

2026年秋季学期 常微分方程 作业一

常微分方程的初等计算、解的存在唯一性定理

截止时间：2026.9.16下课前（电子版截至当天23:59:59）

第5、9题选做，其它必做。禁止抄袭或使用AI直接生成答案PDF，被抓到者此次作业零分。

A组：交流生、高年级同学以及25级学号 $\leq$ PB25000295的同学把作业交给张博洋助教。

B组：25级学号 $\geq$ PB25000304的同学把作业交给周芾助教。

作业题 1 (习题1.1.4). 解方程 $x'(t) = x(t)^a$, 其中 $a = 1/5, 1, 2$, 并分别作出相应积分曲线族的草图.

作业题 2 (习题1.1.5). 令牵引点 A 沿 x 轴正向运动, 并以 A 沿 x 轴的位移 s 为参数, $A(s) = (s, 0), s \geq 0$. 质点 B 从 $B(0) = (0, b), (b > 0)$ 出发. 假设绳长保持不变, 即 $\|A(s) - B(s)\| = b$, 其中 $B(s) = (x(s), y(s))$; 并且 B 的轨迹切向始终沿着由 B 指向 A 的方向, 即存在非负函数 $\lambda(s)$ 使得 $(x'(s), y'(s)) = \lambda(s)(s - x(s), -y(s))$. 求质点 B 的轨迹方程, 即解出 $x(s), y(s)$ 的参数表达式. (注意: 题干中的 $\lambda(s)$ 是可以跟 $x(s)$ 一起解出来的, 最终答案不能含有 $\lambda(s)$.)

作业题 3 (习题1.2.4). 求微分方程 $x'(t) \sin 2t = 2(x(t) + \cos t)$ 满足 $t \rightarrow \pi/2$ 时仍有界的解.

作业题 4 (习题1.2.6). 设 p, q 都是 T -周期连续函数, 并且 $\int_0^T p(s) ds > 0$. 证明: 方程 $x' + p(t)x = q(t)$ 的任意解与其唯一 T -周期解之差在 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于零.

作业题 5 (习题1.2.8, 选做). 设 $E(t)$ 是取值恒大于零的光滑函数. 对任意 $t \geq 0$, 它满足不等式

$$E'(t) \leq C(1+t)^{-\sigma} E(t)^p, \quad E(0) \leq \varepsilon^2,$$

其中 $\sigma > 0, p > 1, C > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$. 定义 $\tilde{T}_\varepsilon := \inf \{t > 0 : E(t) = 10\varepsilon^2\}$, 试讨论 $\tilde{T}_\varepsilon$ 的下界对 ε 的依赖关系, 分情况 $\sigma > 1, \sigma = 1, 0 < \sigma < 1$ 讨论.

作业题 6 (习题1.3.1). 求解方程 $x'(t) = -x(t)^2 - \frac{1}{4t^2}$. (提示: 先找形如 $x_p(t) = C/t$ 的特解)

考虑如下形式的一阶常微分方程的初值问题

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.0.1)$$

其中 $I \subset \mathbb{R}$ 是含有 t_0 的区间, 未知函数 $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, 给定函数 $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ 的定义域 D 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 中的开集, 并且 $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$.

作业题 7 (习题2.1.2). 对初值问题(2.0.1), 如果 $\mathbf{f}$ 满足的条件改为: $\mathbf{f}$ 连续, 且存在 $[t_0, t_0 + a]$ 上的可积函数 (即绝对值的积分是收敛的) $k(t)$ 使得

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq k(t)(1 + |\mathbf{x}|), \quad |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)| \leq k(t)|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|.$$

证明: 存在区间 $[t_0, t_0 + \delta]$ 使得对应的 Picard 序列在该区间上一致收敛到(2.0.1)的解.

作业题 8 (习题2.1.3). 对初值问题(2.0.1), 设空间维数 $d = 1$, 且 $f(t, x)$ 连续, 并且关于 x 变量是单调递减的。证明: 该初值问题在 $t \geq t_0$ 的解是唯一的。并问: 在 $t \leq t_0$ 上的解是否唯一? 证明结论或者构造反例。

作业题 9 (习题2.2.2, 选做). 设空间维数 $d = 1$, 在区间 $I = [t_0, t_0 + h]$ 上 (h 定义与 Peano 存在性定理相同) 构造 Tonelli 序列如下: 任给正整数 n , 令 $t_k = t_0 + k \frac{h}{n}$, 然后我们从 $[t_0, t_1]$ 到 $[t_1, t_2]$, 再从 $[t_1, t_2]$ 到 $[t_2, t_3]$ 最终从 $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ 到 $[t_{n-1}, t_n]$ 分段递归定义逼近解

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 & t \in [t_0, t_1] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t - \frac{h}{n}} f(s, x_n(s)) ds & t \in [t_1, t_0 + h] \end{cases}.$$

请用 Tonelli 序列和 Arzelà-Ascoli 引理证明 Peano 存在性定理。