

2026年春季学期现代偏微分方程作业四

Fourier分析、Schrödinger方程

截止时间：2026.6.2下课前（电子版截至当天23:59:59）

作业题 1 (习题D.1.2, 海森堡不确定性原理). 给定点 $\mathbf{x}_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$ 以及复值函数 $f \in S(\mathbb{R}^d)$, 证明如下海森堡不确定性原理:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{d^2}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^2. \quad (0.1)$$

这个不等式表明动量和位置不可能同时在给定的动量 ξ_0 和给定的位置 \mathbf{x}_0 附近被确定。

提示: 只需证明 $\xi_0 = \mathbf{x}_0 = 0$ 的情况即可, 否则考虑 $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi_0}$ 并利用命题D.1.3(2)约化到这一特殊情况。利用Plancherel恒等式可得 $|\xi \hat{f}(\xi)|^2 = |\widehat{\nabla f}(\xi)|^2$, 之后再用Plancherel恒等式和Cauchy-Schwarz不等式证明左边 $\geq (\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} \cdot \nabla f)f| d\mathbf{x})^2$, 最后用 $\operatorname{Re}(\nabla f) \bar{f} = \frac{1}{2} \nabla(|f|^2)$, 然后分部积分一次。

作业题 2 (习题D.2.2). 若 $F \in \mathcal{D}'$ 且一阶分布导数皆为零, 即 $\partial_j F = 0$ 对 $1 \leq j \leq d$ 成立。证明: F 是 \mathbb{R}^d 上的常值函数。(提示: 考虑 $F * \eta_\epsilon$.)

作业题 3 (习题5.1.3). 设 $s_0 \leq s \leq s_1$, 证明: $\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, 且若 $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, 则 $\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|u\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d)}^\theta$. 该结论实际上对非齐次Sobolev空间也对。

作业题 4 (习题5.1.5). 设 $0 < s < 1$, $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. 证明: 存在代表元 $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{y}|^{d+2s}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} < \infty.$$

这给出了齐次Sobolev范数与Sobolev-Slobodeckii范数之间的等价性。

提示: 将 \hat{u} 分解为 $\{|\xi| \leq 1\}$ 部分和 $\{|\xi| > 1\}$ 部分。然后在Sobolev-Slobodeckii范数中对 \mathbf{x} 变量用Plancherel恒等式。

作业题 5 (习题5.2.4). 若 $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$, 其中 C_0 表示在无穷远处收敛到零的连续函数, 证明 $s > d/2$.

提示: 用闭图像定理证明包含映射 $H^s \hookrightarrow C_0$ 是连续的, 然后考虑代入Fourier变换为 $\langle \xi \rangle^{-2s} \chi_{|\xi| \leq R}(\xi)$ 的函数去算 s 的范围。

作业题 6 (问题5.2.1). 给定 $m \in \mathbb{N}^*$, 设 $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ 其中 $c_\alpha \in \mathbb{R}$ 且存在 m 阶多重指标 α 使得 $c_\alpha \neq 0$. 我们定义微分算子 $P(\partial)$ 的主象征 (principal symbol) P_m 为

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha.$$

我们称 $P(\partial)$ 是 m 阶椭圆的, 是指对任意 $\xi \neq \mathbf{0}$ 都有 $P_m(\xi) \neq 0$. 今假设 $P(\partial)$ 是 m 阶微分算子。

(1) 证明: $P(\partial)$ 是椭圆的当且仅当存在 $C, R > 0$ 使得对 $|\xi| \geq R$ 有 $|P(\xi)| \geq C|\xi|^m$.

(2) 设 $P(\partial)$ 是椭圆的, 若 $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ 且 $P(\partial)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, 证明: $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$.

作业题 7 (习题6.2.1). 证明非线性 Schrödinger 方程 $iu_t + \Delta u = \mu|u|^{p-1}u$ ($\mu = \pm 1, p \geq 1$) 的质量、能量和动量守恒律。

- (质量守恒) $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, \mathbf{x})|^2 dx = 0$.
- (能量守恒) $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 + \frac{\mu}{p+1} |u(t, \mathbf{x})|^{p+1} dx = 0$.
- (动量守恒) $\frac{d}{dt} \mathbf{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, \mathbf{x}) \overline{\nabla u(t, \mathbf{x})} dx = 0$.

作业题 8 (习题6.1.2+问题6.2.3). 今考虑 cubic NLS 解的性质。

$$i\partial_t u + \Delta u = \mu|u|^2 u \text{ in } I \times \mathbb{R}^3, \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}). \quad (\text{NLS})$$

其中初值 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\mu = \pm 1$, $I \subset \mathbb{R}$ 是时间区间。

(1) 考虑使用容许对 $(p, q) = (4, 3)$. 令 $F(u)(t, \mathbf{x}) = |u|^2 u(t, \mathbf{x})$, 证明如下带导数的 Strichartz 估计

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} F(u)(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L_t^\infty H_x^1(I \times \mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{L_t^4 W_x^{1,3}(I \times \mathbb{R}^3)}^3.$$

(2) 利用(1)证明: 当 $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \ll 1$ 时, 方程(NLS)有小初值整体解 $u \in L_t^\infty(\mathbb{R}; H_x^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_t^4(\mathbb{R}; W_x^{1,3}(\mathbb{R}^3))$.

(3) 在(2)的条件下证明散射结论: 存在 $u_\pm \in H^1(\mathbb{R}^3)$ 使得 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t, \cdot) - e^{it\Delta} u_\pm\|_{H^1} = 0$.

(4) 现在设 $\mu = -1$, 初值还满足 $|\mathbf{x}|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. 设 $u : [0, T_*] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ 是此时(NLS)在 $[0, T_*] \times \mathbb{R}^3$ 上的解. 定义能量 $E(t)$ 和位力势 $V(t)$ 如下

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 - \frac{1}{4} |u(t, \mathbf{x})|^4 dx, \quad V(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |u(t, \mathbf{x})|^2 dx.$$

证明: 若 $E(0) < 0$, 则 $T_* < +\infty$. (提示: 先写出 Virial 恒等式, 然后证明 $V''(t) \leq 16E(t)$.)