2026年秋季学期 常微分方程 作业五

高阶线性方程、Sturm–Liouville 理论

截止时间：无需提交，但在考试范围内！

作业五参考解答

作业题 1 (习题5.1.1). 考虑区间 (a,b) 上具有连续系数的二阶线性方程 $y''+p(t)y'+q(t)y=0$, 设 $u(t),v(t)$ 是这个方程的一个基本解组，证明方程组的系数 p,q 被该基本解组唯一确定，且$u(t),v(t)$没有公共零点。

解. 由于 u,v 是基本解组，它们线性无关，据命题 5.1.2 知其 Wronski 行列式 $W(t)=u(t)v'(t)-u'(t)v(t)\neq 0$ 恒成立。下面求出 p,q。由于 u、v 均为解，所以

$$u''+pu'+qu=0,\qquad v''+pv'+qv=0.$$

看成 $(p.q)$ 的二元一次方程组解得

$$p(t)=\frac{u''(t)v(t)-u(t)v''(t)}{u(t)v'(t)-u'(t)v(t)},\qquad q(t)=\frac{u'(t)v''(t)-u''(t)v'(t)}{u(t)v'(t)-u'(t)v(t)}.$$

因为分母 $W(t)$ 处处非零，这两个表达式证明 p,q 被 u,v 唯一确定。最后，若 $u(t_*)=v(t_*)=0$，则 $W(t_*)=u(t_*)v'(t_*)-u'(t_*)v(t_*)=0$，矛盾。故 u,v 无公共零点。 □

作业题 2 (习题5.1.2). 求解如下方程

(2) $x^{(4)}(t)-4x'''(t)+8x''(t)-8x'(t)+3x(t)=0.$

(3) $x^{(4)}(t)+x(t)=2e^t,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1.$

(4) $t^2x''(t)+5tx'(t)+13x(t)=0,\quad t>0.$

(5) (新增题)$y''+y'-2y=(6t+2)e^t+4\cos t-2\sin t.$

解答. (2) 将特征方程因式分解得到

$$r^4-4r^3+8r^2-8r+3=(r-1)^2(r^2-2r+3)=(r-1)^2\big((r-1)^2+2\big).$$

因此特征根为二重根 $r=1$ 以及两个单根 $r=1\pm i\sqrt{2}$。二重实根对应 e^t, te^t，共轭复根对应 $e^t\cos(\sqrt{2}t), e^t\sin(\sqrt{2}t)$，所以通解为

$$x(t)=e^t\left(C_1+C_2t+C_3\cos(\sqrt{2}t)+C_4\sin(\sqrt{2}t)\right).$$

(3) 先观察右端为 $2e^t$，而 e^t 的任意阶导数仍然是 e^t。取 $x(t)=e^t$，则 $x^{(4)}(t)+x(t)=e^t+e^t=2e^t$；同时 $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$。因此 e^t 满足微分方程和全部四个初值。

说明解的唯一性：如果 x_1, x_2 都满足题设，那么 x_1-x_2 满足四阶常系数齐次方程 $z^{(4)}+z=0$，且 $z(0)=z'(0)=z''(0)=z'''(0)=0$。将该方程化为一阶$4\times4$的线性方程组，由初值唯一性可知 $z\equiv0$。故所求解唯一，无需先求出四阶齐次方程的通解。这个题有点脑筋急转弯了，出的时候没注意……

(4) 这是 $t>0$ 上的 Cauchy–Euler 方程。作变量替换 $s=\ln t$，令 $y(s)=x(t)=x(e^s)$，于是由链式法则得到

$$x'(t)=\frac{1}{t}y'(s),\qquad x''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}y'(s)\right)=-\frac{1}{t^2}y'(s)+\frac{1}{t^2}y''(s).$$

代入原方程可得 $y''(s)+4y'(s)+13y(s)=0$，其特征多项式为 $\lambda^2+4\lambda+13=0$，解得 $\lambda=-2\pm3i$. 因此 $y(s)=e^{-2s}(C_1\cos3s+C_2\sin3s)$，再代入 $s=\ln t$ 得到通解

$$x(t)=\frac{1}{t^2}\left[C_1\cos(3\ln t)+C_2\sin(3\ln t)\right],\qquad t>0.$$

(5) 齐次方程 $y''+y'-2y=0$ 的特征方程为 $r^2+r-2=(r-1)(r+2)=0$，所以齐次通解为 $y_h=C_1e^t+C_2e^{-2t}$。

先考虑右端的 $(6t+2)e^t$。由于 e^t 已是齐次解，特解不能直接取 $(At+B)e^t$；可取 $y_1=e^t(At^2+Bt)$。令 $h(t)=At^2+Bt$，则 $y_1'=e^t(h+h')$、$y_1''=e^t(h+2h'+h'')$。因此

$$y_1''+y_1'-2y_1=e^t(3h'+h'')=e^t(6At+3B+2A).$$

比较系数得到 $6A=6$、$3B+2A=2$，即 $A=1, B=0$，所以 $y_1=t^2e^t$。

再考虑 $4\cos t-2\sin t$，取 $y_2=A\cos t+B\sin t$，则 $y_2'=-A\sin t+B\cos t$、$y_2''=-A\cos t-B\sin t$，进而得到

$$y_2''+y_2'-2y_2=(-3A+B)\cos t+(-A-3B)\sin t.$$

比较系数得 $-3A+B=4$、$-A-3B=-2$，解得 $A=-1, B=1$。于是 $y_2=-\cos t+\sin t$。根据线性方程的叠加原理，全部解为

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}+t^2e^t-\cos t+\sin t.$$

这里的 C_1, C_2 均为任意实常数。 □

作业题 3 (习题5.1.3). *考虑微分方程 $x''(t)+4x'(t)+3x(t)=f(t)$, 其中 f 在 $[a,+\infty)$ 连续，且当 $t\to+\infty$ 时有 $f(t)\to 0$. 证明：该方程的任意解都满足当 $t\to+\infty$ 时成立 $x(t)\to 0$.*

解. 先用常数变易法直接求解方程。该方程对应齐次方程的特征根为 $\lambda_1=-1$、$\lambda_2=-3$，因此齐次方程的通解为 $C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$，据常数变易法，非齐次方程的通解为

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\int_a^t\left(e^{-(t-s)}-e^{-3(t-s)}\right)f(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (C_1,C_2\in\mathbb{R})$$

显然，前两项在 $t\to+\infty$ 时趋于零。因此只需要证明积分项趋于零。

由于 $f(t)\to 0$，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T>a$，使得当 $s\geqslant T$ 时有 $|f(s)|<\varepsilon$。当 $t\geqslant T$ 时，将积分拆成两部分 $\int_a^t=\int_a^T+\int_T^t$.

对第一部分，因为 f 在 $[a,T]$ 上连续，所以存在常数 $M>0$ 使得 $|f(s)|\leqslant M$。因此

$$\left|\int_a^T\left(e^{-(t-s)}-e^{-3(t-s)}\right)f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M\int_a^T e^{-(t-s)}\,\mathrm{d}s=M\left(e^{-(t-T)}-e^{-(t-a)}\right)\leqslant Me^{-(t-T)}\longrightarrow 0.$$

第二部分直接利用 $|f(s)|<\varepsilon$ 得到

$$\left|\int_T^t\left(e^{-(t-s)}-e^{-3(t-s)}\right)f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\varepsilon\int_T^t\left(e^{-(t-s)}-e^{-3(t-s)}\right)\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon\int_0^\infty(e^{-s}-e^{-3s})\,\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 任意，故原积分项趋于零。结合 $e^{-t}\to 0$ 和 $e^{-3t}\to 0$，最终得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$. □

作业题 4 (习题6.1.2). *设方程 $x''(t)+P(t)x(t)=0$ 满足 $P\in C(\mathbb{R})$, 且存在非负整数 n 使得 $n^2<P(t)<(n+1)^2$. 证明：该方程的任何非零解都不可能是 2π-周期解。并进一步说明，条件中的严格不等号不可以改为 $\leqslant$.*

提示：若存在 2π-周期解，则先证明每个周期内的零点数为正偶数，然后用 Sturm 比较定理估计相邻零点的间距，最终再用周期性。

解答. 假设存在一个非零的 2π-周期解 $x(t)$，下面导出矛盾。

第一步：一个周期内的零点数是正偶数。 由 $n\geqslant 0$ 和 $P(t)>n^2$ 可知 $P(t)>0$。先证明 x 一定有零点。若 x 没有零点，则由连续性知 $x(t)$ 在实轴上保持严格同号。但是利用 $x'(2\pi)=x'(0)$ 和方程本身得到

$$0=x'(2\pi)-x'(0)=-\int_0^{2\pi}P(t)x(t)\,\mathrm{d}t.$$

由于 $P(t)>0$，而 $x(t)$ 保持严格同号，右端不可能为零，矛盾。故 x 至少有一个零点，取其中一个为 t_0。然后由 Sturm 分离定理知零点必定是单重的孤立零点。

今将 $[t_0, t_0+2\pi]$ 中的零点按顺序排列为 $t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t_0 + 2\pi$，相邻零点处的导数符号相反，因此 $x'(t_m)$ 与 $x'(t_0)$ 的符号相差 $(-1)^m$。另一方面又有 $x'(t_m) = x'(t_0+2\pi) = x'(t_0) \neq 0$，所以 $(-1)^m = 1$，即 m 为偶数。

第二步：估计相邻零点距离。 固定相邻的两个零点 $t_j < t_{j+1}$。我们只使用如下 Sturm 比较定理的结论：若两个方程的系数满足 $Q_2(t) > Q_1(t)$，则 Q_2 所对应的任意非零解，在 Q_1 所对应的任意非零解的相邻两个零点之间至少有一个零点。

先利用 $P(t) < (n+1)^2$ 估计零点间距下界。函数 $w(t) = \sin((n+1)(t-t_j))$ 是 $w''+(n+1)^2 w = 0$ 的解。由于 $(n+1)^2 > P(t)$，所以在 x 的两个相邻零点 t_j, t_{j+1} 之间，w 必须有一个零点。可是 w 在 t_j 之后的第一个零点为 $t_j+\pi/(n+1)$，故 $t_{j+1}-t_j > \dfrac{\pi}{n+1}$. 这里不等号是严格的：若 $t_{j+1} \leqslant t_j+\pi/(n+1)$，那么 w 在 (t_j, t_{j+1}) 中根本没有零点。

当 $n \geqslant 1$ 时，再利用 $P(t) > n^2$ 估计零点间距上界。函数 $\widetilde{w}(t) = \sin(n(t-t_j))$ 满足 $\widetilde{w}''+n^2\widetilde{w} = 0$，其相邻零点为 t_j 和 $t_j + \pi/n$。由于 $P(t) > n^2$，据 Sturm 比较定理知 x 在 $(t_j, t_j+\pi/n)$ 中必有一个零点。因为 t_{j+1} 是 t_j 后的第一个零点，必得 $t_{j+1} - t_j < \dfrac{\pi}{n}$.

第三步：将局部距离估计与周期性结合。 由零点的排列知 $\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j) = t_m - t_0 = 2\pi$. 把上一步得到的零点间距估计对 j 求和得到

$$\frac{m\pi}{n+1} < 2\pi < \frac{m\pi}{n}, \qquad \text{即} \qquad 2n < m < 2n+2.$$

但 m 是偶数，而两个相邻偶数 $2n$ 与 $2n+2$ 之间不存在偶数，矛盾。

若 $n = 0$，则每个相邻零点的距离都严格大于 π，因此 $2\pi = \sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1} - t_j) > m\pi \geqslant 2\pi$，同样矛盾。综上，不存在非零的 2π-周期解。

第四步：说明严格不等号不可放宽。 若允许达到上界，取 $P(t) \equiv (n+1)^2$，则 $x(t) = \sin((n+1)t)$ 是非零 2π-周期解。若允许达到下界，当 $n \geq 1$ 时取 $P(t) \equiv n^2$，则 $x(t) = \sin(nt)$ 是非零 2π-周期解；当 $n = 0$ 时取 $P(t) \equiv 0$，常值解 $x(t) \equiv 1$ 即为非零周期解。因此无论放宽哪个严格不等号，结论都可能不再成立。 □

作业题 5 (习题6.2.1). 求解下列两个边值问题：

(1) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0;$

(2) $y'' + (\lambda+1)y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$

注：本题的结论在 PDE 里面会反复用到，请务必认真写。

解答. (1) $y(0) = 0, y'(\pi) = 0$。按照 λ 的符号讨论。

若 $\lambda = 0$，通解为 $y = A + Bt$。由 $y(0) = 0$ 得 $A = 0$，再由 $y'(\pi) = 0$ 得 $B = 0$，故不是特征值。

若 $\lambda<0$，设 $\lambda=-\mu^2$（$\mu>0$），通解为 $y=A\cosh(\mu t)+B\sinh(\mu t)$。由 $y(0)=0$ 得 $A=0$；又 $y'(\pi)=B\mu\cosh(\mu\pi)=0$，而 $\mu\cosh(\mu\pi)>0$，故 $B=0$。因此负数也不是特征值。

若 $\lambda>0$，设 $\lambda=\mu^2$（$\mu>0$），通解为 $y=A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)$。第一个边界条件给出 $A=0$；第二个边界条件给出 $B\mu\cos(\mu\pi)=0$。要使 $y\not\equiv 0$，必须 $B\neq 0$，因而 $\cos(\mu\pi)=0$。这等价于 $\mu=k+\frac{1}{2}$，$k=0,1,2,\ldots$。

若从 $n=1$ 开始按从小到大排列，所有特征值及其对应的非零特征函数为

$$\boxed{\lambda_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2,\qquad y_n(t)=C\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right),\quad n=1,2,\ldots,\ C\neq 0.}$$

对不在这个序列中的 λ，边值问题只有零解。

(2) $y'(0)=y'(\pi)=0$。此次根据 $\lambda+1$ 的符号讨论。

若 $\lambda+1=0$，即 $\lambda=-1$，方程为 $y''=0$，通解 $y=A+Bt$。由 $y'(0)=y'(\pi)=0$ 得 $B=0$，而 A 可取任意非零常数。因此 $\lambda=-1$ 是特征值，其特征函数为所有非零常值函数。

若 $\lambda+1<0$，设 $\lambda+1=-\mu^2$（$\mu>0$），通解为 $y=A\cosh(\mu t)+B\sinh(\mu t)$。由 $y'(0)=B\mu=0$ 得 $B=0$；再由 $y'(\pi)=A\mu\sinh(\mu\pi)=0$ 得 $A=0$。所以这一情形没有特征值。

若 $\lambda+1>0$，设 $\lambda+1=\mu^2$（$\mu>0$），通解为 $y=A\cos(\mu t)+B\sin(\mu t)$。由 $y'(0)=B\mu=0$ 得 $B=0$；由 $y'(\pi)=-A\mu\sin(\mu\pi)=0$ 知，非零解存在当且仅当 $\sin(\mu\pi)=0$，即 $\mu=k$，$k=1,2,\ldots$。此时 $\lambda=k^2-1$，对应特征函数为 $C\cos(kt)$。

现在我们得到全体特征值和特征函数

$$\boxed{\lambda_n=n^2-1,\qquad y_n(t)=C\cos(nt),\quad n=0,1,2,\cdots,\ C\neq 0.}$$

特别地，第一个特征值为 $\lambda_1=-1$，对应常值特征函数；不能遗漏此情形。 □

作业题 6 (习题6.2.2). 证明 $t^2x''-\lambda tx'+\lambda x=0,\ x(1)=x(2)=0$ 对任何实参数 λ 都没有非零解。这是否与定理 6.2.6 矛盾？

解答. 这是一个 Cauchy–Euler 方程。在 $t>0$ 上先设 $x(t)=t^m$，于是 $x'=mt^{m-1}$、$x''=m(m-1)t^{m-2}$。代入原方程得到 $[m(m-1)-\lambda m+\lambda]t^m=0$，即特征方程

$$m^2-(\lambda+1)m+\lambda=(m-1)(m-\lambda)=0.$$

根据特征根是否重合分两种情况。

若 $\lambda\neq 1$，两个不同特征根为 $m=1$、$m=\lambda$，通解为 $x(t)=C_1t+C_2t^\lambda$。边界条件给出 $C_1+C_2=0$ 与 $2C_1+2^\lambda C_2=0$。把第一式中的 $C_1=-C_2$ 代入第二式，得到 $(2^\lambda-2)C_2=0$。由于指数函数 2^s 严格单调，$\lambda\neq 1$ 时 $2^\lambda-2\neq 0$。因此 $C_2=0$，进而 $C_1=0$，故 $x\equiv 0$。

若 $\lambda = 1$，特征方程有二重根 $m = 1$，Cauchy–Euler 方程的通解为 $x(t) = t(C_1 + C_2 \ln t)$。由 $x(1) = C_1 = 0$；再由 $x(2) = 2C_2 \ln 2 = 0$ 以及 $\ln 2 \neq 0$ 得 $C_2 = 0$。故仍有 $x \equiv 0$。

综上，对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，题中的边值问题均不存在非零解。

为什么不与定理 6.2.6 矛盾？ 定理讨论的是固定的正则 Sturm–Liouville 问题 $-(p(t)x')' + q(t)x = \lambda w(t)x$，其中 p, q, w 都不依赖特征值 λ，并且 $p(t), w(t) > 0$，再配以固定的分离型边界条件。而本题的 x' 项系数为 $-\lambda t$，直接依赖特征值。虽然将方程除以 $t^{\lambda+2}$ 后可以写成

$$-\left(t^{-\lambda}x'(t)\right)' = \lambda t^{-\lambda-2}x(t), \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$

但此时 $p(t) = t^{-\lambda}$ 和 $w(t) = t^{-\lambda-2}$ 本身仍依赖 λ，不属于定理规定的固定系数特征值问题。换句话说，随着 λ 的改变，连微分算子和权函数都在改变，所以定理 6.2.6 不能应用，并无矛盾。 □

作业题 7 (习题6.2.3，2025年期末第7题改编). 考虑 $[0,1]$ 上的特征值问题 $x''(t) + (\lambda + t)x(t) = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.

(1) 证明：该问题的特征值λ一定是正实数。

(2) 记 λ_n 为如上方程的第 n 个特征值（从小到大排列），证明：$(n\pi)^2 - 1 < \lambda_n < (n\pi)^2$.

提示：证明 $\lambda > 0$ 之前还要证明 $\lambda \in \mathbb{R}$，在证明非负时可以用到 $x(t) = \displaystyle\int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s$ 然后设法用 Cauchy–Schwarz 不等式；第二问思考如何用 Sturm 比较定理。

解答. (1) 先证明 λ 为实数，再证明 $\lambda > 0$。

设 $x \not\equiv 0$ 是属于特征值 λ 的特征函数。开始时允许 x 和 λ 为复数。将方程乘以 $\overline{x(t)}$，在 $[0,1]$ 上积分，得到

$$\int_0^1 x''(t)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t|x(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

利用边界条件 $x(0) = x(1) = 0$ 分部积分，

$$\int_0^1 x''\overline{x}\,\mathrm{d}t = \left[x'\overline{x}\right]_0^1 - \int_0^1 x'\overline{x'}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 |x'|^2\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$\lambda \int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |x'|^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t|x|^2\,\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

因为 x 连续且不恒为零，$\int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t > 0$。而 (7.1) 右端是实数，故 $\lambda \in \mathbb{R}$。

接下来按题目提示使用 Cauchy–Schwarz 不等式。由于 $x(0) = 0$，对每个 $t \in [0,1]$ 都有 $x(t) =$

$\int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s$，于是

$$|x(t)|^2 = \left|\int_0^t x'(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \leqslant \left(\int_0^t 1^2\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t |x'(s)|^2\,\mathrm{d}s\right) \leqslant t\int_0^1 |x'(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

在 $t \in [0,1]$ 上积分，得到

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right)\int_0^1 |x'(s)|^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^1 |x'(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

也就是 $\int_0^1 |x'|^2\,\mathrm{d}t \geq 2\int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t$。注意在 $[0,1)$ 上 $t<1$，而非零连续函数 x 不可能只在 $t=1$ 一点非零，所以 $\int_0^1 t|x|^2\,\mathrm{d}t < \int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t$。代入 (7.1) 得

$$\lambda\int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t|x|^2\,\mathrm{d}t > \int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_0^1 |x|^2\,\mathrm{d}t > 0$，得到比题目更强的结论 $\boxed{\lambda > 1 > 0}$。第一问得证。

(2) 利用 Sturm 振荡定理和比较定理分别证明两个严格不等式。

原问题可写成 $-x''(t) - tx(t) = \lambda x(t)$，是 $p(t) = w(t) = 1$、$q(t) = -t$ 的正则 Sturm–Liouville 问题，边界条件均为 Dirichlet 型。因此可以使用讲义定理 6.2.6：全部特征值可以排列成严格递增、趋于 $+\infty$ 的序列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$；属于 λ_n 的任一非零实特征函数 x_n 在 $(0,1)$ 内恰有 $n-1$ 个零点。由于 λ_n 为实数，原方程系数为实数，可以选取 x_n 为实值函数。

先证明 $\lambda_n < (n\pi)^2$。 反设 $\lambda_n \geqslant (n\pi)^2$。由 $0<t<1$ 知 $\lambda_n + t > (n\pi)^2$。今取 $w(t) = \sin(n\pi t)$，则有 $w'' + (n\pi)^2 w = 0$，它在 $[0,1]$ 上的连续零点依次为 $0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1$，一共有 n 个相邻零点区间。

由于 x_n 对应的方程系数 $\lambda_n + t$ 在这些开区间内严格大于 w 对应的系数 $(n\pi)^2$，据 Sturm 比较定理知：在每个区间 $((j-1)/n, j/n)$（$j = 1, \cdots, n$）中，x_n 都至少有一个零点。这 n 个区间互不相交，所以 x_n 在 $(0,1)$ 内至少有 n 个不同的零点，与振荡定理给出的恰有 $n-1$ 个零点矛盾。故 $\lambda_n < (n\pi)^2$.

再证明 $\lambda_n > (n\pi)^2 - 1$。 反设 $\lambda_n \leqslant (n\pi)^2 - 1$。因为 $0<t<1$，所以有 $\lambda_n + t < (n\pi)^2$。现在将 x_n 的全部零点（包括两个端点）依次记为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$，这里有恰好 n 个相邻零点区间 (t_{j-1}, t_j)。我们仍考虑 $w(t) = \sin(n\pi t)$，但这次 w 所满足方程的系数 $(n\pi)^2$ 严格大于 x_n 的系数 $\lambda_n + t$。据 Sturm 比较定理，w 必须在 x_n 的每个相邻零点区间 (t_{j-1}, t_j)（$j = 1, \ldots, n$）中至少有一个零点。于是 w 在 $(0,1)$ 中至少有 n 个不同零点。然而 $\sin(n\pi t)$ 在 $(0,1)$ 内的零点恰为 $1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n$,只有 $n-1$ 个，矛盾，所以 $\lambda_n > (n\pi)^2 - 1$。

合并两个结论，得到

$$\boxed{(n\pi)^2 - 1 < \lambda_n < (n\pi)^2, \qquad n = 1, 2, \dots.}$$

两次应用比较定理的方向相反：估计上界时，假设特征值过大，就要求 x_n 的零点多于振荡定理允许的数目；估计下界时，假设特征值过小，就要求比较函数 $\sin(n\pi t)$ 有过多零点。 □

作业题 8. 设正整数 $d \geqslant 2$，函数 $y \in C^2([0, +\infty))$ 满足方程 $y''(r) + \dfrac{d-1}{r} y'(r) + y(r) = 0$ $(r > 0)$.

(1) 证明：$y'(0) = 0$；并证明给定 $y(0)$ 后，这样的解至多有一个。

(2) 对非零解 y，证明：存在只依赖于 d 的正数 r_d，使得 $y(r_d) = 0$.

(3) 当 $d = 3$ 时，证明：存在与 y 无关的 $R > 0$，使得 $\displaystyle\int_0^R r^2 y(r)\,\mathrm{d}r = 0$，这个 R 是如何确定的？

提示：(1) 证明唯一性时在方程两边同乘 r^{d-1}，(2) 推导 $v(r) = r^{(d-1)/2} y(r)$ 满足的二阶方程，然后思考如何用 Sturm 比较定理。

注：本题的背景是 $(-\Delta)$ 算子的特征函数估计，这里考虑的是径向情况。本题亦有完全不依赖 ODE 的证法，甚至可以去掉径向条件，我们将在 PDE 课程中布置这道题的原始版本。

解答. (1) 原点处的条件与唯一性。

首先，将 $r > 0$ 时的方程乘以 r，有 $ry''(r) + (d-1)y'(r) + ry(r) = 0$。由 $y \in C^2([0, +\infty))$ 知 y, y', y'' 在 $r = 0$ 附近均连续有界。令 $r \to 0^+$，第一项与第三项均趋于零，因此 $(d-1)y'(0) = 0$。由于 $d \geqslant 2$，所以得到 $y'(0) = 0$. 注意这里不能直接在 $r = 0$ 套用通常的二阶线性初值问题定理，因为系数 $(d-1)/r$ 在原点并不连续。

下面利用积分形式证明唯一性。将原方程乘以 r^{d-1}，整理得到

$$\left(r^{d-1} y'(r)\right)' = -r^{d-1} y(r), \qquad r > 0.$$

从 $\varepsilon > 0$ 到 $r > \varepsilon$ 积分，得 $r^{d-1}y'(r) - \varepsilon^{d-1}y'(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^r s^{d-1}y(s)\,\mathrm{d}s$。因为 $d \geqslant 2$ 且 y' 在原点有界，故 $\varepsilon^{d-1}y'(\varepsilon) \to 0$。令 $\varepsilon \to 0^+$，得到对每个 $r > 0$ 成立的恒等式

$$r^{d-1} y'(r) = -\int_0^r s^{d-1} y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8.1}$$

设 y_1, y_2 是两个具有相同 $y(0)$ 的解，令 $z = y_1 - y_2$。那么 $z(0) = 0$，z 仍满足原方程和 (8.1)，所以对任意 $r > 0$ 有

$$z'(r) = -r^{1-d} \int_0^r s^{d-1} z(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8.2}$$

记 $M=\max\limits_{0\leqslant r\leq 1}|z(r)|$；因为 z 连续，该最大值存在。对 $0<r\leq 1$，由 (8.2) 得

$$|z'(r)|\leqslant r^{1-d}\int_0^r s^{d-1}|z(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant Mr^{1-d}\int_0^r s^{d-1}\,\mathrm{d}s=\frac{M}{d}r.$$

由于 $z(0)=0$，对 $0\leqslant r\leq 1$ 再积分，得到

$$|z(r)|=\left|\int_0^r z'(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{M}{d}\int_0^r s\,\mathrm{d}s=\frac{M}{2d}r^2\leqslant\frac{M}{2d}.$$

在 $0\leqslant r\leq 1$ 上取最大值，得到 $M\leqslant M/(2d)$。因为 $2d>1$，只能有 $M=0$，也就是 $z(r)=0$ 对所有 $r\in[0,1]$ 成立。特别地，$z(1)=z'(1)=0$。

对于 $r\geqslant 1$，方程的系数 1、$(d-1)/r$ 连续，故从 $r=1$ 施加零初值可用通常的线性初值唯一性定理，得到 $z(r)=0$ 对所有 $r\geqslant 1$ 成立。因此 $y_1\equiv y_2$，唯一性得证。

(2) 利用 Sturm 比较定理证明共同正零点的存在。

先说明：*任何非零解都满足 $y(0)\neq 0$。* 如果 $y(0)=0$，则零函数也是具有相同原点函数值的解，由 (1) 的唯一性可知 $y\equiv 0$，矛盾。因此对非零解可以用 $y(0)$ 归一化。

下面先证明每个非零解都有一个正零点。按题目提示，在 $r>0$ 上令 $v(r)=r^{(d-1)/2}y(r)$，求导得到

$$\begin{aligned}v'(r)&=\frac{d-1}{2}r^{(d-3)/2}y(r)+r^{(d-1)/2}y'(r),\\ v''(r)&=\frac{(d-1)(d-3)}{4}r^{(d-5)/2}y(r)+(d-1)r^{(d-3)/2}y'(r)+r^{(d-1)/2}y''(r).\end{aligned}$$

将原方程 $y''+(d-1)y'/r=-y$ 代入第二式，得到

$$\boxed{v''(r)+\left(1-\frac{(d-1)(d-3)}{4r^2}\right)v(r)=0,\qquad r>0.}\tag{8.3}$$

因为 $d\geqslant 2$，所以 $(d-1)(d-3)=d^2-4d+3<d^2$。故当 $r\geqslant d$ 时，

$$1-\frac{(d-1)(d-3)}{4r^2}>1-\frac{d^2}{4r^2}\geqslant\frac{3}{4}>\frac{1}{2}.$$

现在考虑常系数比较方程 $w''+\frac{1}{2}w=0$，取非零解 $w(r)=\sin((r-d)/\sqrt{2})$。它在 $r=d$ 和 $r=d+\sqrt{2}\pi$ 处有两个相邻零点。

在区间 $(d,d+\sqrt{2}\pi)$ 内，方程 (8.3) 的系数严格大于 $1/2$。由 Sturm 比较定理，(8.3) 的任意非零解 v 在 w 的两个相邻零点之间至少有一个零点，即存在 $r\in(d,d+\sqrt{2}\pi)$ 使 $v(r)=0$。因为 $r^{(d-1)/2}>0$，有 $v(r)=0$ 当且仅当 $y(r)=0$。所以*每一个非零解 y 在 $(d,d+\sqrt{2}\pi)$ 中都有正零点。*

还需解释为什么零点可以选为同一个只依赖于 d 的数。固定 d 后，任取一个非零解，把它除

以 $y(0)\neq 0$，就得到满足原方程及 $y(0)=1$ 的解。由 (1) 的唯一性，这个归一化解不依赖于开始选的非零解。刚才已经证明它具有正零点；又由它在 $r=0$ 处等于 1，连续性说明它在 0 的某个右邻域内不为零。因此它存在第一个正零点，将这个零点记为 r_d。

现在对任意非零解 y，函数 $y(r)/y(0)$ 就是上述唯一的归一化解，因此它在 $r=r_d$ 处为零。这说明

$$\boxed{r_d>0 \text{ 只依赖于 } d,\qquad y(r_d)=0 \text{ 对所有非零解均成立.}}$$

注意：Sturm 比较定理先保证每个非零解都有正零点；要说明这些解有共同的零点，还必须使用第 (1) 问的唯一性。

(3) 当 $d=3$ 时显式求解，并确定 R。

此时方程为 $y''+2y'/r+y=0$。令 $v(r)=ry(r)$（这是 (2) 中的变换在 $d=3$ 时的形式）。对 $r>0$，有 $v'=y+ry'$，$v''=2y'+ry''=-ry=-v$。故

$$v''(r)+v(r)=0,\qquad r>0.$$

又因为 y 在 $r=0$ 连续，$v(0)=0$，并且 $v'(0)=\lim_{r\to 0^+}(y(r)+ry'(r))=y(0)$。因此普通二阶常系数方程的初值解为 $v(r)=y(0)\sin r$。所以对 $r>0$，

$$\boxed{y(r)=y(0)\frac{\sin r}{r}.}$$

当 $r\to 0^+$ 时，$\sin r/r\to 1$，与原点的函数值相容；这个公式也可在 $r=0$ 处连续延拓。因此

$$\int_0^R r^2 y(r)\,\mathrm{d}r=y(0)\int_0^R r\sin r\,\mathrm{d}r=y(0)\,[-r\cos r+\sin r]_0^R=y(0)(\sin R-R\cos R).$$

如果 $y\equiv 0$，积分对任意 $R>0$ 都为零；如果 $y\not\equiv 0$，则由 (1) 知 $y(0)\neq 0$。因而要让积分对所有解都为零，只须且必须选择 $R>0$ 使

$$\boxed{\sin R-R\cos R=0.} \tag{8.4}$$

这个方程在任何根处都有 $\cos R\neq 0$，所以等价于 $\tan R=R$，可以用高中方法证明这个方程在 $(\pi,3\pi/2)$ 上有且仅有一个解。 □