2026年春季学期现代偏微分方程作业而答案
二阶线性椭圆方程的弱解理论和极值原理

章俊彦　　`yx3x@ustc.edu.cn`

截止时间：2026.4.14下课前（电子版截至当天23:59:59）

作业题 1 (习题2.2.2). 函数 $u \in H_0^2(U)$ 是双调和方程

$$\Delta^2 u = f \text{ in } U, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

的弱解，是指对任意 $v \in H_0^2(U)$有$\int_U \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明弱解的存在性和唯一性。

证明. 考虑在 $H_0^2(U)$ 上用 Lax-Milgram 定理来证明。定义双线性型 $B : H_0^2(U) \times H_0^2(U) \to \mathbb{R}$ 为

$$B[u, v] = \int_U \Delta u \Delta v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

定义线性泛函 $F : H_0^2(U) \to \mathbb{R}$ 为 $F(v) = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 现在需要验证 B 的有界性、强制性以及 F 的有界性。

据 Cauchy-Schwarz 不等式与 Poincaré 不等式有：

$$|F(v)| \leqslant \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \leqslant C \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{H_0^2(U)}$$

因此 F 是 $H_0^2(U)$ 上的有界线性泛函。再用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|B[u, v]| \leqslant \|\Delta u\|_{L^2(U)} \|\Delta v\|_{L^2(U)} \leqslant \|u\|_{H_0^2(U)} \|v\|_{H_0^2(U)}.$$

因此 B 在 $H_0^2(U)$ 上是有界的。接下来证明强制性，对任意 $u \in H_0^2(U)$，有 $B[u, u] = \int_U |\Delta u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|\Delta u\|_{L^2(U)}^2$. 在空间 $H_0^2(U)$ 中，$u, \nabla u$的边值都是零，故分部积分两次可得（先对C_c^∞证明，然后光

滑逼近）

$$\int_U |\Delta u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U \sum_{i,j=1}^{d} |\partial_i \partial_j u|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(U)}.$$

结合 Poincaré 不等式，$\|\Delta u\|_{L^2(U)}$ 是 $H_0^2(U)$ 的一个等价范数。因此存在 $\alpha > 0$ 使得

$$B[u,u] \geqslant \alpha \|u\|^2_{H_0^2(U)},$$

这就证明了 B 的强制性。

据 Lax-Milgram 定理，存在唯一 $u \in H_0^2(U)$，使得对所有 $v \in H_0^2(U)$ 都有 $B[u,v] = F(v)$. □

作业题 2 (习题2.2.3). 我们称函数 $u \in H^1(U)$ 是具有 Neumann 边界条件的 Poisson 方程的弱解

$$-\Delta u = f \text{ in } U, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ on } \partial U$$

是指对任意的$v \in H^1(U)$有$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 成立。给定 $f \in L^2(U)$，证明：如上方程存在弱解当且仅当 $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

证明. 弱解存在 $\Longrightarrow$ $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$. 假设弱解 $u \in H^1(U)$ 存在，则对任意 $v \in H^1(U)$ 有 $\int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 取测试函数 $v \equiv 1 \in H^1(U)$，此时 $\nabla v = 0$. 代入弱形式可得

$$\int_U \nabla u \cdot 0 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f \cdot 1 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \implies 0 = \int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

$\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \implies$ 弱解存在. 设 $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$，引入商空间（或闭子空间） $V = \{v \in H^1(U) : \int_U v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}$. 由于 V 是 $H^1(U)$ 的闭子空间，它自身也是一个 Hilbert 空间。在 V 上定义双线性型 $B[u,v] = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 和线性泛函 $F(v) = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

有界性： 显然 $|B[u,v]| \leqslant \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$，且 $|F(v)| \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$.

强制性： 由于$v \in V$的均值为0，U连通，所以由Poincaré不等式得 $\|v\|_{L^2(U)} \leqslant C \|\nabla v\|_{L^2(U)}$. 因此 $\|v\|^2_{H^1(U)} \leqslant (C^2 + 1) \|\nabla v\|^2_{L^2}$. 所以 $B[v,v] \geqslant \frac{1}{C^2+1} \|v\|^2_{H^1(U)}$ 满足强制性。

据 Lax-Milgram 定理，在 V 中存在唯一的 $u \in V$，使得对任意 $\tilde{v} \in V$ 有 $B[u,\tilde{v}] = F(\tilde{v})$. 接下来证明该 u 使得全体 $v \in H^1(U)$ 均满足弱解定义。任取 $v \in H^1(U)$，它可写作 $v = \tilde{v} + c$，其中 $c = \frac{1}{|U|} \int_U v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是常数，从而 $\tilde{v} \in V$. 代入双线性型得到

$$B[u,v] = B[u,\tilde{v}] + 0 = F(\tilde{v}) = \int_U f(v - c) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U f v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - c \int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于 $\int_U f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$，上式最后一项为 0。因此 $B[u,v] = F(v)$ 对全体 $H^1(U)$ 成立，充分性得证。 □

作业题 3 (问题2.2.1). 考虑方程$-\partial_j(a^{ij}\partial_i u) = f$ in U, $u = 0$ on ∂U，其中$f \in L^2(U)$, 诸$a^{ij}(\boldsymbol{x})$皆为$L^\infty(U)$函数且满足一致椭圆条件。令 $I[w] := \int_U \frac{1}{2}a^{ij}\partial_i w\partial_j w - fw\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

(1) 设 $\{u_n\} \subset H_0^1(U)$ 在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛到 u，证明 $\liminf_{n\to\infty} I[u_n] \geqslant I[u]$.

(2) 证明：存在常数 $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $I[w] \geqslant \alpha\|w\|_{H^1}^2 - \beta$ 对任意的 $w \in H_0^1(U)$ 都成立。

(3) 令 $m := \inf_{w\in H_0^1(U)} I[w] < \infty$，证明存在 $u \in H_0^1(U)$ 使得 $I[u] = m$.

(4) 证明极小化子 $u \in H_0^1(U)$ 的唯一性。(提示：如果 u_1, u_2 是两个不同的极小化子，那么考虑 $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ 并证明 $I[\bar{u}] < (I[u_1] + I[u_2])/2$.)

(5) 证明极小化子 u 恰好是方程的弱解。

证明. (1) 由于 $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(U)$，双线性型由于一致椭圆性是非负二次型，因此$\int_U a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$在$H_0^1(U)$上诱导了一个等价范数，所以据范数的弱下半连续性得到

$$\liminf_{n\to\infty}\int_U a^{ij}\partial_i u_n\partial_j u_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \int_U a^{ij}\partial_i u\partial_j u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

同时由 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理有L^2中的强收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\int_U fu_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_U fu\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 两部分合并即得 $\liminf_{n\to\infty} I[u_n] \geqslant I[u]$.

(2) 据一致椭圆条件，存在 $\theta > 0$ 使得 $a^{ij}\partial_i w\partial_j w \geqslant \theta|\nabla w|^2$.此时用 Poincaré 不等式和带 ε 的 Young 不等式得到

$$I[w] \geqslant \frac{\theta C}{2}\|w\|_{H^1}^2 - \left(\varepsilon\|w\|_{H^1}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{L^2}^2\right).$$

选取足够小的 $\varepsilon > 0$ 即得 $I[w] \geqslant \alpha\|w\|_{H^1}^2 - \beta$.

(3) 据强制性 $I[w]$ 有下界，所以$m := \inf I[w]$存在。选取极小化序列 $\{u_n\}$，其在 $H_0^1(U)$ 中一致有界，所以存在弱收敛子列 $u_{n_k} \rightharpoonup u$. 根据弱下半连续性，$m = \liminf_{k\to\infty} I[u_{n_k}] \geqslant I[u] \geqslant m$，迫使等号成立，故存在 $u \in H_0^1(U)$ 使得 $I[u] = m$.

(4) 假设存在两个极小化子 $u_1 \neq u_2$，令 $\overline{u} = \frac{u_1+u_2}{2}$. 记 $B[w,w] := \int_U a^{ij}\partial_i w\partial_j w\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 则将中点 $\overline{u} = \frac{u_1+u_2}{2}$ 代入 $I[w]$ 中得到

$$I\left[\frac{u_1+u_2}{2}\right] = \frac{1}{2}B\left[\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right] - F\left[\frac{u_1+u_2}{2}\right].$$

我们将上式完全展开。由于 a^{ij} 对称，所以 $B[u_1,u_2] = B[u_2,u_1]$，进而

$$B\left[\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right] = \frac{1}{4}B[u_1,u_1] + \frac{1}{2}B[u_1,u_2] + \frac{1}{4}B[u_2,u_2].$$

同时我们又有 $F\left[\frac{u_1+u_2}{2}\right]=\frac{1}{2}F[u_1]+\frac{1}{2}F[u_2]$. 将它们代回 $I[\overline{u}]$得到

$$
\begin{aligned}
I\left[\frac{u_1+u_2}{2}\right]&=\frac{1}{8}B[u_1,u_1]+\frac{1}{4}B[u_1,u_2]+\frac{1}{8}B[u_2,u_2]-\frac{1}{2}F[u_1]-\frac{1}{2}F[u_2]\\
&=\frac{I[u_1]+I[u_2]}{2}-\frac{1}{8}\int_U a^{ij}\partial_i(u_1-u_2)\partial_j(u_1-u_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\frac{I[u_1]+I[u_2]}{2}-\frac{\theta}{8}\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

如果u_1-u_2不恒为零，而二者又都在H_0^1里面（边值都是0），那么必定导致$\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2}>0$（否则与零边值Poincaré不等式矛盾）这导致 $I[\overline{u}]<\frac{1}{2}I[u_1]+\frac{1}{2}I[u_2]=m$, 与极小性矛盾。

(5) 设 u 是极小化子，定义 $g(t)=I[u+tv]$，则 $g'(0)=0$. 计算可得

$$
\int_U a^{ij}\partial_i u\partial_j v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_U fv\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.
$$

此即原方程的弱形式。

□

作业题 4 (习题2.3.1). 令Σ是散度型椭圆算子L的全体特征值构成的集合。给定实数 $\lambda\notin\Sigma$ 和函数 $f\in L^2(U)$，设 $u\in H_0^1(U)$ 为方程 $Lu=\lambda u+f$ in U, $u=0$ on ∂U 的弱解。证明：存在常数 $C>0$ 使得 $\|u\|_{L^2(U)}\leqslant C\|f\|_{L^2(U)}$.（提示：反证法，本题在Evans书上是以定理形式呈现。）

证明. 反证法，假设不存在这样的常数 $C>0$。那么存在序列 $\{f_k\}$ 及 $\{u_k\}$ 满足 $Lu_k=\lambda u_k+f_k$，且 $\|u_k\|_{L^2(U)}>k\|f_k\|_{L^2(U)}$. 定义归一化序列 $v_k=\frac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}$ 和 $\tilde{f}_k=\frac{f_k}{\|u_k\|_{L^2}}$，则有 $\|v_k\|_{L^2}=1$，且 $\|\tilde{f}_k\|_{L^2}<\frac{1}{k}\to 0$.

据方程弱解定义知

$$
\int_U a^{ij}\partial_i v_k\partial_j v_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_U(b^i\partial_i v_k+cv_k)v_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U(\lambda v_k+f_k)v_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
$$

而由一致椭圆条件得 $\theta\|\nabla v_k\|_{L^2}^2\leqslant\varepsilon\|\nabla v_k\|_{L^2}^2+C\|v_k\|_{L^2}^2+\lambda\|v_k\|_{L^2}^2+\|\tilde{f}_k\|_{L^2}\|v_k\|_{L^2}\leqslant\varepsilon\|\nabla v_k\|_{L^2}^2+C+|\lambda|+\|\tilde{f}_k\|_{L^2}$. 取$\varepsilon$充分小让这项被左边吸收，就得到$\{v_n\}$在$H_0^1$一致有界，进而存在子列在 $H_0^1(U)$ 中弱收敛，且（据紧嵌入）在 $L^2(U)$ 中强收敛于 v. 故 $\|v\|_{L^2}=1$ $(v\not\equiv 0)$.

现在在方程弱形式 $B[v_k,\varphi]=\lambda(v_k,\varphi)+(\tilde{f}_k,\varphi)$ $(\varphi\in H_0^1(U))$ 中令$k\to\infty$，代入上面弱收敛和强收敛的结果得到 $B[v,\varphi]=\lambda(v,\varphi)$，这表明 v 是齐次方程 $Lv=\lambda v$ in U, $v|_{\partial U}=0$ 的弱解，进而 λ 是L的特征值，与 $\lambda\notin\Sigma$ 矛盾。 □

作业题 5 (习题2.4.3，选做). 考虑一族边界光滑的有界区域 $U(\tau) \subset \mathbb{R}^d$，它光滑地依赖于参数 $\tau \in \mathbb{R}$。随着 τ 的变化，$\partial U(\tau)$ 上的每个点以速度 $\mathbf{v}$ 移动。对于每个 τ，我们考虑由

$$-\Delta w = \lambda w \text{ in } U(\tau), \quad w|_{\partial U(\tau)} = 0$$

定义的特征值 $\lambda = \lambda(\tau)$ 和相应的特征函数 $w = w(\boldsymbol{x};\tau)$，并限制 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} = 1$. 设 λ, w 是 $\tau, \boldsymbol{x}$ 的光滑函数。证明：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = -\int_{\partial U(\tau)} \left|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x};\tau)\right|^2 (\mathbf{v} \cdot N)\, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}$$

其中 $\mathbf{v} \cdot N$ 是边界 $\partial U(\tau)$ 的法向速度。

提示：变分原理给出 $\lambda(\tau) = \int_{U(\tau)} |\nabla w(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，然后计算 $\lambda'(\tau)$，剩下的就是证明 $\int_{U(\tau)} \partial_\tau |\nabla w(\boldsymbol{x};\tau)|^2 = 2\lambda'(\tau)$，其中要利用 $\|w\|_{L^2(U(\tau))} \equiv 1$ 来证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|w\|^2_{L^2(U(\tau))} = 0$.

证明. 首先，方程两边乘以w再分部积分得到 $\lambda(\tau) = \int_{U(\tau)} |\nabla w|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 据移动区域求导公式 (Reynolds transport formula) 得到

$$\lambda'(\tau) = \int_{U(\tau)} \partial_\tau\left(|\nabla w|^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial U(\tau)} |\nabla w|^2 (\boldsymbol{v} \cdot N)\, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.$$

因此关键是计算 $\int_{U(\tau)} \partial_\tau\left(|\nabla w|^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 分部积分可得

$$\int_{U(\tau)} \partial_\tau\left(|\nabla w|^2\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 2\int_{U(\tau)} \nabla w \cdot \nabla w_\tau\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2\int_{U(\tau)} (\Delta \partial_\tau w) w\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \underbrace{2\int_{\partial U(\tau)} \frac{\partial w_\tau}{\partial N} w\, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}}_{=0 \text{ 因为 } w=0 \text{ on } \partial U)(\tau)}.$$

再用 $-\Delta w = \lambda w$，得到

$$\begin{aligned}
-2\int_{U(\tau)} (\Delta\partial_\tau w) w\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= 2\int_{U(\tau)} \partial_\tau(\lambda w) w\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int_{U(\tau)} \partial_\tau w^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\lambda'(\tau)\int_{U(\tau)} w^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \lambda \int_{U(\tau)} \partial_\tau w^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\lambda'(\tau) \\
&= 2\lambda'(\tau) + \lambda \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{U(\tau)} w^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{=0 \text{ 因为} \|w\|_{L^2(U(\tau))}=1} - \lambda \int_{\partial U(\tau)} \underbrace{w^2}_{=0 \text{ on } \partial U(\tau)} (\boldsymbol{v} \cdot N)\, \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = 2\lambda'(\tau).
\end{aligned}$$

而在边界上$w \equiv 0$, 所以切向导数为零，进而$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial N} N$恒成立，代入第一个式子即得结论。 □

作业题 6 (习题2.6.1). 设u是方程$-a^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$在$U$内的光滑解，系数$a^{ij}\in C^1(\overline{U})$. 证明：

$$\max_U |\nabla u| \leqslant C(\max_{\partial U} |\nabla u| + \max_{\partial U} |u|).$$

提示：令$v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$, 选取充分大的$\lambda$使得$Lv \leqslant 0$在$U$中恒成立。

证明. 构造辅助函数 $v = |\nabla u|^2 + \lambda u^2$ ，我们直接计算算子 $L = -a^{ij}\partial_i\partial_j$ 作用在 v 上的结果:

$$\begin{aligned}
\partial_i v &= 2\partial_k u\partial_i\partial_k u + 2\lambda u\partial_i u \\
\partial_j\partial_i v &= 2\partial_j\partial_k u\partial_i\partial_k u + 2\partial_k u\partial_j\partial_i\partial_k u + 2\lambda\partial_j u\partial_i u + 2\lambda u\partial_j\partial_i u. \\
\Longrightarrow\ Lv &= -2a^{ij}\partial_j\partial_k u\partial_i\partial_k u - 2a^{ij}\partial_k u\partial_i\partial_j\partial_k u - 2\lambda a^{ij}\partial_j u\partial_i u - 2\lambda u a^{ij}\partial_i\partial_j u.
\end{aligned}$$

由于已知 $a^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$，故最后一项恒为0. 考察第二项中的三阶导数部分，对方程 $a^{ij}\partial_i\partial_j u = 0$ 左右两边求∂_k得到

$$(\partial_k a^{ij})\partial_i\partial_j u + a^{ij}\partial_k\partial_i\partial_j u = 0 \implies a^{ij}\partial_i\partial_j\partial_k u = -(\partial_k a^{ij})\partial_i\partial_j u.$$

将其代入 Lv 表达式得到

$$Lv = -2a^{ij}\partial_j\partial_k u\partial_i\partial_k u + 2\partial_k u(\partial_k a^{ij})\partial_i\partial_j u - 2\lambda a^{ij}\partial_j u\partial_i u.$$

现在利用一致椭圆性得到$-2a^{ij}\partial_j\partial_k u\partial_i\partial_k u \leqslant -2\theta|\nabla^2 u|^2$ 以及 $-2\lambda a^{ij}\partial_j u\partial_i u \leqslant -2\lambda\theta|\nabla u|^2$. 同时直接放缩得到

$$|2\partial_k u(\partial_k a^{ij})\partial_i\partial_j u| \leqslant 2C_1 d^2|\nabla u||\nabla^2 u| \leqslant \theta|\nabla^2 u|^2 + \frac{C_1^2 d^4}{\theta}|\nabla u|^2.$$

相加可得

$$Lv \leqslant -\theta|\nabla^2 u|^2 + \left(\frac{C_1^2 d^4}{\theta} - 2\lambda\theta\right)|\nabla u|^2.$$

现在选取 λ 充分大使得右边第二项非正，进而得到 $Lv \leqslant -\theta|\nabla^2 u|^2 \leqslant 0$ in U. 据弱极大值原理得到$\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$. 代入$v$的定义即得结论。 □

作业题 7 (习题2.6.2). 设u是方程$Lu := -a^{ij}\partial_i\partial_j u = f$ in U, $u|_{\partial\Omega} = 0$的光滑解，其中f有界。固定$\boldsymbol{x}^0 \in \partial U$，我们称$C^2$函数$w$是$\boldsymbol{x}^0$处的**闸函数** (barrier function)是指w满足如下条件：

$$Lw \geqslant 1 \text{ in } U,\ \ w(\boldsymbol{x}^0) = 0,\ \ w \geqslant 0 \text{ on } \partial U.$$

证明：若w是$\boldsymbol{x}^0$处的一个闸函数，则存在常数$C>0$使得$|\nabla u(\boldsymbol{x}^0)|\leqslant C|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0)|$.

证明. 首先对w用极大值原理知，它可在边界点$\boldsymbol{x}^0$达到最小值。然后令 $M=\sup_U|f|$。构造辅助函数 $v^{\pm}(\boldsymbol{x})=Mw(\boldsymbol{x})\pm u(\boldsymbol{x})$. 在 U 内由于 $Lw\geqslant 1$，故有 $Lv^{\pm}=M(Lw)\pm f\geqslant M-|f|\geqslant 0$. 在边界上，由于 $w\geqslant 0$ 且 $u=0$，故有 $v^{\pm}\geqslant 0$. 由弱极值原理，在整个 U 内 $v^{\pm}\geqslant 0$，即 $-Mw(\boldsymbol{x})\leqslant u(\boldsymbol{x})\leqslant Mw(\boldsymbol{x})$.

在边界点 x^0 处，我们有$w(\boldsymbol{x}^0)=0, u(\boldsymbol{x}^0)=0$. 令 ν 为 $\boldsymbol{x}^0$ 处的单位内法向向量，对满足$\boldsymbol{x}^0+t\nu\in U$的$t>0$，代入上面的不等式并同除以 t得到

$$-M\frac{w(\boldsymbol{x}^0+t\nu)-w(\boldsymbol{x}^0)}{t}\leqslant\frac{u(\boldsymbol{x}^0+t\nu)-u(\boldsymbol{x}^0)}{t}\leqslant M\frac{w(\boldsymbol{x}^0+t\nu)-w(\boldsymbol{x}^0)}{t}.$$

令 $t\to 0^+$，取方向导数极限得到

$$-M\frac{\partial w}{\partial\nu}(\boldsymbol{x}^0)\leqslant\frac{\partial u}{\partial\nu}(\boldsymbol{x}^0)\leqslant M\frac{\partial w}{\partial\nu}(\boldsymbol{x}^0).$$

最后，由于 u 在边界 ∂U 上为常数，所以 u 沿边界的切向导数为0；结合$\nu=-N$得到

$$|\nabla u(\boldsymbol{x}^0)|=\left|\frac{\partial u}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0)\right|\leqslant M\left|\frac{\partial w}{\partial N}(\boldsymbol{x}^0)\right|.$$

□

注记 1. 本题的结论实际上对$Lu:=a^{ij}\partial_i\partial_j u+cu\ (c\geqslant 0)$也是对的，证法也是一样的。

作业题 8 (问题2.6.2). 设$U\subset\mathbb{R}^d$是边界光滑的有界区域，$\lambda_1>0$是$(-\Delta)$算子(带Dirichlet边值)的主特征值，$w_1\in C^\infty(\overline{U})$是对应$\lambda_1$的特征函数。证明：任给$g\in C^1(\overline{U})$并假设$g|_{\partial U}=0$，必存在常数$A,B$，使得$Aw_1(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant Bw_1(\boldsymbol{x})$对任意$\boldsymbol{x}\in\overline{U}$成立。
提示：思考如何用Hopf引理。

证明. 不妨设$w_1>0$ in U. 首先由Hopf引理得知对任意$\boldsymbol{y}\in\partial U$有 $\frac{\partial w_1}{\partial N}(\boldsymbol{y})<0$. 因为 ∂U 紧，$\partial_N w_1$ 连续，所以存在常数 $m>0$ 使

$$-\frac{\partial w_1}{\partial N}(\boldsymbol{y})\geqslant m,\qquad\forall\boldsymbol{y}\in\partial U.$$

接下来我们证明 g/w_1 在边界附近有界。对任意 $\boldsymbol{y}\in\partial U$，沿内法线取点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-tN(\boldsymbol{y})\ (0<t\ll 1)$.

由 $g(\boldsymbol{y}) = w_1(\boldsymbol{y}) = 0$，对 t 做 Taylor 展开得到

$$g(\boldsymbol{y} - tN(\boldsymbol{y})) = -t\,\frac{\partial g}{\partial N}(\boldsymbol{y}) + o(t), \quad w_1(\boldsymbol{y} - tN(\boldsymbol{y})) = -t\,\frac{\partial w_1}{\partial N}(\boldsymbol{y}) + o(t).$$

因此

$$\frac{g(\boldsymbol{y} - tN(\boldsymbol{y}))}{w_1(\boldsymbol{y} - tN(\boldsymbol{y}))} \to \frac{\partial_N g(\boldsymbol{y})}{\partial_N w_1(\boldsymbol{y})} \qquad (t \searrow 0).$$

由于 $\partial_N w_1(\boldsymbol{y}) \neq 0$，这个极限存在且有限。这说明函数 $h(\boldsymbol{x}) := \dfrac{g(\boldsymbol{x})}{w_1(\boldsymbol{x})}$ 在靠近边界时仍然有界，并且可连续延拓到 ∂U，其边值为 $h(\boldsymbol{y}) = \dfrac{\partial_N g(\boldsymbol{y})}{\partial_N w_1(\boldsymbol{y})}$.

最后搞定内部即可。在 U 中有$w_1 > 0$，所以 $h = g/w_1$ 连续。结合上一步，h 可连续延拓到整个紧集 $\overline{U}$，于是 h 在 $\overline{U}$ 上取得最大、最小值

$$A := \min_{\overline{U}} h, \qquad B := \max_{\overline{U}} h.$$

于是对任意 $\boldsymbol{x} \in U$ 有 $A \leqslant \dfrac{g(\boldsymbol{x})}{w_1(\boldsymbol{x})} \leqslant B$. 乘以 $w_1(\boldsymbol{x}) > 0$ 即得结论。 □

注记 2. 本题w_1尽管不是闸函数（因为$-\Delta w_1 = \lambda_1 w_1$右边不可能有一致的正下界），但它起到的作用和闸函数是类似的：在边界附近“卡死”$C^1(\overline{U})$的零边值函数的梯度增长。某种程度上，这表明w_1和g在边界附近都差不多是“距离函数”$d(\boldsymbol{x}) := \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial U)$的常数倍。如果要强行构造一个满足第7题条件的闸函数，则一般考虑 $C(1 - e^{-\lambda d(\boldsymbol{x})/\varepsilon})$ 及其变种，也就是通过调整 $\lambda > 0$ 较大使得二阶项占绝对主导，而且ε还能反映闸函数在边界附近发生剧烈波动区域的“尺度”。当然一般来说 $d(\boldsymbol{x})$ 不是整体 C^2 的，所以要么在内部将其正则化（比如说w_1），要么只在 ∂U 附近的一个管状邻域内构造这样的闸函数，当然对一些特殊区域也有更简单的替代品（比如对单位球，我们就可以用 $1 - |\boldsymbol{x}|^2$ 替代 $1 - |\boldsymbol{x}|$）。