2025年秋季学期偏微分方程作业三

分离变量法

截止时间：2025年12月22日下课前

作业题1-8是必做题，作业题9选做。

作业题 1 (习题3.1.2). 考虑一维带阻尼的波动方程，其中常数$d \in (0,2)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + du_t = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi; \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

求该方程具有分离形式的解$u(t,x) = T(t)X(x)$, 并说明$t \to +\infty$时这些解的行为。

作业题 2 (习题3.1.5). 设A, B是常数，求解如下方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t,0) = At,\ \ u_x(t,\pi) = Bt & t \geq 0. \end{cases}$$

作业题 3 (习题3.1.6). 考虑具有固定端点且长度有限的弦发生的受迫振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x \cos 5x \sin(\omega t) & t > 0,\ x \in (0,\pi) \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\omega > 0$ 是常数。求解方程并讨论 ω 为何值时方程的解一致有界？即 $\sup\limits_{t>0, x\in(0,\pi)} |u(t,x)| < \infty$.

作业题 4 (习题3.2.3). 考虑具有Neumann边界条件的热传导方程，其中$k \ge 0$是常数

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = k(1-u) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0,x) = \varphi(x) & 0 \le x \le \pi \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \ge 0. \end{cases}$$

求解这个方程，并计算$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$.（提示：$k=0$和$k>0$答案不同。）

作业题 5 (习题3.2.5). 考虑如下热传导方程的初边值问题

$$u_t - u_{xx} = 0 \ t > 0, x \in (0,\pi); \quad u(0,x) = \varphi(x) \in C^2([0,\pi]) \ 0 \le x \le \pi; \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t \ge 0.$$

(1) 证明：方程的解满足估计$\int_0^\pi u(t,x)^2 \, \mathrm{d}x \le e^{-2t} \int_0^\pi \varphi(x)^2 \, \mathrm{d}x$.

(2) 证明：存在常数$C > 0$使得$|u(t,x)| \le Ce^{-t}$对任意$t > 0, x \in [0,\pi]$成立。

提示：无论使用能量法还是分离变量法，可能都需要使用Parseval恒等式；对(2)，思考为什么这里假设了$\varphi \in C^2([0,\pi])$，具有该光滑性的函数的傅立叶系数具有怎样的阶？

作业题 6 (习题3.3.1). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$是单位圆盘。求解方程$\Delta u = 2$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 2x_1x_2$.

作业题 7 (习题3.3.4). 证明方程$\Delta u = 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$的解是旋转不变的，即对$d \times d$正交方阵$\mathbf{O}$, 令$v(\boldsymbol{x}) := u(\mathbf{O}\boldsymbol{x})$, 则必有$\Delta v = 0$.

作业题 8 (习题3.4.6，Dirichlet原理). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是边界$C^1$的有界开集，给定函数$f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$, 定义能量泛函$I[w] := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 其中$w \in \mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{\Omega}) : w = g \text{ on } \partial\Omega\}$. 证明：$u$是$I[\cdot]$在$\mathcal{A}$上的极小化子(即$I[u] = \inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$, $u \in \mathcal{A}$)当且仅当u是位势方程的解

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \qquad u = g \text{ on } \partial\Omega.$$

提示：本题跟特征值理论没什么关系；令$j(\varepsilon) = I[u + \varepsilon v]$, 其中$v \in C_c^\infty(\Omega)$, 然后计算$j'(0) = 0$.

作业题 9 (选做). 考虑多孔介质流方程$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$, $(t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$. 其中假设$\gamma > 1$是常数，方程的解$u \ge 0$. 今假设方程的解具有变量分离形式$u(t,\boldsymbol{x}) = v(t)w(\boldsymbol{x})$ $(t \ge 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$.

(1) 证明：存在常数$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, 使得$v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

(2) 若$w(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^a$, 请计算$a$与$\gamma$之间应该满足怎样的关系式。

(3) 若将(1)中的λ取为正数，证明：对由(1), (2)求得的解$u(t,\boldsymbol{x})$, 存在时间$T_* < \infty$, 使得$u(t,\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x} \ne \mathbf{0}$, $t \to T_*$时发生爆破。