

2026年秋季学期 常微分方程 作业四

定性理论初步

截止时间：2026.10.26下课前（电子版截至当天23:59:59）

禁止抄袭或使用AI直接生成答案PDF，被抓到者此次作业得零分。

作业题 1 (习题4.1.1). 判断如下方程的奇点 $(0,0)$ 是什么类型，说明其稳定性，并作该奇点附近的相图。

(1) $x' = 4y - x, y' = -9x + y.$

(2) $x' = x + 2y, y' = 5y - 2x.$

(3) $x' = 2x + y, y' = x + 2y.$

作业题 2 (习题4.1.2). 设 x, t 均为标量， a 为连续函数，求方程 $x'(t) = a(t)x(t)$ 的零解稳定及渐近稳定的充要条件。本题默认从 $t = 0$ 开始进行时间正向演化。

作业题 3 (习题4.2.1). 判断如下方程的奇点 $(0,0)$ 是什么类型，说明其稳定性。

(2) $x' = x + 2y, y' = 5y - 2x + x^3.$

(3) $x' = 2x + 4y + \sin y, y' = x + y + e^y - 1.$

作业题 4 (习题4.2.3, 2025期末第4题). 求 $x'(t) = 2y(t), y'(t) = x(t) - x(t)^2 - y(t)$ 的所有平衡点，并判断其稳定性，作出平衡点附近的相图草图。

作业题 5 (习题4.3.1的改编). 设 $g \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $x \neq 0$ 时 $xg(x) > 0$.

(1) 证明：方程 $x''(t) + g(x(t)) = 0$ 的零解是稳定但不渐近稳定的。

(2) 设再有 $g'(0) > 0$ 。今对 $\varepsilon \in (0,1)$ 考虑 $\varepsilon x''(t) + x'(t) + g(x(t)) = 0$ 。证明：对任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$ ，该系统的零解是渐近稳定的。

(3) 若去掉 (2) 中的 $g'(0) > 0$ ，则 (2) 的结论是否还成立？证明你的结论。

(4) 取 $g(x) = x$ 。对 $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ，设 $x_\varepsilon(t)$ 是初值问题 $\varepsilon x_\varepsilon'' + x_\varepsilon' + x_\varepsilon = 0, x_\varepsilon(0) = a, x_\varepsilon'(0) = b$ 的解，其中 a, b 与 ε 无关。又设 $X(t)$ 满足 $X' + X = 0, X(0) = a$ 。证明：对任意 $T > 0$ ，当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时， x_ε 在 $[0, T]$ 上一致收敛于 X 。并问：当 a, b 满足什么条件时， x_ε' 也在 $[0, T]$ 上一致收敛于 X' ？

提示：本题将二阶方程看成关于 $(x(t), x'(t))$ 的一阶线性方程组，注意 $x_\varepsilon(t)$ 可以显式求解。

作业题 6 (2016期末第3题). 研究方程组 $x' = y$, $y' = -y^2 - \sin x$ 的平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$ 的稳定性。(提示: 对前者, 有一种可能比较方便的证法: 令 $v = y^2$, 然后去计算 v 关于 x 的方程。)

作业题 7 (2024管院期末第5题). 讨论平面系统 $\dot{x} = -2(y^3 + x^5)$, $\dot{y} = x - y^3$ 零解的稳定性。(提示: 构造 Lyapunov 函数时 x, y 的幂次不相等)

作业题 8 (2025期末第5题). 讨论方程组 $x' = -(x + y)$, $y' = x(1 - z) - y$, $z' = xy - \beta z$ 零解的 Lyapunov 正向稳定性以及渐近稳定性, 其中常数 $\beta \geq 0$.