2026 年秋季学期常微分方程作业三
详细参考答案

作业题 1：求解齐次常系数线性方程组

思路

关键是求特征值及根向量，不必显式写出 Jordan 标准形。若

$$(A-\lambda I)\xi_0=0,\qquad (A-\lambda I)\xi_j=\xi_{j-1}\quad (1\le j\le k),$$

则 ξ_k 对应的基本解为

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\xi_k+t\xi_{k-1}+\cdots+\frac{t^k}{k!}\xi_0\right).$$

解.

(1)

令

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

计算得

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

并可取特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(\lambda=1),\qquad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad(\lambda=-1).$$

故

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^{t}p_1+c_2\mathrm{e}^{t}p_2+c_3\mathrm{e}^{-t}p_3.$$

(4)

令

$$A=\begin{pmatrix}1&9&1\\0&9&-8\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

沿第一列展开可得

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-8).$$

取

$$p=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad w=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}73\\56\\7\end{pmatrix}.$$

它们满足

$$(A-I)p=0,\qquad (A-I)w=10p,\qquad (A-8I)q=0.$$

因此

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}10t\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\mathrm{e}^{8t}\begin{pmatrix}73\\56\\7\end{pmatrix}.$$

(5)

令

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

计算得

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3.$$

取

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad q=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

则

$$(A-I)p_1=(A-I)p_2=0,\qquad (A-I)q=p_1.$$

故

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1+t\\2t\\-t\end{pmatrix}.$$

作业题 2（选做）：非负性的保持

思路

第 (1) 问用 Picard 迭代：若初值与矩阵逐分量非负，则每次迭代也逐分量非负。第 (2) 问通过指数变换把系数矩阵改为 $A+CI$，使其对角元也非负。

解.

(1) 所有矩阵元素都非负

在任意 $[0,T]$ 上定义

$$x^{(0)}(t)=x_0,\qquad x^{(n+1)}(t)=x_0+\int_0^t A(s)x^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s.$$

若 $x^{(n)}$ 逐分量非负，则

$$x_i^{(n+1)}(t)=(x_0)_i+\int_0^t\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(s)x_j^{(n)}(s)\,\mathrm{d}s\geq 0.$$

归纳可知，每个 $x^{(n)}$ 均逐分量非负。

令 $M=\max_{0\leq t\leq T}\|A(t)\|$。反复积分得

$$\left\|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right\|\leq\|x_0\|\,\frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

故 $x^{(n)}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛；在迭代式中取极限，即得原初值问题的唯一解 x。逐分量取极限可知 $x_i(t)\geq 0$。由于 T 任意，结论对所有 $t\geq 0$ 成立。

(2) 只要求非对角元素非负

固定 $T>0$，取

$$C_T=1+\max_{1\leq i\leq d}\max_{0\leq t\leq T}|a_{ii}(t)|,\qquad B(t)=A(t)+C_TI_d.$$

则 $B(t)$ 在 $[0,T]$ 上逐元素非负。令 $y(t)=\mathrm{e}^{C_Tt}x(t)$，则

$$y'=B(t)y,\qquad y(0)=x_0.$$

由第 (1) 问，$y(t)$ 逐分量非负；又 $x(t)=\mathrm{e}^{-C_Tt}y(t)$，故 $x(t)$ 逐分量非负。令 T 任意即可。

作业题 3：矩阵范数估计

思路

先估计单个 Jordan 块：矩阵指数等于 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 乘以一个次数至多为 $m-1$ 的多项式。因此特征值实部决定指数增长，Jordan 块阶数决定附加的多项式增长；一般矩阵再由相似变换归结到此

情形。

解.

记

$$s(A)=\max_{\lambda\in\sigma(A)}\operatorname{Re}\lambda.$$

对 $J_m(\lambda)=\lambda I_m+N_m$，其中 $N_m^m=0$，由命题 3.1.1 得：

$$\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}=\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}N_m^k.$$

一方面将其作用于最后一个标准基向量 e_m，得

$$\left|\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}e_m\right|\geq \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!},$$

从而

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\leq\left\|\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}\right\|.$$

另一方面，由三角不等式，

$$\left\|\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}\right\|\leq \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\left\|N_m^k\right\|\frac{t^k}{k!}\leq \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}.$$

合并得到：

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\leq\left\|\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}\right\|\leq \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}. \tag{3.1}$$

设

$$A=PJP^{-1},\qquad J=\operatorname{diag}\bigl(J_{m_1}(\lambda_1),\dots,J_{m_q}(\lambda_q)\bigr).$$

则 $\mathrm{e}^{tA}=P\mathrm{e}^{tJ}P^{-1}$，故 $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ 与

$$\max_{\ell}\|\mathrm{e}^{tJ_{m_\ell}(\lambda_\ell)}\|$$

只相差一个与 t 无关的常数。于是以下三问都可直接由 (3.1) 得到。

(1)

对任意 $\varepsilon>0$ 及整数 $k\geq 0$，有 $t^k\leq C_{k,\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}$。由 (3.1)，

$$\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\|\leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{(s(A)+\varepsilon)t},\qquad t\geq 0.$$

(2)

若所有满足 $\operatorname{Re}\lambda=s(A)$ 的 Jordan 块均为一阶，则其余块的指数增长率严格小于 $s(A)$，相应的多项式因子均可被这一指数差吸收，故

$$\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\|\leq C\mathrm{e}^{s(A)t}.$$

反之，若其中有 $m \geq 2$ 阶 Jordan 块，则 (3.1) 左半部分给出

$$\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| \geq c\mathrm{e}^{s(A)t}t^{m-1},$$

所以上述估计不可能成立。因此

$$\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| \leq C\mathrm{e}^{s(A)t} \iff \mathrm{Re}\,\lambda = s(A)\text{对应的 Jordan 块均为一阶.}$$

(3)

- 实部为负时，由 (1)，取 ϵ 充分小可使指数仍为负，因而相应 Jordan 块有界；
- 实部为 0 时，则

  $$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \leq \left\|\mathrm{e}^{tJ_m(\lambda)}\right\| \leq \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}.$$

  故其有界当且仅当 $m = 1$；
- 实部为正时，由 (3.1) 的下界可知相应 Jordan 块必无界。

因此：

$$\sup_{t\geq 0}\left\|\mathrm{e}^{tA}\right\| < \infty \iff \begin{cases}\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0, & \lambda \in \sigma(A),\\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0\text{对应的 Jordan 块均为一阶.}\end{cases}$$

作业题 4：用矩阵指数求解非齐次初值问题

思路

两问中 A 都只有一个特征值 λ。令 $B = A - \lambda I$，利用 B 的幂零性展开

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{tB}.$$

再代入变常数公式

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}\left(x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-sA}f(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

解.

(1)

此时

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad f(t) = \begin{pmatrix}2t\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

令 $B = A - I$，则 $B^2 = 0$，从而

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^t(I + tB) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1+t & -t & -t\\ 2t & 1-2t & -2t\\ -t & t & 1+t\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{e}^{-sA}f(s)=\mathrm{e}^{-s}\begin{pmatrix}2s-2s^2\\-4s^2\\2s^2\end{pmatrix},$$

且

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-sA}f(s)\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}2t^2+2t+2\\4t^2+8t+8\\-2t^2-4t-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\\-4\end{pmatrix}.$$

代入变常数公式并相乘，得

$$x(t)=\begin{pmatrix}(3t-1)\mathrm{e}^t+2\\(6t-8)\mathrm{e}^t+4t+8\\(4-3t)\mathrm{e}^t-2t-4\end{pmatrix}.$$

(2)

此时

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad f(t)=\begin{pmatrix}t^2\\2t\\t\end{pmatrix},\qquad x_0=0.$$

令 $B=A+I$，则

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad B^3=0.$$

故

$$\mathrm{e}^{tA}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1&-t&\frac{t^2}{2}\\0&1&-t\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{e}^{-sA}f(s)=\mathrm{e}^{s}\begin{pmatrix}3s^2+\frac{s^3}{2}\\2s+s^2\\s\end{pmatrix}.$$

于是

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-sA}f(s)\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}\frac{t^3}{2}+\frac{3t^2}{2}-3t+3\\t^2\\t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

代入变常数公式，得

$$x(t)=\begin{pmatrix}t^2-3t+3+\left(\frac{t^2}{2}-3\right)\mathrm{e}^{-t}\\t-t\mathrm{e}^{-t}\\t-1+\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}.$$

作业题 5：稳定常系数方程的有界整体解

思路

先由作业题（3）得到矩阵指数的指数衰减。证明 x_b 可微时，不直接对无穷积分求导，而是在任意 $\tau < t$ 处分段，把无穷区间部分写成 $\mathrm{e}^{(t-\tau)A}x_b(\tau)$；其余三问再由同一衰减估计完成。

解.

设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^d$ 连续且有界，并记

$$G=\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|<\infty.$$

由于 $s(A)<0$，取 $\alpha=-s(A)/2>0$。由作业题 3(1)，存在 $K>0$ 使

$$\left\|\mathrm{e}^{rA}\right\|\le K\mathrm{e}^{-\alpha r},\qquad r\ge 0. \tag{5.1}$$

(1) 积分绝对收敛，且定义有界整体解

令

$$x_b(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s.$$

由 (5.1)，

$$\int_{-\infty}^{t}\left|\mathrm{e}^{(t-s)A}g(s)\right|\,\mathrm{d}s\le KG\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s=\frac{KG}{\alpha}.$$

故 x_b 定义良好，且 $|x_b(t)|\le KG/\alpha$。

任取 $\tau<t$，有

$$x_b(t)=\mathrm{e}^{(t-\tau)A}x_b(\tau)+\int_{\tau}^{t}\mathrm{e}^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s.$$

右端只含有限区间积分，故可直接求导：

$$x_b'(t)=A\mathrm{e}^{(t-\tau)A}x_b(\tau)+g(t)+\int_{\tau}^{t}A\mathrm{e}^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s=Ax_b(t)+g(t).$$

因此 $x_b\in C^1(\mathbb{R})$，且为有界整体解。

(2) 有界整体解的唯一性

若 y 也是有界整体解，令 $z=y-x_b$ 及 $B=\sup_{t\in\mathbb{R}}|z(t)|$。对任意 $\tau<t_0$，

$$|z(t_0)|=\left|\mathrm{e}^{(t_0-\tau)A}z(\tau)\right|\le KB\mathrm{e}^{-\alpha(t_0-\tau)}.$$

令 $\tau\to-\infty$ 即得 $z(t_0)=0$。因此 $y=x_b$。

(3) 周期性的保持

若 $g(t+T)=g(t)$，令 $s=r+T$，则

$$\begin{aligned}x_b(t+T)&=\int_{-\infty}^{t+T}\mathrm{e}^{(t+T-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s\\&=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{(t-r)A}g(r+T)\,\mathrm{d}r=x_b(t).\end{aligned}$$

(4) 其他解向 x_b 收敛

对任意解 x 及其定义区间内的 t_0，

$$x(t)-x_b(t)=\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\big(x(t_0)-x_b(t_0)\big).$$

由 (5.1)，

$$|x(t)-x_b(t)|\le K\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\,|x(t_0)-x_b(t_0)|\longrightarrow 0\qquad (t\to+\infty).$$

作业题 6：可积系数与可逆的极限基解矩阵

思路

先用 Grönwall 不等式证明 Φ 一致有界，再由 A 的尾积分证明 $\Phi(t)$ 满足 Cauchy 条件。极限矩阵的可逆性可直接由 Liouville 公式判断：$\operatorname{tr}A$ 绝对可积，因此 $\det\Phi(t)$ 收敛到一个正数。

解.

记

$$a(t)=\|A(t)\|,\qquad L=\int_0^\infty a(t)\,\mathrm{d}t<\infty.$$

由 $\Phi'=A\Phi$ 及 $\Phi(0)=I_d$，

$$\Phi(t)=I_d+\int_0^t A(s)\Phi(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.1}$$

第一步：Φ 的一致有界性

由 (6.1) 及 Grönwall 不等式，

$$\|\Phi(t)\|\le 1+\int_0^t a(s)\,\|\Phi(s)\|\,\mathrm{d}s\le\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)\le\mathrm{e}^{L}. \tag{6.2}$$

第二步：$\Phi(t)$ 存在极限

对 $t\ge s\ge 0$，由 (6.2)，

$$\|\Phi(t)-\Phi(s)\|\le\int_s^t a(r)\,\|\Phi(r)\|\,\mathrm{d}r\le\mathrm{e}^{L}\int_s^\infty a(r)\,\mathrm{d}r.$$

右端随 $s\to\infty$ 趋于零，故 $\Phi(t)$ 满足 Cauchy 条件，存在矩阵 Φ_∞ 使 $\Phi(t)\to\Phi_\infty$。同时

$$\|\Phi(t)-\Phi_\infty\|\le\mathrm{e}^{L}\int_t^\infty\|A(r)\|\,\mathrm{d}r. \tag{6.3}$$

第三步：极限矩阵的可逆性

由 Liouville 公式，

$$\det\Phi(t)=\det\Phi(0)\exp\left(\int_0^t\operatorname{tr}A(s)\,\mathrm{d}s\right)=\exp\left(\int_0^t\operatorname{tr}A(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

又因

$$|\operatorname{tr} A(s)| \le d\,\|A(s)\|,$$

故 $\int_0^\infty \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s$ 绝对收敛。由行列式关于矩阵元的连续性，

$$\det \Phi_\infty = \lim_{t\to\infty} \det \Phi(t) = \exp\left(\int_0^\infty \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s\right) > 0.$$

因此 Φ_∞ 可逆。

第四步：每个解的极限与初值到极限的映射

初值为 $x(0) = x_0$ 的解满足 $x(t) = \Phi(t)x_0$，故

$$x(t) \longrightarrow \Phi_\infty x_0.$$

从初值到极限的映射为

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \mathcal{L}(x_0) = \Phi_\infty x_0.$$

由于 Φ_∞ 可逆，$\mathcal{L}$ 是线性同构，且

$$\mathcal{L}^{-1}(y) = \Phi_\infty^{-1} y.$$