

26秋ODE习题课讲义

“微”楼高百尺, 手可摘星辰

Author: 周芾

Last Update: 2026 年 9 月 21 日

目录

1 作业答案 **2**

1.1 第一次作业 2

1.2 第二次作业 7

2 补充: 积分因子法与 Frobenius 定理 **12**

1 作业答案

1.1 第一次作业

题目 1.1 习题 1.1.4(讲)

解方程

$$x'(t) = x(t)^a,$$

其中 $a = 1/5, 1, 2$, 并分别作出相应积分曲线族的草图.

解. 当 $a = 1/5$ 时, 在 $x \neq 0$ 的区间上有 $\frac{5}{4}(x^{4/5})' = 1$, 因为没有 Lipschitz 性, 所以解可以先停留在 0 处, 然后某时刻再开始演化. 解为**零解**和如下解

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ \pm\left(\frac{4}{5}(t-\tau)\right)^{5/4}, & t \geq \tau, \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

非零部分从 $(\tau, 0)$ 开始演化, 并与 t 轴相切.

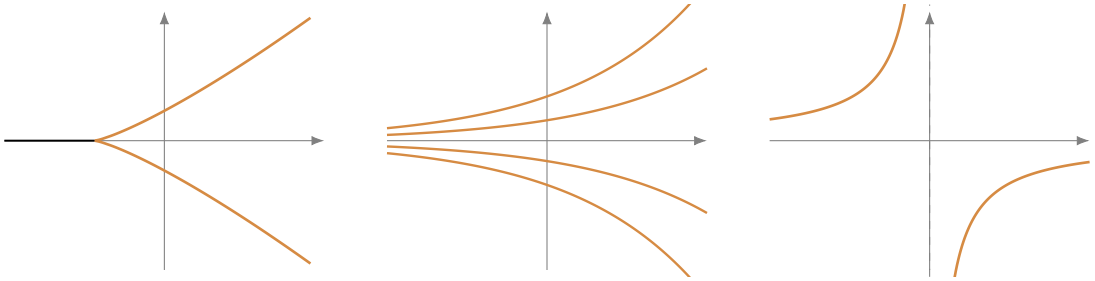
当 $a = 1$ 时,

$$x(t) = C\mathrm{e}^t, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

当 $a = 2$ 时, 除**零解**外, 解为

$$x(t) = \frac{1}{C - t}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

助教不想手绘贴图, 让 Codex 画出的三族曲线的典型形状如下.



$a = 1/5$ $a = 1$ $a = 2$

□

题目 1.2 习题 1.1.5(提一下)

令牵引点 A 沿 x 轴正向运动, 并以 A 沿 x 轴的位移 s 为参数,

$$A(s) = (s, 0), \qquad s \geq 0.$$

质点 B 从 $B(0) = (0, b)$ 出发, 其中 $b > 0$. 假设绳长保持不变, 即 $\|A(s) - B(s)\| = b$, 其中 $B(s) = (x(s), y(s))$. 又假设 B 的轨迹切向始终沿着由 B 指向 A 的方向, 即存在非负函数 $\lambda(s)$, 使得

$$(x'(s), y'(s)) = \lambda(s)(s - x(s), -y(s)).$$

求质点 B 的轨迹方程, 即求出 $x(s), y(s)$ 的参数表达式. 最终答案中不应含有 $\lambda(s)$.

解. 建模是一个麻烦事, 好在题目已经给出. 令 $u(s) = s - x(s)$. 绳长条件为 $u^2 + y^2 = b^2$. 对绳长条件求导, 再代入 $x' = \lambda u$ 和 $y' = -\lambda y$, 得到 $u(1 - \lambda u) - \lambda y^2 = 0$. 此时再用绳长条件, 就能把 λ 算出, 得到 $\lambda = \frac{u}{b^2}$. 接下来我们解 u 的方程, 也就是

$$u' = 1 - x' = 1 - \frac{u^2}{b^2}, \qquad u(0) = 0,$$

这里最好不要直接解 x 的方程, 其实更不好解. 下面展示微积分过程, 整理为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+u} + \frac{b}{b-u}\right) \mathrm{d}u = \mathrm{d}s \Rightarrow \frac{b}{2}\log\left(\frac{b+u}{b-u}\right) = s + C.$$

由初值, $C = 0$, 那么反解出 u 为

$$u = b\frac{\mathrm{e}^{2s/b} - 1}{\mathrm{e}^{2s/b} + 1}.$$

由 $x = s - u$ 以及 $y(0) = b > 0$ 可得

$$x(s) = s - b\frac{\mathrm{e}^{2s/b} - 1}{\mathrm{e}^{2s/b} + 1}, \qquad y(s) = \frac{2b}{\mathrm{e}^{s/b} + \mathrm{e}^{-s/b}}, \qquad s \geq 0.$$

注意, 这里的 y 是用绳长解出来的, 初值用来确定符号, 希望没人再去解一个 ODE 了. □

题目 1.3 习题 1.2.4(讲)

求微分方程

$$x'(t)\sin 2t = 2(x(t) + \cos t)$$

在 $t \to \pi/2$ 时仍有界的解.

解. 这个题可能需要一些技巧, 要去凑微分. 注意到 $\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 t}$, 我们将方程改写为 $(x\cot t)' = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$, 然后两边同时积分得到 $x(t) = \frac{C\sin t - 1}{\cos t}$. 要使 $t \to \pi/2$ 时解有界, 必须有 $C = 1$. 代入, 并做变形得到

$$x(t) = \frac{\sin t - 1}{\cos t} = -\frac{\cos t}{1 + \sin t}.$$

此时令 $x(\pi/2) = 0$, 这个延拓是符合题意的. □

题目 1.4 习题 1.2.6(不讲)

设 p, q 都是 T-周期连续函数, 并且

$$\int_0^T p(s)\,\mathrm{d}s > 0.$$

证明: 方程 $x' + p(t)x = q(t)$ 的任意解与其唯一的 T-周期解之差在 $t \to +\infty$ 时趋于零.

解. 这个题感觉是柳彬书上的例题, 一阶 ODE 都可以硬算. 记

$$P(t) = \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \qquad A = P(T) > 0.$$

通解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)}\left(c + \int_0^t \mathrm{e}^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

条件 $x(T) = x(0)$ 唯一确定

$$c_* = \frac{\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^A - 1}.$$

此时 c_* 对应的解 x_* 为唯一的 T-周期解.

任取另一解 x, 则 $z = x - x_*$ 满足 $z' + p(t)z = 0$, 有 $z(t) = z(0)\mathrm{e}^{-P(t)}$. 设 $t = nT + r$, 其中 $0 \leq r < T$. 周期性给出 $P(t) = nA + P(r)$. 因为 $P(r)$ 在 $[0, T]$ 上一致有界且 $A > 0$, 所以 $z(t) \to 0$. □

题目 1.5 习题 1.2.8, 选做 (不讲)

设 $E(t)$ 是恒大于零的光滑函数. 对任意 $t \geq 0$, 它满足

$$E'(t) \leq C(1+t)^{-\sigma} E(t)^p, \qquad E(0) \leq \varepsilon^2,$$

其中 $\sigma > 0$, $p > 1$, $C > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$. 定义

$$\widetilde{T}_\varepsilon = \inf\{t > 0 : E(t) = 10\varepsilon^2\}.$$

讨论 $\widetilde{T}_\varepsilon$ 的下界对 ε 的依赖关系, 分别考虑 $\sigma > 1$, $\sigma = 1$ 和 $0 < \sigma < 1$.

解. 咱们 lifespan 就在 ODE 里算起来! 模仿 Grönwall 不等式硬算如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E^{1-p} = (1-p)E^{-p}E' \geq -C(p-1)(1+t)^{-\sigma}.$$

积分到 $\widetilde{T}_\varepsilon$, 并使用 $E(0)^{1-p} \geq \varepsilon^{-2(p-1)}$ 以及 $E(\widetilde{T}_\varepsilon)^{1-p} = 10^{1-p}\varepsilon^{-2(p-1)}$, 得

$$\int_0^{\widetilde{T}_\varepsilon} (1+s)^{-\sigma} \,\mathrm{d}s \geq c_0 \varepsilon^{-2(p-1)}, \qquad c_0 = \frac{1 - 10^{1-p}}{C(p-1)} > 0.$$

若 $\sigma > 1$, 则左端收敛, 当 ε 充分小自然有 $\widetilde{T}_\varepsilon = +\infty$. 若 $\sigma = 1$, 则

$$\widetilde{T}_\varepsilon \geq \exp\Big(c_0 \varepsilon^{-2(p-1)}\Big) - 1.$$

若 $0 < \sigma < 1$, 则

$$\widetilde{T}_\varepsilon \geq \Big(1 + (1-\sigma)c_0 \varepsilon^{-2(p-1)}\Big)^{1/(1-\sigma)} - 1 \gtrsim \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{1-\sigma}}.$$

□

题目 1.6 习题 1.3.1(讲)

求解方程

$$x'(t) = -x(t)^2 - \frac{1}{4t^2}.$$

提示: 先找形如 $x_p(t) = C/t$ 的特解.

解. 代入 $x_p = C/t$ 得 $C = C^2 + 1/4$, 故特解为

$$x_p(t) = \frac{1}{2t}.$$

令 $x = 1/(2t) + 1/v$, 代回原方程得 $v' - \frac{1}{t}v = 1$. 依旧注意到 $\left(\frac{v}{t}\right)' = \frac{1}{t}$, 所以 $v = t(\log|t| + C)$. 那么解为

$$x(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{t(\log|t| + C)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

□

以下三题使用一阶常微分方程初值问题

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

其中未知函数 $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^d$, 函数 $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^d$ 连续, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 为开集, 且 $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$.

题目 1.7 习题 2.1.2(讲)

对初值问题 (1), 假设存在 $[t_0, t_0+a]$ 上的可积函数 $k(t)$ (即绝对值的积分收敛), 使得

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})| \le k(t)(1+|\boldsymbol{x}|), \qquad |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)| \le k(t)\,|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\,.$$

证明: 存在区间 $[t_0, t_0+\delta]$, 使对应的 Picard 序列在该区间上一致收敛到初值问题的解.

解. 这是一个经典题目. 先按题意定义 Picard 序列

$$\boldsymbol{x}^{(0)}(t) = \boldsymbol{x}_0, \qquad \boldsymbol{x}^{(n+1)}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^{(n)}(s))\,\mathrm{d}s.$$

由于 D 是开集且 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in D$, 可取 $0<a_0\le a$ 和 $b>0$, 使闭矩形 $Q=[t_0,t_0+a_0]\times\overline{B(\boldsymbol{x}_0,b)}\subset D$. 记 $K(t)=\int_{t_0}^{t}|k(s)|\,\mathrm{d}s$. 由于 k 可积, 由积分的绝对连续性 (Lebesgue 积分, 当然 Riemann 积分也能理解这个事, 相当于高度有限, 积分区域小就有积分小性, 两种理解都是可以的) $(1+|\boldsymbol{x}_0|+b)K(t_0+\delta)\le b$. 以下将上述迭代限制在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上. 若 $\boldsymbol{x}^{(n)}(t)\in\overline{B(\boldsymbol{x}_0,b)}$, 则

$$\left|\boldsymbol{x}^{(n+1)}(t)-\boldsymbol{x}_0\right| \le \int_{t_0}^{t}|k(s)|\left(1+\left|\boldsymbol{x}^{(n)}(s)\right|\right)\mathrm{d}s \le (1+|\boldsymbol{x}_0|+b)K(t_0+\delta)\le b.$$

故由归纳法, 每次迭代都取值于 Q. 令 $A=1+|\boldsymbol{x}_0|$. 由 Lipschitz 条件, 反复积分可得

$$\left|\boldsymbol{x}^{(n+1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(n)}(t)\right| \le A\frac{K(t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

右端对应的级数在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上一致收敛, 故 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 一致收敛到某个连续函数 $\boldsymbol{x}$. 又有

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{(n)}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\right]\mathrm{d}s\right| \le K(t_0+\delta)\left\|\boldsymbol{x}^{(n)}-\boldsymbol{x}\right\|_{\infty}\to 0.$$

在迭代式中令 $n\to\infty$, 即得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))\,\mathrm{d}s.$$

因此极限正是初值问题的解. □

题目 1.8 习题 2.1.3(提一下)

对初值问题 (1), 设 $d=1$, 且 $f(t,x)$ 关于 x 单调递减. 证明: 该初值问题在 $t\ge t_0$ 上的解是唯一的. 并判断在 $t\le t_0$ 上的解是否唯一, 证明结论或构造反例.

解. 设 x_1,x_2 是两个同初值的解, 并令 $w=x_1-x_2$. 由单调递减性,

$$\frac{1}{2}(w^2)' = w\big(f(t,x_1)-f(t,x_2)\big)\le 0.$$

对 $t\ge t_0$, 有 $0\le w(t)^2\le w(t_0)^2=0$, 所以向前解唯一.

向后解一般不唯一. 取 $t_0=0$, $x_0=0$, 并令

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$$

此函数连续且关于 x 严格递减. 在 $t\le 0$ 上,

$$x_1(t)\equiv 0, \qquad x_2(t)=\frac{t^2}{4}$$

都是满足 $x(0)=0$ 的解. 事实上 $x_2'(t)=t/2=-\sqrt{x_2(t)}$. 因此向后解不一定唯一. □

题目 1.9 习题 2.2.2, 选做 (提一下)

设空间维数 $d=1$, 在区间 $I=[t_0,t_0+h]$ 上 (h 的定义与 Peano 存在性定理相同) 构造 Tonelli 序列如下. 任给正整数 n, 令

$$t_k=t_0+k\frac{h}{n}.$$

然后我们从 $[t_0,t_1]$ 到 $[t_1,t_2]$, 再从 $[t_1,t_2]$ 到 $[t_2,t_3]$, 最终从 $[t_{n-2},t_{n-1}]$ 到 $[t_{n-1},t_n]$ 分段递归定义逼近解

$$x_n(t)=\begin{cases}x_0, & t\in[t_0,t_1],\\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-h/n} f(s,x_n(s))\,\mathrm{d}s, & t\in[t_1,t_0+h].\end{cases}$$

请用 Tonelli 序列和 Arzelà–Ascoli 引理证明 Peano 存在性定理.

解. 由于 D 是开集且 $(t_0,x_0)\in D$, 可取 $a,b>0$, 使闭矩形 $Q=[t_0,t_0+a]\times[x_0-b,x_0+b]\subset D$. 令 $M=\max_Q|f|$. 若 $M=0$, 则取 $h=a$ 后, 常值函数 $x=x_0$ 即为解. 以下设 $M>0$, 并取

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\qquad \delta_n=\frac{h}{n}.$$

接下来我们先验证这个迭代序列是合法的, 用归纳法, 由

$$|x_n(t)-x_0|\le\int_{t_0}^{t-\delta_n}|f(s,x_n(s))|\,\mathrm{d}s\le M(t-\delta_n-t_0)\le Mh\le b.$$

可见 x_n 可在整个 I 上定义, 且其图像始终位于 Q 中, 这也同时说明了一致有界性. 接下来我们验证一致等度连续性, 对任意 $s,t\in I$, 直接比较定义式中的积分区间可得 $|x_n(t)-x_n(s)|\le M|t-s|$. 因此 $\{x_n\}$ 一致有界且等度连续. 由 Arzelá–Ascoli 引理, 存在子列 x_{n_j} 在 I 上一致收敛到某个 x. 因为我们定义的 Tonelli 序列的积分限不是完整的, 因为我们定义并估计余项如下,

$$r_n(t)=x_n(t)-x_0-\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))\,\mathrm{d}s.$$

当 $t\in[t_0,t_1]$ 时, $r_n(t)=-\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))\,\mathrm{d}s$. 当 $t\in[t_1,t_0+h]$ 时, $r_n(t)=-\int_{t-\delta_n}^{t}f(s,x_n(s))\,\mathrm{d}s$. 那么

$$\|r_n\|_\infty\le M\delta_n=\frac{Mh}{n}\to 0.$$

又因 f 在紧集 Q 上一致连续, $f(s,x_{n_j}(s))$ 一致收敛到 $f(s,x(s))$. 在

$$x_{n_j}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_{n_j}(s))\,\mathrm{d}s+r_{n_j}(t)$$

中令 $j\to\infty$, 得

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s.$$

故 $x\in C^1(I)$, 且 $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$. 这就完成了证明. □

1.2 第二次作业

题目 1.10 习题 2.3.3(不讲)

设初值问题

$$x' = (x^2 - 2x - 3)\mathrm{e}^{(x+t)^2}, \qquad x(t_0) = x_0$$

的解的最大存在区间为 (a, b). 证明: $a = -\infty$ 与 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

提示: 先找出方程的所有平衡态, 再讨论初值 x_0 与平衡态的关系.

解. 平衡解为 $x \equiv -1$ 和 $x \equiv 3$. 由解的唯一性, 其他解不能穿过这两条平衡解.

若 $-1 < x_0 < 3$, 则 $x' < 0$. 解向前始终位于 $(-1, x_0]$, 向后始终位于 $[x_0, 3)$, 因而在任意有限时间区间内有界. 延拓准则给出 $a = -\infty$ 且 $b = +\infty$. 初值 $x_0 = -1, 3$ 时结论同样显然.

若 $x_0 > 3$, 则 $x' > 0$. 向后看时 $3 < x(t) \leq x_0$, 所以解不可能在有限的左端点逃向无穷, 从而 $a = -\infty$. 若 $x_0 < -1$, 则仍有 $x' > 0$, 而向前看时 $x_0 \leq x(t) < -1$, 故 $b = +\infty$. 这样就验证了所有情况. □

题目 1.11 习题 2.3.4(讲)

证明初值问题

$$x' = t^3 - x^3, \qquad x(t_0) = x_0$$

的解在 $[t_0, +\infty)$ 上存在.

提示: 为使用延拓准则, 可以估计 $x(t)^2$ 的演化.

解. 根据提示直接计算如下, 倒数第二个不等号用到 Young 不等式

$$(x^2)' = 2t^3 x - 2x^4 \leq 2\,|t|^3\,|x| - 2\,|x|^4 \leq \frac{3}{2}\,|t|^4 - \frac{3}{2}\,|x|^4 \leq \frac{3}{2}\,|t|^4 .$$

所以对每个有限的 $T > t_0$,

$$x(t)^2 \leq x_0^2 + \frac{3}{2}\int_{t_0}^{T} |s|^4 \,\mathrm{d}s, \qquad t \in [t_0, T].$$

解在任何有限的正向时间区间上都有界. 由延拓准则, 其右端最大存在时刻只能是 $+\infty$. □

题目 1.12 问题 2.3.3(讲)

设 $f(t, x)$ 在 $0 \leq t \leq a$, $-\infty < x < +\infty$ 上连续, 且存在常数 $q \in (0, 1)$, 使得对任意 $t \in (0, a]$ 都有

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq \frac{q}{t}\,|y - z| .$$

证明: 初值问题

$$x' = f(t, x), \qquad x(0) = x_0$$

在 $[0, a]$ 上存在唯一解.

提示: 在唯一性证明中说明条件 $q \in (0, 1)$ 的作用.

解. (这题小时候抱过我) 由 Peano 定理先得到 $t = 0$ 附近的局部解. 设其最大右端点为 $\beta \leq a$, 并记

$$M = \max_{0 \leq t \leq a} |f(t, 0)| .$$

取 $0 < \delta < \beta$. 在 $[\delta, \beta)$ 上,

$$|f(t, x)| \leq M + \frac{q}{\delta}\,|x| .$$

由 Grönwall 不等式, 对 $\delta \le t < \beta$ 有

$$|x(t)| \le \big(|x(\delta)| + M(\beta-\delta)\big)\exp\Big(\frac{q}{\delta}(\beta-\delta)\Big) =: B.$$

于是 $|x'(t)| \le M + qB/\delta$, 故 $x(t)$ 在 $t \uparrow \beta$ 时有有限极限. 若 $\beta < a$, 就可从该极限值继续求解, 与最大性矛盾, 从而 $\beta = a$.

再设 x, y 是两个同初值的解, $w = x - y$. 代入方程可知 $w'(0) = 0$, 那么我们定义如下函数

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \dfrac{w(t)}{t}, & t \neq 0. \end{cases}$$

这个函数显然连续, 那么记

$$N = \max_{0 \le t \le a} |\phi(t)|.$$

对 w 的方程直接积分估计, 有

$$|w(t)| \le \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| \,\mathrm{d}s \le \int_0^t \frac{q}{s}|w(s)| \,\mathrm{d}s \le qNt.$$

将 t 除到左侧, 然后取最大值得到 $N \le qN$, 这就迫使 $N = 0$, 那我们就完成了证明. □

Remark. 不能从

$$|w(t)| \le \int_0^t \frac{q}{s}|w(s)| \,\mathrm{d}s$$

直接套用 Grönwall 不等式, 因为 $q/s \notin L^1(0,t)$; 形式表达式 $0 \cdot \exp(\int_0^t q/s \,\mathrm{d}s)$ 没有意义. 即使先从 $\varepsilon > 0$ 截断, 也必须另外控制 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的边界项.

下面给出一种严谨的处理. 仍设 $w = x - y$, 并令

$$F(t) = \int_0^t \frac{q}{s}|w(s)| \,\mathrm{d}s.$$

由 $w(0) = w'(0) = 0$, 函数 $|w(s)|/s$ 可在 $s = 0$ 处连续补为 0, 故 F 定义良好. 又由积分方程,

$$|w(t)| \le F(t).$$

从而对 $t > 0$,

$$F'(t) = \frac{q}{t}|w(t)| \le \frac{q}{t}F(t), \qquad \big(t^{-q}F(t)\big)' \le 0.$$

另一方面,

$$0 \le \varepsilon^{-q}F(\varepsilon) = \varepsilon^{1-q}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{q}{s}|w(s)| \,\mathrm{d}s\right) \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \downarrow 0),$$

其中括号内的量有界, 而 $1 - q > 0$. 因此对任意 $t > 0$,

$$0 \le t^{-q}F(t) \le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-q}F(\varepsilon) = 0.$$

于是 $F(t) = 0$, 再由 $|w(t)| \le F(t)$ 得 $x(t) = y(t)$. 这里也清楚地看出了条件 $q < 1$ 的作用.

题目 1.13 问题 2.4.1, 选做 (提一下)

考虑初值问题

$$x'(t) = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

其中 $f(t,x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续并关于 x 局部 Lipschitz. 设 $\alpha, \beta \in C^1([t_0, +\infty))$ 满足

$$\alpha(t) \le \beta(t), \qquad \alpha'(t) \le f(t,\alpha(t)), \qquad \beta'(t) \ge f(t,\beta(t)).$$

1. 证明当 $x_0 \in [\alpha(t_0), \beta(t_0)]$ 时, 对任意 $t \geq t_0$ 都有 $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$.
2. 证明该解正向整体存在.
3. 若 $x_0 \in (\alpha(t_0), \beta(t_0))$, 且条件中的所有不等式均改为严格不等式, 证明第 1 问的结论也可改为严格不等式.

解. 第 1 问. 先只考虑解已经存在的一个有限时间段 $[t_0, T]$. 这段时间内 x, α, β 都有界, 取 m, M 使它们在 $[t_0, T]$ 上的值均落在 $[m, M]$ 内. 由局部 Lipschitz 条件, 可取常数 L, 使

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y - z| \qquad \text{where } t \in [t_0, T],\ y, z \in [m, M].$$

假如 $x(T) < \alpha(T)$, 由 $x(t_0) \geq \alpha(t_0)$ 及连续性, 可以取 $x = \alpha$ 的最后一个时刻 $\tau < T$. 在 $(\tau, T]$ 上令 $w = \alpha - x$, 则 $w > 0$, 且

$$w' = \alpha' - f(t,x) \leq f(t,\alpha) - f(t,x) \leq Lw.$$

由 Grönwall 不等式, 这个函数从 $w(\tau) = 0$ 出发只能不增, 与 $w(T) > 0$ 矛盾. 因此 $x(T) \geq \alpha(T)$. 另一侧证明同理.

第 2 问. 设解的最大正向存在区间为 $[t_0, b)$. 若 $b < +\infty$, 则由第 1 问和 α, β 在 $[t_0, b]$ 上的连续性, $x(t)$ 在 $t < b$ 时有界. 连续函数 f 在相应的有限时间和有限 x 范围内也有界, 故 $|x'(t)| \leq C$ $(t < b)$, 其中 C 是某个常数. 由中值定理, $|x(t) - x(s)| \leq C\,|t - s|$, 所以 $x(t)$ 在 $t \uparrow b$ 时有有限极限 x_b. 从初值 (b, x_b) 出发, 局部存在定理给出 b 之后的一段解. 补定义 $x(b) = x_b$. 由 f 的连续性, $x'(t) = f(t, x(t)) \to f(b, x_b)$; 再用中值定理可知 x 在 b 的左导数也是 $f(b, x_b)$, 与新解的右导数相同. 两段解因而可以接起来, 与 b 的最大性矛盾. 故 $b = +\infty$.

第 3 问. 若题设不等式均严格, 则 $x(t_0) > \alpha(t_0)$. 假如 $x - \alpha$ 第一次在 $\tau > t_0$ 变为零, 则对 $t \in [t_0, \tau)$ 而言, $x(t) - \alpha(t) > 0$, 所以 $\big((x-\alpha)(\tau) - (x-\alpha)(t)\big)/(\tau - t) < 0$. 这说明 $(x-\alpha)'(\tau) \leq 0$; 然而

$$(x-\alpha)'(\tau) = f(\tau, \alpha(\tau)) - \alpha'(\tau) > 0,$$

矛盾. 对 $\beta - x$ 作同样的讨论, 即得 $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$ $(t \geq t_0)$. □

题目 1.14 问题 2.5.1(讲)

考虑 $[t_0, +\infty)$ 上的含参初值问题

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \lambda), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,$$

其中

$$\boldsymbol{f} : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$$

连续, 并关于 $\boldsymbol{x}$ 局部 Lipschitz. 假设存在常数 $\alpha > 0$, $L \geq 0$, $C \geq 0$, 使

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \big(\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \lambda)\big) \leq -\alpha\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2,$$

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \lambda) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \mu)| \leq L\,|\lambda - \mu|, \qquad |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}, \lambda)| \leq C(1 + |\lambda|).$$

1. 证明对每个固定参数 $\lambda \in \mathbb{R}^m$, 该初值问题的解正向整体存在.
2. 记 $\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda)$ 为相应的解, 证明

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0, \lambda) - \boldsymbol{\varphi}(t; t_0, \boldsymbol{y}_0, \mu)| \\ &\quad \leq \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\,|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0| + \frac{L}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\right)|\lambda - \mu|. \end{aligned}$$

并说明解对初值和参数的依赖为何关于 $t \in [t_0, +\infty)$ 是一致的.

提示: 第 1 问考察 $|\boldsymbol{x}(t)|^2$ 的演化. 第 2 问可令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, 并用 $w_\varepsilon=(\varepsilon^2+|\boldsymbol{w}|^2)^{1/2}$ 逼近 $|\boldsymbol{w}|$, 以避开范数在零点处的不可微性.

解. 固定 λ, 并记 $D_\lambda=C(1+|\lambda|)$. 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{x}|^2&=\boldsymbol{x}\cdot\big(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\lambda)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0},\lambda)\big)+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0},\lambda)\\&\le-\alpha|\boldsymbol{x}|^2+D_\lambda|\boldsymbol{x}|\le-\frac{\alpha}{2}|\boldsymbol{x}|^2+\frac{D_\lambda^2}{2\alpha}.\end{aligned}$$

因此

$$|\boldsymbol{x}(t)|^2\le\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}|\boldsymbol{x}_0|^2+\frac{D_\lambda^2}{\alpha^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\right).$$

解在所有有限正向时间段上一致有界, 所以由延拓准则知它正向整体存在.

分别取参数 λ,μ 对应的解 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 并令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. 则

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{w}|^2\le-\alpha|\boldsymbol{w}|^2+L|\lambda-\mu||\boldsymbol{w}|.$$

为避开 $|\boldsymbol{w}|=0$ 处的不可微性, 对 $w_\varepsilon=(\varepsilon^2+|\boldsymbol{w}|^2)^{1/2}$ 计算可得

$$w_\varepsilon'\le-\alpha w_\varepsilon+L|\lambda-\mu|+\alpha\varepsilon.$$

因此

$$w_\varepsilon(t)\le\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}w_\varepsilon(t_0)+\left(\frac{L}{\alpha}|\lambda-\mu|+\varepsilon\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\right).$$

令 $\varepsilon\downarrow0$, 即得题设估计.

特别地,

$$\sup_{t\ge t_0}|\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\lambda)-\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{y}_0,\mu)|\le|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|+\frac{L}{\alpha}|\lambda-\mu|.$$

右端与 t 无关, 故依赖性在整个半轴上一致. □

题目 1.15 习题 2.6.1(讲)

对含参初值问题

$$x'(t)=\lambda x(t)-x(t)^3,\qquad x(0)=x_0,$$

写出关于 x_0 和 λ 的变分方程, 并证明 $\partial x(t)/\partial x_0>0$.

解. 向量场关于 (x,λ) 连续可微, 且三次项具有耗散性, 所以解正向整体存在并关于 (x_0,λ) 连续可微 (看不出来的话可以乘 x 算一下). 令

$$u(t)=\frac{\partial x(t)}{\partial x_0},\qquad v(t)=\frac{\partial x(t)}{\partial\lambda}.$$

相应的变分方程为

$$\begin{cases}u'=(\lambda-3x(t)^2)u,\\u(0)=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}v'=(\lambda-3x(t)^2)v+x(t),\\v(0)=0.\end{cases}$$

第一式可直接积分为

$$\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}=\exp\left(\int_0^t(\lambda-3x(s)^2)\,\mathrm{d}s\right)>0.$$

□

题目 1.16 习题 2.6.4(讲)

考虑微分方程

$$x'(t) = \cos^2 x(t) + (\lambda + q(t)) \sin^2 x(t), \qquad x(0;\lambda) = x_0,$$

其中 $q \in C(\mathbb{R})$.

1. 证明对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 该初值问题在 $t \in [0,1]$ 上存在唯一解 $x = \varphi(t;\lambda)$.
2. 对任意 $t \in [0,1]$, 判断 $\varphi(t;\lambda)$ 关于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是否连续可微, 并证明结论.
3. 令 $\omega(\lambda) = \varphi(1;\lambda)$. 证明 ω 关于 λ 严格单调递增.

提示: 第 3 问使用关于参数 λ 的变分方程, 并说明 $\partial\varphi(1;\lambda)/\partial\lambda$ 严格为正.

解. 固定 λ. 在 $[0,1]$ 上有

$$\left|\cos^2 x + (\lambda + q(t)) \sin^2 x\right| \le 1 + |\lambda| + \|q\|_\infty .$$

而右端关于 x 的导数

$$(\lambda + q(t) - 1) \sin 2x$$

也一致有界, 所以右端关于 x 全局 Lipschitz. 由存在唯一性定理和延拓准则, 第 1 问成立.

右端关于 (x,λ) 的偏导数存在且连续, 故 $\varphi(t;\lambda)$ 关于 λ 连续可微. 令

$$z(t;\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t;\lambda).$$

参数变分方程为

$$z' = (\lambda + q(t) - 1)\sin(2\varphi(t;\lambda))z + \sin^2 \varphi(t;\lambda), \qquad z(0;\lambda) = 0.$$

记 $a(t) = (\lambda + q(t) - 1)\sin(2\varphi(t;\lambda))$. 一阶 ODE 的解给出

$$z(t;\lambda) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right) \sin^2 \varphi(s;\lambda)\,\mathrm{d}s \ge 0.$$

若 $z(1;\lambda) = 0$, 则连续的非负被积函数恒为零, 从而 $\sin\varphi(s;\lambda) \equiv 0$. 连续性迫使 φ 为某个 $k\pi$ 常值函数, 但方程右端在 $x = k\pi$ 时等于 1, 矛盾. 因此

$$\omega'(\lambda) = z(1;\lambda) > 0,$$

即 ω 严格单调递增. □

2 补充: 积分因子法与 Frobenius 定理

(此部分文本来自 Codex, 本人反复喂 prompt 得到) 考虑一阶方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

其中 $M, N \in C^1(U)$, 并记 $\omega = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$. 若 $M_y = N_x$, 则 ω 是闭形式; 在一个小邻域内 (或在单连通区域 U 上) 闭形式是恰当形式, 因而存在函数 H, 使得 $\omega = \mathrm{d}H$. 此时方程的积分曲线可写成 $H(x,y) = C$.

当 $M_y \neq N_x$ 时, 我们希望寻找一个处处不为零的函数 $\mu(x,y)$, 使 $\mu\omega$ 成为闭形式. 这样的 μ 称为**积分因子**. 闭合条件为

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad M\mu_y - N\mu_x = \mu(N_x - M_y).$$

因为 μ 处处不为零, $\ker(\mu\omega) = \ker\omega$. 所以乘上积分因子并不改变方程规定的方向及其积分曲线, 只是重新缩放了描述同一方向场的微分形式. 若 $\mu\omega$ 闭, 则它在一个小邻域内可写成 $\mathrm{d}H$, 从而得到通积分 $H(x,y) = C$.

这里要区分两个层面: Frobenius 定理研究方向场 $\mathcal{D} = \ker\omega$ 能否由积分流形填满; 积分因子法则要为同一个方向场寻找一个闭形式代表 $\mu\omega$. Frobenius 定理本身并不直接给出 μ 的计算公式, 但它说明了局部积分因子为何存在. 先简要说明其中的概念. 对每个点 $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, 给定一个随 p 光滑变化的 k 维线性子空间 $\mathcal{D}_p \subset \mathbb{R}^n$, 就得到一个光滑分布 $\mathcal{D}$.(也就是在维数上推广了光滑向量场) 若向量场 X, Y 在每一点 p 都取值于 $\mathcal{D}_p$, 则它们的 Lie 括号为 $[X,Y] = XY - YX$. 如果 $[X,Y]$ 仍在每一点取值于 $\mathcal{D}_p$, 就称 $\mathcal{D}$ 是**对合的**.

若一个连通的 k 维光滑曲面 L 满足

$$T_qL = \mathcal{D}_q, \qquad q \in L,$$

就称 L 是 $\mathcal{D}$ 的一个积分流形. 若每一点都通过某个积分流形, 就称 $\mathcal{D}$ 是可积的.

可积分布的 Lie 括号性质. 如果 $\mathcal{D}$ 可积, 那么对任意沿着 $\mathcal{D}$ 的光滑向量场 X, Y, 都有 $[X,Y]$ 仍沿着 $\mathcal{D}$; 记作

$$X, Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}) \quad \Longrightarrow \quad [X,Y] \in \Gamma^\infty(\mathcal{D}).$$

因此, 分布可积必然推出分布对合.

整体 Frobenius 定理. 设 $\mathcal{D}$ 是流形 M 上秩为 k 的对合分布. 那么对任意 $p \in M$, 都存在唯一的经过 p 的极大连通积分流形 L_p.(这个定理不需要知道证明, 即使学微分流形也不是重点)

现在把定理用到平面方程上. 在正则点, 即 $(M,N) \neq (0,0)$ 的点附近, 令

$$\mathcal{D}_{(x,y)} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : M(x,y)u + N(x,y)v = 0\}.$$

这是由 $Z = (N, -M)$ 张成的一维方向场. 一维方向场自动对合: 任意两个取值于其中的向量场都可写成 $X = fZ$, $Y = gZ$, 而

$$[X,Y] = \big(fZ(g) - gZ(f)\big)Z$$

仍在同一方向场中. 所以由整体 Frobenius 定理, 每个正则点都通过唯一的极大连通积分曲线. 将这些曲线限制在一个充分小的邻域内, 就得到一族积分曲线分叶; 经过光滑的局部坐标变换, 它们可看成一族平行坐标线. 取横向坐标为 H, 就有 $\nabla H \neq 0$, 且曲线恰好是等值线 $H(x,y) = C$.

曲线的切向量 (u,v) 同时满足

$$Mu + Nv = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H_x u + H_y v = 0.$$

两个非零行向量若有相同的零空间, 由线性代数可知它们必成比例. 因而存在处处不为零的函数 μ, 使

$$(H_x, H_y) = \mu(M,N), \qquad \mathrm{d}H = \mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mu\omega.$$

缩小邻域后总可设 $M \neq 0$ 或 $N \neq 0$; 此时由 $\mu = H_x/M$ 或 $\mu = H_y/N$ 还可看出 μ 是光滑函数, 所以它正是局部积分因子.

注记. 在当前的平面问题中, $\mathcal{D} = \ker\omega$ 是秩为 1 的分布, 因而自动对合. 所以 Frobenius 定理在这里并不提供额外的可积性判别; 单条积分曲线的局部存在唯一性也可以直接由常微分方程的基本定理得到. 它在这里的作用是给出一个更完整的局部图景: 一整族积分曲线可以被同时拉直, 并写成某个第一积分的等值线 $H(x,y) = C$, 从而说明 H 和积分因子 μ 在正则点附近总是局部存在.(所以看起来完全没用) 至于如何显式求出 μ, 仍要使用前面的闭合条件. 全局情形以及 $(M,N) = (0,0)$ 的奇点需要另外讨论.

实际计算中常用下面两个判别:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = p(x) \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = \exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right),$$
$$\frac{N_x - M_y}{M} = r(y) \quad \Longrightarrow \quad \mu(y) = \exp\left(\int r(y)\mathrm{d}y\right).$$

也就是说, 左端只依赖于 x 或 y 时, 可以把求积分因子的偏微分方程化为一次积分.

例. 求方程

$$(y-x)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$$

的通积分. 此时 $M = y - x$, $N = 1$, 且 $M_y = 1$, $N_x = 0$, 故原方程不是恰当方程. 因为 $(M_y - N_x)/N = 1$, 可取积分因子 $\mu(x) = \mathrm{e}^x$. 乘上积分因子后,

$$\mathrm{e}^x(y-x)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\mathrm{e}^x(y-x+1)].$$

因此通积分为

$$\mathrm{e}^x(y-x+1) = C, \qquad \text{即} \qquad y = x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}.$$

注记. 写完讲义发现想复杂了, 这个话题的 idea 来自微分几何的 Gauss–Codazzi 方程. 这是在说, 给定一些基本量后, 能否唯一确定一个曲面呢? 如果用 Frobenius 定理, 这个问题的理论框架就看起来舒服很多.(微分几何课会说这是 ODE 内容, 但 ODE 却不讲这个) 还有一些别的看法是 De Rham 上同调, 当然在这里就不合适展开了, 感兴趣的同学可以自己学习一下.