2025年秋季学期偏微分方程作业三讲义

分离变量法

2025 年 12 月 24 日

作业题1-8是必做题，作业题9选做。

作业题 1 (习题3.1.2). 考虑一维带阻尼的波动方程，其中常数$d \in (0,2)$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + du_t = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi; \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

求该方程具有分离形式的解$u(t,x) = T(t)X(x)$, 并说明$t \to +\infty$时这些解的行为。

证明. 设$u(t,x) = T(t)X(x)$，代入方程得：

$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) + dT'(t)X(x) = 0.$$

分离变量得：

$$\frac{T''(t) + dT'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

其中λ为常数。于是得到两个常微分方程：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + dT'(t) + \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

由边界条件$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$得$X(0) = X(\pi) = 0$。求解X的特征值问题：

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

解得特征值$\lambda_n = n^2$，特征函数$X_n(x) = \sin(nx)$，$n = 1, 2, 3, \dots$。

对每个n，解$T_n(t)$满足：

$$T_n'' + dT_n' + n^2 T_n = 0.$$

特征方程为$r^2+dr+n^2 = 0$，根为$r = \frac{-d\pm\sqrt{d^2-4n^2}}{2}$。由于$d \in (0,2)$且$n \geq 1$，有$d^2-4n^2 < 0$（当$n = 1$时，$d^2 < 4$成立），故两根为复根：

$$r = -\frac{d}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

因此，

$$T_n(t) = e^{-\frac{d}{2}t} \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right)$$

其中$\omega_n = \sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4}}$。于是分离变量形式的解为：

$$\boxed{u_n(t,x) = e^{-\frac{d}{2}t} \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right) \sin(nx).}$$

当$t \to +\infty$时，由于$e^{-\frac{d}{2}t}$衰减至零，故每个u_n均指数衰减到零。因此，所有分离变量解当$t \to +\infty$时趋于零。 □

作业题 2 (习题3.1.5). 设A, B是常数，求解如下方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0 & 0 \le x \le \pi \\ u_x(t,0) = At,\ \ u_x(t,\pi) = Bt & t \ge 0. \end{cases}$$

证明. 为将边界条件齐次化，构造一个函数 $v(t,x)$ 满足非齐次边界条件。取

$$v(t,x) = \frac{B-A}{2\pi} t x^2 + Atx.$$

令

$$w(t,x) = u(t,x) - v(t,x),$$

因此 w 满足：

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -v_{tt} + v_{xx} = \dfrac{B-A}{\pi} t, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = 0, \\ w(0,x) = 0,\ \ w_t(0,x) = -\left(\dfrac{B-A}{2\pi} x^2 + Ax\right). \end{cases}$$

求解 w 的定解问题。采用傅里叶余弦展开：

$$w(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(nx).$$

代入方程得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right) \cos(nx) = \frac{B-A}{\pi} t.$$

比较系数：当 $n = 0$ 时，$T_0''(t) = \dfrac{B-A}{\pi} t$；当 $n \ge 1$ 时，$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$。

初始条件：

$$w(0,x) = 0 \Rightarrow T_n(0) = 0, \quad \forall n \ge 0,$$

$$w_t(0,x) = -\frac{B-A}{2\pi} x^2 - Ax = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) \cos(nx).$$

计算余弦系数：

$$T_0'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{B-A}{2\pi} x^2 - Ax\right) dx = -\frac{\pi}{6}(B + 2A),$$

对于 $n \geq 1$

$$T_n'(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{B-A}{2\pi} x^2 - Ax \right) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} (A - B(-1)^n).$$

解常微分方程：

- 对于 $n = 0$：

$$T_0(t) = \frac{B-A}{6\pi} t^3 - \frac{\pi}{6}(B + 2A)t.$$

- 对于 $n \geq 1$：

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n^3}(A - B(-1)^n) \sin(nt).$$

因此，

$$w(t,x) = \left[\frac{B-A}{6\pi} t^3 - \frac{\pi}{6}(B+2A)t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^3}(A - B(-1)^n) \sin(nt) \cos(nx).$$

最终解为：

$$\boxed{u(t,x) = \frac{B-A}{2\pi} t x^2 + Atx + \frac{B-A}{6\pi} t^3 - \frac{\pi}{6}(B+2A)t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^3}(A - B(-1)^n) \sin(nt) \cos(nx).}$$

□

注记 0.1. 做此类边值非0的情形，应当首先将边值化为Dirichlet边值或者Neumann边值。这是因为虽然$\{\sin nx\}_{n\in\mathbf{N}}$和$\{\cos nx\}_{n\in\mathbf{N}}$ 构成$L^2[0,\pi]$的完备正交基，但是得到的傅立叶展开式并不一定是逐点收敛到原函数。

(Dirichlet 定理) 设函数$f(x)$以2π为周期。如果在任何有限区间上$f(x)$是分段可微的，那么它的傅立叶级数在整个数轴上都收敛，且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

（《数学分析讲义》（第二册）P261）

当我们对边值非0的情形做奇延拓或偶延拓后，就可能出现间断点。导致最后计算出的傅立叶级数只在区域内部收敛的解。但事实上如果我们将正确答案的所有项都进行傅里叶展开，就能得到直接傅里叶展开计算的结果。

注记 0.2. 如果利用分离变量法计算发现方程没解，不能说明方程没解，只能说明没有你所写的形式解。

作业题 3 (习题3.1.6). 考虑具有固定端点且长度有限的弦发生的受迫振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x \cos 5x \sin(\omega t) & t > 0,\ x \in (0, \pi) \\ u(0, x) = 0,\ u_t(0, x) = 0 & x \in [0, \pi] \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 $\omega > 0$ 是常数。求解方程并讨论 ω 为何值时方程的解一致有界？即 $\sup\limits_{t>0, x\in(0,\pi)} |u(t, x)| < \infty$.

证明. 边界条件为Neumann型，我们使用傅里叶余弦展开。设解为：

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(nx).$$

将非齐次项$\cos x \cos 5x \sin(\omega t)$也展开为余弦级数。利用积化和差（避免去计算其傅里叶级数展开）：

$$\cos x \cos 5x = \frac{1}{2}[\cos(6x) + \cos(4x)].$$

代入方程：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (T_n''(t) + n^2 T_n(t)) \cos(nx) = \frac{1}{2} \sin(\omega t) \cos(6x) + \frac{1}{2} \sin(\omega t) \cos(4x).$$

比较系数得：对于$n = 4$：$T_4''(t) + 16T_4(t) = \frac{1}{2}\sin(\omega t)$，对于$n = 6$：$T_6''(t) + 36T_6(t) = \frac{1}{2}\sin(\omega t)$，对于其他$n$：$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$。初始条件：$u(0, x) = 0 \Rightarrow T_n(0) = 0$；$u_t(0, x) = 0 \Rightarrow T_n'(0) = 0$。

对于$n \neq 4, 6$，方程齐次，初始条件为零，故$T_n(t) = 0$。

对于$n = 4$，解非齐次方程。若$\omega \neq 4$，

$$\boxed{T_4(t) = -\frac{\omega}{8(16 - \omega^2)} \sin(4t) + \frac{1}{2(16 - \omega^2)} \sin(\omega t).}$$

若$\omega = 4$，则发生共振。此时特解应设为$Ct\cos(4t)$或$Ct\sin(4t)$。设特解$Ct\cos(4t)$，代入确定常数。或者直接用公式。此时解无界，因为会出现t的线性项。

类似地，对于$n = 6$：若$\omega \neq 6$，则

$$\boxed{T_6(t) = -\frac{\omega}{12(36 - \omega^2)} \sin(6t) + \frac{1}{2(36 - \omega^2)} \sin(\omega t).}$$

若$\omega = 6$，则共振，解无界。

因此，解为：

$$\boxed{u(t,x) = T_4(t)\cos(4x) + T_6(t)\cos(6x).}$$

当$\omega \neq 4$且$\omega \neq 6$时，$T_4(t)$和$T_6(t)$均为有界的振荡函数，故$u(t,x)$一致有界。当$\omega = 4$或$\omega = 6$时，相应的$T_n(t)$含有随时间增长的无界项（如$t\cos(4t)$），故解无界。

所以，当$\omega \notin \{4, 6\}$时，解一致有界。 $\square$

作业题 4 (习题3.2.3). 考虑具有Neumann边界条件的热传导方程，其中$k \geq 0$是常数

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = k(1-u) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0,x) = \varphi(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

求解这个方程，并计算$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$.（提示：$k=0$和$k>0$答案不同。）

证明. 方程写为$u_t - u_{xx} + ku = k$。令$v(t,x) = u(t,x) - 1$，则v满足：

$$v_t - v_{xx} + kv = 0,$$

边界条件$v_x(t,0) = v_x(t,\pi) = 0$，初始条件$v(0,x) = \varphi(x) - 1$。

方程$v_t - v_{xx} + kv = 0$。分离变量$v(t,x) = T(t)X(x)$，得：

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - k = -\lambda,$$

即$X'' + (\lambda - k)X = 0$，$T' + \lambda T = 0$。边界条件$X'(0) = X'(\pi) = 0$。特征值问题：

$$X'' + \mu X = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

其中$\mu = \lambda - k$。解得$\mu_n = n^2$，$n = 0, 1, 2, \ldots$，特征函数$X_n(x) = \cos(nx)$。对应的$\lambda_n = n^2 + k$。于是

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n^2+k)t} \cos(nx),}$$

其中A_n为$\varphi(x)$的傅里叶余弦系数。

当$k = 0, t \to +\infty$时，$n \geq 1$项均指数衰减到零，故

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)dx.$$

当$k > 0, t \to +\infty$时，所有项均指数衰减到零（包括$n = 0$项，因为$k > 0$，$e^{-kt} \to 0$），故

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 1.$$

□

作业题 5 (习题3.2.5). 考虑如下热传导方程的初边值问题

$$u_t - u_{xx} = 0\ t > 0, x \in (0, \pi); \quad u(0, x) = \varphi(x) \in C^2([0, \pi])\ 0 \le x \le \pi; \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,\ t \ge 0.$$

(1) 证明：方程的解满足估计$\int_0^\pi u(t, x)^2\,\mathrm{d}x \le e^{-2t} \int_0^\pi \varphi(x)^2\,\mathrm{d}x$.

(2) 证明：存在常数$C > 0$使得$|u(t, x)| \le Ce^{-t}$对任意$t > 0, x \in [0, \pi]$成立。

提示：无论使用能量法还是分离变量法，可能都需要使用Parseval恒等式；对(2)，思考为什么这里假设了$\varphi \in C^2([0, \pi])$，具有该光滑性的函数的傅立叶系数具有怎样的阶？

证法一. (1) 使用分离变量法。方程在Dirichlet边界条件下，解可展开为：

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

其中$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx$。由Parseval恒等式，

$$\int_0^\pi u(t, x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 e^{-2n^2 t} \le \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 e^{-2t} = e^{-2t} \int_0^\pi \varphi(x)^2 dx,$$

因为$e^{-2n^2 t} \le e^{-2t}$（$n \ge 1$）。故得证。

(2) 由于$\varphi \in C^2([0, \pi])$且满足边界条件$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$（要求初始条件与边界条件相容）。更精确地，由分部积分，

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\varphi(x) \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos(nx) dx.$$

由于$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$，边界项为零。再次分部积分，

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n} \left[\frac{\varphi'(x) \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi \varphi''(x) \sin(nx) dx.$$

由于φ'在端点不一定为零，但$\sin(n\pi) = 0$，所以第一项为零。故

$$|a_n| \le \frac{2}{\pi n^2} \int_0^\pi |\varphi''(x)| dx \le \frac{C}{n^2}.$$

于是，

$$|u(t, x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-n^2 t} \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 t} \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-t}.$$

□

证法二. (1) 使用能量法。令$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^\pi u(t,x)^2\,\mathrm{d}x$。

$$E'(t)=\int_0^\pi uu_t dx=\int_0^\pi uu_{xx}=uu_x|_0^\pi-\int_0^\pi u_x^2 dx=-\int_0^\pi u_x^2 dx$$

由于$u_x=\sum_{n=1}^\infty a_n n e^{-n^2 t}\cos(nx)$

$$\int_0^\pi u_x^2 dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty a_n^2 n^2 e^{-2n^2 t}\geq\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty a_n^2 e^{-2n^2 t}=\int_0^\pi u^2 dx$$

（注意这个不等式其实是一维Poicaré不等式）因此

$$E'(t)\leq -2E(t)$$

由Gronwall不等式可得

$$E(t)\leq e^{-2t}E(0)$$

(2) 同证法一 □

注记 0.3. 对于Dirichlet边值，具有$C^k(k\leq 3)$光滑性的函数的傅立叶系数的阶为

$$|a_n|=O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

注意对于更高光滑性的的函数的傅立叶系数的阶不会再增加，原因同样是在对函数进行奇延拓后在边界点处的点的光滑性只有C^1。

注记 0.4. 设函数$f(x)$是定义在$[-\pi,\pi,]$的可微的函数。如果满足$f(-\pi)=f(\pi)$。那么其傅立叶级数就在$[-\pi,\pi,]$上绝对一致收敛于$f(x)$。

证明：由于$f'(x)$是连续函数，因此属于$L^2[-\pi,\pi]$。则有$(na_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$。

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|\right)^2\leq\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^\infty (na_n)^2\right)<\infty$$

因此如果初值仅仅为C^1函数，只要满足相容性条件，同样可以说明解满足指数衰减。

作业题 6 (习题3.3.1). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$是单位圆盘。求解方程$\Delta u = 2 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 2x_1x_2$。

证法一. 注意到$v = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ 是方程$\Delta u = 2 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 0$的解。

只需求解方程$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega,\ u|_{\partial\Omega} = 2x_1x_2$。由于区域是单位圆盘，我们采用极坐标：$x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$。边界条件变为：当$r = 1$时，$u = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta) =: h(\theta)$。

方程$\Delta u = 0$在极坐标下为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

我们利用分离变量法求得圆盘内的调和函数具有如下形式（见教材109页）

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

其中系数为

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi = 0 \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi = \delta_{2,n}$$

因此解为$u = r^2\sin 2\theta = 2x_1x_2$。

原方程的解为$u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_1x_2$。 □

证法二. 注意到$u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_1x_2$ 是方程的一个解。由方程解的唯一性可知$u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_1x_2$是方程的解。 □

作业题 7 (习题3.3.4). 证明方程$\Delta u = 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$的解是旋转不变的，即对$d \times d$正交方阵$\mathbf{O}$, 令$v(\boldsymbol{x}) := u(\mathbf{O}\boldsymbol{x})$, 则必有$\Delta v = 0$.

证明. 设$\mathbf{O} = (o_{ij})$为正交矩阵，即$\mathbf{O}^T\mathbf{O} = I$。记$\boldsymbol{y} = \mathbf{O}\boldsymbol{x}$，则$y_i = \sum_{j=1}^d o_{ij}x_j$。计算$v(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{y})$的拉普拉斯：

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial u}{\partial y_k} o_{kj}.$$

再次求导：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} o_{kj} = \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} o_{lj} o_{kj}.$$

于是

$$\Delta_x v = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^d \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} o_{lj} o_{kj} = \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} \sum_{j=1}^d o_{lj} o_{kj}.$$

由于$\mathbf{O}$正交，$\sum_{j=1}^d o_{lj}o_{kj} = \delta_{lk}$（克罗内克delta）。所以

$$\Delta_x v = \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}\delta_{lk} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = \Delta_y u = 0.$$

因此$\Delta v = 0$。 $\square$

作业题 8 (习题3.4.6，Dirichlet原理). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是边界$C^1$的有界开集，给定函数$f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$, 定义能量泛函$I[w] := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 其中$w \in \mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{\Omega}) : w = g \text{ on } \partial\Omega\}$. 证明：$u$是$I[\cdot]$在$\mathcal{A}$上的极小化子(即$I[u] = \inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$, $u \in \mathcal{A}$)当且仅当u是位势方程的解

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \qquad u = g \text{ on } \partial\Omega.$$

提示：本题跟特征值理论没什么关系；令$j(\varepsilon) = I[u + \varepsilon v]$, 其中$v \in C_c^\infty(\Omega)$, 然后计算$j'(0) = 0$.

证明. （必要性）设u是I在$\mathcal{A}$上的极小化子。对任意$v \in C_c^\infty(\Omega)$，考虑$j(\varepsilon) = I[u + \varepsilon v]$。由于$v$在边界为零，$u + \varepsilon v \in \mathcal{A}$。则

$$j(\varepsilon) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u + \varepsilon \nabla v|^2 - (u + \varepsilon v) f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

计算导数：

$$j'(\varepsilon) = \int_\Omega (\nabla u + \varepsilon \nabla v) \cdot \nabla v - vf \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令$\varepsilon = 0$得：

$$j'(0) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - vf \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

由散度定理（或分部积分），

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v \Delta u \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S.$$

由于$v \in C_c^\infty(\Omega)$，边界项为零。所以

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f) v \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由v的任意性，得$-\Delta u = f$在Ω内。又因为$u \in \mathcal{A}$，所以$u = g$在$\partial\Omega$上。故u是位势方程的解。

（充分性）设u满足$-\Delta u = f$在Ω内，且$u = g$在$\partial\Omega$上。对任意$w \in \mathcal{A}$，令$v = w - u$，则$v \in C^2(\overline{\Omega})$且$v = 0$在$\partial\Omega$上。计算$I[w]$与$I[u]$的差：

$$I[w] - I[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) - \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

注意到

$$|\nabla w|^2 = |\nabla u + \nabla v|^2 = |\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v + |\nabla v|^2.$$

所以

$$
\begin{aligned}
I[w]-I[u] &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla u|^2+2\nabla u\cdot\nabla v+|\nabla v|^2)-(u+v)f-\frac{1}{2}|\nabla u|^2+uf\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&= \int_\Omega \left(\nabla u\cdot\nabla v+\frac{1}{2}|\nabla v|^2-vf\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

由散度定理，

$$
\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=-\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},
$$

因为v在边界为零。又$-\Delta u=f$，所以$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega vf\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。于是

$$
I[w]-I[u]=\int_\Omega\left(vf+\frac{1}{2}|\nabla v|^2-vf\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ge 0.
$$

因此$I[w]\ge I[u]$，即u是极小化子。 □

注记 0.5. 这里默认$\mathcal{A}$不是空集。

注记 0.6. 有些同学可能不太理解为什么对任意$v\in C_c^\infty(\Omega)$，有$0=\int_\Omega(-\Delta u-f)v\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$就可以说明$-\Delta u-f=0$。首先需要知道如下光滑紧支撑函数$\eta$

$$
\eta(x)=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{\|x-x_0\|^2-r^2}\right) & x\in B(x_0,r)\\ 0 & x\in\Omega\setminus B(x_0,r)\end{cases}
$$

注记 0.7. 细心的同学可以发现$\mathcal{A}$的定义其实可以修改为$\{w\in C^1(\overline{\Omega}):w=g\text{ on }\partial\Omega\}$。在这个集合中同样可以良好得定义泛函$I[u]$。所以如果

$$
-\Delta u=f\ \text{ in }\Omega\qquad u=g\text{ on }\partial\Omega.
$$

在C^2中没有解，而利用本题同样的方式在$\{w\in C^1(\overline{\Omega}):w=g\text{ on }\partial\Omega\}$中找到了一个解，那么这个解是什么呢？这一点可以解释为什么后来偏微分方程领域开始寻找“弱解”，而不再是光滑的经典解。

作业题 9 (选做). 考虑多孔介质流方程$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$, $(t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$. 其中假设$\gamma > 1$是常数，方程的解$u \geq 0$. 今假设方程的解具有变量分离形式$u(t, \boldsymbol{x}) = v(t)w(\boldsymbol{x})$ $(t \geq 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d)$.

(1) 证明：存在常数$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, 使得$v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

(2) 若$w(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^a$, 请计算$a$与$\gamma$之间应该满足怎样的关系式。

(3) 若将(1)中的λ取为正数，证明：对由(1), (2)求得的解$u(t, \boldsymbol{x})$, 存在时间$T_* < \infty$, 使得$u(t, \boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $t \to T_*$时发生爆破。

证明. (1) 将$u(t, \boldsymbol{x}) = v(t)w(\boldsymbol{x})$代入方程$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$。计算：

$$\partial_t u = v'(t)w(\boldsymbol{x}), \quad u^\gamma = v(t)^\gamma w(\boldsymbol{x})^\gamma.$$

所以

$$\Delta(u^\gamma) = v(t)^\gamma \Delta(w^\gamma).$$

方程变为：

$$v'(t)w(\boldsymbol{x}) - v(t)^\gamma \Delta(w^\gamma(\boldsymbol{x})) = 0.$$

分离变量得：

$$\frac{v'(t)}{v(t)^\gamma} = \frac{\Delta(w^\gamma(\boldsymbol{x}))}{w(\boldsymbol{x})} = \mu,$$

其中μ为常数（与$t, \boldsymbol{x}$无关）。于是得到两个方程：

$$v'(t) = \mu v(t)^\gamma, \tag{1}$$

$$\Delta(w^\gamma(\boldsymbol{x})) = \mu w(\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

解(1)：这是常微分方程，分离变量：

$$\frac{dv}{v^\gamma} = \mu dt.$$

积分得：

$$\frac{1}{1-\gamma} v^{1-\gamma} = \mu t + C,$$

即

$$v(t)^{1-\gamma} = (1-\gamma)(\mu t + C).$$

记$\lambda = (1-\gamma)C$，则

$$\boxed{v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}}.$$

(2) 设$w(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^a$，计算$\Delta(w^\gamma)$。首先$w^\gamma = |\boldsymbol{x}|^{a\gamma}$。在极坐标下，$\Delta(r^{a\gamma}) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{d-1}\frac{d}{dr}r^{a\gamma}\right)$。计算：

$$\frac{d}{dr}r^{a\gamma} = a\gamma r^{a\gamma-1},$$

$$r^{d-1}\frac{d}{dr}r^{a\gamma} = a\gamma r^{d-1+a\gamma-1} = a\gamma r^{d+a\gamma-2},$$

$$\frac{d}{dr}\left(a\gamma r^{d+a\gamma-2}\right) = a\gamma(d+a\gamma-2)r^{d+a\gamma-3},$$

所以

$$\Delta(w^\gamma) = a\gamma(d+a\gamma-2)r^{d+a\gamma-3}\cdot\frac{1}{r^{d-1}} = a\gamma(d+a\gamma-2)r^{a\gamma-2}.$$

而$w(\boldsymbol{x}) = r^a$，故方程(2)变为：

$$a\gamma(d+a\gamma-2)r^{a\gamma-2} = \mu r^a.$$

比较指数得：$a\gamma - 2 = a$，即$a(\gamma-1) = 2$，所以

$$\boxed{a = \frac{2}{\gamma-1}.}$$

此时系数满足：

$$a\gamma(d+a\gamma-2) = \mu.$$

将a代入：$a\gamma = \frac{2\gamma}{\gamma-1}$，且

$$d + a\gamma - 2 = d + \frac{2\gamma}{\gamma-1} - 2 = d - 2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}.$$

所以

$$\boxed{\mu = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(d - 2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\right).}$$

(3) 取$\lambda > 0$，则

$$v(t) = ((1-\gamma)\mu t + \lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

由于$\gamma > 1$，$1-\gamma < 0$，所以当$(1-\gamma)\mu t + \lambda \to 0^+$时，$v(t) \to +\infty$。令

$$T_* = \frac{\lambda}{(\gamma-1)\mu} \quad (\text{因为 } (1-\gamma)\mu = -(\gamma-1)\mu),$$

则当$t \to T_*^-$时，$(1-\gamma)\mu t + \lambda = (\gamma-1)\mu(T_* - t) \to 0^+$，从而$v(t) \to +\infty$。对于$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，$w(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^a$有限，所以$u(t,\boldsymbol{x}) = v(t)w(\boldsymbol{x}) \to +\infty$，即发生爆破。 □