2026年春季学期现代偏微分方程作业二

二阶线性椭圆方程的弱解理论和极值原理

截止时间：2026.4.14下课前（电子版截至当天23:59:59）

本次作业中的U一律假设为边界光滑的有界区域，L均为一致椭圆算子。

第1、2题为Lax-Milgram定理的应用，第3题为变分方法证明，第4题为预解式L^2估计，第5题为$(-\Delta)$特征值与区域大小关系的计算，第6题是极值原理的简单应用，第7题引进的“闸函数”是控制椭圆方程解的边界梯度估计的重要工具，第8题在后面证明有界区域零边值热方程解的逐点指数衰减起到至关重要作用，尤其是它给出了一个很重要的想法：与“特征函数”作比较。

作业题 1 (习题2.2.2). 函数 $u \in H_0^2(U)$ 是双调和方程

$$\Delta^2 u = f \text{ in } U, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

的弱解，是指对任意 $v \in H_0^2(U)$有$\int_U \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明弱解的存在性和唯一性。

作业题 2 (习题2.2.3). 我们称函数 $u \in H^1(U)$ 是具有 Neumann 边界条件的 Poisson 方程的弱解

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

是指对任意的$v \in H^1(U)$有$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明：如上方程存在弱解当且仅当 $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

作业题 3 (问题2.2.1). 考虑方程$-\partial_j(a^{ij}\partial_i u) = f$ in U, $u = 0$ on ∂U，其中$f \in L^2(U)$, 诸$a^{ij}(\boldsymbol{x})$皆为$L^\infty(U)$函数且满足一致椭圆条件。令 $I[w] := \int_U \frac{1}{2}a^{ij}\partial_i w \partial_j w - f w \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

(1) 设 $\{u_n\} \subset H_0^1(U)$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛到 u，证明 $\liminf\limits_{n\to\infty} I[u_n] \geqslant I[u]$.

(2) 证明：存在常数 $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $I[w] \geqslant \alpha\|w\|_{H^1}^2 - \beta$ 对任意的 $w \in H_0^1(U)$ 都成立。

(3) 令 $m := \inf\limits_{w \in H_0^1(U)} I[w] < \infty$，证明存在 $u \in H_0^1(U)$ 使得 $I[u] = m$.

(4) 证明极小化子 $u \in H_0^1(U)$ 的唯一性。(提示：如果 u_1, u_2 是两个不同的极小化子，那么考虑 $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ 并证明 $I[\bar{u}] < (I[u_1] + I[u_2])/2$.)

(5) 证明极小化子 u 恰好是方程的弱解。

作业题 4 (习题2.3.1). 令Σ是散度型椭圆算子L的全体特征值构成的集合。给定实数 $\lambda \notin \Sigma$ 和函数 $f \in L^2(U)$，设 $u \in H_0^1(U)$ 为方程 $Lu = \lambda u + f$ in U, $u = 0$ on ∂U 的弱解。证明：存在常数 $C > 0$ 使得 $\|u\|_{L^2(U)} \leqslant C\|f\|_{L^2(U)}$.（提示：反证法，本题在Evans书上是以定理形式呈现。）

作业题 5 (习题2.4.3，选做). 考虑一族边界光滑的有界区域 $U(\tau) \subset \mathbb{R}^d$，它光滑地依赖于参数 $\tau \in \mathbb{R}$。随着 τ 的变化，$\partial U(\tau)$ 上的每个点以速度 $\mathbf{v}$ 移动。对于每个 τ，我们考虑由

$$-\Delta w = \lambda w \text{ in } U(\tau), \quad w|_{\partial U(\tau)} = 0$$

定义的特征值 $\lambda = \lambda(\tau)$ 和相应的特征函数 $w = w(\boldsymbol{x}; \tau)$，并限制 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} = 1$. 设 λ, w 是 $\tau, \boldsymbol{x}$ 的光滑函数。证明：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = -\int_{\partial U(\tau)} \left| \frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x}; \tau) \right|^2 (\mathbf{v} \cdot N) \,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\mathbf{v} \cdot N$ 是边界 $\partial U(\tau)$ 的法向速度。

提示：变分原理给出 $\lambda(\tau) = \int_{U(\tau)} |\nabla w(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，然后计算 $\lambda'(\tau)$，剩下的就是证明 $\int_{U(\tau)} \partial_\tau |\nabla w(\boldsymbol{x}; \tau)|^2 = 2\lambda'(\tau)$，其中要利用 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} \equiv 1$ 来证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|w\|^2_{L^2(U(\tau))} = 0$.

作业题 6 (习题2.6.1). 设u是方程$-a^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$在$U$内的光滑解，系数$a^{ij} \in C^1(\overline{U})$. 证明：

$$\max_U |\nabla u| \leqslant C(\max_{\partial U} |\nabla u| + \max_{\partial U} |u|).$$

提示：令$v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$, 选取充分大的$\lambda$使得$Lv \leqslant 0$在$U$中恒成立。

作业题 7 (习题2.6.2). 设u是方程$Lu := -a^{ij}\partial_i\partial_j u = f$ in U, $u|_{\partial\Omega} = 0$的光滑解，其中f有界。固定$\boldsymbol{x}^0 \in \partial U$，我们称$C^2$函数$w$是$\boldsymbol{x}^0$处的**闸函数 (barrier function)**是指w满足如下条件：

$$Lw \geqslant 1 \text{ in } U,\ \ w(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ \ w \geqslant 0 \text{ on } \partial U.$$

证明：若w是$\boldsymbol{x}^0$处的一个闸函数，则存在常数$C > 0$使得$|\nabla u(\boldsymbol{x}^0)| \leqslant C|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0)|$.

作业题 8 (问题2.6.2). 设$U \subset \mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，$\lambda_1 > 0$是$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边值)的主特征值，$w_1 \in C^\infty(\overline{U})$是对应$\lambda_1$的特征函数。证明：任给$g \in C^1(\overline{U})$并假设$g|_{\partial U} = 0$，必存在常数$A, B$，使得$Aw_1(\boldsymbol{x}) \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant Bw_1(\boldsymbol{x})$对任意$\boldsymbol{x} \in \overline{U}$成立。

提示：思考如何用Hopf引理。