2025年秋季学期偏微分方程作业二

截止时间：2025年12月8日下课前

作业题1-6是必做题，作业题7-8选做。所有作业中的选做题、以及讲义上没布置的“问题”在本课程中都不作要求。

作业题 1 (习题2.4.2). 本题考虑半平面内的调和函数求解。

(1) 给定$y>0$, 计算$F_y(\xi)=e^{-|\xi|y}$关于频率变量$\xi\in\mathbb{R}$的傅立叶逆变换。

(2) 计算如下边值问题<u>有界解</u>的显式表达式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x\in\mathbb{R},\ y>0,\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

其中$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$是给定的。

(3) 证明：对任意$y>0$有$\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$.

作业题 2 (习题2.4.3, Cole-Hopf变换). 设$a>0, b\in\mathbb{R}$是给定的常数，求解如下拟线性热方程。

$$\begin{cases} \partial_t u-a^2\Delta u+b|\nabla u|^2=0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}) & t=0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

提示：考虑$v=e^{-\frac{bu}{a^2}}$满足的方程。

作业题 3 (习题2.4.4). 求解如下粘性Burgers方程

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+uu_x=0 & t>0,\ x\in\mathbb{R}\\ u(0,x)=\varphi(x) & t=0,\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

这里$a\in\mathbb{R}$是给定的常数。（提示：考虑$v(t,x)=\int_{-\infty}^x u(t,y)\,\mathrm{d}y$满足的方程。）

作业题 4 (习题2.4.8). 考虑齐次热传导方程的初值问题

$$\partial_t u - k\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \qquad u(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

设初值$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 由泊松公式给出的解为$u(t,\boldsymbol{x})$.

(1) 证明：存在常数$C > 0$, 使得$|u(t,\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x})| \leqslant C\sqrt{kt}$对任意$t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$成立。

(2) 证明：存在常数$C > 0$, 使得$\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant C t^{-\frac{d}{4}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$对任意$t > 0$成立。

提示：(1) 注意$\int_{\mathbb{R}^d} K(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = 1$, 将$\varphi(\boldsymbol{x})$写作$\int_{\mathbb{R}^d} K(t,\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. (2) 将$u$写成$(\hat{u})^\vee$然后用傅立叶逆变换的定义得到$|u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(t,\boldsymbol{\xi})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, 代入$\hat{u}(t,\boldsymbol{\xi})$的表达式后用Cauchy-Schwarz不等式。

作业题 5 (问题C.1.2). 给定点$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^d$ 以及函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 证明如下海森堡不确定性原理：

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0)\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) \geqslant \frac{d^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2. \tag{0.1}$$

这个不等式表明动量和位置不可能在给定的动量$\boldsymbol{\xi}_0$和给定的位置ξ_0附近被同时确定。

提示：只需证明$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$的情况即可，否则考虑$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}_0}$并利用命题C.1.3(2)约化到这一特殊情况。利用Plancherel恒等式可得 $|\boldsymbol{\xi}\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 = |\widehat{\nabla f}(\boldsymbol{\xi})|^2$，之后再用Plancherel恒等式和Cauchy-Schwarz不等式证明左边$\geqslant (\int_{\mathbb{R}^d} |(\boldsymbol{x}\cdot\nabla f)f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2$, 最后用$(\nabla f)f = \frac{1}{2}\nabla(f^2)$, 然后分部积分一次。

作业题 6 (问题2.4.2). 设$\Omega \subset \mathbb{R}^d$是有界区域且边界光滑，$u(t,\boldsymbol{x}) \in C_1^2((0,\infty)\times\Omega) \cap C([0,\infty)\times\overline{\Omega})$是如下方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} \\ u = 0 & t \geqslant 0,\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$给定。证明：存在常数$a > 0$（仅和区域本身有关）使得

$$\int_\Omega (u(t,\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant e^{-at}\int_\Omega (u_0(\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：对有界区域Ω, 若$f|_{\partial\Omega} = 0$, 则必存在常数$C > 0$使得$\int_\Omega f^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant C\int_\Omega |\nabla f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 思考如何利用类似于“微积分基本定理”的想法去证明这个事实。

作业题 7 (习题2.5.1，选做). 考虑$\mathbb{R}^d$中的Klein-Gordon方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0 & t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \\ u(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}),\ \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

其中 $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(1) 定义能量 $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 + m^2 u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明：$E(t)$是守恒量。

(2) 用$\hat{\varphi}$和$\hat{\psi}$写出解的傅立叶变换$\hat{u}(\boldsymbol{\xi})$的表达式。

(3) 证明：$\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + m^2 u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = E(0)$，进而该方程也有能量渐近均分原理

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + m^2 u^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

提示：本题基本可如法炮制波动方程的证明，但请思考如何正确使用Riemann-Lebesgue引理。

作业题 8 (问题C.1.7，选做，L^∞空间的Sobolev嵌入定理). 对$s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 我们定义范数$\|f\|_s := \|\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, 其中$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle := \sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}$. 今假设$s > \frac{d}{2}$, 证明：

(1) 存在常数$C > 0$使得对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$成立$\max\limits_{\mathbb{R}^d} |f| \leqslant C\|f\|_s$.

(2) 存在常数$C > 0$使得对任意$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$成立$\|fg\|_s \leqslant C\|f\|_s\|g\|_s$.

提示：(1)将f写成$f = (\hat{f})^\vee$并用傅立叶逆变换的定义写成积分，然后乘以$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s$和$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s}$, 然后利用$s > \frac{d}{2}$得出$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^{-s} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 用Cauchy-Schwarz不等式即得。(2) 注意到$\widehat{fg} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}(\hat{f} * \hat{g})$, 把卷积写成积分式并利用$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^s \leqslant C(\langle\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}\rangle^s + \langle\boldsymbol{\eta}\rangle^s)$即可。