2026 年秋季学期常微分方程作业四

参考答案

作业题 1

解题思路

计算 $\tau = \operatorname{Tr} A$、$\Delta = \det A$ 与 $D = \tau^2 - 4\Delta$，按初等奇点分类定理判断类型；再求必要的特征方向并画出相图。

解.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = 0, \qquad \Delta = 35, \qquad D = -140 < 0.$$

因 $\Delta > 0$ 且 $\tau = 0$，原点为**中心**，稳定但不渐近稳定。事实上

$$H(x, y) = 9x^2 - 2xy + 4y^2, \qquad \dot{H} = 0,$$

故附近轨线为椭圆；在点 $(1, 0)$ 处向量场指向左下方，旋转方向为顺时针。

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = 6, \qquad \Delta = 9, \qquad D = 0, \qquad A \neq 3I.$$

故原点为**不稳定单向结点**。又

$$\ker(A - 3I) = \operatorname{span}\{(1, 1)^{\mathsf{T}}\}.$$

因此唯一特征方向为 $y = x$，其余轨线靠近原点时均与该方向相切。

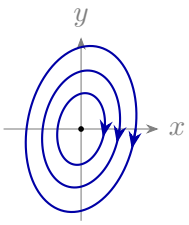
(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = 4, \qquad \Delta = 3, \qquad D = 4 > 0.$$

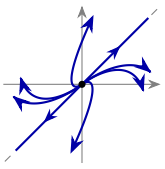
故原点为**不稳定双向结点**。两个特征值及相应特征向量为

$$\lambda_1 = 3,\ v_1 = (1, 1)^{\mathsf{T}}, \qquad \lambda_2 = 1,\ v_2 = (1, -1)^{\mathsf{T}}.$$

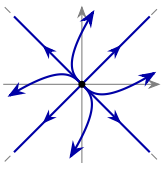
两条直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 均为轨线，其余轨线靠近原点时与 $y = -x$ 相切。



(1) 稳定中心



(2) 不稳定单向结点



(3) 不稳定双向结点

作业题 2

解题思路

先写出显式解，将稳定性和渐近稳定性分别化为指数因子有界与趋于零。

解. 记

$$A(t)=\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x(t)=x(0)e^{A(t)}.$$

因此零解稳定的充要条件为

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s<+\infty.$$

事实上，若上确界为 M，取 $\delta=\varepsilon e^{-M}$ 即可；反之，由稳定性对某个固定的 $\varepsilon>0$ 取相应 δ，代入 $0<|x(0)|<\delta$ 即得 $A(t)$ 一致有上界。

零解渐近稳定的充要条件为

$$\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\longrightarrow-\infty \qquad (t\to\infty).$$

该条件使 $e^{A(t)}\to 0$，并自动保证 $A(t)$ 有上界；必要性则由任取 $x(0)\neq 0$ 时 $x(t)\to 0$ 得到。

作业题 3

解题思路

写出原点附近的一次项系数矩阵，计算其迹与行列式，并按初等奇点分类定理判断类型；稳定性再由相图方向得到。

解.

(2) 线性化矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix}, \qquad \tau=6, \qquad \Delta=9, \qquad D=\tau^2-4\Delta=0.$$

又 $A\neq 3I$，由初等奇点分类定理，$(0,0)$ 为单向结点。因 $\tau>0$，相图中的非零轨线沿时间正向离开原点，故它是**不稳定单向结点**。

(3) 线性化矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad \tau=4, \qquad \Delta=-1<0.$$

由初等奇点分类定理，$(0,0)$ 为**鞍点**。相图中存在沿时间正向离开原点的轨线，故它不稳定。为画出相图，求得稳定、非稳定特征方向分别为

$$y=-\frac{x}{\sqrt{5}}, \qquad y=\frac{x}{\sqrt{5}}.$$

作业题 4

解题思路

先求平衡点，并写出各点附近的一次项系数矩阵；对非原点平衡点先作平移，再由初等奇点分类定理判断相图类型。

解. 平衡点满足

$$2y = 0, \qquad x - x^2 - y = 0,$$

故共有 $(0,0)$ 与 $(1,0)$ 两个平衡点。

在 $(0,0)$ 附近，方程写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_0} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

这里

$$\tau_0 = -1, \qquad \Delta_0 = -2 < 0.$$

由初等奇点分类定理，$(0,0)$ 为**鞍点**。相图中存在沿时间正向离开原点的轨线，故其不稳定。线性部分的非稳定、稳定特征方向分别为

$$y = \frac{1}{2}x, \qquad y = -x.$$

在 $(1,0)$ 附近，令

$$u = x - 1, \qquad v = y.$$

则

$$u' = 2v, \qquad v' = (u+1) - (u+1)^2 - v = -u - u^2 - v,$$

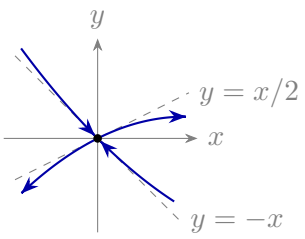
即

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -u^2 \end{pmatrix}.$$

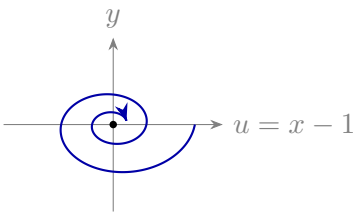
此时

$$\tau_1 = -1, \qquad \Delta_1 = 2, \qquad D_1 = \tau_1^2 - 4\Delta_1 = -7 < 0.$$

故平移后的原点为**稳定焦点**，即原方程的 $(1,0)$ 为渐近稳定焦点。又在 $u > 0$，$v = 0$ 处有 $v' = -u - u^2 < 0$，所以轨线顺时针旋入。



$(0,0)$ 附近：鞍点



$(1,0)$ 附近：顺时针稳定焦点

作业题 5

解题思路

(1) 用守恒能量；(2) 在 $g'(0)>0$ 下直接线性化；(3) 加入交叉项构造导数负定的 Lyapunov 函数；(4) 分离慢、快两个指数模态。

解. 由连续性及 $xg(x)>0$ 可知 $g(0)=0$。记

$$G(x)=\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s,$$

则 $G(0)=0$，且 $x\neq 0$ 时 $G(x)>0$。

(1) 令 $y=x'$，取

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x).$$

沿方程的解有

$$\dot V=y(-g(x))+g(x)y=0.$$

因而零解稳定。若某个非零解趋于原点，则其正的能量常数应趋于 0，矛盾，故零解不渐近稳定。

(2) 方程化为

$$x'=y,\qquad y'=-\frac{1}{\varepsilon}y-\frac{1}{\varepsilon}g(x).$$

原点处的一次项系数矩阵为

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{g'(0)}{\varepsilon} & -\dfrac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}A_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon}<0,\qquad \det A_\varepsilon=\frac{g'(0)}{\varepsilon}>0.$$

由初等奇点分类定理，线性系统的原点为稳定结点或稳定焦点；又因行列式非零，原点是双曲平衡点。因此对每个固定的 $\varepsilon\in(0,1)$，原方程的零解渐近稳定。

(3) 结论仍成立。取

$$V(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^2+2\varepsilon xy+2\varepsilon y^2\right)+G(x).$$

二次型对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ \varepsilon & 2\varepsilon\end{pmatrix},\qquad \det=\varepsilon(2-\varepsilon)>0,$$

故 V 正定。沿方程的解，

$$\begin{aligned}\dot V&=\left(\frac{x}{2}+\frac{\varepsilon y}{2}+g(x)\right)y+\left(\frac{\varepsilon x}{2}+\varepsilon y\right)\frac{-y-g(x)}{\varepsilon}\\ &=-\frac{1}{2}xg(x)-\frac{2-\varepsilon}{2}y^2<0\qquad((x,y)\neq(0,0)).\end{aligned}$$

因此由 Lyapunov 稳定性定理，零解渐近稳定。

Remark. 也可取自然能量

$$W(x,y)=G(x)+\frac{\varepsilon}{2}y^2,\qquad \dot W=-y^2\le 0.$$

在 $\{\dot W=0\}=\{y=0\}$ 中，轨道要始终停留其中还须 $y'=-g(x)/\varepsilon=0$，故最大不变集只有原点。取充分小的紧正向不变子水平集后，由 LaSalle 不变性原理亦得零解渐近稳定。

(4) 令

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}, \qquad \mu_\varepsilon = \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

则 $\lambda_\varepsilon \to 1$，$\mu_\varepsilon \to \infty$，且

$$x_\varepsilon(t) = A_\varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon t} + B_\varepsilon e^{-\mu_\varepsilon t},$$

其中

$$A_\varepsilon = \frac{b+a\mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon} \longrightarrow a, \qquad B_\varepsilon = -\frac{b+a\lambda_\varepsilon}{\mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon} \longrightarrow 0.$$

又 $X(t) = ae^{-t}$，故对任意 $T > 0$，

$$\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon(t) - X(t)| \le |A_\varepsilon - a| + |a| \sup_{0\le t\le T} |e^{-\lambda_\varepsilon t} - e^{-t}| + |B_\varepsilon| \longrightarrow 0.$$

若 x_ε' 在 $[0,T]$ 上一致收敛于 X'，在 $t=0$ 处必有

$$b = X'(0) = -a.$$

反之，当 $b = -a$ 时，

$$x_\varepsilon'(t) = -\lambda_\varepsilon A_\varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon t} + \frac{\mu_\varepsilon a(\lambda_\varepsilon - 1)}{\mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon} e^{-\mu_\varepsilon t}.$$

第二项在 $[0,T]$ 上一致趋于 0，第一项一致趋于 $-ae^{-t}$。因此

$$x_\varepsilon' \to X' \text{ 在}[0,T] \text{ 上一致成立} \iff b = -a.$$

作业题 6

解题思路

在 $(0,0)$ 附近令 $v = y^2$，先解出 v 关于 x 的表达式；再分别用 Lyapunov 函数和相轨线的渐近形状判断原点的性质。在 $(\pi,0)$ 处先平移，再使用初等奇点分类定理。

解. 当 $y \neq 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2v - 2\sin x.$$

解得

$$v(x) = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x.$$

因此相轨线满足

$$y^2 = Ce^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x.$$

方法一：Lyapunov 函数法. 取

$$\begin{aligned} V(x,y) &= e^{2x}\left(y^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x\right) + \frac{2}{5} \\ &= e^{2x}y^2 + 2\int_0^x e^{2s}\sin s\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

当 (x,y) 充分接近原点时，V 正定。沿系统的解，

$$\dot V = 2e^{2x}y^3 + 2e^{2x}y(-y^2 - \sin x) + 2e^{2x}y\sin x = 0.$$

故 $(0,0)$ 稳定。若某条非平凡轨线趋于原点，则沿该轨线恒为正常数的 V 应趋于 $V(0,0) = 0$，矛盾。因此 $(0,0)$ 不是渐近稳定的。

Remark. 由上面解出的相轨线方程，

$$C = e^{2x}\left(y^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x\right),$$

故 $V = C + \frac{2}{5}$。因此这一 Lyapunov 函数本质上来自系统的首次积分。

方法二：直接分析相轨线. 若轨线经过 (x_0, y_0)，则

$$C = e^{2x_0}\left(y_0^2 - \frac{2}{5}\cos x_0 + \frac{4}{5}\sin x_0\right) = -\frac{2}{5} + x_0^2 + y_0^2 + o(x_0^2 + y_0^2).$$

令 $C = -\frac{2}{5} + \rho$。由于 C 沿轨线保持不变，对同一条轨线上的任意 (x, y)，在原点附近作 Taylor 展开可得

$$\rho = e^{2x}\left(y^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x\right) + \frac{2}{5} = x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2).$$

因此充分小的正等值线是圆 $x^2 + y^2 = \rho$ 的小扰动，构成围绕原点的简单闭曲线，并随 $\rho \to 0^+$ 收缩到原点。该闭曲线上没有平衡点，向量场又处处与等值线相切，故它本身就是一条周期轨道。于是 $(0, 0)$ 为**稳定中心**，但不渐近稳定。

在 $(\pi, 0)$ 附近，令

$$\xi = x - \pi, \qquad \eta = y.$$

则

$$\xi' = \eta, \qquad \eta' = -\eta^2 - \sin(\pi + \xi) = \sin\xi - \eta^2 = \xi + O(\xi^3 + \eta^2).$$

一次项系数矩阵为

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_\pi = 0, \qquad \Delta_\pi = -1 < 0.$$

由初等奇点分类定理，平移后的原点为鞍点，故原方程的 $(\pi, 0)$ 为**鞍点**，不稳定。

作业题 7

解题思路

为消去混合项 xy^3，取 x 的二次项与 y 的四次项组成 Lyapunov 函数。

解. 取

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^4.$$

则 V 正定且径向无界，并且

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\big[-2(y^3 + x^5)\big] + 2y^3(x - y^3) \\ &= -2x^6 - 2y^6 < 0 \qquad ((x, y) \neq (0, 0)). \end{aligned}$$

因此零解**全局渐近稳定**。

作业题 8

解题思路

取三个变量的平方和，系统中的交叉项恰好相消；当 $\beta = 0$ 时直接给出不趋于原点的非零平衡解。

解. 取

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

沿系统的解有

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x(-x - y) + y\big(x(1 - z) - y\big) + z(xy - \beta z) \\ &= -x^2 - y^2 - \beta z^2 \leq 0.\end{aligned}$$

故对一切 $\beta \geq 0$，零解均 **Lyapunov 正向稳定**。

若 $\beta > 0$，则 $\dot{V}$ 负定，故零解**全局渐近稳定**。

若 $\beta = 0$，任取充分小的 $z_0 \neq 0$，以 $(0, 0, z_0)$ 为初值的解恒为

$$(x(t), y(t), z(t)) \equiv (0, 0, z_0),$$

因而不趋于原点。因此零解**稳定但不渐近稳定**。

Remark. 当 $\beta = 0$ 时，$\{\dot{V} = 0\} = \{x = y = 0\}$，且整个 z 轴都是不变集。故 LaSalle 不变性原理至多给出轨道趋近于 z 轴，不能推出其趋于原点；这也与上面的非零平衡解相符。