2026年春季学期现代偏微分方程作业一答案
Sobolev空间

章俊彦　　yx3x@ustc.edu.cn

截止时间：2026.3.24下课前（电子版截至当天23:59:59）

作业题 1. 设 $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. 定义光滑逼近 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，其中 η_ε 是附录B.2定义的磨光核（亦见 Evans PDE 附录 C.5 节）。证明如下结论：

(1) $\|f_\varepsilon\|_{H^1} \leqslant \|f\|_{H^1}$, 存在不依赖$\varepsilon$的常数 $C>0$ 使得 $\|f_\varepsilon\|_{H^2} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|f\|_{H^1}$.

(4) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的。

(2) 存在不依赖ε的常数 $C>0$ 使得 $\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{H^1}$.

(3) 当 $\varepsilon \to 0_+$ 时，是否一定成立 $\varepsilon^{-1}\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \to 0$? 证明你的结论。

提示：(3) 注意磨光核 η 本身是径向对称函数，(4) 先作截断再磨光。

出题的时候有点想当然了，这道题应该是先证明(4)，然后用(4)的结论去做(2)–(3).

证明. (1) 据卷积Young不等式，对任意 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，有 $\|\eta_\varepsilon * g\|_{L^2} \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{L^1}\|g\|_{L^2}$. 而$\|\eta_\varepsilon\|_{L^1} = 1$，所以 $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$. 对弱导数，由于微分算子与卷积可交换，我们有 $\nabla f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \nabla f$。同理 $\|\nabla f_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{L^1}\|\nabla f\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}$. 因此得到 $\|f_\varepsilon\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^1}$.

对二阶导数，必须有一个导数落在磨光核上（因为f的二阶弱导数未必存在）得到$\nabla^2 f_\varepsilon = (\nabla\eta_\varepsilon) * \nabla f$。由Young不等式：$\|\nabla^2 f_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^1}\|\nabla f\|_{L^2}$. 而 $\eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{-d}\eta(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$，其梯度为 $\nabla\eta_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{-d-1}(\nabla\eta)(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$。计算其 L^1 范数，利用变量代换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$：

$$\|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d-1}|\nabla\eta(\boldsymbol{x}/\varepsilon)|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varepsilon^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\eta(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = C\varepsilon^{-1}.$$

因此 $\|\nabla^2 f_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C_1\varepsilon^{-1}\|\nabla f\|_{L^2}$.

先证明(4). 我们先证明$f * \eta_\varepsilon \xrightarrow{H^1} f$，通过变量代换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}/\varepsilon$ 以及 $\int \eta(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = 1$，我们得到

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\boldsymbol{z})[f(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{x})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \\ \Rightarrow \qquad \|f_\varepsilon - f\|_{L^2} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\boldsymbol{z}) \|f(\cdot - \varepsilon \boldsymbol{z}) - f(\cdot)\|_{L^2_x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

由L^2范数的平移连续性和控制收敛定理，即得$f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f$. 把$f$换成$\nabla f$即得$f * \eta_\varepsilon \xrightarrow{H^1} f$.

接下来证明(4)，按照提示先作截断再磨光。取标准截断函数 $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足 $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$，在球 $B(0,1)$ 上 $\zeta = 1$，在 $B(0,2)$ 外 $\zeta = 0$，再定义 $\zeta_n(\boldsymbol{x}) = \zeta(\boldsymbol{x}/n)$。给定 $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$，令 $f_n = \zeta_n f$.

根据控制收敛定理，$f_n \xrightarrow{L^2} f$. 计算其弱导数得到 $\nabla f_n = \zeta_n \nabla f + f \nabla \zeta_n$，进而

$$\|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^2} \leqslant \|(\zeta_n - 1)\nabla f\|_{L^2} + \|f \nabla \zeta_n\|_{L^2}$$

第一项由控制收敛定理趋于0。对第二项，$\nabla \zeta_n(x) = \frac{1}{n} \nabla \zeta(x/n)$，其模长被 $\frac{M}{n}$ 控制。因此 $\|f \nabla \zeta_n\|_{L^2} \leqslant \frac{M}{n} \|f\|_{L^2} \to 0$。从而 $f_n \xrightarrow{H^1} f$.

接下来磨光f_n，由于f_n紧支，我们令 $f_{n,\varepsilon} = \eta_\varepsilon * f_n$，则显然 $f_{n,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$。由第(2)问的证明过程不难验证（同理作用于梯度），$f_{n,\varepsilon} \xrightarrow{H^1} f_n$ 在 H^1 中成立。通过对角线法则，存在子序列 n_k 和 $\varepsilon_k \to 0$，使得 $f_{n_k, \varepsilon_k} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且在H^1中收敛于 f。

(2)-(3) 回忆(4)的计算过程有

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \eta(\boldsymbol{z}) \|f(\cdot - \varepsilon \boldsymbol{z}) - f(\cdot)\|_{L^2_x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \overset{(?)}{\leqslant} \varepsilon \|\nabla f\|_{L^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{z}| \eta(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.$$

若(?)这步正确，那么剩下的证明就很简单了。首先这直接给出了(2)的答案，对(3)我们只需注意磨光核 η 本身是径向对称函数，再利用(2)的结论，即C_c^∞在H^1中是稠密的。所以给定$f \in H^1$和误差$\delta > 0$，存在$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$使得$\|f - g\|_{H^1} < \delta$. 进而

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} &\leqslant \varepsilon^{-1}\|(f-g)_\varepsilon - (f-g)\|_{L^2} + \varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon - g\|_{L^2} \\ &\leqslant \varepsilon^{-1} \cdot (C\varepsilon)\|f - g\|_{H^1} + \varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon - g\|_{L^2} < C\delta + \varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon - g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

对第二项，我们对其泰勒展开到二阶得到

$$g(\boldsymbol{x} - \varepsilon \boldsymbol{z}) - g(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon \boldsymbol{z} \cdot \nabla g(\boldsymbol{x}) + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-t) \boldsymbol{z}^\top \cdot \nabla^2 g(\boldsymbol{x} - \varepsilon t \boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{z}\,\mathrm{d}t.$$

进而

$$\begin{aligned}
g_\varepsilon(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d}\eta(\boldsymbol{z})[g(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{z})-g(\boldsymbol{x})]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&= -\varepsilon\nabla g(\boldsymbol{x})\cdot\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{z}\eta(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}\eta(\boldsymbol{z})\int_0^1(1-t)\boldsymbol{z}^\top\cdot\nabla^2 g(\boldsymbol{x}-\varepsilon t\boldsymbol{z})\cdot\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}.
\end{aligned}$$

现在注意，因为磨光核本身是径向对称函数，$\eta(\boldsymbol{z})=\eta(-\boldsymbol{z})$，所以$\int_{\mathbb{R}^d}z_i\eta(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}=0$对任意 $1\leqslant i\leqslant d$成立，剩下的二阶项具有估计

$$\|g_\varepsilon-g\|_{L^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{z}|^2\eta(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right)\varepsilon^2\|\nabla^2 g\|_{L^2}.$$

因此我们得到$\varepsilon^{-1}\|g_\varepsilon-g\|_{L^2}\leqslant C\varepsilon\|\nabla^2 g\|_{L^2}\to 0$. 最终取极限得到 $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0_+}\varepsilon^{-1}\|f_\varepsilon-f\|_{L^2}\leqslant C\delta$. 由$\delta$的任意性即得(3)的结论，

接下来只要证明(?)这步，但是注意我们只有$f\in \boldsymbol{H}^1$，不能直接对它用微积分基本定理，这只需再用一次(2)即可。现在任取$\lambda>0$，考虑$f_\lambda:=\eta_\lambda * f$，我们直接计算得到

$$\begin{aligned}
& f_\lambda(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{z})-f_\lambda(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon\int_0^1\boldsymbol{z}\cdot\nabla f_\lambda(\boldsymbol{x}-t\varepsilon\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}t\\
\Rightarrow\qquad & \|f_\lambda(\cdot-\varepsilon\boldsymbol{z})-f_\lambda(\cdot)\|_{L^2_x}\leqslant\varepsilon\int_0^1\|\boldsymbol{z}\cdot\nabla f_\lambda(\cdot-t\varepsilon\boldsymbol{z})\|_{L^2_x}\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{z}|\|\nabla f_\lambda\|_{L^2}\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{z}|\|\nabla f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

最终令$\lambda\to 0$可得$\|f(\cdot-\varepsilon\boldsymbol{z})-f(\cdot)\|_{L^2_x}\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{z}|\|\nabla f\|_{L^2}\to 0$.

□

> **作业题 2** (习题1.2.3). 证明讲义上的命题1.2.4(2). 即设$1\leqslant p<\infty$, $f\in W^{1,p}(U)$, $F\in C^1(\mathbb{R})$, $F'\in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0)=0$, 则 $F(f)\in W^{1,p}(U)$, 且 $\partial_i(F(f))=F'(f)\partial_i f$对$i=1,\cdots,d$在 U 中几乎处处成立。若U在$\mathbb{R}^d$中的Lebesgue测度有限，则$F(0)=0$不是必要的。

证明. 由于 $F(0)=0$ 且 $|F'(s)|\leqslant M$（M为常数），由中值定理得 $|F(s)|\leqslant M|s|$。因此 $\int_U|F(f)|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant M^p\int_U|f|^p\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty$，即 $F(f)\in L^p(U)$. 因为 $f\in W^{1,p}(U)$，存在光滑函数序列 $f_n\in C^\infty(U)\cap W^{1,p}(U)$ 使得 $f_n\xrightarrow{W^{1,p}(U)}f$，且（存在子列，不妨还记为$\{f_n\}$）几乎处处收敛。对每个 f_n我们有经典链式法则 $\partial_i(F(f_n))=F'(f_n)\partial_i f_n$. 现在考虑取极限，对任意测试函数 $\phi\in C_c^\infty(U)$我们有

$$\int_U F(f_n)\partial_i\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_U F'(f_n)\partial_i f_n\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对左边，我们有$F(f_n)\xrightarrow{L^p(U)} F(f)$（由 $|F(f_n)-F(f)|\leqslant M|f_n-f|$ 保证），所以直接作差可得左边收敛于 $\int_U F(f)\partial_i\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 对右边，我们要证明 $F'(f_n)\partial_i f_n \xrightarrow{L^p_{\mathrm{loc}}(U)} F'(f)\partial_i f$. 仍然直接作差可得

$$\|F'(f_n)\partial_i f_n - F'(f)\partial_i f\|_{L^p} \leqslant \|F'(f_n)(\partial_i f_n - \partial_i f)\|_{L^p} + \|(F'(f_n)-F'(f))\partial_i f\|_{L^p}.$$

它的第一项被 $M\|\partial_i f_n - \partial_i f\|_{L^p}$ 控制，所以趋于 0。第二项中由于 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 且 F' 连续，所以$F'(f_n)\xrightarrow{a.e.} F'(f)$ 几乎处处成立。又因为 $|(F'(f_n)-F'(f))\partial_i f|^p \leqslant (2M)^p|\partial_i f|^p \in L^1$，由控制收敛定理，第二项积分也趋于 0。

因此，取极限得到 $\int_U F(f)\partial_i\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U F'(f)\partial_i f\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，这证明了 $\partial_i(F(f)) = F'(f)\partial_i f$ 是弱导数且属于 $L^p(U)$.

若 $\mathcal{L}^d(U)<\infty$，$|F(s)|\leqslant|F(0)|+M|s|$ 积分依然有界，故 $F(0)=0$ 不是必需的。 □

作业题 3 (习题1.2.4). 证明$\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} \leqslant C\|u\|_{L^2(U)}\|\nabla^2 u\|_{L^2(U)}$ 对任何 $u\in C_c^\infty(U)$ 成立，其中 $\|\nabla^2 u\|^2_{L^2(U)} = \int_U \sum_{i,j=1}^d (\partial_i\partial_j u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 然后推广到 $u\in H_0^1(U)\cap H^2(U)$，这里需假设 U 有界且 ∂U 光滑。

证明. 先对 $u\in C_c^\infty(U)$ 证明。分部积分法得

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} = \sum_{i=1}^d \int_U (\partial_i u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\sum_{i=1}^d \int_U u(\partial_i^2 u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U u\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

据Cauchy-Schwarz不等式得

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} \leqslant \int_U |u||\Delta u|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|u\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2}.$$

对 $u\in H_0^1(U)\cap H^2(U)$，存在两列函数$\{w_n\}\subset C^\infty(U),\{v_n\}\subset C_c^\infty(U)$ 使得 $v_n \xrightarrow{H^1(U)} u$且它的边值为0, $w_n \xrightarrow{H^2(U)} u$. 此时只要证明 $\int_U \nabla w_n\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int_U |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 即可，而这可以直接作差计算得到。另一方面，分部积分可得 $\int_U \nabla w_n\cdot\nabla v_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_U(\Delta w_n)v_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \to -\int_U(\Delta u)u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|u\|_{L^2}\|\nabla^2 u\|_{L^2}$. □

作业题 4 (习题1.2.6). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是**连通**开集且 $f\in W^{1,p}(U)$ 满足 $\nabla f=\mathbf{0}$ 在 U 中几乎处处成立。证明：f 几乎处处等于一个常值函数。

提示：本题**不能使用Poincaré不等式**来证明，因为该题结论在Poincaré不等式的证明中要用到。在 $V\Subset U$ （比如说可以取成一个球）中考虑 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$，并证明对充分小的 $\varepsilon>0$,

> $f_\varepsilon = C_\varepsilon$ 在 V 中几乎处处成立。然后使用定理 C.2.1 来证明 $\|f_\varepsilon\|_{L^p}$ 关于 ε 一致有界，因此 $\{C_\varepsilon\}$ 也一致有界，进而$\{f_\varepsilon\}$ 的一个子列收敛到某个常数C。最后证明 $\{\boldsymbol{x} \in U : \exists r > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{x},r) \subset U$ 且 $f = C$ 几乎处处在 $B(\boldsymbol{x},r)$ 中成立$\}$ 在 U 中既开又闭。

证明. 任取开球 $V = B(\boldsymbol{x}_0, r) \Subset U$，对充分小的 $\varepsilon \in (0, \mathrm{dist}\,(V, \partial U)$ 定义 $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f$. 则对任意 $\boldsymbol{x} \in V$ 有 $\nabla f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * \nabla f(x) = 0$. 因为 f_ε 是经典的光滑函数，且其真实的梯度在整个连通球 V 中处处为 0，所以 f_ε 在 V 中必定是常数，记为 C_ε.

由于$|C_\varepsilon|^p \mathcal{L}^d(V) = \|f_\varepsilon\|^p_{L^p(V)} \leqslant \|f\|^p_{L^p(U)}$一致有界，所以**数列** $\{C_\varepsilon\}$ 也是一致有界的，据Bolzano–Weierstrass定理，存在子列 $\{C_{\varepsilon_k}\}$ 收敛到某个常数 C. 又因为 $f_{\varepsilon_k} \xrightarrow{L^p(V)} f$ 故存在a.e.收敛的子列，进而必然有 $f = C$ a.e. in V.

接下来定义 $E = \{\boldsymbol{x} \in U : \exists r > 0$ 使得 $B(\boldsymbol{x},r) \subset U$ 且 $f = C$ 几乎处处在 $B(\boldsymbol{x},r)$ 中成立$\}$. 我们证明 E 在 U 中既开又闭。

- E 是开集：根据定义显然。
- E 是（相对）闭集：设序列 $\boldsymbol{x}_n \in E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} \in U$。现在我们已经证明存在小球 $B(\boldsymbol{x}, \rho) \subset U$，使得 f 在该球内几乎处处等于某个常数 K。因为 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$，所以在 n 充分大时必有 $\boldsymbol{x}_n \in B(\boldsymbol{x}, \rho/2)$，而 $\boldsymbol{x}_n \in E$，说明存在$\boldsymbol{x}_n$ 的一个邻域，在其中 $f = C$ a.e. 成立。这两个邻域的交集具有正Lebesgue测度，进而在这里面 $K = f = C$ 几乎处处成立，所以 $K = C$。这就意味着 $f = C$ a.e. in $B(\boldsymbol{x}, \rho)$，即 $\boldsymbol{x} \in E$.

综上 E 在连通区域 U 中既开又闭，且由于前述证明 E 非空，故 $E = U$，即 $f = C$ 在整个 U 中几乎处处成立。 □

> **作业题 5** (习题1.3.3，选做). 设$f \in H^1_0(\mathbb{R}^d_+) \cap H^2(\mathbb{R}^d_+)$. 证明：对任意$1 \leqslant i \leqslant d-1$, 偏导数$\partial_{x_i} f$也属于$H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$.

这道题我在NUS教MA5213的时候布置了作业，一开始以为很简单，后来发现想当然了，于是现在布置成选做题。欢迎同学们提出更多证法。

证法一：切向光滑化. 对$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d_+$我们将其写成$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_d)$，其中$\boldsymbol{x}' = (x_1, \cdots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0$. 令$\{\eta_\varepsilon\}$是$\mathbb{R}^{d-1}$上的卷积光滑子，定义光滑逼近为

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{y}') f(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}', x_d)\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}' = \int_{B(\boldsymbol{0},1)} \eta_\varepsilon(\boldsymbol{z}') f(\boldsymbol{x}' - \varepsilon \boldsymbol{z}', x_d)\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}'.$$

则模仿第一题可得$f_\varepsilon \xrightarrow{H^2(\mathbb{R}^d_+)} f$ 且 f_ε 关于 $\boldsymbol{x}'$ 是 C^∞ 的。而且在f_ε定义中令$x_d = 0$可直接得到$\mathrm{Tr}\, f_\varepsilon = 0$ on $\{x_d = 0\}$，这样就得到一阶切向导数的边值为零，即 $\partial_i f_\varepsilon = 0$ on $\{x_d = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant d-1$. 又

由迹定理得到

$$\|\partial_i f_\varepsilon - \partial_i f\|_{L^2(\partial\mathbb{R}^d_+)} \leqslant C\|f_\varepsilon - f\|_{H^2(\mathbb{R}^d_+)} \to 0,$$

所以存在a.e.收敛的子列，进而得到在迹的意义下有 $\partial_i f = 0$ on $\{x_d = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant d-1$. 由零迹定理即得结论。 □

证法二：取两个不同序列逼近. 这个思路是NUS MA5213班上的两位同学（Timothy WAN Kai Yang 和 EOM Ikhoon）想到的，后来我接着这个思路写了这个完整解答。对 $f \in H^1_0(U) \cap H^2(U)$，存在两列函数$\{w_n\} \subset C^\infty(U), \{v_n\} \subset C_c^\infty(U)$ 使得 $v_n \xrightarrow{H^1(U)} f$且它的边值为0, $w_n \xrightarrow{H^2(U)} f$但边值不知道。

首先，$\operatorname{Tr} v_n = 0$可推出$\operatorname{Tr} \partial_i v_n = 0$对$1 \leqslant i \leqslant d-1$成立；其次，据迹定理有$\|\partial_i w_n - \partial_i f\|_{L^2(\partial\mathbb{R}^d_+)} \leqslant C\|w_n - f\|_{H^2(\mathbb{R}^d_+)} \to 0$. 所以现在就只要证明$\|\partial_i w_n\|_{L^2(\partial\mathbb{R}^d_+)} \to 0$对$1 \leqslant i \leqslant d-1$成立。注意到我们已经有$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \partial_i w_n \partial_i v_n \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = 0$，所以只要证明

$$\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \partial_i w_n(\partial_i w_n - \partial_i v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \xrightarrow{(?)} 0.$$

这个不等式的证明不能直接用迹定理，因为$v_n \xrightarrow{H^2} f$并不一定成立。现在我们反过来分部积分，注意边界的单位外法向是$N = (0, \cdots, 0, -1)^\top$，所以由Gauss–Green公式有

$$\begin{aligned}(?)\text{左边} &= -\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} N_d \partial_i w_n(\partial_i w_n - \partial_i v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_i\partial_d w_n(\partial_i w_n - \partial_i v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_i w_n \partial_d(\partial_i w_n - \partial_i v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

第一项直接用Cauchy–Schwarz不等式、$\|w_n\|_{H^2}$的一致有界性和$v_n, w_n \xrightarrow{H^1} f$即得趋于零。对第二项，我们分部积分$\partial_i (1 \leqslant i \leqslant d-1)$，因为是切向导数所以不产生边界项，因此得到

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_i w_n \partial_d(\partial_i w_n - \partial_i v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_i^2 w_n(\partial_d w_n - \partial_d v_n)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

再用和第一项同样的处理方法即得结论。 □

证法三：差商极限. 由于 $f \in H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$，存在 $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 使得 $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^d_+)} f$. 对任意固定的 $h \neq 0$，因为 $i \leqslant d-1$，沿 e_i 方向的平移不改变点的第 d 个坐标，所以仍留在半空间 $\mathbb{R}^d_+$ 内。于是 $D_i^h(\varphi_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+) \subset H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$. 又由于平移在 $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ 中连续且 $f \in H^2$，所以$D_i^h(\varphi_n) \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^d_+)} D_i^h(f)$. 而 $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ 是 $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ 的闭子空间，因此 $D_i^h(f) \in H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ $(\forall h \neq 0)$.

下面令 $h\to 0$，因为 $f\in H^2(\mathbb{R}^d_+)$，所以 f 的一阶弱导数属于 $H^1(\mathbb{R}^d_+)$，并且差商收敛定理给出 $D_i^h(f)\xrightarrow{L^2}\partial_{x_i}f$. 另一方面，对任意 $1\leqslant j\leqslant d$，有 $\partial_{x_j}D_i^h(f)=D_i^h(\partial_{x_j}f)$. 而 $\partial_{x_j}f\in H^1(\mathbb{R}^d_+)$，再次由差商收敛定理可得 $D_i^h(\partial_{x_j}f)\xrightarrow{L^2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}f$. 故对任意$h\neq 0$都有 $D_i^h(f)\in H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$，再由 $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$ 在 $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ 中的闭性即得结论。 □

作业题 6 (习题1.4.3). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是有界区域，函数 $u\in H^1(U)$ 满足：存在$\alpha\in(0,1)$使得集合 $Z:=\{\boldsymbol{x}\in U|u(\boldsymbol{x})=0\}$ 满足 $\mathcal{L}^d(Z)\geqslant\alpha\mathcal{L}^d(U)$. 证明：存在仅依赖于 d,α 的常数 $C>0$，使得

$$\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：在 $U\backslash Z$ 中，将 u^2 写为 $(u-(u)_U+(u)_U)^2$ 并对 $(u-(u)_U)^2$ 应用 Poincaré 不等式。$(u)_U^2$ 的贡献将被所需不等式的左边吸收，这是因为 $U\backslash Z$ 的测度严格小于 U 的测度。

证法一. 据提示我们把U拆分为 Z 和 $U\setminus Z$。在 Z 上 $u=0$，所以 $\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{U\backslash Z}u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 现在考虑 $U\setminus Z$ 中的积分：

$$\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U(u-(u)_U+(u)_U)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_U(u-(u)_U)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_U(u)_U^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\underbrace{2\int_U(u-(u)_U)(u)_U\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{=0}.$$

对第一项用Poincaré不等式（在整个 U 上）得到

$$\int_U(u-(u)_U)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_U(u-(u)_U)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对第二项，它等于 $\mathcal{L}^d(U)(u)_U^2=(\mathcal{L}^d(U))^{-1}(\int_{U\backslash Z}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2$. 接下来利用Cauchy–Schwarz不等式得到

$$(\mathcal{L}^d(U))^{-1}\left(\int_{U\backslash Z}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2\leqslant\frac{\mathcal{L}^d(U\backslash Z)}{\mathcal{L}^d(U)}\int_{U\backslash Z}u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

而 $\mathcal{L}^d(U\backslash Z)/\mathcal{L}^d(U)\leqslant 1-\alpha$ 代入即得

$$\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Rightarrow\int_U u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C\alpha^{-1}\int_U|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

□

证法二. 反证法，若结论错误，则存在$\alpha>0$和序列$\{u_m\}$、函数u使得

- $\mathcal{L}^d(Z_m)\geqslant\alpha\mathcal{L}^d(U)$, $Z_m:=\{\boldsymbol{x}\in U:u_m(\boldsymbol{x})=0\}$;

- $\|u_m\|_{L^2}=1, \|\nabla u_m\|_{L^2}<1/m$ 使得 $u_M \xrightarrow{L^2} u$ 且 $\nabla u=0$ a.e. in U.

据习题1.2.6得$u=C$ a.e. in U. 而另一方面

$$0=\lim_{m\to\infty}\int_U |u_m-u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \lim_{m\to\infty}\int_{Z_m}|u_m-u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant C^2\inf_m \mathcal{L}^d(Z_m)>0,$$

得到矛盾，其中最后一个$\geqslant$用到Z_m的定义。 □

作业题 7 (习题1.4.7). 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域。证明：$H^2(U)$ 紧嵌入到 $H^1(U)$，且对任意 $\varepsilon>0$存在常数 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)} \leqslant \varepsilon\|u\|_{H^2(U)}+C_\varepsilon\|u\|_{L^2(U)}, \quad \forall u\in H^2(U).$$

证明. 由 U 有界知 $H^2(U)\hookrightarrow H^1(U)$ 是紧嵌入，所以本题是如下泛函分析习题的直接结论。

引理 0.1 (Ehrling引理). 设 X,Y,Z 为三个 Banach 空间，满足紧嵌入 $X\subset\subset Y$ 和连续嵌入 $Y\hookrightarrow Z$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在常数 $C_\varepsilon>0$，使得对所有的 $u\in X$，成立如下内插不等式：

$$\|u\|_Y \leqslant \varepsilon\|u\|_X + C_\varepsilon\|u\|_Z.$$

引理的证明是反证法。假设定理结论不成立，则存在常数 $\varepsilon_0>0$，使得对任意正整数 n 都存在 $u_n\in X$ 满足 $\|u_n\|_Y>\varepsilon_0\|u_n\|_X+n\|u_n\|_Z$ 且$\|u_n\|_X>0$ 恒成立（否则第一个不等式无法成立）。今对该序列归一化，定义$v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\in X$ 并满足不等式 $\|v_n\|_Y>\varepsilon_0\|v_n\|_X+n\|v_n\|_Z=\varepsilon_0+n\|v_n\|_Z$.

接下来利用紧嵌入寻找收敛子列。因为$\{v_n\}$ 在 X 中一致有界，所以存在子列$\{v_{n_k}\}$ 和 $v\in Y$ 使得 $v_{n_k}\xrightarrow{\|\cdot\|_Y} v$. 又因为$Y\subset Z$是连续嵌入，所以$\{v_{n_k}\}$在$Z$中也是Cauchy列。设一致上界为$\|v_{n_k}\|_Y\leqslant M$，则代入之前得到的不等式有

$$M\geqslant\|v_{n_k}\|_Y>\varepsilon_0+n_k\|v_{n_k}\|_Z \quad\Rightarrow\quad 0\leqslant\|v_{n_k}\|_Z<\frac{M-\varepsilon_0}{n_k}<\frac{M}{n_k}.$$

现在令$k\to\infty$，得到序列 $\{v_{n_k}\}$ 在 Z 空间中的极限必定为零，即 $\|v_{n_k}\|_Z\to 0$，这表明它在Y中的极限也应该是0，于是$v=0$.

但是最开始我们证到的不等式表明 $\|v_{n_k}\|_Y>\varepsilon_0+n_k\|v_{n_k}\|_Z>\varepsilon_0$，矛盾。 □

作业题 8 (问题1.4.1，选做). 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界光滑的有界区域，开球$B\Subset U$. 对$\varepsilon\in$

$(0,1)$设u_ε是如下方程的光滑解

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^{-1}(u_\varepsilon - f)\mathbf{1}_B = 0 & \text{in } U, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial U, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $f \in H_0^1(U)$ 是给定的函数。证明：$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)}$ 关于 ε 一致有界，且 $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2(B)} f$.

证明. 方程两边同时乘以$u_\varepsilon - f$得到

$$\int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_U \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla f + \varepsilon^{-1} \int_B (u_\varepsilon - f)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

由Cauchy–Schwarz不等式得

$$\int_U \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)} \|\nabla f\|_{L^2(U)} \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla f\|_{L^2(U)}^2.$$

代回前一等式可得

$$\frac{1}{2}\int_U |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \varepsilon^{-1}\int_B (u_\varepsilon - f)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{1}{2}\int_U |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由于两项皆非负，我们可以直接得出

- $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(U)} \leqslant \|\nabla f\|_{L^2(U)}$ 关于 ε 一致有界。
- $\|u_\varepsilon - f\|_{L^2(B)}^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla f\|_{L^2(U)}^2$。当 $\varepsilon \to 0$ 时，右边趋于 0。故 $u_\varepsilon \to f$ 在 $L^2(B)$ 中强收敛。

□

作业题 9 (问题1.4.4，Strauss径向引理). 设$d \geqslant 2$, $u \in H_{\mathrm{rad}}^1(\mathbb{R}^d)$ (即$u \in H^1(\mathbb{R}^d)$是径向函数，$u(\boldsymbol{x})$取值只依赖$r := |\boldsymbol{x}|$). 本题可默认$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $H_{\mathrm{rad}}^1(\mathbb{R}^d)$ 中是稠密的，进而你可以直接对 C_c^∞ 径向函数证明。

(1) 利用微积分基本定理和$u(\infty) = 0$证明：$|u(r)|^2 \leqslant 2r^{1-d}\int_r^\infty |u(s)||u'(s)|s^{d-1}\,\mathrm{d}s$.

(2) 证明：$|u(r)| \leqslant Cr^{-(d-1)/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}$.

提示：对(1)右边的积分用Cauchy-Schwarz不等式，再用积分的极坐标表示凑出 u 和 ∇u 的 L^2 范数。

证明. 设 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是径向函数，据微积分基本定理和 $u(\infty) = 0$ 得到

$$u(r)^2 = -\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(u(s)^2)\,\mathrm{d}s = -2\int_r^\infty u(s)u'(s)\,\mathrm{d}s \leqslant 2\int_r^\infty |u(s)||u'(s)|\frac{s^{d-1}}{s^{d-1}}\,\mathrm{d}s.$$

因为积分区间是 $s \in [r, \infty)$，且 $d \geqslant 2$，所以 $s^{1-d} \leqslant r^{1-d}$，将其从积分中提出得到

$$|u(r)|^2 \leqslant 2r^{1-d}\int_r^\infty |u(s)||u'(s)|s^{d-1}\,\mathrm{d}s$$

这证明了第一部分。

(2) 对(1)的右侧用Cauchy-Schwarz不等式：

$$\int_r^\infty |u(s)||u'(s)|s^{d-1}\,\mathrm{d}s \leqslant \left(\int_r^\infty |u(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}.$$

注意到在极坐标下，全空间的 L^2 范数为（设 ω_{d-1} 为单位球面面积）

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \omega_{d-1}\int_0^\infty |u(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s \geqslant \omega_{d-1}\int_r^\infty |u(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s,$$
$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \omega_{d-1}\int_0^\infty |u'(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s \geqslant \omega_{d-1}\int_r^\infty |u'(s)|^2 s^{d-1}\,\mathrm{d}s.$$

因此 $\int_r^\infty |u||u'|s^{d-1}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\omega_{d-1}}\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$，将其代入(1)的不等式，两边开平方，再令 $C = \sqrt{2/\omega_{d-1}}$ 即得

$$|u(r)| \leqslant Cr^{-(d-1)/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.$$

□

作业题 10 (问题1.4.5). 设$d \geqslant 2, 2 < q < 2^* := \frac{2d}{d-2}$, 证明：$H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ 是紧嵌入。
提示：在$|\boldsymbol{x}| = R$处作截断，当$|\boldsymbol{x}| > R$时用Strauss径向引理，当$|\boldsymbol{x}| \leqslant R$时已经有紧性。

证明. 设 $\{u_n\}$ 在 $H^1_{rad}(\mathbb{R}^d)$ 中满足 $\|u_n\|_{H^1} \leqslant M$，要证存在子列在 $L^q(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛。

现在将空间分为$B(\mathbf{0}, R)$ 和 $\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)$ 。对外部用Strauss径向引理可得

$$|u_n(x)| \leqslant C|\boldsymbol{x}|^{-(d-1)/2}\|u_n\|_{H^1} \leqslant CMR^{-(d-1)/2}, \quad \forall |x| \geqslant R.$$

于是当$R \to \infty$时有

$$\int_{|x|\geqslant R} |u_n|^q\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{|\boldsymbol{x}|\geqslant R} |u_n|^{q-2}|u_n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \left(CMR^{-\frac{d-1}{2}}\right)^{q-2}\int_{|x|\geqslant R} |u_n|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C^{q-2}M^qR^{-\frac{(d-1)(q-2)}{2}} \to 0.$$

这样对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$，使得 $\sup_n \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d\setminus B(\mathbf{0},R))}<\varepsilon$.

固定$R>0$，由于$B(\mathbf{0},R)$是有界区域且$q<2^*$，Rellich–Kondrachov定理保证了 $H^1(B(\mathbf{0},R))\hookrightarrow L^q(B(\mathbf{0},R))$ 是紧嵌入。以$R=1$为例，现在存在子列 $\{u_n^{(1)}\}$ 在 $L^q(B(\mathbf{0},1))$ 中是柯西列。然后再令$R=2$，得到子列$\{u_n^{(2)}\}\subset\{u_n^{(1)}\}$ 在 $L^q(B(\mathbf{0},2))$ 中是柯西列。不断重复该过程，并取对角线子列 $v_n:=u_n^{(n)}$ (第n个子列的第n项选为最终子列的第n项)，它满足：**对任意$R>0$，它在$L^q(B(\mathbf{0},R))$中是柯西列。**

现在证明$\{v_n\}$是$L^q(\mathbb{R}^d)$中的柯西列。前面已经证明了对任意$\varepsilon>0$存在充分大的$R>0$使得 $\sup_n \|v_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d\setminus\overline{B(\mathbf{0},R)})}<\varepsilon$. 现在对该$\varepsilon>0$，又存在$N\in\mathbb{N}^*$使得对任意 $k,\ell>N$，都有 $\|v_k-v_\ell\|_{L^q(B(\mathbf{0},R))}<\varepsilon$，于是对这样的 k,ℓ,R 我们计算

$$\|v_k-v_\ell\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\leqslant\|v_k-v_\ell\|_{L^q(B(\mathbf{0},R))}+\|v_k\|_{L^q(\mathbb{R}^d\setminus\overline{B(\mathbf{0},R)})}+\|v_l\|_{L^q(\mathbb{R}^d\setminus B(\mathbf{0},R))}<3\varepsilon.$$

这证明了我们可以找到在 $L^q(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛的子列，紧嵌入得证。 □

作业题 11 (习题1.5.1). 设$U\subset\mathbb{R}^d$ 是边界Lipschitz 的有界开集，正整数$k>\frac{d}{2}$. 证明：存在依赖于 k,d,U 的常数 $C>0$，使得对任意$f,g\in H^k(U)$成立如下不等式

$$\|fg\|_{H^k(U)}\leqslant C\|f\|_{H^k(U)}\|g\|_{H^k(U)}.$$

证明. 据Leibniz法则（可用到边的整体光滑逼近证明），对满足$|\alpha|\leqslant k$的多重指标 α有

$$\partial^\alpha(fg)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta f\,\partial^{\alpha-\beta}g.$$

我们要估计 $\|\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}g\|_{L^2}$. 今假设 $|\beta|=j$，则 $|\alpha-\beta|=|\alpha|-j\leqslant k-j$，据Hölder不等式有

$$\|\partial^\beta f\partial^{\alpha-\beta}g\|_{L^2(U)}\leqslant\|\partial^\beta f\|_{L^{p_1}(U)}\|\partial^{\alpha-\beta}g\|_{L^{p_2}(U)},\qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{2}.$$

接下来我们希望用Sobolev嵌入定理确保 $H^{k-j}\hookrightarrow L^{p_1}$ 和 $H^j\hookrightarrow L^{p_2}$.

- $k-j<d/2$ 且 $j<d/2$. 这就要求

$$\frac{1}{p_1}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{k-j}{d},\quad \frac{1}{p_2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{j}{d}.$$

两式相加得到

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geqslant 1-\frac{k}{d}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geqslant 1-\frac{k}{d}.$$

即 $\frac{k}{d} \geqslant \frac{1}{2}$，这与条件吻合，所以上述不等式成立。

- $k-j, j$中至少有一个$> d/2$，不妨$j > d/2$. 此时$H^j \hookrightarrow L^\infty$，所以取 $p_2 = \infty, p_1 = 2$即可。
- $k-j, j$有一个等于$d/2$, 另一个$\leqslant d/2$. 不妨$j = d/2, k-j \leqslant d/2$, 从而$k \leqslant d$.
  若$k = d$, 则$k-j = j = d/2$, 此时可以利用次临界嵌入 $H^{d/2} \hookrightarrow L^4$ 得到 $\|\partial^{\alpha-\beta} g\|_{L^4(U)} \lesssim \|\partial^{\alpha-\beta} g\|_{H^{d/2}} \leqslant \|g\|_{H^{k-j+d/2}} = \|g\|_{H^d}$，而另一项 $\|\partial^\beta f\|_{L^4(U)} \lesssim \|\partial^\beta f\|_{H^{d/2}} \leqslant \|f\|_{H^{j+d/2}} = \|f\|_{H^d}$，所以取 $p_1 = p_2 = 4$ 即可。
  若$\frac{d}{2} \leqslant k < d$, 则$0 \leqslant k-j < d/2$, 此时存在$p_1 \in (2,\infty)$ 使得 $H^{k-j} \hookrightarrow L^{p_1}$, 进而 $\|\partial^\beta f\|_{L^{p_1}} \lesssim \|\partial^\beta f\|_{H^{k-j}} \lesssim \|f\|_{H^k}$. 而对另一项只需注意 $H^{d/2}$ 可以嵌入对应的 L^{p_2}, 其中 $p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1/2$. 于是 $\|\partial^{\alpha-\beta} g\|_{L^{p_2}} \lesssim \|\partial^{\alpha-\beta} g\|_{H^j} \lesssim \|g\|_{H^k}$.

这说明我们总能找到一对合适的 (p_1, p_2) 满足 $\|\partial^\beta f\|_{L^{p_1}} \leqslant C_1 \|f\|_{H^k}$ 和 $\|\partial^{\alpha-\beta} g\|_{L^{p_2}} \leqslant C_2 \|g\|_{H^k}$. 将所有偏导数项相加即得待证不等式 $\square$