu:=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$.

(3) 设 $F\geqslant 0$，利用 (2) 证明如果u_0,u_1在$B(\boldsymbol{x}_0,t_0)$中恒为零，那么u在光锥$K(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 内恒为零。

(4) 证明 (3) 对于拟线性波动方程 $\partial_t^2 u-\Delta u+f(u,\partial u)=0$ 的光滑解 u 也成立，其中 f 是局部 Lipschitz 连续的且 $f(0,\mathbf{0})=0$.

提示：(2) 计算 $e'(t)$ 并将其与待证等式的左端进行比较，尤其要思考系数 $1/\sqrt{2}$ 是如何出现的。(4) 考虑 $E(t)=\int_{B(\boldsymbol{x}_0,t_0-t)}\frac{1}{2}(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2)+u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 并注意到存在依赖于 $\|u,\partial u\|_{L^\infty}$ 的常数 $C>0$ 使得 $|f(u,\partial u)|\leqslant C(|u|+|\partial u|)$成立。

证明. (1) 能量守恒. 设 $E(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2\right)+F(u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，由于 u 充分光滑并在无穷远处衰减，直接计算并分部积分可得

$$E'(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\,\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla\partial_t u+f(u)\partial_t u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t u\left(\partial_t^2 u-\Delta u+f(u)\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

故 $E(t)=E(0)$。

(2) 倒向光锥上的能量通量恒等式. 固定 $t_0>0$ 和 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$，记

$$r(t):=t_0-t,\qquad B_t:=B(\boldsymbol{x}_0,r(t)),\qquad S_t:=\partial B(\boldsymbol{x}_0,r(t)).$$

令 $\mathrm{e}(t,\boldsymbol{x}):=\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2\right)+F(u)$, 则 $e(t)=\int_{B_t}\mathrm{e}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 由于区域 B_t 的边界以法向速度 -1 向内收缩，由移动区域求导公式得

$$e'(t)=\int_{B_t}\partial_t\mathrm{e}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{S_t}\mathrm{e}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$

由方程可知 $\partial_t \mathrm{e} = \partial_t u\, \partial_t^2 u + \nabla u \cdot \nabla \partial_t u + f(u)\partial_t u = \partial_t u\, \Delta u + \nabla u \cdot \nabla \partial_t u = \mathrm{div}\,(\partial_t u \nabla u)$，因此

$$e'(t) = \int_{S_t} \partial_t u\, \partial_\nu u \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} - \int_{S_t} \left[\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) + F(u)\right] \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = -\int_{S_t} \left[\frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu - \nabla u\right|^2 + F(u)\right] \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},$$

其中 $\nu := \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$ 是 S_t 的外单位法向量。因为 $B_{t_0} = B(\boldsymbol{x}_0, 0)$ 体积为零，所以 $e(t_0) = 0$。对 $t \in [0, t_0]$ 积分得到

$$e(0) = \int_0^{t_0} \int_{S_t} \left[\frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu - \nabla u\right|^2 + F(u)\right] \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t.$$

现在将右端改写为光锥弯曲边界 $\Gamma(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 上的积分。参数化

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_0, t_0) : (t, \omega) \mapsto (t, \boldsymbol{x}_0 + (t_0 - t)\omega), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad \omega \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

由参数曲面积分计算可得面积元 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int_0^{t_0} \int_{S_t} G(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma(\boldsymbol{x}_0, t_0)} G(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S.$$

取 $G(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu - \nabla u\right|^2 + F(u)$ 即得所求结论

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Gamma(x_0, t_0)} \frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu - \nabla u\right|^2 + F(u)\,\mathrm{d}S = e(0).$$

(3) 半线性方程的有限传播速度. 假设 $F \geqslant 0$ 且 u_0, u_1 在 $B(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 中恒为零，则在 $B(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 中也有 $\nabla u_0 = 0$ 和 $F(u_0) = F(0) = 0$，因此 $e(0) = 0$. 另一方面，由上面对 $e'(t)$ 的计算和 $F \geqslant 0$ 可知

$$e'(t) = -\int_{S_t} \left[\frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu - \nabla u\right|^2 + F(u)\right] \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \leqslant 0.$$

又由 $F \geqslant 0$，有 $e(t) \geqslant 0$。所以 $0 \leqslant e(t) \leqslant e(0) = 0$ 对 $t \in [0, t_0]$ 都成立，从而 $e(t) \equiv 0$。由于被积函数非负，故在每个 B_t 中都有 $\partial_t u = 0, \qquad \nabla u = 0$，结合 $u(0, \boldsymbol{x}) = 0$ 在 $B(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 中成立就得到

$$u(t, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in K(\boldsymbol{x}_0, t_0).$$

(4) 含一阶导数非线性项的情形. 现在考虑 $\partial_t^2 u - \Delta u + f(u, \partial u) = 0, f(0, \mathbf{0}) = 0$. 由于 u 是光滑解，且我们只在紧光锥 $K(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 上讨论，故存在常数 $C > 0$ 使得 $|f(u, \partial u)| \leqslant C\,(|u| + |\partial u|)$ 在该光锥上成立。定义

$$E(t) := \int_{B_t} \frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) + u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

同样使用移动区域求导公式，得到

$$E'(t)=\int_{B_t}\left(\partial_t u\,\partial_t^2 u+\nabla u\cdot\nabla\partial_t u+2u\partial_t u\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{S_t}\left[\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2\right)+u^2\right]\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$

由方程 $\partial_t^2 u=\Delta u-f(u,\partial u)$，可化为

$$\begin{aligned}E'(t)&=\int_{S_t}\partial_t u\,\partial_\nu u\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}-\int_{S_t}\left[\frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2+|\nabla u|^2\right)+u^2\right]\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}+\int_{B_t}\left[-\partial_t u\,f(u,\partial u)+2u\partial_t u\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=-\int_{S_t}\left[\frac{1}{2}\left|(\partial_t u)\nu-\nabla u\right|^2+u^2\right]\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}+\int_{B_t}\left[-\partial_t u\,f(u,\partial u)+2u\partial_t u\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

边界项非正，而体积分满足

$$\left|\int_{B_t}\left[-\partial_t u\,f(u,\partial u)+2u\partial_t u\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leqslant C\int_{B_t}\left(|\partial_t u|(|u|+|\partial u|)+|u||\partial_t u|\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant CE(t).$$

因此$E'(t)\leqslant CE(t)$. 若 u_0,u_1 在 $B(\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 中恒为零，则 $E(0)=0$。由 Grönwall 不等式得到 $E(t)\equiv 0$ in $[0,t_0]$. 于是有限传播速度结论仍成立。 □

作业题 3 (习题7.3.2)**.** 设$\boldsymbol{\phi}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{S}^m\subset\mathbb{R}^{m+1}$满足如下波映射(wave map)方程

$$\begin{cases}(-\partial_t^2+\Delta)\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}\left(\partial_t\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi}-\sum_{i=1}^d\partial_i\boldsymbol{\phi}^\top\cdot\partial_i\boldsymbol{\phi}\right), & (t,\boldsymbol{x})\in(0,T)\times\mathbb{R}^d,\\ \boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}_0(\boldsymbol{x}),\quad \partial_t\boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}).\end{cases}$$

初值满足$|\boldsymbol{\phi}_0|^2=1,\boldsymbol{\phi}_1^\top\cdot\boldsymbol{\phi}_0=0$，并假设具有紧支集。

(1) 证明如下能量 $E(t)$ 是守恒量

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\partial_t\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2+\sum_{i=1}^d|\partial_i\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

(2) 设$d=1,m=2$，并假设光滑初值满足：存在$\boldsymbol{y}\in\mathbb{S}^2$ 使得 $(\boldsymbol{\phi}_0-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\phi}_1)\in H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$. 证明：此时波映射方程有光滑的整体解。这里可以默认爆破准则(7.3.18)成立，即

$$\text{解的极大存在时间}T_*<\infty\implies\limsup_{t\to T_*}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha\boldsymbol{\phi}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}=\infty.$$

这道题(2)应该增加提示，去证明$\square(|\partial_t\boldsymbol{\phi}|^2+|\partial_x\boldsymbol{\phi}|^2)=0$，否则还是有点麻烦的。

证明. (1) 能量守恒. 由于 $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{S}^m$，有 $|\boldsymbol{\phi}|^2 = 1$. 对任意 $\alpha = t, 1, \ldots, d$ 求导得到 $\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\phi} = 0$. 定义

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\partial_t \boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2 + \sum_{i=1}^d |\partial_i \boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{x})|^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

直接求导并分部积分得到

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\phi} + \sum_{i=1}^d \partial_i \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_i \partial_t \boldsymbol{\phi} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \boldsymbol{\phi} \cdot \left(\partial_t^2 \boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^d \partial_i^2 \boldsymbol{\phi} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

把方程 $(-\partial_t^2 + \Delta)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}\left(|\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 - \sum_{i=1}^d |\partial_i \boldsymbol{\phi}|^2 \right)$ 代入即得

$$E'(t) = -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \right) \left(|\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 - \sum_{i=1}^d |\partial_i \boldsymbol{\phi}|^2 \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

(2) 一维到 $\mathbb{S}^2$ 的整体光滑解. 现在设 $d = 1, m = 2$。波映射方程为 $\partial_t^2 \boldsymbol{\phi} - \partial_x^2 \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}\left(|\partial_x \boldsymbol{\phi}|^2 - |\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 \right)$. 定义

$$q(t,x) := (\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot (\partial_t \boldsymbol{\phi}) + (\partial_x \boldsymbol{\phi})^\top \cdot (\partial_x \boldsymbol{\phi}) = |\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 + |\partial_x \boldsymbol{\phi}|^2, \qquad r(t,x) := (\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot (\partial_x \boldsymbol{\phi}).$$

下面证明 q 满足一维自由波方程。首先，

$$\partial_t q = 2(\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\phi} + 2(\partial_x \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi} = 2(\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \left[\partial_x^2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}\left(|\partial_x \boldsymbol{\phi}|^2 - |\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 \right) \right] + 2(\partial_x \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi}.$$

利用$(\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$得到

$$\partial_t q = 2(\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_x^2 \boldsymbol{\phi} + 2(\partial_x \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi} = 2\partial_x \left[(\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot (\partial_x \boldsymbol{\phi}) \right] = 2\partial_x r.$$

类似地，我们可以利用$\boldsymbol{\phi}^\top \cdot \partial_x \boldsymbol{\phi} = 0$ 算得

$$\begin{aligned} \partial_t r &= (\partial_t^2 \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_x \boldsymbol{\phi} + (\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi} = \left[\partial_x^2 \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}\left(|\partial_x \boldsymbol{\phi}|^2 - |\partial_t \boldsymbol{\phi}|^2 \right) \right]^\top \cdot \partial_x \boldsymbol{\phi} + (\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi} \\ &= (\partial_x^2 \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_x \boldsymbol{\phi} + (\partial_t \boldsymbol{\phi})^\top \cdot \partial_t \partial_x \boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}\partial_x q. \end{aligned}$$

于是$\partial_t^2 q = 2\partial_x \partial_t r = 2\partial_x \left(\frac{1}{2}\partial_x q \right) = \partial_x^2 q$，初值为 $q(0,x) = q_0(x) := |\boldsymbol{\phi}_1(x)|^2 + |\partial_x \boldsymbol{\phi}_0(x)|^2$和 $\partial_t q(0,x) = 2\partial_x r_0(x)$，其中$r_0(x) = r(0,x) := \boldsymbol{\phi}_1(x)^\top \cdot \partial_x \boldsymbol{\phi}_0(x)$. 由D'Alembert公式可得

$$\begin{aligned} q(t,x) &= \frac{1}{2}q_0(x+t) + \frac{1}{2}q_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \partial_t q(0,z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}q_0(x+t) + \frac{1}{2}q_0(x-t) + r_0(x+t) - r_0(x-t). \end{aligned}$$

因此 $\|q(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2\|r_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. 而 $(\boldsymbol{\phi}_0 - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\phi}_1) \in H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$,以及一维情况有 $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow$

$L^\infty(\mathbb{R})$得到$\partial_x\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\phi}_1\in L^\infty(\mathbb{R})$得知$q_0,r_0\in L^\infty(\mathbb{R})$，再代入如上解的公式就得到：存在仅依赖初值的常数$C_0>0$使得对任意$t\in[0,T_*)$有$\|q(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant C_0$. 再由 q 的定义就知道$\|\boldsymbol{\partial\pi}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$一致有界，再结合$|\boldsymbol{\phi}|\equiv 1$即得 $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 1}\|\partial^\alpha\boldsymbol{\phi}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ 在任意有限时间区间上均一致有界。由爆破准则，若极大存在时间 $T_*<\infty$，则上式必须在 $t\to T_*$ 时趋于无穷大，矛盾。因此 $T_*=+\infty$. 由于初值光滑，局部理论给出的延拓仍是光滑解。

□

作业题 4 (问题7.4.1 (Levine凹性方法)). 考虑如下聚焦次临界波方程

$$\begin{cases}\partial_t^2u-\Delta u=u^3, & (t,\boldsymbol{x})\in[0,T)\times\mathbb{R}^3,\\ u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}),\quad \partial_tu(0,\boldsymbol{x})=u_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

其中初值$u_0,u_1\in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$支于球$B(0,R)$内，$R>0$给定，且满足$E(0):=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}(|\nabla u_0|^2+|u_1|^2)-\frac{1}{4}|u_0|^4\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<0$.

(1) 证明：存在常数 $A>0$ 使得 $\|\nabla u_0\|_{L^2}>A$，因此满足 $E(0)<0$ 的初值不可能是小初值。

(2) 令 $I(t):=\int_{\mathbb{R}^3}u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，证明：$I''(t)\geqslant 6\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_tu)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-8E(0)$，进而存在 $t_1\geqslant 0$ 使得对任意 $t\geqslant t_1$ 有 $I'(t)>0$.

(3) 令 $J(t):=I(t)^{-1/2}$，证明: $J''(t)<0$, 且对任意 $t\geqslant t_1$ 有 $J'(t)<0$. 据此得出存在 $T_*<\infty$ 使得 $J(T_*)=0$, 即 $I(T_*)=+\infty$.

证明. 首先我们有能量守恒 $E(t):=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}\left(|\partial_tu|^2+|\nabla u|^2\right)-\frac{1}{4}|u|^4\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=E(0)<0$.

(1) 负能量初值不是小初值. 由 Sobolev 嵌入 $H^1\hookrightarrow L^p\ (p\leqslant 6)$ 和 Poincaré 不等式，存在常数 $C_R>0$ 使得 $\|u_0\|_{L^4(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_R\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. 由 $E(0)<0$ 可得

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|u_1\|_{L^2}^2\right)<\frac{1}{4}\|u_0\|_{L^4}^4.$$

再用上面的嵌入估计，得到 $\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2<\frac{1}{4}C_R^4\|\nabla u_0\|_{L^2}^4$.

由于 $E(0)<0$，所以 $u_0\not\equiv 0$，进而 $\|\nabla u_0\|_{L^2}>0$，从而 $\|\nabla u_0\|_{L^2}^2>\frac{2}{C_R^4}$. 取 $A:=\frac{\sqrt{2}}{C_R^2}$, 即得 $\|\nabla u_0\|_{L^2}>A$. 因此满足 $E(0)<0$ 的初值不可能是小初值。

(2) 令 $I(t):=\int_{\mathbb{R}^3}u(t,\boldsymbol{x})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，则 $I'(t)=2\int_{\mathbb{R}^3}u\partial_tu\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 继续求导，代入方程得到

$$\begin{aligned}I''(t)&=2\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_tu)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+2\int_{\mathbb{R}^3}u\partial_t^2u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_tu)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+2\int_{\mathbb{R}^3}u(\Delta u+u^3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=2\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_tu)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+2\int_{\mathbb{R}^3}u^4\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

由能量守恒，记 $A(t):=\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_tu)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, B(t):=\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, C(t):=\int_{\mathbb{R}^3}u^4\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，则 $E(0)=\frac{1}{2}A(t)+\frac{1}{2}B(t)-\frac{1}{4}C(t)$,

所以 $C(t) = 2A(t) + 2B(t) - 4E(0)$. 代入 $I''(t)$，得到

$$I''(t) = 2A(t) - 2B(t) + 2C(t) = 6A(t) + 2B(t) - 8E(0) \geqslant 6\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 8E(0) \geqslant -8E(0) > 0.$$

因此 $I'(t)$ 严格递增，且 $I'(t) \geqslant I'(0) - 8E(0)t$, 右端当 t 足够大时为正，所以存在 $t_1 \geqslant 0$ 使得对任意 $t \geqslant t_1$ 有 $I'(t) > 0$.

(3) 首先由 $E(0) < 0$ 可知 $I(t) > 0$：否则若某个时刻 $I(t) = 0$，则 $u(t, \cdot) = 0$，此时 $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0$ 与 $E(t) = E(0) < 0$ 矛盾。

令 $J(t) := I(t)^{-1/2}$，则 $J'(t) = -\frac{1}{2}I(t)^{-3/2}I'(t)$ 以及

$$J''(t) = \frac{3}{4}I(t)^{-5/2}(I'(t))^2 - \frac{1}{2}I(t)^{-3/2}I''(t) = -\frac{1}{4}I(t)^{-5/2}\left(2I(t)I''(t) - 3(I'(t))^2\right).$$

所以只需证明 $2I(t)I''(t) - 3(I'(t))^2 > 0$. 由 Cauchy–Schwarz 不等式，

$$(I'(t))^2 = 4\left(\int_{\mathbb{R}^3} u\partial_t u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2 \leqslant 4I(t)A(t).$$

又由 $I''(t) = 6A(t) + 2B(t) - 8E(0)$ 得到

$$2I(t)I''(t) - 3(I'(t))^2 \geqslant 2I(t)(6A(t) + 2B(t) - 8E(0)) - 12I(t)A(t) = 4I(t)B(t) - 16E(0)I(t).$$

由 $I(t) > 0$、$B(t) \geqslant 0$ 和 $E(0) < 0$ 得到 $4I(t)B(t) - 16E(0)I(t) > 0$，因此 $J''(t) < 0$. 且对任意 $t \geqslant t_1$，由 $I'(t) > 0$ 可知 $J'(t) = -\frac{1}{2}I(t)^{-3/2}I'(t) < 0$.

固定这样的 t_1。因为 $J'' < 0$，函数 J 在 $[t_1, T)$ 上严格凹且 $J'(t_1) < 0$。于是对 $t \geqslant t_1$ 有 $J(t) \leqslant J(t_1) + J'(t_1)(t - t_1)$. 右边在有限时间 $t = t_1 + \frac{J(t_1)}{-J'(t_1)}$ 变为零。因此只要光滑解存活到该时间，便会推出 $J(t) \leqslant 0$，这与 $J(t) = I(t)^{-1/2} > 0$ 矛盾。故必存在有限时间 $T_* < \infty$，使得 $\lim\limits_{t \to T_*^-} J(t) = 0$，进而 $\lim\limits_{t \to T_*^-} I(t) = +\infty$. 这说明光滑解不可能整体存在。 $\square$