2026年春季学期现代偏微分方程作业三

Pohozaev恒等式、线性抛物方程、消失粘性法

截止时间：2026.5.7下课前（电子版截至当天23:59:59）

以下两题均可忽略光滑逼近的步骤，且可以默认第一题无穷远处的边界积分皆为零。

作业题 1 (习题2.8.1). $\mathbb{R}^d$中的质量临界Schrödinger方程的基态 (ground state) Q是满足如下半线性椭圆方程的径向正解，且在无穷远处衰减到零

$$-\Delta Q + Q - |Q|^{\frac{4}{d}} Q = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

(1) 模仿定理2.8.2的方法证明: $\|Q\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^d)}^{2+\frac{4}{d}} = (1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$.

(2) 已知如下 Galiargo-Nirenberg 插值不等式成立，且$u=Q$时该不等式取等号

$$\|u\|_{L^{2+(4/d)}(\mathbb{R}^d)}^{2+(4/d)} \leqslant C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{4/d}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

写出此时的最佳常数C关于$\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$的表达式。

作业题 2 (习题2.8.2). 设有界区域$U\subset\mathbb{R}^d$边界光滑，$V\in C^1(\overline{U})$是给定的位势函数，$\lambda>0$是$(-\Delta+V(\boldsymbol{x})I)$算子(带Dirichlet零边值)的一个特征值，$u\in H^2(U)\cap H_0^1(U)$是对应的特征函数，即

$$-\Delta u + V(\boldsymbol{x})u = \lambda u \text{ in } U, \qquad u|_{\partial U}=0.$$

证明：

$$\lambda\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_{\partial U}(\boldsymbol{x}\cdot N(\boldsymbol{x}))\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\int_U (2V(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\cdot\nabla V(\boldsymbol{x}))u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

作业题 3 (习题3.2.1). 设 $f\in L^2(U)$，$u_m=\sum_{k=1}^m d_m^k w_k$ 满足

$$\int_U \nabla u_m\cdot\nabla w_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f\,w_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall 1\leqslant k\leqslant m,$$

其中 $\{w_k\}$ 是 $H_0^1(U)$ 的标准正交基。证明：$\{u_m\}$ 存在子列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛于Poisson方程 $-\Delta u=$

$f\ (\boldsymbol{x}\in U), u|_{\partial U}=0$ 的弱解 u.

作业题 4 (习题3.2.2+问题3.4.1). 设 $g\in L^2(U)$ 并设 u 是如下问题的光滑解：

$$\partial_t u-\Delta u=0 \ \text{ in } U_T,\quad u=0 \ \text{ on } [0,T]\times\partial U,\quad u=g \ \text{ on } \{t=0\}\times U. \tag{0.1}$$

(1) 证明：对任意的$t\geqslant 0$有$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(U)}\leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$. 这里 $\lambda_1>0$ 是具有零 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 在 U 上的主特征值。

(2) 如果再假设 $g\in C^1(\overline{U})$ 且满足相容性条件 $g|_{\partial U}=0$，证明：存在常数 $C>0$ 使得对任意 $t>0$ 都有 $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{U}}|u(t,\boldsymbol{x})|\leqslant Ce^{-\lambda_1 t}$.

提示：对(2)，如果初值是对应于$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边界条件时)的主特征值 λ_1 的特征函数 w_1，那对应热方程的解是什么？然后用问题2.6.2的结论。

作业题 5 (问题3.5.1). 记 $\Omega=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$，其边界为 $\partial\Omega=\{x_1=0\}$. 设向量场 $\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in W^{3,\infty}([0,T]\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$. 任给参数 $\varepsilon\in(0,1]$，考虑粘性对流–扩散方程初边值问题：

$$\begin{cases}\partial_t u^\varepsilon+\mathbf{b}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla u^\varepsilon-\varepsilon\Delta u^\varepsilon=0 & t\in(0,T),\boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \partial_1 u^\varepsilon|_{\partial\Omega}=0 & t\in[0,T],\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\\ u^\varepsilon(0,\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})\in H^2(\Omega) & \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}.\end{cases} \tag{P_ε}$$

已知对任意 $\varepsilon>0$，(P_ε)存在充分光滑的解 u^ε.

(1) 若 $b_1=0$. 证明如下结论。

(1a) $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ 关于 ε 一致有界，进而 $\{u^\varepsilon\}$ 存在子列在 $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ 中弱-*收敛到 $u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, 且 u 是无粘传输方程 $\partial_t u+\mathbf{b}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla u=0$ 的弱解，初值仍为 g.

(1b) 此时 $\partial_1 u|_{\partial\Omega}$ 是否一定为零？

(1c) $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon-u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

(2) 若 $b_1=1$ 且 b_2 不依赖 x_1. 证明：$\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ 关于 ε 仍然一致有界，并问：$\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ 关于 ε 是否一致有界？证明结论或者构造反例。

提示：若$g\in H^2(\Omega)$且方程解充分光滑，则g应该满足相容性条件$\partial_1 g|_{\partial\Omega}=0$，但在$g\in H^1(\Omega)$时无法定义$\partial g$的迹。对(2)，思考如何对$u^\varepsilon$的一阶导数做一致估计。

作业题 6 (补充题). 设维数$d\geqslant 2$，给定$f\in L^2(U)$. 对常数$\varepsilon>0$，考虑如下带有钳支边界条件的奇

异摄动四阶椭圆方程

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f \text{ in } U, \qquad u_\varepsilon = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U.$$

已知对任意给定的 $\varepsilon > 0$，该方程存在唯一的弱解 $u_\varepsilon \in H_0^2(U)$.

(1) 证明：存在 $u_0 \in H_0^1(U)$，使得当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，$u_\varepsilon \xrightarrow{H_0^1(U)} u_0$，并求出 u_0 (在弱意义下)满足的极限方程。

(2) 证明：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_U |\Delta u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

(3) 若f使得(1)中所得的$u_0 \in H^2(U)$，且 $\frac{\partial u_0}{\partial N}$ 在 ∂U 上不恒为零。证明：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \|u_\varepsilon\|_{H^2(U)} = +\infty$.

(4) (选做) 仍然假设f使得(1)中所得的$u_0 \in H^2(U)$，而且极限函数还恰好满足 $\frac{\partial u_0}{\partial N}$在 ∂U 上恒为零，回答如下问题：

(4a) 证明：当$\varepsilon \to 0_+$时，$u_\varepsilon \xrightarrow{H^2} u_0$，且存在不依赖$\varepsilon$的常数$C > 0$使得 $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(U)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

(4b) 若进一步假设$f \in H_0^1(U)$，证明：存在不依赖ε的常数$C'' > 0$使得 $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^2(U)} \leqslant C''\sqrt{\varepsilon}$.

(4c) 如果去掉$f \in H_0^1(U)$，此时是否还存在$a > 0$，使得存在不依赖ε的常数$C' > 0$满足$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^2(U)} \leqslant C'\varepsilon^a$？证明你的结论。

提示：(3) 联想迹定理的结论；(4) 注意对 $f \in H_0^2, \|\Delta f\|_{L^2}$ 和 $\|f\|_{H^2}$ 是等价范数；对 (4c) 可以考虑模仿问题 2.2.2 构造高频序列，或者定义算子$T : H_0^1 \to H_0^1$为：给定$h \in H_0^1$，令$Th \in H_0^2$是唯一满足 $\int_U \Delta(Th)\Delta v = \int_U \nabla(Th)\cdot\nabla v \ (\forall v \in H_0^2)$的元素（由Lax–Milgram定理证明），验证它是自伴紧算子，于是得到一组正交基，再适当地选取 u_0 在该正交基展开下的系数。