2026年秋季学期偏微分方程作业一

传输方程、波动方程

截止时间：2026年11月23日下课前（电子版截至当天23:59:59）

第4、9题选做，其它必做。禁止抄袭或使用AI直接生成答案PDF，被抓到者此次作业零分。
A组：交流生、高年级同学以及25级学号 $\leqslant$ PB25000295的同学把作业交给韦晏洲助教。
B组：25级学号 $\geqslant$ PB25000304的同学把作业交给胡博睿助教。

作业题 1 (习题1.1.2). 解方程$x\partial_t u + t\partial_x u = 0$ $(t, x \in \mathbb{R})$, $u(0, x) = e^{-x^2}$. 并说明tOx平面中哪些部分的解由初值唯一确定？

作业题 2 (习题1.1.3). 考虑方程$3u_y + u_{xy} = 0$.

(1) 计算方程的通解. （提示: 令$v = \partial_y u$.）
(2) 若假设$u(x, 0) = e^{-3x}$, $u_y(x, 0) = 0$, 方程的解是否存在？是否唯一？

作业题 3 (习题1.1.5). 对无粘Burgers方程 $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ $(t > 0, x \in \mathbb{R})$, $u(0, x) = \varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, 若初值$\varphi \in C^1$满足$\varphi' \geqslant -C$对某个常数$C > 0$恒成立. 证明: 该方程在区域$[0, 1/C) \times \mathbb{R}$有$C^1$解, 并满足对任意的$t \in [0, 1/C), x \in \mathbb{R}$都有

$$\partial_x u(t, x) \geqslant \frac{1}{t - C^{-1}}$$

恒成立.

提示：考虑$v = \partial_x u$满足的方程，并计算沿着u的特征线上v的方程会变成怎样的常微分方程。

作业题 4 (习题1.2.2，选做). 设$\kappa \in \mathbb{R}$，$\varphi \in C^1([0, 1])$满足相容条件 $\varphi(0) = \kappa\varphi(1), \varphi'(0) = \kappa\varphi'(1)$. 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = \kappa u(t, 1), & t \geqslant 0, \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

(1) 求出该问题的唯一C^1解，并证明对任意非负整数n和任意$x \in [0, 1]$有$u(n, x) = \kappa^n \varphi(x)$.
(2) 定义 $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u(t, x)^2 \, \mathrm{d}x$，证明 $E'(t) = \frac{\kappa^2 - 1}{2} u(t, 1)^2$.
(3) 分别讨论 $|\kappa| < 1$, $|\kappa| = 1$, $|\kappa| > 1$ 时非零解的长时间行为，并证明当$|\kappa| < 1$时解指数衰减。还要单独说明$\kappa = 0$时的情形。

作业题 5 (习题2.1.2). 考虑方程 $20u_{tt} - u_{tx} - u_{xx} = 0$ $(t > 0, x \in \mathbb{R})$.

(1) 计算通解。（提示：因式分解方程左边的微分算子）

(2) 假设初值是 $u(0,x) = x$, $\partial_t u(0,x) = e^{-x} + \frac{1}{4}$, 计算方程的解$u(t,x)$.

作业题 6 (习题2.1.3). 设常数 $c > 0$，证明一维波动方程 $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ 的解一定可以写为 $F(x - ct) + G(x + ct)$ 这种两个相反方向行波叠加的形式。（提示：作变量替换 $\xi = x + ct, \eta = x - ct$。）

作业题 7 (习题2.1.5). 考虑一维波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) & t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 是给定的常数, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 定义

$$K(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x,\ P(t) := \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

证明:

(1) $K(t) + P(t)$是守恒量，并据此证明方程平方可积解的唯一性。

(2) 当t充分大时，有$K(t) = P(t)$. （提示：使用达朗贝尔公式）

本题中的记号$C_c^\infty(\mathbb{R})$是指全体具有紧支集的光滑函数，即$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{Spt}\, f$是紧集$\}$, 其中$\mathrm{Spt}\, f := \overline{\{f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.

作业题 8 (习题2.2.2). 将定理 2.2.5 里面的维数改成$d = 2$, 并不妨设$\varphi = 0$，证明方程的解在t充分大时具有衰减估计

$$|u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant C_R t^{-1/2} \max_{\mathbb{R}^2} |\psi|. \tag{0.1}$$

其中常数$C_R > 0$依赖于R, c.

提示：在泊松公式中令$r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$, 然后讨论$B(\boldsymbol{x}, ct)$是否完全包含$B(\boldsymbol{0}, R)$. 若是，则此时$r \leqslant |\boldsymbol{x}| + R \leqslant ct$, 实际的积分区域就是$B(\boldsymbol{0}, R)$. 若否，则$ct < |\boldsymbol{x}| + R$, 此时需要利用极坐标去具体估算$\partial B(0,R) \cap B(\boldsymbol{x}, ct)$的弧长，并注意到$t$充分大时，$r$和$ct$的大小是近乎同阶的，利用该事实放缩Poisson公式中的分母。

作业题 9 (问题2.2.1，选做). 考虑二维波动方程的初值问题

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0\ \ (t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2), \qquad u(0,\boldsymbol{x}) = 0,\ \ \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})\ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

其中初值$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(1) 用积分的极坐标表示证明

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} \psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r.$$

(2) 证明: 存在常数$C>0$（不依赖ψ），使得如下估计成立

$$|u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right).$$

(2)的提示：把(1)右边的积分$\int_0^t$拆成$\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t-\varepsilon}^t$. 第二部分的估计和三维情况类似。对第一部分，把$r\leqslant t-\varepsilon$带进(1)中的分母，然后取$\varepsilon>0$充分小去得到要证的结果。

作业题 10 (习题2.3.3). 证明：对任意常数$D\in\mathbb{R}$, 如下方程至多只有一个光滑解 $u\in C^\infty([0,T]\times[0,1])$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & t\in(0,T), x\in(0,1) \\ u(0,x)=\varphi(x),\ \partial_t u(0,x)=\psi(x) & x\in[0,1] \\ u(t,0)=u(t,1)=0 & t\in[0,T]. \end{cases} \tag{0.2}$$