2025年秋季学期偏微分方程作业四答案

章俊彦*

极大值原理、格林函数

作业题 1 (习题4.1.3). 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是单调递增函数, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$是有界区域, 常数$T>0$. 设$u\in C_1^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega_T})$是如下方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+f(u)=0, & \text{in } \Omega_T\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}), & t=0,\ \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}\\ u(t,\boldsymbol{x})=g(t,\boldsymbol{x}), & t\geqslant 0, \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中φ, g是给定的有界光滑函数。

(1) 设$f\in C^1$, **叙述并证明**微分算子$\mathcal{L}u:=\partial_t u-\Delta u+f(u)$的比较原理。
(2) 如果只假设f连续，证明上述方程解的唯一性。

证明. （1）比较原理可叙述为

设$u,v\in C_1^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega_T})$满足

$$\mathcal{L}u\leqslant\mathcal{L}v\quad\text{in }\Omega_T,\quad u\leqslant v\quad\text{on }\Gamma_T,$$

则$u\leqslant v$在$\overline{\Omega_T}$恒成立。

证明该结论只需在比较原理的题给条件两端作差即可。令$w:=u-v$，则我们得到

$$\mathcal{L}u-\mathcal{L}v=\partial_t w-\Delta w+f(u)-f(v)=\partial_t w-\Delta w+f'(\zeta)w\quad\text{for some }\zeta.$$

而f单调递增且C^1, 则$f'\geqslant 0$恒成立，所以由$c\geqslant 0$的弱极大值原理(讲义的推论4.1.2)得知$u\leqslant v$在$\overline{\Omega_T}$恒成立。

*中国科学技术大学数学科学学院。邮箱: yx3x@ustc.edu.cn

（2）如果只假设f连续，则此时无法用拉格朗日中值定理。现在可以用能量法证明，设φ, g给定时，u_1, u_2均为方程的解，则考虑$v := u_1 - u_2$，其满足

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + f(u_1) - f(u_2) = 0, & \text{in } \Omega_T \\ v(0, \boldsymbol{x}) = 0, & t = 0,\ \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} \\ v(t, \boldsymbol{x}) = 0, & t \geqslant 0, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

两边乘以v并积分得到

$$\int_\Omega (\partial_t v)v - (\Delta v)v + (f(u_1) - f(u_2))\underbrace{(u_1 - u_2)}_{=v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

第二项分部积分，并利用零边值，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega v^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant 0,$$

这里用到了f是单调递增的（进而$(f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2) \geqslant 0$恒成立）。而$v$的初值是零，所以这表明$\int_\Omega v(t, \boldsymbol{x})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv 0$, 即$u_1 \equiv u_2$. □

作业题 2 (习题4.1.4). 考虑一维热方程

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ in } [0, +\infty) \times (0, \pi), \qquad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0\ (t \geqslant 0).$$

(1) 证明: 对任意$a \in \mathbb{R}$, $v(t, x) = ae^{-t}\sin x$满足上述方程。

(2) 若初值选取为$u(0, x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$, 证明：对应的解满足$e^{-t} \leqslant \max\limits_{x\in[0,\pi]} u(t, x) \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-t}$.

提示: (2)可以用比较原理，可以联想(1)中解的初值是什么。

证明. (1)代入计算即可，略。

(2) 观察给定的初值函数的图像可知，它可以被$\sin x$(即(1)中的解对应的初值)的常数倍从上下两侧界住，具体我们有

$$\forall x \in [0, \pi], \sin x \leqslant u(0, x) \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x.$$

而由(1)知，初值为$\sin x, \frac{\pi}{2}\sin x$时方程的解分别为$e^{-t}\sin x, \frac{\pi}{2}e^{-t}\sin x$. 又因为它们边值全为零，所以由热方程的比较原理知，对任意$T > 0$有

$$e^{-t}\sin x \leqslant u(t, x) \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-t}\sin x \qquad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, \pi].$$

再对x变量取最大值即得结论。

$\square$

作业题 3 (习题4.2.3，下调和函数的弱极值原理). 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$是有界开集（未必是区域）。函数$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是$\Omega$中的**下调和函数**, 即$-\Delta u\leqslant 0$在$\Omega$内恒成立。

(1) 证明：对任意球$B(\boldsymbol{x},r)\Subset\Omega$，成立$u(\boldsymbol{x})\leqslant ⨏_{B(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$.

(2) 证明：$\max\limits_{\overline{\Omega}}u=\max\limits_{\partial\Omega}u$.

(3) 证明：若$v\in C^3(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$是$\Omega$内的调和函数，则$|\nabla v|$在$\partial\Omega$上达到最大值。

提示：(1) 先证明$-\Delta u<0$的情况，对一般情况考虑扰动$u_\varepsilon(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})+\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$. (2) 计算$\Delta(|\nabla v|^2)$.

证明. (1) 给定$\boldsymbol{x}\in\Omega$和球$B(\boldsymbol{x},r)\Subset\Omega$, 令$\varphi(r)=⨏_{\partial B(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$. 模仿平均值原理证明得

$$\varphi'(r)=\frac{r}{d}⨏_{B(\boldsymbol{x},r)}\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\geqslant 0.$$

因此对任意$r>0$, 有$\varphi(r)\geqslant\lim\limits_{r\to 0_+}\varphi(r)=u(\boldsymbol{x})$.

再看体积平均，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B(\boldsymbol{x},r)}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}&=\int_0^r\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\rho)}u\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}\rho=\int_0^r d\alpha(d-1)\rho^{d-1}\varphi(\rho)\,\mathrm{d}\rho\\&\leqslant d\alpha(d-1)\int_0^r\rho^{d-1}u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\rho=\alpha(d)r^du(\boldsymbol{x})=\mathrm{vol}\,(B(\boldsymbol{x},r))u(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

(2) 对$\varepsilon>0$, 令$u_\varepsilon(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})+\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2$, 则$\Delta u_\varepsilon=\Delta u+2d\varepsilon>0$. 反证法：如果$u_\varepsilon$的最大值在内点$\boldsymbol{x}_0\in\Omega$得到，则$\mathrm{Hess}\,u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$是半负定方阵，因此$\Delta u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}\,u_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0$, 矛盾。因此$\max\limits_{\overline{\Omega}}u_\varepsilon=\max\limits_{\partial\Omega}u_\varepsilon$. 现在有

$$\max_{\overline{\Omega}}u\leqslant\max_{\overline{\Omega}}u_\varepsilon=\max_{\partial\Omega}u_\varepsilon\leqslant\max_{\partial\Omega}u+\varepsilon\max_{\partial\Omega}|\boldsymbol{x}|^2.$$

因为Ω有界，所以$\max\limits_{\partial\Omega}|\boldsymbol{x}|^2<\infty$，从而在上述不等式中令$\varepsilon\to 0$即得结论。

(3) 计算$\Delta(|\nabla v|^2)$. 我们知道$|\nabla v|^2=\sum\limits_{j=1}^d(\partial_jv)^2$. 求导得

$$\partial_i(|\nabla v|^2)=2\sum_{j=1}^d(\partial_jv)(\partial_i\partial_jv).$$

再求导得

$$\partial_i^2(|\nabla v|^2) = 2\sum_{j=1}^{d}(\partial_j v)(\partial_i^2\partial_j v) + (\partial_i\partial_j v)^2.$$

对i求和，得到$\Delta(|\nabla v|^2) = 2(\nabla v)\cdot\nabla(\Delta v) + 2|\nabla^2 v|^2 = 2|\nabla^2 v|^2 \geqslant 0$. 由(2)即得结论。 □

作业题 4 (习题4.2.5). 设$\Omega := B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$, $u \in C^3(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$满足

$$\Delta u - 2u = 1 \quad \text{in } \Omega,\ \ u|_{\partial\Omega} = g(\boldsymbol{x}).$$

这里g是$\partial\Omega$上的连续函数，证明：存在常数$C > 0$使得$\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} |g| + C$.

提示：选取充分大的常数$\lambda > 0$, 使得$\Delta(u^2 + \lambda|\boldsymbol{x}|^2) \geqslant 0$.

证明. 先计算$\Delta(u^2)$. 对$1 \leqslant i \leqslant d$有$\partial_i(u^2) = 2u\partial_i u$, 故$\partial_i^2 u = 2u\partial_i^2 u + 2(\partial_i u)^2$. 对$i$求和得$\Delta(u^2) = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2$. 代入方程得到

$$\Delta(u^2) = 2|\nabla u|^2 + 4u^2 + 2u \geqslant 2|\nabla u|^2 + 4u^2 - u^2 - 1 = 2|\nabla u|^2 + 3u^2 - 1.$$

又因为$\Delta(|\boldsymbol{x}|^2) = 2d$, 所以令$v(\boldsymbol{x}) = u^2(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2d}|\boldsymbol{x}|^2$便有$\Delta v \geqslant 0$恒成立。据极大值原理得知

$$\max_{\overline{\Omega}} u^2 \leqslant \max_{\overline{\Omega}} v \leqslant \max_{\partial\Omega} g^2 + \frac{1}{2d}.$$

□

作业题 5 (习题4.2.6). 设$u \in C^3(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$是开集$\Omega$内的非负调和函数, 球$B(\boldsymbol{x}_0, R) \Subset \Omega$.证明：对任意$1 \leqslant i \leqslant d$有$|\partial_{x_i} u(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \dfrac{d}{R}u(\boldsymbol{x}_0)$.

证明. 由于u是调和函数，所以$\partial_i u$也是调和函数，对$\partial_i u$用平均值原理再分部积分得：对任意$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$有

$$\partial_i u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{\alpha d R^d}\int_{B(\boldsymbol{x}_0,R)} \partial_i u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\alpha(d)R^d}\int_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} uN_i\,\mathrm{d}S = \frac{d}{R}⨏_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} uN_i\,\mathrm{d}S.$$

现在利用$u \geqslant 0$得知

$$|\partial_i u(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \frac{d}{R}⨏_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} |u|\cdot|N|\,\mathrm{d}S = \frac{d}{R}⨏_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} u\,\mathrm{d}S.$$

最后用调和函数平均值原理得上述不等式右边等于$\frac{d}{R}u(\boldsymbol{x}_0)$. □

本题（以及讲义上的梯度估计）实际上可以把等式左边改成$|\nabla u(\boldsymbol{x}_0)|$. 事实上，我们直接考虑向量值的积分，仿照证明可得

$$\begin{aligned}\nabla u(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{d}{R}⨍_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} u(\boldsymbol{x})\vec{N}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \\ \Rightarrow |\nabla u(\boldsymbol{x}_0)| &\leqslant \frac{d}{R}⨍_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} |u(\boldsymbol{x})|\cdot\underbrace{|\vec{N}(\boldsymbol{x})|}_{=1}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \xlongequal{u\geqslant 0} \frac{d}{R}⨍_{\partial B(\boldsymbol{x}_0,R)} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.\end{aligned}$$

作业题 6 (习题4.2.8). 设u是$\mathbb{R}^d$中的调和函数。证明：若u满足以下两条件中任一个，则u是常数。

(1) $\exists$ 常数 $C>0, p>0$ 使得 $|u(\boldsymbol{x})|\leqslant C\left(\log(1+|\boldsymbol{x}|^p)+1\right)\ \ \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$.

(2) $\exists$ 常数 $C\in\mathbb{R}$, $u(\boldsymbol{x})\geqslant C\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$.

证明. (1) 任取一点$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$和$R>0$, 据梯度估计有

$$|\nabla u(\boldsymbol{x}_0)|\leqslant \frac{d}{R}\max_{B(\boldsymbol{x}_0,R)}|u|\leqslant \frac{Cd}{R}\left(\log(1+(|\boldsymbol{x}_0|+R)^p)+1\right).$$

令$R\to\infty$知上式右边趋于零，因此u的各个一阶偏导数皆为零，u就是常值函数。

(2) 令$v=u-C$, 则v是$\mathbb{R}^d$上的非负调和函数。由上一题结论得：对任意$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^d$, $R>0$有$|\partial_{x_i}v(\boldsymbol{x}_0)|\leqslant\dfrac{d}{R}v(\boldsymbol{x}_0)$. 令$R\to\infty$，右边趋于零，因此$v$的各个一阶偏导数皆为零，$v$就是常值函数，所以$u=v+C$也是常值函数。 □

作业题 7 (习题4.3.5). 设$u_i\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ $(i=1,2)$是如下方程的解

$$-\Delta u_i+c_i(\boldsymbol{x})u_i=0\quad \text{in }\Omega,\qquad u_i|_{\partial\Omega}=g_i(\boldsymbol{x}).$$

若$c_2(\boldsymbol{x})\geqslant c_1(\boldsymbol{x})\geqslant 0$和$g_1(\boldsymbol{x})\geqslant g_2(\boldsymbol{x})\geqslant 0$恒成立，证明：$u_1(\boldsymbol{x})\geqslant u_2(\boldsymbol{x})$在$\overline{\Omega}$上恒成立。

提示：先证明$u_i\geqslant 0$, 再考虑u_1-u_2满足的方程和边值条件。

证明. 第一步：证明 $u_i\geqslant 0$。 对每个 $i=1,2$，由于 $c_i\geqslant 0$ 且 $g_i\geqslant 0$，应用极大值原理即可（定理4.3.2），具体证明如下。假设 u_i 在 $\overline{\Omega}$ 上的最小值是负数，则最小值必在某个内点 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 处达到。在最小值点 $\boldsymbol{x}_0$ 处，有 $\Delta u_i(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$ 且 $u_i(\boldsymbol{x}_0)<0$。代入方程得

$$-\Delta u_i(\boldsymbol{x}_0)+c_i(\boldsymbol{x}_0)u_i(\boldsymbol{x}_0)<0,$$

这与方程 $-\Delta u_i+c_iu_i=0$ 矛盾。因此 u_i 的最小值非负，即$u_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, $\forall\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}$.

第二步：令 $w=u_1-u_2$。将两个方程相减得

$$-\Delta w+c_1 w=(c_2-c_1)u_2.$$

由条件 $c_2\geqslant c_1$ 和 $u_2\geqslant 0$ 知 $(c_2-c_1)u_2\geqslant 0$，从而$-\Delta w+c_1 w\geqslant 0$ $(\boldsymbol{x}\in\Omega)$, 边界条件为$w|_{\partial\Omega}=g_1-g_2\geqslant 0.$

第三步：证明 $w\geqslant 0$。再次对 $-\Delta w+c_1 w\geqslant 0$应用极大值原理（定理4.3.2，同第一步）可得 w 的最小值非负，即

$$w(x)=u_1(x)-u_2(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

这就完成了证明。 □

作业题 8 (习题5.2.1). 设$\Omega\subset\mathbb{R}^d$ $(d\geqslant 2)$是边界光滑的有界区域，定义$D:=\sup\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega\}$为$\Omega$的直径。记$\Phi(\boldsymbol{x})$为Laplace方程的基本解（见讲义上的定义3.3.1）。今固定$\boldsymbol{x}\in\Omega$, 证明：

(1) 格林函数$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$是唯一的，且满足$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}=-1$;

(2) 当 $d\geqslant 3$ 时, 对任意$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\Omega$有$0<G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$成立;

(3) 当 $d=2$ 时, 对任意$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\Omega$有$0<G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{D}$成立.

证明. (1) 由于基本解给定，所以只要证明$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$的唯一性。但现在给定$\boldsymbol{x}\in\Omega$的时候，$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$的边值也是给定的函数。又因为$\Omega$有界，所以由极大值原理知$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$唯一。然后设$u$是边值恒为1的调和函数，据上课讲的格林函数推导有

$$u(\boldsymbol{x})=-\int_{\partial\Omega}u(\boldsymbol{y})\frac{\partial G}{\partial N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}-\int_{\Omega}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Delta u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

由有界区域调和函数Dirichlet问题解的唯一性知$u\equiv 1$(因为这是解，所以只能是唯一解)，代入上式即得$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}=-1.$

(2)-(3) 我们先证明$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$. 据修正项$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$的定义知$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$是有界的。而另一方面我们知道$\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=+\infty$，这就表明 $\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=+\infty$, 因此存在$\varepsilon>0$使得$\boldsymbol{y}\in\overline{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$时恒有$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0.$

又因为我们在$\Omega\backslash\overline{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$中有$\Delta_{\boldsymbol{y}}G=0$以及边界条件 $G|_{\partial\Omega}=0$和$G|_{\partial B(\boldsymbol{x},\varepsilon)}>0$. 由**强极值原理**, 我们得到 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$ 在 $\Omega\backslash\overline{B(\boldsymbol{x},\varepsilon)}$ 恒成立.

然后再证不等式右边。对$d\geqslant 3$，我们只要证明$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})>0$在$\Omega$内恒成立：这由极大值原理即得（因为$\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$的边值是正的），进而$\min\limits_{\overline{\Omega}}\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\geqslant\min\limits_{\boldsymbol{y}\in\partial\Omega}\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})>0.$

对$d=2$，它等价于证明$-\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})<\frac{1}{2\pi}\ln D$在$\Omega$上成立，这可以由极大值原理证得。事实上我们有$\Delta(\frac{1}{2\pi}\ln D+\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}))=0$在$\Omega$上成立，且 $\frac{1}{2\pi}\ln D+\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi}\ln(\frac{D}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|})<0$在边界$\partial\Omega$上成立。据强极值原理得知$\frac{1}{2\pi}\ln D+\psi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})<0$在$\Omega$上成立. □

作业题 9 (习题5.2.3，球上的Harnack不等式). 设u是闭球$\overline{B(\mathbf{0},R)}\subset\mathbb{R}^d$上的非负调和函数。

(1) 结合讲义上的公式(5.2.9)证明

$$R^{d-2}\frac{R-|\boldsymbol{x}|}{(R+|\boldsymbol{x}|)^{d-1}}u(\mathbf{0})\leqslant u(\boldsymbol{x})\leqslant R^{d-2}\frac{R+|\boldsymbol{x}|}{(R-|\boldsymbol{x}|)^{d-1}}u(\mathbf{0})$$

(2) 用(1)证明：$\forall r\in(0,R)$, 成立不等式$\sup\limits_{B(\mathbf{0},r)}u\leqslant(\frac{R+r}{R-r})^d\inf\limits_{B(\mathbf{0},r)}u$.

证明. 据格林函数给出的表达式知道

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{d\alpha(d)R}\int_{\partial B(\mathbf{0},R)}\frac{u(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^d}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}=(R^2-|\boldsymbol{x}|^2)R^{d-2}⨍_{\partial B(\mathbf{0},R)}\frac{u(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^d}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}.$$

我们知道对任意$\boldsymbol{x}\in B(\mathbf{0},r)$, $r<R$以及任意$\boldsymbol{y}\in\partial B(\mathbf{0},R)$有

$$R-|\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant R+|\boldsymbol{x}|.$$

代入积分式放缩分母，再用调和函数平均值原理得知

$$R^{d-2}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{(R+|\boldsymbol{x}|)^d}u(\mathbf{0})\leqslant u(\boldsymbol{x})\leqslant R^{d-2}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{(R-|\boldsymbol{x}|)^d}u(\mathbf{0}).$$

(2) 设$\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\in B(\mathbf{0},r)$, 则有

$$u(\boldsymbol{x})\leqslant\frac{R^{d-2}(R+r)}{(R-r)^{d-1}}u(\mathbf{0})\leqslant\frac{R^{d-2}(R+r)}{(R-r)^{d-1}}\cdot u(\boldsymbol{z})\frac{(R+r)^{d+1}}{R^{d-2}(R-r)}=\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d u(\boldsymbol{z}).$$

其中第一个不等式是用(1)不等式右边得到，第二个不等式是用(1)不等式左边得到。 □

作业题 10 (问题4.1.1，选做). 习题4.1.4中，假设初值$u(0,x)=u_0(x)\in C^1([0,\pi])$且满足$u_0(0)=u_0(\pi)=0$，证明：存在常数$C>0$，使得对应的解满足$\sup\limits_{x\in[0,\pi]}|u(t,x)|\leqslant Ce^{-t}$.

提示：将$u_0(x)$与习题4.1.4(1)初值的常数倍相比较，这是本题假设初值C^1的原因所在。

注记 0.1. 本题是习题4.1.4的一般情况，其实对高维有界区域(边界充分光滑)也是对的。本质上该题做法是将给定的C^1初值与$(-\Delta)$算子的**第一特征值的特征函数**作比较，而这里要求C^1是因为要用Hopf引理(对一般维数而言)证明初值确实能被第一特征函数的常数倍从上下两侧界住。对一维情况，大家对$u_0(x)$(注意它的边值是0，且C^1**到边界**，进而边界附近一阶导数也是有界的)和$\sin x$分别在区间端点作泰勒展开就能看出来。

证明. 首先，由 $u_0 \in C^1([0,\pi])$ 及 $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$，可证存在常数 $M > 0$ 使得 $|u_0(x)| \leqslant M \sin x$ 对所有 $x \in [0,\pi]$ 成立。考虑函数

$$g(x) = \frac{u_0(x)}{\sin x}, \quad x \in (0,\pi).$$

在 $x = 0$ 处，据洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{u_0(x)}{\sin x} = \frac{u_0'(0)}{\cos 0} = u_0'(0).$$

故可定义 $g(0) = u_0'(0)$. 类似地在 $x = \pi$ 处，

$$\lim_{x\to \pi^-} g(x) = \lim_{x\to \pi^-} \frac{u_0(x)}{\sin x} = \frac{u_0'(\pi)}{\cos \pi} = -u_0'(\pi),$$

故定义 $g(\pi) = -u_0'(\pi)$. 由于 $u_0 \in C^1([0,\pi])$，g 在 $[0,\pi]$ 上连续，从而存在最大值和最小值。取 $M = \max_{x\in[0,\pi]} |g(x)|$，则 $|u_0(x)| \leqslant M \sin x$。

构造比较函数 $v(t,x) = Me^{-t}\sin x$。直接计算得$v_t = -Me^{-t}\sin x$, $v_{xx} = -Me^{-t}\sin x$. 故 $v_t - v_{xx} = 0$，且 $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$，$v(0,x) = M\sin x$。因此 v 是热方程的解。

由 $|u_0(x)| \leqslant M \sin x$，有$-M\sin x \leqslant u_0(x) \leqslant M\sin x$, 即 $-v(0,x) \leqslant u(0,x) \leqslant v(0,x)$。根据热方程的极大值原理（比较原理），对于所有 $t > 0$ 和 $x \in [0,\pi]$，成立 $-v(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant v(t,x)$, 亦即

$$|u(t,x)| \leqslant v(t,x) = Me^{-t}\sin x \leqslant Me^{-t}.$$

□