2025年秋季学期偏微分方程作业四

极大值原理、格林函数

截止时间：2026年元月5日下课前

作业题1-9是必做题，作业题10是选做题。

作业题 1 (习题4.1.3). 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是单调递增函数, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$是有界区域, 常数$T>0$. 设$u\in C_1^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega_T})$是如下方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+f(u)=0, & \text{in }\Omega_T\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}), & t=0,\ \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}\\ u(t,\boldsymbol{x})=g(t,\boldsymbol{x}), & t\geq 0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中φ,g是给定的有界光滑函数。

(1) 设$f\in C^1$, **叙述并证明**微分算子$\mathcal{L}u:=\partial_t u-\Delta u+f(u)$的比较原理。

(2) 如果只假设f连续，证明上述方程解的唯一性。

作业题 2 (习题4.1.4). 考虑一维热方程

$$u_t-u_{xx}=0\text{ in }[0,+\infty)\times(0,\pi),\qquad u(t,0)=u(t,\pi)=0\ (t\geq 0).$$

(1) 证明: 对任意$a\in\mathbb{R}$, $v(t,x)=ae^{-t}\sin x$满足上述方程。

(2) 若初值选取为$u(0,x)=\begin{cases}x & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \pi-x & x\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$, 证明：对应的解满足$e^{-t}\leq\max\limits_{x\in[0,\pi]}u(t,x)\leq\frac{\pi}{2}e^{-t}$.

提示: (2)可以用比较原理，可以联想(1)中解的初值是什么。

作业题 3 (习题4.2.3，下调和函数的弱极值原理). 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$是有界开集（未必是区域）。函数$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是$\Omega$中的**下调和函数**, 即$-\Delta u\leq 0$在$\Omega$内恒成立。

(1) 证明：对任意球$B(\boldsymbol{x},r)\Subset\Omega$，成立$u(\boldsymbol{x})\leq \fint_{B(\boldsymbol{x},r)}v(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$.

(2) 证明：$\max\limits_{\overline{\Omega}}u=\max\limits_{\partial\Omega}u$.

(3) 证明：若$v\in C^3(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$是$\Omega$内的调和函数，则$|\nabla v|$在$\partial\Omega$上达到最大值。

提示：(1) 先证明$-\Delta u<0$的情况，对一般情况考虑扰动$u_\varepsilon(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})+\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$. (2) 计算$\Delta(|\nabla v|^2)$.

作业题 4 (习题4.2.5). 设$\Omega:=B(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^d$, $u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$满足

$$\Delta u-2u=1\quad\text{in }\Omega,\ \ u|_{\partial\Omega}=g(\boldsymbol{x}).$$

这里g是$\partial\Omega$上的连续函数，证明：存在常数$C>0$使得$\max\limits_{\overline{\Omega}}|u|\le\max\limits_{\partial\Omega}|g|+C$.

提示：选取充分大的常数$\lambda>0$, 使得$\Delta(u^2+\frac{\lambda}{4}|\boldsymbol{x}|^2)\ge 0$.

作业题 5 (习题4.2.6). 设$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是开集$\Omega$内的非负调和函数, 球$B(\boldsymbol{x}_0,R)\Subset\Omega$.证明：对任意$1\le i\le d$有$|\partial_{x_i}u(\boldsymbol{x}_0)|\le\dfrac{d}{R}\max\limits_{B(\boldsymbol{x}_0,R)}u$.

作业题 6 (习题4.2.8). 设u是$\mathbb{R}^d$中的调和函数。证明：若u满足以下两条件中任一个，则u是常数。

(1) ∃ 常数 $C>0,p>0$ 使得 $|u(\boldsymbol{x})|\le C\,(\log(1+|\boldsymbol{x}|^p)+1)\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$.

(2) ∃ 常数 $C\in\mathbb{R},\ u(\boldsymbol{x})\ge C\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$.

作业题 7 (习题4.3.5). 设$u_i\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ $(i=1,2)$是如下方程的解

$$-\Delta u_i+c_i(\boldsymbol{x})u_i=0\quad\text{in }\Omega,\qquad u_i|_{\partial\Omega}=g_i(\boldsymbol{x}).$$

若$c_2(\boldsymbol{x})\ge c_1(\boldsymbol{x})\ge 0$和$g_2(\boldsymbol{x})\ge g_1(\boldsymbol{x})\ge 0$恒成立，证明：$u_1(\boldsymbol{x})\ge u_2(\boldsymbol{x})$在$\overline{\Omega}$上恒成立。

提示：先证明$u_i\ge 0$, 再考虑u_1-u_2满足的方程和边值条件。

作业题 8 (习题5.2.1). 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ $(d\ge 2)$是边界光滑的有界区域，定义$D:=\sup\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega\}$为$\Omega$的直径。记$\Phi(\boldsymbol{x})$为Laplace方程的基本解（见讲义上的定义3.3.1）。今固定$\boldsymbol{x}\in\Omega$, 证明：

(1) 格林函数$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$是唯一的，且满足$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}=-1$;

(2) 当 $d\ge 3$ 时, 对任意$\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\Omega$有$0<G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$成立;

(3) 当 $d=2$ 时, 对任意$\boldsymbol{y}\ne\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\Omega$有$0<G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{D}$成立.

作业题 9 (习题5.2.3，球上的Harnack不等式). 设u是闭球$\overline{B(\mathbf{0},R)}\subset\mathbb{R}^d$上的非负调和函数。

(1) 结合讲义上的公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2}\frac{R-|\boldsymbol{x}|}{(R+|\boldsymbol{x}|)^{d-1}}u(\mathbf{0})\le u(\boldsymbol{x})\le R^{d-2}\frac{R+|\boldsymbol{x}|}{(R-|\boldsymbol{x}|)^{d-1}}u(\mathbf{0})$$

(2) 用(1)证明：$\forall r\in(0,R)$, 成立不等式$\sup\limits_{B(\mathbf{0},r)}u\le(\frac{R+r}{R-r})^d\inf\limits_{B(\mathbf{0},r)}u$.

作业题 10 (问题4.1.1，选做). 习题4.1.4中，假设初值$u(0,x)=u_0(x)\in C^1([0,\pi])$且满足$u_0(0)=u_0(\pi)=0$，证明：存在常数$C>0$，使得对应的解满足$\sup\limits_{x\in[0,\pi]}|u(t,x)|\le Ce^{-t}$.

提示：将$u_0(x)$与习题4.1.4(1)初值的常数倍相比较，这是本题假设初值C^1的原因所在。