2026年春季学期现代偏微分方程作业三答案

Pohozaev恒等式、线性抛物方程、消失粘性法

章俊彦　　yx3x@ustc.edu.cn

截止时间：2026.5.7下课前（电子版截至当天23:59:59）

以下两题均可忽略光滑逼近的步骤，且可以默认第一题无穷远处的边界积分皆为零。

作业题 1 (习题2.8.1). $\mathbb{R}^d$中的质量临界Schrödinger方程的基态 (ground state) Q是满足如下半线性椭圆方程的径向正解，且在无穷远处衰减到零

$$-\Delta Q + Q - |Q|^{\frac{4}{d}} Q = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

(1) 模仿定理2.8.2的方法证明: $\|Q\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^d)}^{2+\frac{4}{d}} = (1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$.

(2) 已知如下 Galiargo-Nirenberg 插值不等式成立，且$u = Q$时该不等式取等号

$$\|u\|_{L^{2+(4/d)}(\mathbb{R}^d)}^{2+(4/d)} \leqslant C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{4/d}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

写出此时的最佳常数C关于$\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$的表达式。

证明. 首先将原方程两边同乘 Q 并积分，通过分部积分（假设边界项在无穷远衰减为零），得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla Q|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^d} Q^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^d} |Q|^{2+\frac{4}{d}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{A}$$

接下来推导Pohozaev恒等式，方程两边同乘 $\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q$ 并积分得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta Q)(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^d} Q(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^d} |Q|^{\frac{4}{d}} Q(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

分别计算这三项。第一项分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(-\Delta Q)(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbb{R}^d}\nabla Q\cdot\nabla(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d}\partial_i Q(\partial_i Q + x_j\partial_j\partial_i Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla Q|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla(|\nabla Q|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla Q|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla Q|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (1-\frac{d}{2})\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla Q|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

第二项：

$$\int_{\mathbb{R}^d}Q(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla(Q^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}Q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

第三项：

$$-\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{\frac{4}{d}}Q(\boldsymbol{x}\cdot\nabla Q)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2+\frac{4}{d}}\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla(|Q|^{2+\frac{4}{d}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{d}{2+\frac{4}{d}}\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{2+\frac{4}{d}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

将三项相加得到

$$(1-\frac{d}{2})\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla Q|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}Q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{d^2}{2d+4}\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{2+\frac{4}{d}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \tag{B}$$

(A)和(B)联立并消去 $\int|\nabla Q|^2$ 项，得到

$$(1-\frac{d}{2})\left(\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{2+\frac{4}{d}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^d}Q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) - \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}Q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{d^2}{2d+4}\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{2+\frac{4}{d}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

合并同类项后就得到

$$\frac{2}{d+2}\int_{\mathbb{R}^d}|Q|^{2+\frac{4}{d}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d}Q^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \implies \|Q\|_{L^{2+\frac{4}{d}}}^{2+\frac{4}{d}} = (1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2}^2.$$

(2) 已知不等式取等号时 $u = Q$. 此时$\|Q\|_{L^{2+4/d}}^{2+4/d} = C\|Q\|_{L^2}^{4/d}\|\nabla Q\|_{L^2}^2$. 由(1)已知 $\|Q\|_{L^{2+4/d}}^{2+4/d} = (1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2}^2$。将其代入(A)可得 $\|\nabla Q\|_{L^2}^2 = (1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2}^2 - \|Q\|_{L^2}^2 = \frac{d}{2}\|Q\|_{L^2}^2$. 将这两项代入取等号的插值不等式得到

$$(1+\frac{d}{2})\|Q\|_{L^2}^2 = C\|Q\|_{L^2}^{4/d}\left(\frac{d}{2}\|Q\|_{L^2}^2\right)$$

消去 $\|Q\|_{L^2}^2$ 并求解 C即得

$$1+\frac{d}{2} = C\frac{d}{2}\|Q\|_{L^2}^{4/d} \implies C = \frac{1+d/2}{d/2}\|Q\|_{L^2}^{-4/d} = \frac{d+2}{d}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{-4/d}.$$

□

作业题 2 (习题2.8.2). 设有界区域$U \subset \mathbb{R}^d$边界光滑，$V \in C^1(\overline{U})$是给定的位势函数，$\lambda > 0$是$(-\Delta + V(\boldsymbol{x})I)$算子(带Dirichlet零边值)的一个特征值，$u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$是对应的特征函数，即

$$-\Delta u + V(\boldsymbol{x})u = \lambda u \text{ in } U, \qquad u|_{\partial U} = 0.$$

证明：

$$\lambda \int_U u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_{\partial U} (\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x})) \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2 \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\int_U (2V(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \cdot \nabla V(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明. 方程两边同乘 $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u$ 并积分得到

$$\int_U (-\Delta u)(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U V(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int_U u(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对第一项分部积分可得

$$\int_U (-\Delta u)(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} -\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}S + \int_U \nabla u \cdot \nabla(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由于在 ∂U 上 $u = 0$，故 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial N} N(\boldsymbol{x})$，从而 $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u = (\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x}))\frac{\partial u}{\partial N}$。因此边界项为 $-\int_{\partial U} (\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x}))(\frac{\partial u}{\partial N})^2 \,\mathrm{d}S$。内部项经计算得

$$\int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_U \boldsymbol{x} \cdot \nabla(|\nabla u|^2) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (1 - \frac{d}{2})\int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int_{\partial U} (\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x}))|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}S.$$

因边界上 $|\nabla u|^2 = (\frac{\partial u}{\partial N})^2$，所以第一项合并为：

$$(1 - \frac{d}{2})\int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial U} (\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x})) \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2 \mathrm{d}S.$$

对第二项分部积分得到

$$\int_U V(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_U V(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \cdot \nabla(u^2) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_{\partial U} V(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \cdot N(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_U \nabla \cdot (\boldsymbol{x}V(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于边界上 $u = 0$，且 $\nabla \cdot (\boldsymbol{x}V(\boldsymbol{x})) = dV(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} \cdot \nabla V(\boldsymbol{x})$，该项变为

$$-\frac{d}{2}\int_U V(\boldsymbol{x})u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_U (\boldsymbol{x} \cdot \nabla V(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对方程右端积分可得

$$\lambda \int_U u(\boldsymbol{x} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\lambda}{2}\int_U \boldsymbol{x} \cdot \nabla(u^2) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{\lambda d}{2}\int_U u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

另一方面，将原方程乘 u 积分得到能量估计

$$\int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U V(\boldsymbol{x})u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int_U u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \implies \int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U (\lambda - V(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

将 $\int_U |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 代入前面第一项的结果，经计算可得

$$\lambda \int_U u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_U V(\boldsymbol{x})u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial U} (\boldsymbol{x}\cdot N(\boldsymbol{x})) \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)^2 \,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_U (\boldsymbol{x}\cdot \nabla V(\boldsymbol{x}))u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

移项整理即得结论。 □

作业题 3 (习题3.2.1)**.** 设 $f \in L^2(U)$，$u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k w_k$ 满足

$$\int_U \nabla u_m \cdot \nabla w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f\, w_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant m,$$

其中 $\{w_k\}$ 是 $H_0^1(U)$ 的标准正交基。证明：$\{u_m\}$ 存在子列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛于Poisson方程 $-\Delta u = f\ (\boldsymbol{x} \in U), u|_{\partial U} = 0$ 的弱解 u.

证明. 在题给条件式两端同乘 d_m^k 并对 k 从 1 到 m 求和，利用 $u_m = \sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k w_k$ 可得

$$\int_U |\nabla u_m|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f u_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式和 Poincaré 不等式得到

$$\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|u_m\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}\|\nabla u_m\|_{L^2} \implies \|\nabla u_m\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$

这表明 $\{u_m\}$ 在 $H_0^1(U)$ 中一致有界。由弱紧性得知必存在子列（仍记为 $\{u_m\}$）和 $u \in H_0^1(U)$，使得 $u_m \rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛。

接下来证明 u 是弱解。对任意固定的 $v \in H_0^1(U)$，由于 $\{w_k\}$ 是标准正交基，存在由前 m 个基底构成的组合 $v_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k w_k$，使得当 $m \to \infty$ 时 v_m 在 H_0^1 中强收敛到 v。对任意给定的 m有

$$\int_U \nabla u_m \cdot \nabla v_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

令 $m \to \infty$，由于 $u_m \rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛，且 $v_m \to v$ 在 $H_0^1(U)$ 中强收敛，所以左右两端内积均收敛

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

□

作业题 4 (习题3.2.2+问题3.4.1). 设 $g \in L^2(U)$ 并设 u 是如下问题的光滑解:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \ \text{ in } U_T, \quad u = 0 \ \text{ on } [0,T]\times\partial U, \quad u = g \ \text{ on } \{t=0\}\times U. \tag{1}$$

(1) 证明：对任意的$t \geqslant 0$有$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(U)} \leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$. 这里 $\lambda_1 > 0$ 是具有零 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 在 U 上的主特征值。

(2) 如果再假设 $g \in C^1(\overline{U})$ 且满足相容性条件 $g|_{\partial U} = 0$，证明：存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $t > 0$ 都有 $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{U}} |u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant Ce^{-\lambda_1 t}$.

提示：对(2)，如果初值是对应于$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边界条件时)的主特征值 λ_1 的特征函数 w_1，那对应热方程的解是什么？然后用问题2.6.2的结论。

证明. (1) 方程乘 u 然后分部积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U u\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

根据主特征值 λ_1 的 Rayleigh 商定义，有 $\int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \lambda_1 \int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant -2\lambda_1\|u(t)\|_{L^2}^2$$

由 Grönwall 不等式解得$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant e^{-2\lambda_1 t}\|g\|_{L^2}^2 \implies \|u(t,\cdot)\|_{L^2(U)} \leqslant e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2(U)}$.

(2) 设主特征值 λ_1 对应的正特征函数为 $w_1(\boldsymbol{x})$，即 $-\Delta w_1 = \lambda_1 w_1$，且在 U 内 $w_1 > 0$。考察函数 $v(t,\boldsymbol{x}) = Ce^{-\lambda_1 t}w_1(\boldsymbol{x})$。直接计算可知 $\partial_t v - \Delta v = -C\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}w_1 - e^{-\lambda_1 t}(-C\lambda_1 w_1) = 0$，即 v 也是热方程的光滑解。由于 $g \in C^1(\overline{U})$ 且 $g|_{\partial U} = 0$，由问题2.6.2得知：存在常数 $C > 0$，使得在 $\overline{U}$ 上恒有 $-Cw_1(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant Cw_1(\boldsymbol{x})$. 这即是初始时刻 $t = 0$ 时的比较条件. 由于 u 和 $\pm v$ 在边界上均为零，由抛物方程弱极值原理（比较原理），对任意 $t > 0$ 都有$-v(t,\boldsymbol{x}) \leqslant u(t,\boldsymbol{x}) \leqslant v(t,\boldsymbol{x})$. 因此$|u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant Ce^{-\lambda_1 t}w_1(\boldsymbol{x}) \leqslant C'e^{-\lambda_1 t}$. □

作业题 5 (问题3.5.1). 记 $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$，其边界为 $\partial\Omega = \{x_1 = 0\}$. 设$\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in W^{3,\infty}([0,T]\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$. 任给参数 $\varepsilon \in (0,1]$，考虑粘性对流–扩散方程初边值问题：

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \mathbf{b}(t,\boldsymbol{x})\cdot\nabla u^\varepsilon - \varepsilon\Delta u^\varepsilon = 0 & t \in (0,T), \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \partial_1 u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0 & t \in [0,T], \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0,\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \in H^2(\Omega) & \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{P_ε}$$

已知对任意 $\varepsilon > 0$，(P_ε)存在充分光滑的解 u^ε.

(1) 若 $b_1 = 0$. 证明如下结论。

(1a) $\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ 关于 ε 一致有界，进而 $\{u^\varepsilon\}$ 存在子列在 $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ 中弱-*收敛到 $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, 且 u 是无粘传输方程 $\partial_t u + \mathbf{b}(t,\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u = 0$ 的弱解，初值仍为 g.

(1b) 此时 $\partial_1 u|_{\partial\Omega}$ 是否一定为零？

(1c) $\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

(2) 若 $b_1 = 1$ 且 b_2 不依赖 x_1，证明：$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ 关于 ε 仍然一致有界，并问：$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ 关于 ε 是否一致有界？证明结论或者构造反例。

提示：若$g \in H^2(\Omega)$且方程解充分光滑，则g应该满足相容性条件$\partial_1 g|_{\partial\Omega} = 0$；对(2)，思考如何对$u^\varepsilon$的一阶导数做一致估计。

证明. (1) 若 $b_1 = 0$.

先作 L^2 估计。方程两边同乘 u^ε 并积分得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \varepsilon\int_{\partial\Omega} u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}\,\mathrm{d}S = -\int_\Omega (b\cdot\nabla u^\varepsilon)u^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

因为 $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = -\partial_1 u^\varepsilon = 0$，所以边界积分为 0。对流项利用对称性，分部积分可得

$$-\int_\Omega b\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}(u^\varepsilon)^2\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)(u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(b\cdot\boldsymbol{n})(u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)(u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant \|\nabla\cdot b\|_{L^\infty}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2$，由 Grönwall 不等式知 $\|u^\varepsilon\|_{L^2}$ 一致有界。

再作 H^1 估计。方程两边同乘 $-\Delta u^\varepsilon$ 并积分得到

$$\int_\Omega \partial_t u^\varepsilon(-\Delta u^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega (b\cdot\nabla u^\varepsilon)(-\Delta u^\varepsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_\Omega (\Delta u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

第一项分部积分可得

$$-\int_\Omega \partial_t u^\varepsilon \Delta u^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega}\partial_t u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

由于 $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0$，边界项为 0。

现在处理中间的对流项 $-\int_\Omega b_j\partial_j u^\varepsilon\,\partial_i^2 u^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，分部积分得到该式等于

$$\int_\Omega b_j\partial_j\partial_i u^\varepsilon\,\partial_i u^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \partial_i b_j\,\partial_j u^\varepsilon\,\partial_i u^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega}(\mathbf{b}\cdot\nabla)u^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial N}\,\mathrm{d}S.$$

上面第二项是可控的，第三项是零，对第一项，我们注意到被积函数实际上是 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\nabla)|\nabla u^\varepsilon|^2$，所以分部积

分得到

$$\int_\Omega b_j \partial_j \partial_i u^\varepsilon \, \partial_i u^\varepsilon \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot \mathbf{b})|\nabla u^\varepsilon|^2 + \int_{\partial\Omega} (b\cdot N)|\nabla u|^2 \, \mathrm{d}S = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot \mathbf{b})|\nabla u^\varepsilon|^2 + 0.$$

所有的内部积分利用 Cauchy–Schwarz 及 $b \in W^{3,\infty}$ 可被 $C\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2$ 控制。最终得到 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\Delta u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant C\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2$。因此 $\{u^\varepsilon\}$ 在 $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ 中一致有界。由弱紧性必定存在子列弱-*收敛于无粘方程的解 u.

(1b) 不一定。无粘方程为 $\partial_t u + b_2(t,\boldsymbol{x})\partial_2 u = 0$，对其两边关于 x_1 求导得

$$\partial_t(\partial_1 u) + b_2\partial_2(\partial_1 u) = -(\partial_1 b_2)\partial_2 u$$

在边界 $x_1 = 0$ 上，即使初值满足 $\partial_1 g(0,x_2) = 0$，使得初始时刻 $\partial_1 u = 0$，但只要源项 $-(\partial_1 b_2)\partial_2 u \neq 0$，$\partial_1 u$ 就会随时间演化出非零值。因此极限函数的法向导数不一定保持为零。

(1c) 令误差 $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u$。由$g \in H^2$和系数的正则性得知，传输方程保持了$u$的$H^2$正则性，于是可以计算$w^\varepsilon$的方程 $\partial_t w^\varepsilon + b\cdot\nabla w^\varepsilon - \varepsilon\Delta w^\varepsilon = \varepsilon\Delta u$。同乘 w^ε 并积分就得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2}^2 - \varepsilon\int_{\partial\Omega} w^\varepsilon \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)(w^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_\Omega \Delta u w^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

注意 $\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = 0 - (-\partial_1 u) = \partial_1 u$。将右边扩散源项与边界项结合并分部积分得到

$$\varepsilon\int_\Omega \Delta u w^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \varepsilon\int_{\partial\Omega} w^\varepsilon\partial_1 u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 = -\varepsilon\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w^\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

代回原式后得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant C\|w^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2$。由 Grönwall 不等式即得$\|w^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \leqslant C\varepsilon$.

(2) 先算L^2估计，方程两边同乘 u^ε，分部积分可得（相比第一问来说，多了一个边界项，因为b_1不再是0）

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_2 b_2)|u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在必须消掉 $\int_{\partial\Omega}|u^\varepsilon|^2 dS$，用Gauss–Green公式可得

$$\int_{\partial\Omega}|u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}S = -\int_{\partial\Omega} N_1|u^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}S = -\int_\Omega \partial_1(u_\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 2\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant C\left(\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}^2\right).$$

下面证明法向导数 $w = \partial_1 u^\varepsilon$ 在 L^2 中一致有界。对原方程求∂_1得到 w 满足的方程：

$$\partial_t w + \partial_1 w + b_2\partial_2 w + \underbrace{(\partial_1 b_2)}_{=0}\partial_2 u^\varepsilon - \varepsilon\Delta w = 0, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

直接乘w积分，能量估计可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla w\|_{L^2}^2=\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_2 b_2)w^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\implies\|w(t)\|_{L^2}^2\leqslant C\|\partial_1 g\|_{L^2}^2.$$

现在将其代入L^2估计的结果，就得到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2\leqslant C\|u^\varepsilon\|_{L^2}^2+C$，再次用Grönwall不等式即得结论。

下面再算H^1估计，因为刚才已经得到$\|\partial_1 u^\varepsilon\|_{L^2}$估计，所以现在只要算切向导数 $v=\partial_2 u^\varepsilon$ 的估计。v 的方程为

$$\partial_t v+\partial_1 v+b_2\partial_2 v+(\partial_2 b_2)v-\varepsilon\Delta v=0,\qquad \partial_1 v|_{\partial\Omega}=0.$$

同乘 v 积分，与 u^ε 结构一致，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla v\|_{L^2}^2=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|v|^2\,\mathrm{d}S-\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_2 b_2)|v|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在我们必须控制v的边界积分。令$z=\partial_1 v$，则同上可知我们需要控制 $\|z\|_{L^2(\Omega)}$. 此时我们有

$$\partial_t z+\partial_1 z+b_2\partial_2 z+(\partial_2 b_2)z-\varepsilon\Delta z=0,\qquad z|_{\partial\Omega}=0.$$

直接能量估计可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|z\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla z\|_{L^2}^2=-\frac{1}{2}\int_\Omega(\partial_2 b_2)z^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega(\partial_2 b_2)z^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\|z\|_{L^2}^2.$$

由Grönwall不等式得到$\|z(t)\|_{L^2}^2\leqslant C_1\|z(0)\|_{L^2}^2=C_1\|\partial_1\partial_2 g\|_{L^2}^2$，这就得到 $\|z\|_{L^2}$ 一致有界，进而 $\|v\|_{L^2}$ 一致有界。 □

作业题 6 (补充题). 设维数$d\geqslant 2$，给定$f\in L^2(U)$. 对常数$\varepsilon>0$，考虑如下带有钳支边界条件的奇异摄动四阶椭圆方程

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon-\Delta u_\varepsilon=f\ \text{in}\ U,\qquad u_\varepsilon=\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N}=0\ \text{on}\ \partial U.$$

已知对任意给定的 $\varepsilon>0$，该方程存在唯一的弱解 $u_\varepsilon\in H_0^2(U)$.

(1) 证明：存在 $u_0\in H_0^1(U)$，使得当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，$u_\varepsilon\xrightarrow{H_0^1(U)}u_0$，并求出 u_0 (在弱意义下)满足的极限方程。

(2) 证明：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\int_U|\Delta u_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$.

(3) 若f使得(1)中所得的$u_0\in H^2(U)$，且 $\frac{\partial u_0}{\partial N}$ 在 ∂U 上不恒为零。证明：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+}\|u_\varepsilon\|_{H^2(U)}=+\infty$.

(4) (选做) 仍然假设f使得(1)中所得的$u_0\in H^2(U)$，而且极限函数还恰好满足 $\frac{\partial u_0}{\partial N}$在 ∂U 上恒为零，回答如下问题：

(4a) 证明：当$\varepsilon\to 0_+$时，$u_\varepsilon\xrightarrow{H^2}u_0$，且存在不依赖$\varepsilon$的常数$C>0$使得 $\|u_\varepsilon-u_0\|_{H_0^1(U)}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

(4b) 若进一步假设$f\in H_0^1(U)$，证明：存在不依赖ε的常数$C''>0$使得 $\|u_\varepsilon-u_0\|_{H^2(U)}\leqslant C''\sqrt{\varepsilon}$.

(4c) 如果去掉$f \in H_0^1(U)$，此时是否还存在$a > 0$，使得存在不依赖ε的常数$C' > 0$满足$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^2(U)} \leqslant C'\varepsilon^a$？证明你的结论。

证明. (1)+(2) 将原方程乘 $u_\varepsilon \in H_0^2(U)$ 并积分，分部积分无边界项，得到

$$\varepsilon \int_U (\Delta u_\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f u_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2},$$

于是 $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}$，即 u_ε 在 $H_0^1(U)$ 中关于 ε 一致有界。因此必定存在子列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛至极限 u_0。（实际上整个序列都是弱收敛的，这可由Poisson方程解的唯一性得到）

任取光滑测试函数 $v \in C_c^\infty(U)$，方程乘v然后分部积分得到

$$\varepsilon \int_U \Delta u_\varepsilon \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由前面的能量估计知 $\varepsilon\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C\sqrt{\varepsilon} \to 0$. 取 $\varepsilon \to 0^+$ 极限，第一项消失，第二项由弱收敛得到 $\int_U \nabla u_0 \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。因此极限方程为 $-\Delta u_0 = f \text{ in } U, u_0|_{\partial U} = 0$.

在极限方程中取测试函数 $v = u_0$，有 $\int_U |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f u_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。对原方程能量等式两边取上极限得到

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left(\varepsilon \int_U (\Delta u_\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_U f u_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f u_0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

据 H_0^1 弱收敛的范数下半连续性有$\liminf\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \int_U |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。将其代入上式即得 $\limsup\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \int_U (\Delta u_\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0$, 故极限必定存在且为 0，这样的话就得到 $\int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int_U |\nabla u_0|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，范数收敛+弱收敛即得强收敛。

(3) 反证法，假设存在子列满足 $\|u_{\varepsilon_k}\|_{H^2(U)} \leqslant K$。由弱紧性，该子列必在 $H^2(U)$ 中弱收敛到唯一的极限 u_0. 据迹定理，法向导数算子 $\gamma_1(w) = \frac{\partial w}{\partial N}|_{\partial U}$ 是 $H^2(U) \to H^{1/2}(\partial U)$ (改成$L^2(\partial U)$也可以，如果你现在没学过分数阶空间) 的连续线性映射，因而保弱收敛。由于所有的 u_{ε_k} 都满足 $\frac{\partial u_{\varepsilon_k}}{\partial N} = 0$，取弱极限必然推导出在边界上几乎处处有 $\frac{\partial u_0}{\partial N} = 0$。但这与题设条件中“$\frac{\partial u_0}{\partial N}$ 在 ∂U 上不恒为零”矛盾！反证法成立，故 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \|u_\varepsilon\|_{H^2(U)} = +\infty$。

(4) 现在仍然假设f使得(1)中所得的$u_0 \in H^2(U)$，而且极限函数还恰好满足 $\frac{\partial u_0}{\partial N}$在 ∂U 上恒为零。

(4a) 设 $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$，则现在有$w_\varepsilon \in H_0^2(U)$，作差得 $\varepsilon\Delta^2 w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon = -\varepsilon\Delta^2 u_0$. 用 w_ε 测试并分部积分（利用 $u_0 \in H^2$）得到

$$\varepsilon \int_U (\Delta w_\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\varepsilon \int_U \Delta u_0 \Delta w_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int (\Delta w_\varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int (\Delta u_0)^2.$$

吸收后得到 $\int_U |\nabla w_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta u_0\|_{L^2}^2 \leqslant C\varepsilon$. 同时我们还得到$\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|\Delta u_0\|_{L^2}$, 所以$w_\varepsilon$在$H_0^2(U)$中弱收敛。而刚刚又证明了$H_0^1(U)$中的强极限是0，所以$H_0^2(U)$中的弱极限也是0. 因此对任意给定的 $g \in L^2(U)$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，必有 $\int_U g\Delta w_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to 0$.

接下来证明$H^2(U)$强收敛。仍然从能量估计可得$0 \leqslant \|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant -\int_U \Delta u_0 \Delta w_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 由$H_0^2(U)$弱收敛以

及$\Delta u \in L^2(U)$知，该不等式右边会趋于0，这就说明$\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2} \to 0$，而这又和$\|w_\varepsilon\|_{H_0^2}$是等价范数，所以得到了想要的强收敛。

(4b) 进一步假设 $f \in H_0^1(U)$，此时 u_0 具有更高正则性：$-\Delta u_0 = f \implies \Delta^2 u_0 = -\Delta f \in H^{-1}$. 令 $v_\varepsilon = \frac{w_\varepsilon}{\varepsilon} \in H_0^2(U)$，方程重写为 $\varepsilon\Delta^2 v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon = \Delta f$. 乘 v_ε 并分部积分得到

$$\varepsilon \int_U (\Delta v_\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U |\nabla v_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U \nabla f \cdot \nabla v_\varepsilon \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|\nabla f\|_{L^2} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}.$$

于是$\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|\nabla f\|_{L^2}$，进而有$\varepsilon\|\Delta v_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leqslant \|\nabla f\|_{L^2}^2$，代回 $w_\varepsilon = \varepsilon v_\varepsilon$ 得 $\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2} = \varepsilon\|\Delta v_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\|\nabla f\|_{L^2}$。由椭圆正则性就有 $\|w_\varepsilon\|_{H^2} \leqslant C\|\Delta w_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C''\sqrt{\varepsilon}$。

(4c) 结论：不存在这样的统一常数 $a > 0$。现在我们有$u_0 \in H_0^2(U)$，考查该空间上的两个双线性型

$$a(u, v) = \int_U \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad b(u, v) = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于$H_0^2(U)$紧嵌入$H_0^1(U)$，现在定义算子$T : H_0^1 \to H_0^1$为：给定$h \in H_0^1$，令$Th \in H_0^2$是唯一满足下式的元素

$$a(Th, v) = b(h, v), \qquad \forall v \in H_0^2,$$

这可由Lax–Milgram定理保证。可以验证$T : H_0^1 \to H_0^1$是自伴的紧算子。那么现在由紧自伴算子的谱定理知，存在一列函数 $\{\varphi_k\} \subset H_0^2(U)$和数列 $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \to +\infty$ 满足

$$\int_U \Delta\varphi_k \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mu_k \int_U \nabla\varphi_k \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in H_0^2(U).$$

且 $\int_U \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \delta_{kj}$. 于是 $\int_U \Delta\varphi_j \Delta\varphi_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mu_k \delta_{kj}$. 现在任何 $u_0 \in H_0^2$可以写作 $\sum_k c_k \varphi_k$ 的形式，且 $\sum_k \mu_k c_k^2 < \infty$.

记$f = -\Delta u_0 \in L^2(U)$，其中$u_0$是方程$-\Delta u_0 = f$ in U, $u_0|_{\partial U} = 0$的弱解。接下来构造一个u_0使得不存在统一的常数$a > 0$使得结论成立。我们取子列$\mu_{k_j} \geqslant e^{j^2}$, 并定义$c_{k_j} = 1/(j\sqrt{\mu_{k_j}})$, 其它$c_k$全设置为0，于是$\sum_k \mu_k c_k^2 < \infty$，这样构造的$u_0$满足题设。

现在取$\varepsilon_j = 1/\mu_{k_j}$，于是 $2\varepsilon_j \mu_{k_j} = 1 + \varepsilon_j \mu_{k_j}$，进而（通过对$u^\varepsilon$在同一组基下展开计算可得）

$$\|\Delta(u^{\varepsilon_j} - u_0)\|_{L^2}^2 \geqslant \mu_{k_j} \left(\frac{\varepsilon_j \mu_{k_j}}{1 + \varepsilon_j \mu_{k_j}} \right)^2 c_{k_j}^2 = \frac{1}{4j^2}.$$

于是存在$C > 0$使得$\|u^{\varepsilon_j} - u_0\|_{H^2} \geqslant C/(2j)$.

但另一方面$\varepsilon_j^a \leqslant e^{-aj^2}$，于是对任意$a > 0$都有

$$\frac{\|u^{\varepsilon_j} - u_0\|_{H^2}}{\varepsilon_j^a} \geqslant Ce^{aj^2}/(2j) \to +\infty.$$

这里也可以不用自伴紧算子的特征值理论做。 定义函数类

$$L_0^2(U) := \{f \in L^2(U) \mid \text{对应的 Poisson 方程 } -\Delta u_0 = f \text{ 的弱解 } u_0 \in H_0^2(U)\}.$$

那么题给的f必须落在这个空间里面。现在用反证法：假设存在常数 $a > 0$ 和不依赖于 ε 的统一常数 $M > 0$，使得对于所有 $f \in L_0^2(U)$，均有$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^2(U)} \leqslant M\varepsilon^a \|f\|_{L^2(U)}$.

令误差 $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0 \in H_0^2(U)$，则它满足如下弱形式

$$\varepsilon \int_U \Delta w_\varepsilon \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varepsilon \int_U f \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall v \in H_0^2(U). \tag{2}$$

现在我们构造特定的序列推翻该不等式。任选取不恒为零的光滑截断函数 $\phi \in C_c^\infty(U)$，构造高频序列 $u_0^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) \sin(kx_1)$, $k \in \mathbb{N}^+$. 显然 $u_0^{(k)} \in C_c^\infty(U) \subset H_0^2(U)$。定义对应的 $f^{(k)} = -\Delta u_0^{(k)} \in L_0^2(U)$，由于 $u_0^{(k)} \in H_0^2(U)$，$f^{(k)} \in L_0^2(U)$ 显然成立。直接求导计算得

$$\nabla u_0^{(k)} = \nabla\phi \sin(kx_1) + k\phi \cos(kx_1)\boldsymbol{e}_1, \quad f^{(k)}(\boldsymbol{x}) = k^2\phi \sin(kx_1) - 2k\partial_1\phi \cos(kx_1) - \Delta\phi \sin(kx_1).$$

计算其 L^2 范数的渐近行为（当 $k \to \infty$ 时）

$$\|\nabla u_0^{(k)}\|_{L^2}^2 = k^2 \int_U \phi^2 \cos^2(kx_1) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + O(k) \leqslant Ck^2, \quad \|f^{(k)}\|_{L^2}^2 = k^4 \int_U \phi^2 \sin^2(kx_1) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + O(k^3).$$

由于 $\int_U \phi^2 \sin^2(kx_1) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\int_U \phi^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int_U \phi^2 \cos(2kx_1) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \frac{1}{2}\|\phi\|_{L^2}^2 > 0$，因此存在 $K_0 > 0$ 以及常数 $c_1 > 0$，当 $k \geqslant K_0$ 时有 $\|f^{(k)}\|_{L^2} \geqslant c_1 k^2$. 因此存在不依赖 k 的常数 $C' > 0$，使得对于所有 $k \geqslant K_0$ 成立

$$\|\nabla u_0^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \frac{C'}{k} \|f^{(k)}\|_{L^2}. \tag{3}$$

接下来估计 $w_\varepsilon^{(k)} := u_\varepsilon^{(k)} - u_0^{(k)}$. 在(2) 中取测试函数 $v = w_\varepsilon^{(k)}$，能量估计可得

$$\|\Delta w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \|f^{(k)}\|_{L^2} \quad \text{以及} \quad \|\nabla w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon \|f^{(k)}\|_{L^2} \|\Delta w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \varepsilon \|f^{(k)}\|_{L^2}^2,$$

进而

$$\|\nabla w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon} \|f^{(k)}\|_{L^2}. \tag{4}$$

现在我们通过弱形式(2)取极限得到矛盾。取测试函数 $v = u_0^{(k)} \in H_0^2(U)$，并代入 $\Delta u_0^{(k)} = -f^{(k)}$ 化简得到

$$-\varepsilon \int_U \Delta w_\varepsilon^{(k)} f^{(k)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_U \nabla w_\varepsilon^{(k)} \cdot \nabla u_0^{(k)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\varepsilon \|f^{(k)}\|_{L^2}^2.$$

代入(3)和(4)得到

$$\varepsilon \|f^{(k)}\|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon \|\Delta w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2} \|f^{(k)}\|_{L^2} + \left(\sqrt{\varepsilon} \|f^{(k)}\|_{L^2}\right) \left(\frac{C_3}{k} \|f^{(k)}\|_{L^2}\right),$$

即

$$1 \leqslant \frac{\|\Delta w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2}}{\|f^{(k)}\|_{L^2}} + \frac{C_3}{k\sqrt{\varepsilon}}.$$

对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，我们都可以选取足够大的 k，使得 $\frac{C'}{k\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{2}$，这迫使$\frac{\|\Delta w_\varepsilon^{(k)}\|_{L^2}}{\|f^{(k)}\|_{L^2}} \geqslant \frac{1}{2}$，进而存在常数 $C_0 > 0$，使得$\frac{\|w_\varepsilon^{(k)}\|_{H^2(U)}}{\|f^{(k)}\|_{L^2}} \geqslant \frac{C_0}{2} > 0$. 现在得到

$$\frac{C_0}{2}\|f^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \|w_\varepsilon^{(k)}\|_{H^2(U)} \leqslant M\varepsilon^a\|f^{(k)}\|_{L^2} \implies \frac{C_0}{2} \leqslant M\varepsilon^a, \quad \forall\varepsilon \in (0,1).$$

因为 $C_0 > 0$ 是绝对正的常数，而 $a > 0$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，等式右端 $M\varepsilon^a \to 0$，这导致了 $\frac{C_0}{2} \leqslant 0$ 的矛盾。 □

注记 1. 关于第二种方法的高频序列构造，这里我们从傅立叶分析的角度来解释一下动机（其实这和讲义问题2.2.2的方法有点像）。为了直观，我们暂且忽略边界条件，假设在全空间 $\mathbb{R}^d$ 中使用傅立叶变换（频率变量记作 $\boldsymbol{\xi}$），于是极限方程为 $|\boldsymbol{\xi}|^2\hat{u}_0 = \hat{f}$，摄动方程为 $(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^4 + |\boldsymbol{\xi}|^2)\hat{u}_\varepsilon = \hat{f}$.

我们关心的是误差 $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ 的 H^2 范数。从频率空间角度看，我们需要估计

$$|\boldsymbol{\xi}|^2\hat{w}_\varepsilon = |\boldsymbol{\xi}|^2(\hat{u}_\varepsilon - \hat{u}_0) = |\boldsymbol{\xi}|^2\left(\frac{1}{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^4 + |\boldsymbol{\xi}|^2} - \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)\hat{f} = -\left(\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}\right)\hat{f}.$$

现在观察乘子$M(\varepsilon,\boldsymbol{\xi}) = \frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}$.

- 低频情况：如果 f 充分光滑，且其能量全集中在低频段（即 $|\boldsymbol{\xi}| \leqslant K$ 且 K 较小），那么 $M(\varepsilon,\boldsymbol{\xi}) \approx \varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2 = O(\varepsilon)$，此时误差收敛极快。
- 高频情况：如果我们强行把初值的频率支集限制在高频部分，使得 $|\boldsymbol{\xi}|^2 \sim \frac{1}{\varepsilon}$，此时乘子 $M \approx \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$，这意味着在这个特定频率上误差完全没有衰减。

因此，要让 ε^a 的一致估计成立，就必须要求对所有的 $f \in L^2$，误差都能被 ε^a 压住。但这显然是不可能的：只要我们故意挑选 f，让它的能量全部堆积在 $|\boldsymbol{\xi}| \sim \varepsilon^{-1/2}$ 甚至更高的频段上，误差就会被“卡”在 $O(1)$，从而达不到 ε^a 的一致衰减率。

频率分析也解释了为什么 (4b) 中条件加强为 $f \in H_0^1$ 后就能得到 $\sqrt{\varepsilon}$ 收敛率。如果 $f \in H^1$，意味着我们多了一个 $|\boldsymbol{\xi}|$ 可以用。此时，新的乘子变为 $\widetilde{M}(\varepsilon,\boldsymbol{\xi}) = \frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|}{1+\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}$，而它具有完全不依赖 $|\boldsymbol{\xi}|$的一致上界，因此只要 $f \in H^1$，误差就肯定在 $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ 的界内。但在 (4c) 中，条件退回 $f \in L^2$，没有多余的 $|\boldsymbol{\xi}|$ 可以用来控制 $\frac{\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}{1+\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^2}$.

回到(4c)的构造，那么构造高频函数最自然的就是三角函数$\sin(kx_1)$，它对应的频率 $|\boldsymbol{\xi}| = k$. 又因为题目要求了钳支边界条件 $u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial N} = 0$，纯粹的 $\sin(kx_1)$ 不满足边界条件。所以我们乘一个截断函数 $\phi(\boldsymbol{x})$：只要 k 足够大，导数项主要由 $k\cos(kx_1)$ 贡献，ϕ 带来的干扰可忽略不计。