2026年秋季学期 常微分方程 作业五

高阶线性方程、Sturm–Liouville 理论

截止时间：无需提交，但在考试范围内！

作业题 1 (习题5.1.1). 考虑区间 (a,b) 上具有连续系数的二阶线性方程 $y''+p(t)y'+q(t)y=0$, 设 $u(t),v(t)$ 是这个方程的一个基本解组，证明方程组的系数 p,q 被该基本解组唯一确定，且$u(t),v(t)$没有公共零点。

作业题 2 (习题5.1.2). 求解如下方程

(2) $x^{(4)}(t)-4x'''(t)+8x''(t)-8x'(t)+3x(t)=0.$

(3) $x^{(4)}(t)+x(t)=2e^t, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1.$

(4) $t^2x''(t)+5tx'(t)+13x(t)=0, \quad t>0.$

(5) (新增题)$y''+y'-2y=(6t+2)e^t+4\cos t-2\sin t.$

作业题 3 (习题5.1.3). 考虑微分方程 $x''(t)+4x'(t)+3x(t)=f(t)$, 其中 f 在 $[a,+\infty)$ 连续，且当$t\to+\infty$ 时有 $f(t)\to 0$. 证明：该方程的任意解都满足当$t\to+\infty$ 时成立 $x(t)\to 0$.

作业题 4 (习题6.1.2). 设方程$x''(t)+P(t)x(t)=0$ 满足 $P\in C(\mathbb{R})$, 且存在非负整数 n 使得 $n^2<P(t)<(n+1)^2$. 证明：该方程的任何非零解都不可能是2π-周期解。并进一步说明，条件中的严格不等号不可以改为$\leqslant$.

提示：若存在2π-周期解，则先证明每个周期内的零点数为正偶数，然后用 Sturm 比较定理估计相邻零点的间距，最终再用周期性。

作业题 5 (习题6.2.1). 求解下列两个边值问题：

(1) $y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(\pi)=0;$

(2) $y''+(\lambda+1)y=0, \quad y'(0)=y'(\pi)=0.$

注：本题的结论在 PDE 里面会反复用到，请务必认真写。

作业题 6 (习题6.2.2). 证明 $t^2x''-\lambda tx'+\lambda x=0$, $x(1)=x(2)=0$ 对任何实参数 λ 都没有非零解。这是否与定理 6.2.6 矛盾？

作业题 7 (习题6.2.3，2025年期末第7题改编). 考虑 $[0,1]$ 上的特征值问题 $x''(t)+(\lambda+t)x(t)=0$, $x(0)=x(1)=0$.

(1) 证明：该问题的特征值λ一定是正实数。

(2) 记 λ_n 为如上方程的第 n 个特征值（从小到大排列），证明：$(n\pi)^2 - 1 < \lambda_n < (n\pi)^2$.

提示：证明 $\lambda > 0$ 之前还要证明 $\lambda \in \mathbb{R}$，在证明非负时可以用到 $x(t) = \int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s$ 然后设法用 Cauchy–Schwarz 不等式；第二问思考如何用 Sturm 比较定理。

作业题 8. 设正整数 $d \geqslant 2$，函数 $y \in C^2([0,+\infty))$ 满足方程 $y''(r) + \dfrac{d-1}{r} y'(r) + y(r) = 0$ $(r > 0)$.

(1) 证明：$y'(0) = 0$；并证明给定 $y(0)$ 后，这样的解至多有一个。

(2) 对非零解 y，证明：存在只依赖于 d 的正数 r_d，使得 $y(r_d) = 0$.

(3) 当 $d = 3$ 时，证明：存在与 y 无关的 $R > 0$，使得 $\int_0^R r^2 y(r)\,\mathrm{d}r = 0$，这个 R 是如何确定的？

提示：(1) 证明唯一性时在方程两边同乘 r^{d-1}，(2) 推导 $v(r) = r^{(d-1)/2} y(r)$ 满足的二阶方程，然后思考如何用 Sturm 比较定理。

注：本题的背景是 $(-\Delta)$ 算子的特征函数估计，这里考虑的是径向情况。本题亦有完全不依赖 ODE 的证法，甚至可以去掉径向条件，我们将在 PDE 课程中布置这道题的原始版本。