2026年春季学期现代偏微分方程作业一

Sobolev空间

截止时间：2026.3.24下课前（电子版截至当天23:59:59）

第1-5题为Sobolev函数光滑逼近相关，第6-11题为Sobolev嵌入定理相关。其中第5、8题选做。

作业题 1. 设$f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. 定义光滑逼近 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，其中 η_ε 是附录B.2定义的磨光核（亦见 Evans PDE 附录 C.5 节）。证明如下结论：

(1) $\|f_\varepsilon\|_{H^1} \leqslant \|f\|_{H^1}$, 存在不依赖$\varepsilon$的常数 $C > 0$ 使得 $\|f_\varepsilon\|_{H^2} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|f\|_{H^1}$.

(2) 存在不依赖ε的常数 $C > 0$ 使得 $\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{H^1}$.

(3) 当 $\varepsilon \to 0_+$ 时，是否一定成立 $\varepsilon^{-1}\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \to 0$？证明你的结论。

(4) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的。

提示：(3) 注意磨光核 η 本身是径向对称函数，(4) 先作截断再磨光。

作业题 2 (习题1.2.3). 证明讲义上的命题1.2.4(2). 即设$1 \leqslant p < \infty$, $f \in W^{1,p}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$, 则 $F(f) \in W^{1,p}(U)$, 且 $\partial_i(F(f)) = F'(f)\partial_i f$对$i = 1, \cdots, d$在 U 中几乎处处成立。若U在$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue测度有限，则$F(0) = 0$不是必要的。

作业题 3 (习题1.2.4). 证明$\|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 \leqslant C\|u\|_{L^2(U)}\|\nabla^2 u\|_{L^2(U)}$对任何$u \in C_c^\infty(U)$成立，其中 $\|\nabla^2 u\|_{L^2(U)}^2 = \int_U \sum_{i,j=1}^d (\partial_i\partial_j u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 然后推广到 $u \in H_0^1(U) \cap H^2(U)$，这里需假设 U 有界且 ∂U 光滑。

作业题 4 (习题1.2.6). 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是**连通**开集且 $f \in W^{1,p}(U)$ 满足 $\nabla f = \mathbf{0}$ 在 U 中几乎处处成立。证明：f 几乎处处等于一个常值函数。

提示：本题**不能使用Poincaré不等式**来证明，因为该题结论在Poincaré不等式的证明中要用到。在 $V \Subset U$（比如说可以取成一个球）中考虑 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，并证明对充分小的 $\varepsilon > 0$，$f_\varepsilon = C_\varepsilon$ 在 V 中几乎处处成立。然后使用定理 C.2.1 来证明 $\|f_\varepsilon\|_{L^p}$ 关于 ε 一致有界，因此 $\{C_\varepsilon\}$ 也一致有界，进而$\{f_\varepsilon\}$ 的一个子列收敛到某个常数C。最后证明 $\{\boldsymbol{x} \in U : \exists r > 0 \text{ 使得 } B(\boldsymbol{x}, r) \subset U \text{ 且 } f = C \text{ 几乎处处在 } B(\boldsymbol{x}, r) \text{ 中成立}\}$ 在 U 中既开又闭。

作业题 5 (习题1.3.3，选做). 设$f \in H_0^1(\mathbb{R}_+^d) \cap H^2(\mathbb{R}_+^d)$. 证明：对任意$1 \leqslant i \leqslant d-1$, 偏导数$\partial_{x_i} f$也属于$H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$.

作业题 6 (习题1.4.3). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是有界区域，函数 $u\in H^1(U)$ 满足：存在$\alpha\in(0,1)$使得集合 $Z:=\{\boldsymbol{x}\in U|u(\boldsymbol{x})=0\}$ 满足 $\mathcal{L}^d(Z)\geqslant\alpha\mathcal{L}^d(U)$. 证明：存在仅依赖于 d,α 的常数 $C>0$，使得

$$\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：在 $U\backslash Z$ 中，将 u^2 写为 $(u-(u)_U+(u)_U)^2$ 并对 $(u-(u)_U)^2$ 应用 Poincaré 不等式。$(u)_U^2$ 的贡献将被所需不等式的左边吸收，这是因为 $U\backslash Z$ 的测度严格小于 U 的测度。**我在知乎和个人主页上写的答案里这道题的证明有点问题，请不要去抄。**

作业题 7 (习题1.4.7). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域。证明：$H^2(U)$ 紧嵌入到 $H^1(U)$，且对任意 $\varepsilon>0$存在常数 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)}\leqslant\varepsilon\|u\|_{H^2(U)}+C_\varepsilon\|u\|_{L^2(U)},\quad\forall u\in H^2(U).$$

作业题 8 (问题1.4.1，选做). 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域，开球$B\Subset U$. 对$\varepsilon\in(0,1)$设u_ε是如下方程的光滑解

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon+\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon-f)\mathbf{1}_B=0 & \text{in } U,\\ u_\varepsilon=0 & \text{on } \partial U,\end{cases}\tag{0.1}$$

其中 $f\in H_0^1(U)$ 是给定的函数。证明：$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)}$ 关于 ε 一致有界，且 $u_\varepsilon\xrightarrow{L^2(B)}f$.

作业题 9 (问题1.4.4，Strauss径向引理). 设$d\geqslant 2,u\in H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d)$ (即$u\in H^1(\mathbb{R}^d)$是径向函数，$u(\boldsymbol{x})$取值只依赖$r:=|\boldsymbol{x}|$). 本题可默认$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的，进而你可以直接对 C_c^∞ 径向函数证明。

(1) 利用微积分基本定理和$u(\infty)=0$证明：$|u(r)|^2\leqslant 2r^{1-d}\int_r^\infty|u(s)||u'(s)|s^{d-1}\,\mathrm{d}s$.

(2) 证明：$|u(r)|\leqslant Cr^{-(d-1)/2}\|u\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

提示：对(1)右边的积分用Cauchy-Schwarz不等式，再用积分的极坐标表示凑出 u 和 ∇u 的 L^2 范数。

作业题 10 (问题1.4.5). 设$d\geqslant 2,2<q<2^*:=\frac{2d}{d-2}$, 证明：$H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ 是紧嵌入。

提示：在$|\boldsymbol{x}|=R$处作截断，当$|\boldsymbol{x}|>R$时用Strauss径向引理，当$|\boldsymbol{x}|\leqslant R$时已经有紧性。

作业题 11 (习题1.5.1). 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界Lipschitz 的有界开集，正整数$k>\frac{d}{2}$. 证明：存在依赖于 k,d,U 的常数 $C>0$，使得对任意$f,g\in H^k(U)$成立如下不等式

$$\|fg\|_{H^k(U)}\leqslant C\|f\|_{H^k(U)}\|g\|_{H^k(U)}.$$