

2026年秋季学期 常微分方程 作业二

解的延拓、比较原理、解对初值和参数的连续依赖性

截止时间：2026.9.28下课前（电子版截至当天23:59:59）

禁止抄袭或使用AI直接生成答案PDF，被抓到者此次作业得零分。

作业题 1 (习题2.3.3). 设初值问题 $x' = (x^2 - 2x - 3)e^{(x+t)^2}$, $x(t_0) = x_0$ 的解的最大存在区间为 (a, b) . 证明: $a = -\infty$ 与 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

提示: 先找出这个方程的所有平衡态 (即不随 t 变化而变化的解), 然后讨论初值 x_0 与这个平衡态之间的关系。

作业题 2 (习题2.3.4). 证明初值问题 $x' = t^3 - x^3$, $x(t_0) = x_0$ 的解在 $[t_0, +\infty)$ 上存在。

提示: 为了使用延拓准则, 可以考虑去估计 $x(t)^2$ 这个量的演化, 最终可以算得 $\frac{d}{dt}(x(t)^2) \leq \frac{3}{2}|t|^4$ 。

作业题 3 (问题2.3.3). 设 $f(t, x)$ 在 $0 \leq t \leq a$, $-\infty < x < +\infty$ 上连续, 且存在常数 $q \in (0, 1)$ 使得对任意的 $t \in (0, a]$ 都有 $|f(t, y) - f(t, z)| \leq \frac{q}{t}|y - z|$. 证明: 初值问题 $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$ 在 $[0, a]$ 上存在唯一解。

提示: 在证明存在性时, Peano存在性定理只给出某个小区间 $[0, \delta]$ 上的存在性, 思考如何将其延拓到整个 $[0, a]$ 上; 在证明唯一性时, 思考为什么我们要求 $q \in (0, 1)$ 。

作业题 4 (问题2.4.1, 选做). 考虑初值问题 $x'(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, 其中 $f(t, x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续并关于 x 局部 Lipschitz. 设 $\alpha, \beta \in C^1([t_0, +\infty))$ 满足

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)).$$

(1) 证明 $x_0 \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$ 时对应的解满足对任意 $t \geq t_0$ 都有 $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$

(2) 证明该解正向整体存在。

(3) 若 $x_0 \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$, 条件中的所有不等式改为严格不等式, 则(1)的结论也变为严格不等式。

提示: (1) 对 $\alpha_\varepsilon(t) := \alpha(t) - \varepsilon e^{K(t-t_0)}$ 和 $x(t)$ 本身用比较原理, 然后取极限 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ 得到不等式左边, 右边可构造类似的辅助函数。

作业题 5 (问题2.5.1). 考虑 $[t_0, \infty)$ 上的含参初值问题 $x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$, $x(t_0) = x_0$. 其中 $f :$

$[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ 连续, 并关于 $\mathbf{x}$ 局部 Lipschitz. 假设存在常数 $\alpha > 0$, $L \geq 0$, $C \geq 0$, 满足

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \lambda)) &\leq -\alpha |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2, \\ |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \lambda) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)| &\leq L|\lambda - \mu|, \quad |\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \lambda)| \leq C(1 + |\lambda|). \end{aligned}$$

(1) 证明: 对每个固定的参数 $\lambda \in \mathbb{R}^m$, 该初值问题的解都在时间正向整体存在。

(2) 记 $\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \lambda)$ 是以 λ 为参数, t_0 时刻初值为 $\mathbf{x}_0$ 的解, 证明

$$|\varphi(t; t_0, \mathbf{x}_0, \lambda) - \varphi(t; t_0, \mathbf{y}_0, \mu)| \leq e^{-\alpha(t-t_0)} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| + \frac{L}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) |\lambda - \mu|.$$

并说明解对初值和参数的依赖为何关于 $t \in [t_0, \infty)$ 是一致的。

提示: (1) 考察 $|\mathbf{x}(t)|^2$ 的演化, (2) 如果令 $\mathbf{w} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$, 则有 $\frac{d}{dt} |\mathbf{w}| \leq -\alpha |\mathbf{w}| + L|\lambda - \mu|$. 严格来说, 如果要避免 $|\mathbf{w}|$ 在 0 处不可微, 则应当先考虑其 C^1 逼近 $\mathbf{w}_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon^2 + |\mathbf{w}(t)|^2}$, 得到它的估计之后再令 $\varepsilon \rightarrow 0$. 请注意这是一种对绝对值函数常用的 C^1 逼近。

作业题 6 (习题 2.6.1). 对含参微分方程初值问题 $x'(t) = \lambda x(t) - x(t)^3$, $x(0) = x_0$ 写出关于 x_0 和 λ 的变分方程, 并证明 $\frac{\partial x(t)}{\partial x_0} > 0$.

作业题 7 (习题 2.6.4). 考虑微分方程 $x'(t) = \cos^2 x(t) + (\lambda + q(t)) \sin^2 x(t)$, $x(0; \lambda) = x_0$, 其中 $q \in C(\mathbb{R})$.

(1) 证明: 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 该初值问题在 $t \in [0, 1]$ 上存在唯一解 $x = \varphi(t; \lambda)$.

(2) 对任意 $t \in [0, 1]$, 这个解 $x = \varphi(t; \lambda)$ 是否关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是连续可微的, 证明你的结论.

(3) 令 $\omega(\lambda) = \varphi(1; \lambda)$, 证明: $\omega(\lambda)$ 关于 λ 严格单调递增.

提示: (3) 使用关于参数 λ 的变分方程, 请注意我们需要说明 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(1; \lambda)$ 是严格正的。