

# 2026年春季学期现代偏微分方程作业四答案

## Fourier分析、Schrödinger方程

章俊彦 yx3x@ustc.edu.cn

截止时间：2026.5.26下课前（电子版截至当天23:59:59）

作业题 1 (习题D.1.2, 海森堡不确定性原理). 给定点  $\mathbf{x}_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$  以及复值函数  $f \in S(\mathbb{R}^d)$ , 证明如下海森堡不确定性原理:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{d^2}{4} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^2. \quad (0.1)$$

这个不等式表明动量和位置不可能同时在给定的动量  $\xi_0$  和给定的位置  $\mathbf{x}_0$  附近被确定。

提示: 只需证明  $\xi_0 = \mathbf{x}_0 = 0$  的情况即可, 否则考虑  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi_0}$  并利用命题D.1.3(2)约化到这一特殊情况。利用Plancherel恒等式可得  $|\xi \hat{f}(\xi)|^2 = |\widehat{\nabla f}(\xi)|^2$ , 之后再利用Plancherel恒等式和Cauchy-Schwarz不等式证明左边  $\geq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x} \cdot \nabla f| f d\mathbf{x} \right)^2$ , 最后用  $\operatorname{Re}(\nabla f)\bar{f} = \frac{1}{2}\nabla(|f|^2)$ , 然后分部积分一次。

证明. 先证明  $\mathbf{x}_0 = \xi_0 = \mathbf{0}$  的情形。由 Plancherel 恒等式和 Fourier 变换与导数的关系可知

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式以及  $|\mathbf{x} \cdot \nabla f| \leq |\mathbf{x}||\nabla f|$  得

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x} f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x} f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \\ & \geq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}| |f| |\nabla f| d\mathbf{x} \right)^2 \geq \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla f)\bar{f} d\mathbf{x} \right|^2. \end{aligned}$$

另一方面由于  $f \in S(\mathbb{R}^d)$ , 分部积分没有边界项, 且  $\operatorname{Re}((\nabla f)\bar{f}) = \frac{1}{2}\nabla(|f|^2)$ . 于是

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla f)\bar{f} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x} \cdot \nabla(|f|^2) d\mathbf{x} = -\frac{d}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

故

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla f) \bar{f} \, d\mathbf{x} \right|^2 \geq \frac{d^2}{4} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^2.$$

这就证明了  $\mathbf{x}_0 = \xi_0 = \mathbf{0}$  的不等式。

一般情形令  $g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)e^{-i\mathbf{x} \cdot \xi_0}$ . 平移和乘  $e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0}$  不改变  $L^2$  范数, 由 Fourier 变换的性质可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}g(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\xi \hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, d\mathbf{x}.$$

将已证的特殊情形应用于  $g$ , 即得原命题。  $\square$

**作业题 2 (习题D.2.2).** 若  $F \in \mathcal{D}'$  且一阶分布导数皆为零, 即  $\partial_j F = 0$  对  $1 \leq j \leq d$  成立。证明:  $F$  是  $\mathbb{R}^d$  上的常值函数。(提示: 考虑  $F * \eta_\varepsilon$ .)

**证明.** 取标准磨光核  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 满足  $\int_{\mathbb{R}^d} \eta \, d\mathbf{x} = 1$ , 令  $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-d} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$ ,  $F_\varepsilon := F * \eta_\varepsilon$ . 则  $F_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 并且分布导数与卷积可交换, 所以  $\partial_j F_\varepsilon = (\partial_j F) * \eta_\varepsilon = 0$  ( $1 \leq j \leq d$ ). 因此  $\nabla F_\varepsilon = 0$ , 由于  $\mathbb{R}^d$  连通,  $F_\varepsilon$  是常数函数。记  $F_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv c_\varepsilon$ .

下面令  $\varepsilon \rightarrow 0$ . 取  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  使得  $\int \psi \, d\mathbf{x} = 1$ , 则

$$c_\varepsilon = \langle F_\varepsilon, \psi \rangle \longrightarrow \langle F, \psi \rangle =: c,$$

这里用到了  $F_\varepsilon \xrightarrow{*} F$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . 对任意  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , 一方面  $\langle F_\varepsilon, \varphi \rangle = c_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mathbf{x}$ , 另一方面  $\langle F_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ , 因此

$$\langle F, \varphi \rangle = c \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

这说明  $F$  作为分布正是常值函数  $c$ .  $\square$

**作业题 3 (习题5.1.3).** 设  $s_0 \leq s \leq s_1$ , 证明:  $\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ , 且若  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ , 则  $\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\dot{H}^{s_0}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \|u\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^d)}^\theta$ . 该结论实际上对非齐次 Sobolev 空间也对。

**证明.** 若  $s_0 = s_1$ , 结论显然。下面设  $s_0 < s_1$ , 并令  $\theta \in [0, 1]$  满足  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ . 据齐次 Sobolev 范数的定义和 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{H}^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s_0} |\hat{u}|^2 \, d\xi \right)^{1-\theta} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s_1} |\hat{u}|^2 \, d\xi \right)^\theta \\ &= \|u\|_{\dot{H}^{s_0}}^{2(1-\theta)} \|u\|_{\dot{H}^{s_1}}^{2\theta} \end{aligned}$$

右端有限, 所以  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ . 非齐次情形完全相同, 只需把  $|\xi|$  替换为  $\langle \xi \rangle$ .  $\square$

作业题 4 (习题5.1.5). 设  $0 < s < 1$ ,  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ . 证明: 存在代表元  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$  且满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{y}|^{d+2s}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} < \infty.$$

这给出了齐次Sobolev范数与Sobolev-Slobodeckii范数之间的等价性。

提示: 将  $\hat{u}$  分解为  $\{|\xi| \leq 1\}$  部分和  $\{|\xi| > 1\}$  部分。然后在Sobolev-Slobodeckii范数中对  $\mathbf{x}$  变量用Plancherel恒等式。

证明. 设  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ , 取  $L_{loc}^2$  代表元作高低频分解得

$$\hat{u}_> := \chi_{|\xi|>1} \hat{u}, \quad \hat{u}_< := \chi_{|\xi|\leq 1} \hat{u}.$$

高频部分满足

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_>|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi < \infty,$$

所以  $u_> := \mathcal{F}^{-1} \hat{u}_> \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . 低频部分在  $\xi = \mathbf{0}$  处可能有奇性, 因此要在齐次空间允许的常数差异下选取代表元。定义

$$u_<(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{|\xi|\leq 1} (e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} - 1) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

其中积分可由Cauchy-Schwarz理解。事实上, 若  $|\mathbf{x}| \leq R$ , 则  $|e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} - 1| \leq C_R |\xi|$ , 从而

$$|u_<(\mathbf{x})| \lesssim_R \int_{|\xi|\leq 1} |\xi| |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq C_R \left( \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2-2s} d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

这里最后一个积分有限用到了  $s < 1$ . 所以  $u_<$  在任意有界集上有界, 特别属于  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ . 于  $u := u_< + u_>$  给出了  $u$  的一个  $L_{loc}^2$  代表元。

下面证明差分积分有限。对固定  $\mathbf{y}$  我们有  $\mathcal{F}(u(\cdot + \mathbf{y}) - u(\cdot))(\xi) = (e^{i\mathbf{y}\cdot\xi} - 1) \hat{u}(\xi)$ . 由Plancherel恒等式,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i\mathbf{y}\cdot\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

因此由Tonelli定理和变量替换  $\mathbf{z} = |\xi| \mathbf{y}$  得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{y}|^{d+2s}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\mathbf{y}\cdot\xi} - 1|^2}{|\mathbf{y}|^{d+2s}} d\mathbf{y} \right) d\xi = C_{d,s} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

其中

$$C_{d,s} := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\mathbf{z}\cdot\mathbf{e}_1} - 1|^2}{|\mathbf{z}|^{d+2s}} d\mathbf{z} < \infty.$$

该常数有限是因为在  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  附近  $|e^{i\mathbf{z}\cdot\mathbf{e}_1} - 1| \lesssim |\mathbf{z}|$ , 需要  $s < 1$ ; 在无穷远处只需要  $s > 0$ . 结论得证。  $\square$

**作业题 5 (习题5.2.4).** 若  $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ , 其中  $C_0$  表示在无穷远处收敛到零的连续函数, 证明  $s > d/2$ . 提示: 用闭图像定理证明包含映射  $H^s \hookrightarrow C_0$  是连续的, 然后考虑代入 Fourier 变换为  $\langle \xi \rangle^{-2s} \chi_{|\xi| \leq R}(\xi)$  的函数去算  $s$  的范围.

**证明.** 假设  $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ . 先说明嵌入映射  $i: H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$  是连续的. 若  $u_n \rightarrow u$  in  $H^s(\mathbb{R}^d)$ , 且  $u_n \rightarrow v$  in  $C_0(\mathbb{R}^d)$ , 则  $u_n \rightarrow u$  in  $S'(\mathbb{R}^d)$ , 同时  $u_n \rightarrow v$  in  $D'(\mathbb{R}^d)$ . 分布极限唯一, 所以  $u = v$ ,  $i$  的图像是闭的. 由闭图像定理, 存在常数  $C > 0$  使得

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{C_0} \leq C \|u\|_{H^s}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

对  $R > 1$ , 取  $u_R$  使其 Fourier 变换为  $\widehat{u}_R(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2s} \chi_{|\xi| \leq R}(\xi)$ . 于是  $u_R \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , 并且

$$\|u_R\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}_R(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| \leq R} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi.$$

另一方面由 Fourier 反演公式,  $|u_R(\mathbf{0})| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{|\xi| \leq R} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi$ . 令  $A_R := \int_{|\xi| \leq R} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi$ . 则有

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} A_R = |u_R(\mathbf{0})| \leq \|u_R\|_{L^\infty} \leq C \|u_R\|_{H^s} = C A_R^{1/2}.$$

所以  $A_R$  关于  $R$  一致有界. 令  $R \rightarrow \infty$  得到  $\int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-2s} d\xi < \infty$ . 而该积分有限当且仅当  $2s > d$ , 即  $s > \frac{d}{2}$ .  $\square$

**作业题 6 (问题5.2.1).** 给定  $m \in \mathbb{N}^*$ , 设  $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$  其中  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  且存在  $m$  阶多重指标  $\alpha$  使得  $c_\alpha \neq 0$ . 我们定义微分算子  $P(\partial)$  的主象征 (principal symbol)  $P_m$  为

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha.$$

我们称  $P(\partial)$  是  $m$  阶椭圆的, 是指对任意  $\xi \neq \mathbf{0}$  都有  $P_m(\xi) \neq 0$ . 今假设  $P(\partial)$  是  $m$  阶微分算子.

- (1) 证明:  $P(\partial)$  是椭圆的当且仅当存在  $C, R > 0$  使得对  $|\xi| \geq R$  有  $|P(\xi)| \geq C|\xi|^m$ .
- (2) 设  $P(\partial)$  是椭圆的, 若  $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$  且  $P(\partial)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ , 证明:  $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d)$ .

**证明.** 记完整多项式象征为  $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha$ ,  $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ .

(1) 设  $P(\partial)$  椭圆. 由于  $P_m$  在单位球面  $\mathbb{S}^{d-1}$  上连续且处处非零, 存在  $c_0 > 0$  使得  $|P_m(\omega)| \geq c_0 (\forall |\omega| = 1)$ . 把低阶项记为  $P_{<m} := P - P_m$ . 当  $\xi = r\omega$ ,  $r = |\xi| \geq 1$ ,  $|\omega| = 1$  时,

$$P(r\omega) = r^m P_m(\omega) + P_{<m}(r\omega), \quad |P_{<m}(r\omega)| \leq C_1 r^{m-1}.$$

因此取  $R$  足够大, 使得  $C_1 R^{-1} \leq c_0/2$ , 则当  $r \geq R$  时

$$|P(r\omega)| \geq r^m (c_0 - C_1 r^{-1}) \geq \frac{c_0}{2} r^m.$$

反过来, 若  $P(\partial)$  不椭圆, 则存在  $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$  使得  $P_m(\omega_0) = 0$ . 于是当  $r \rightarrow \infty$  时,  $P(r\omega_0) = P_{<m}(r\omega_0) = O(r^{m-1})$ . 这不可能使得  $|P(r\omega_0)| \geq Cr^m$  对所有充分大的  $r$  成立. 因此高频下界成立当且仅当  $P(\partial)$  椭圆.

(2) 设  $P(\partial)$  椭圆, 则  $\widehat{P(\partial)u}(\xi) = P(\mathbf{i}\xi)\hat{u}(\xi)$ . 由(1)应用于 Fourier 象征  $P(\mathbf{i}\xi)$  可知, 存在  $C, R > 0$  使得  $|P(\mathbf{i}\xi)| \geq C|\xi|^m, |\xi| \geq R$ . 于是

$$\|u\|_{H^{s+m}}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s+2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| < R} \langle \xi \rangle^{2s+2m} |\hat{u}|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq R} \langle \xi \rangle^{2s+2m} |\hat{u}|^2 d\xi.$$

低频部分由  $u \in H^s$  控制:

$$\int_{|\xi| < R} \langle \xi \rangle^{2s+2m} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C_R \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}|^2 d\xi.$$

高频部分由椭圆下界控制:

$$\int_{|\xi| \geq R} \langle \xi \rangle^{2s+2m} |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \int_{|\xi| \geq R} \langle \xi \rangle^{2s} |P(\mathbf{i}\xi)|^2 |\hat{u}|^2 d\xi \leq C \|P(\partial)u\|_{H^s}^2.$$

综上所述可得

$$\|u\|_{H^{s+m}}^2 \leq C (\|u\|_{H^s}^2 + \|P(\partial)u\|_{H^s}^2) < \infty \implies u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d).$$

□

**作业题 7 (习题6.2.1).** 证明非线性 Schrödinger 方程  $\mathbf{i}u_t + \Delta u = \mu|u|^{p-1}u$  ( $\mu = \pm 1, p \geq 1$ ) 的质量、能量和动量守恒律。

- (质量守恒)  $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0$ .
- (能量守恒)  $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 + \frac{\mu}{p+1} |u(t, \mathbf{x})|^{p+1} d\mathbf{x} = 0$ .
- (动量守恒)  $\frac{d}{dt} \mathbf{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, \mathbf{x}) \overline{\nabla u(t, \mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0$ .

**证明.** 以下计算先对充分光滑且快速衰减的解进行。一般能量空间解可由标准正则化与极限过程得到相同守恒律。原方程可写成  $u_t = \mathbf{i}\Delta u - \mathbf{i}\mu|u|^{p-1}u$ .

质量守恒. 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 d\mathbf{x} &= 2\mathbf{Re} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \bar{u} d\mathbf{x} = 2\mathbf{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{i}\Delta u - \mathbf{i}\mu|u|^{p-1}u) \bar{u} d\mathbf{x} \\ &= 2\mathbf{Re} \left( -\mathbf{i} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - \mathbf{i}\mu \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} d\mathbf{x} \right) = 0. \end{aligned}$$

能量守恒. 记  $E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\mu}{p+1} |u|^{p+1} dx$ . 则

$$E'(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \bar{u}_t dx + \mu \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p-1} \operatorname{Re}(u_t \bar{u}) dx = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta u + \mu |u|^{p-1} u) \bar{u}_t dx.$$

而方程给出  $-\Delta u + \mu |u|^{p-1} u = i u_t$ , 因此  $E'(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} i u_t \bar{u}_t dx = 0$ .

动量守恒. 对  $1 \leq j \leq d$ , 令  $M_j(t) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u \bar{\partial}_j u dx$ . 则

$$M'_j(t) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \bar{\partial}_j u + u \bar{\partial}_j u_t dx = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \bar{\partial}_j u - \partial_j u \bar{u}_t dx = 2 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \bar{\partial}_j u dx.$$

代入  $u_t = i \Delta u - i \mu |u|^{p-1} u$  得到

$$M'_j(t) = 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \bar{\partial}_j u dx - 2 \mu \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p-1} u \bar{\partial}_j u dx.$$

第一项为零

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \bar{\partial}_j u dx = - \sum_{k=1}^d \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_k u \bar{\partial}_j \partial_k u dx = - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j (|\nabla u|^2) dx = 0.$$

第二项因为  $\operatorname{Re}(|u|^{p-1} u \bar{\partial}_j u) = \frac{1}{p+1} \partial_j (|u|^{p+1})$ , 故

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p-1} u \bar{\partial}_j u dx = \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j (|u|^{p+1}) dx = 0.$$

于是  $M'_j(t) = 0$ . □

**作业题 8** (习题6.1.2+问题6.2.3). 今考虑cubic NLS解的性质。

$$i \partial_t u + \Delta u = \mu |u|^2 u \text{ in } I \times \mathbb{R}^3, \quad u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}). \quad (\text{NLS})$$

其中初值  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mu = \pm 1$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  是时间区间。

(1) 考虑使用容许对  $(p, q) = (4, 3)$ . 令  $F(u)(t, \mathbf{x}) = |u|^2 u(t, \mathbf{x})$ , 证明如下带导数的Strichartz估计

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} F(u)(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L_t^\infty H_x^1(I \times \mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{L_t^4 W_x^{1,3}(I \times \mathbb{R}^3)}^3.$$

(2) 利用(1)证明: 当  $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \ll 1$  时, 方程(NLS)有小初值整体解  $u \in L_t^\infty(\mathbb{R}; H_x^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_t^4(\mathbb{R}; W_x^{1,3}(\mathbb{R}^3))$ .

(3) 在(2)的条件下证明散射结论: 存在  $u_\pm \in H^1(\mathbb{R}^3)$  使得  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t, \cdot) - e^{it\Delta} u_\pm\|_{H^1} = 0$ .

(4) 现在设  $\mu = -1$ , 初值还满足  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \infty$ . 设  $u: [0, T_*] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  是此时(NLS)在  $[0, T_*] \times \mathbb{R}^3$  上

的解。定义能量 $E(t)$ 和位力势 $V(t)$ 如下

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 - \frac{1}{4} |u(t, \mathbf{x})|^4 \, d\mathbf{x}, \quad V(t) := \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}|^2 |u(t, \mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

证明：若 $E(0) < 0$ ，则 $T_* < +\infty$ 。（提示：先写出Virial恒等式，然后证明 $V''(t) \leq 16E(t)$ 。）

证明. (1) 将 $F(u)$ 在 $I$ 外延拓为零。三维 Schrödinger 容许对 (4, 3) 满足 $\frac{2}{4} + \frac{3}{3} = \frac{3}{2}$ 。由非齐次 Strichartz 估计，

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} F(u)(\tau) \, d\tau \right\|_{L_t^\infty H_x^1} \lesssim \|F(u)\|_{L_t^{4/3} W_x^{1,3/2}}.$$

由于 $F(u) = |u|^2 u$ ，有 $\||u|^2 u\|_{L_x^{3/2}} \leq \|u\|_{L_x^{9/2}}^3$ ，以及 $|\nabla(|u|^2 u)| \lesssim |u|^2 |\nabla u|$ 。于是由 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入 $W^{1,3}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^3)$  ( $3 \leq r < \infty$ ) 得到

$$\|F(u)\|_{L_t^{4/3} W_x^{1,3/2}} \lesssim \|u\|_{L_t^4 L_x^{9/2}}^3 + \||u|^2 |\nabla u|\|_{L_t^{4/3} L_x^{3/2}} \lesssim \|u\|_{L_t^4 W_x^{1,3}}^3.$$

因此

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-\tau)\Delta} F(u)(\tau) \, d\tau \right\|_{L_t^\infty H_x^1(I \times \mathbb{R}^3)} \lesssim \|u\|_{L_t^4 W_x^{1,3}(I \times \mathbb{R}^3)}^3.$$

(2) 在整个时间轴上定义 Banach 空间 $X := L_t^\infty(\mathbb{R}; H_x^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_t^4(\mathbb{R}; W_x^{1,3}(\mathbb{R}^3))$ ，范数为 $\|u\|_X := \|u\|_{L_t^\infty H_x^1} + \|u\|_{L_t^4 W_x^{1,3}}$ 。方程对应的解映射为（由 Duhamel 原理可得）

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\mu \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta} (|u|^2 u)(\tau) \, d\tau.$$

由齐次与非齐次 Strichartz 估计以及(1)中的非线性估计得到

$$\|\Phi(u)\|_X \leq C \|u_0\|_{H^1} + C \|u\|_X^3.$$

对 $u, v \in X$ ，利用 $|u|^2 u - |v|^2 v = (u-v)(|u|^2 + u\bar{v} + |v|^2)$  以及对应的带导数乘积估计可得

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_X \leq C (\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2) \|u - v\|_X.$$

取 $B_R := \{u \in X : \|u\|_X \leq R\}$ ， $R = 2C \|u_0\|_{H^1}$ 。当 $\|u_0\|_{H^1}$ 足够小时，可使 $CR^2 \leq 1/4$ ，于是 $\Phi$ 将 $B_R$ 映入自身且是压缩映射，由压缩映射原理给出唯一不动点 $u \in X$ ，即方程的小初值整体解，并满足 $u \in L_t^\infty(\mathbb{R}; H_x^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_t^4(\mathbb{R}; W_x^{1,3}(\mathbb{R}^3))$ 。

(3) 仍记 $F(u) = |u|^2 u$ 。由上一步有 $F(u) \in L_t^{4/3}(\mathbb{R}; W_x^{1,3/2}(\mathbb{R}^3))$ 。对 $0 < a < b$ ，由 Strichartz 估计得，

$$\left\| \int_a^b e^{-i\tau\Delta} F(u)(\tau) \, d\tau \right\|_{H^1} \lesssim \|F(u)\|_{L_t^{4/3}([a,b]; W_x^{1,3/2})}.$$

因为右端当  $a, b \rightarrow +\infty$  时趋于零, 所以  $\int_0^t e^{-i\tau\Delta} F(u)(\tau) d\tau$  在  $H^1$  中有极限。定义

$$u_+ := u_0 - i\mu \int_0^{+\infty} e^{-i\tau\Delta} F(u)(\tau) d\tau \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

由 Duhamel 原理可得

$$\|u(t) - e^{it\Delta} u_+\|_{H^1} = \left\| e^{it\Delta} \left( i\mu \int_t^{+\infty} e^{-i\tau\Delta} F(u)(\tau) d\tau \right) \right\|_{H^1} \lesssim \|F(u)\|_{L_t^{4/3}([t, +\infty); W_x^{1,3/2})} \longrightarrow 0.$$

同理, 在负时间方向定义

$$u_- := u_0 + i\mu \int_{-\infty}^0 e^{-i\tau\Delta} F(u)(\tau) d\tau \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

即可得到

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_-\|_{H^1} = 0.$$

(4) 此时方程为聚焦 cubic NLS  $i u_t + \Delta u = -|u|^2 u$ . 在  $|x|u_0 \in L^2$  的条件下, 位力势  $V(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 |u(t, \mathbf{x})|^2 dx$  在解存在的时间范围内是良定的。对光滑衰减解直接计算可得 Virial 恒等式

$$V'(t) = 4\text{Im} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \cdot \nabla u \bar{u} dx, \quad V''(t) = 8 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx - 6 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx.$$

另一方面, 能量守恒给出

$$E(t) = E(0), \quad E(t) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4} \int |u|^4 dx.$$

因此

$$V''(t) = 8 \int |\nabla u|^2 dx - 6 \int |u|^4 dx = 16E(t) - 2 \int |u|^4 dx \leq 16E(t) = 16E(0).$$

若  $E(0) < 0$ , 记  $16E(0) = -\delta < 0$ . 反设  $T_* = +\infty$ , 则对任意的  $t \geq 0$  都有  $V''(t) \leq -\delta$ , 积分两次得到

$$V(t) \leq V(0) + V'(0)t - \frac{\delta}{2}t^2.$$

右端当  $t$  足够大时为负, 但  $V(t) = \int |x|^2 |u(t, \mathbf{x})|^2 dx \geq 0$ , 矛盾。因此  $T_* < +\infty$ . □