第二次习题课

助教: 周芾

2025 年 12 月 10 日

1 作业题

作业题 1. 本题考虑半平面内的调和函数求解.

(1) 给定 $y>0$, 计算 $F_y(\xi)=e^{-|\xi|y}$ 关于频率变量 $\xi\in\mathbb{R}$ 的傅立叶逆变换.

(2) 计算如下边值问题有界解 的显式表达式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x\in\mathbb{R},\ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是给定的.

(3) 证明: 对任意 $y>0$ 有 $\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明. 这个题应该更明确的指出解 $u\in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))\cap C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ 且有界, 不然会陷入复杂的细节.

(1). 刘党政老师指出其实这里的 Fourier 变换应该用围道积分计算的, 去考虑一个扇形围道然后圆弧上的积分取极限后为 0, 但是数分书上也有用欧拉公式展开成三角函数然后积分的办法. 不过无论如何, 我们这里当成常规的积分来做就行了. 直接计算如下

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(F_y(\cdot))&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac12}}\int_{\mathbb{R}}e^{-|\xi|y}e^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{(2\pi)^{\frac12}}\left[\int_0^\infty e^{-\xi(y-\mathrm{i}x)}\,\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^0 e^{\xi(y+\mathrm{i}x)}\,\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac12}}\left(\frac{1}{y-\mathrm{i}x}+\frac{1}{y+\mathrm{i}x}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

(2). 对变量 x 做 Fourier 变换, 得到新的方程为

$$\begin{cases} \hat{u}_{yy}-\xi^2\hat{u}=0 & \xi\in\mathbb{R},\ y>0, \\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi) & \xi\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

这里解 ODE 能得到通解为 $\hat{u}(\xi,y)=C_1e^{|\xi|y}+C_2e^{-|\xi|y}$, 但是由于我们要求有界解, 我们的解应形如 $\hat{u}=C_\xi e^{-|\xi|y}$. 带入初值得 $\hat{u}(\xi,y)=\hat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|y}$, 求 Fourier 逆变换为

$$u(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\varphi*\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(\cdot)^2+y^2}\right)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t.$$

(3). 直接计算如下, 交换次序即可.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u(x,y)|\,\mathrm{d}x&\le\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&\overset{\text{Fubini}}{=\!=}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\le\int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

作业题 2. *设 $a>0,b\in\mathbb{R}$ 是给定的常数, 求解如下拟线性热方程.*

$$\begin{cases}\partial_t u-a^2\Delta u+b|\nabla u|^2=0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\\ u(0,\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}) & t=0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.\end{cases}$$

证明. 很多同学没有说 $b=0$ 的情况, 不过我们这里默认 $b\neq0$ 好了.

设 $v=e^{-\frac{b}{a^2}u}$, 也即 $u=-\frac{a^2}{b}\log(v)$. 这种时候我们直接考虑对 $u=u(v)$ 求导, 然后看其满足的方程. 求导得到

$$u_t=-\frac{a^2}{b}\frac{v_t}{v},\ \nabla u=-\frac{a^2}{b}\frac{\nabla v}{v},\ \Delta u=-\frac{a^2}{b}\frac{v\Delta v-|\nabla v|^2}{v^2}.$$

带回 u 满足的方程, 得到关于 v 的热方程

$$\begin{cases}v_t-a^2\Delta v=0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\\ v(0,\boldsymbol{x})=e^{-\frac{b}{a^2}u} & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.\end{cases}$$

由讲义中 Poisson 公式, 我们得到解为

$$v(t,x)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}v_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

这里 $v_0=e^{-\frac{a^2}{b}u_0}$. 最后再取对数得到我们原本方程的解, 也即

$$u(t,x)=-\frac{a^2}{b}\log\left(\frac{1}{(4\pi a^2t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}v_0(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

□

作业题 3. *求解如下粘性 Burgers 方程*

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + u u_x = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x) & t = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

这里 $a \in \mathbb{R}$ 是给定的常数.

证明. 题目应该忘了提一些基本的正则性要求, 不过我们姑且默认有好的正则性. 同时也假设 $a \neq 0$, 因为说的是粘性 Burgers 方程.

按提示, 我们设

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{x} u(t,y)\,\mathrm{d}y.$$

这里我们直接计算 v_t, 因此有

$$v_t(t,x) = \int_{-\infty}^{x} u_t(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} (a^2 u_{xx} - u u_x)\,\mathrm{d}y = a^2 v_{xx}(t,x) - \frac{1}{2} v_x^2(t,x).$$

这就是上一题中的方程, 其中 $b = \frac{1}{2}$. 带入上一题的结论, 我们有

$$v(t,x) = -2a^2 \log\left(\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|}{4a^2 t}} v_0(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

最后再带入 $u = v_x$ 就能得到答案. □

作业题 4. *考虑齐次热传导方程的初值问题*

$$\partial_t u - k\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \qquad u(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

设初值 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 由泊松公式给出的解为 $u(t,\boldsymbol{x})$.

(1) 证明: 存在常数 $C > 0$, 使得 $|u(t,\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x})| \leqslant C\sqrt{kt}$ 对任意 $t > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ 成立.

(2) 证明: 存在常数 $C > 0$, 使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |u(t,\boldsymbol{x})| \leqslant Ct^{-\frac{d}{4}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ 对任意 $t > 0$ 成立.

证明. 这种积分估计是很经典的, 同学们务必掌握, 类似的思想在后续的分析学中都是极为常见的.

(1). 首先我们知道解具有如下形式

$$u(t,\boldsymbol{x}) = (\varphi * K(t,\cdot))(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) K(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

以及

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) K(t,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

因此做差为

$$
\begin{aligned}
|u(t,\boldsymbol{x})-\varphi(x)| &= \int_{\mathbb{R}^d} K(t,y)(\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\varphi(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} K(t,\boldsymbol{y})|\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\varphi(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} K(t,\boldsymbol{y})\max|\nabla\varphi||\boldsymbol{y}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \quad (\text{中值定理}) \\
&\le M\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi kd)^{\frac{d}{2}}}\mathbf{e}^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4kt}}|\boldsymbol{y}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= C\sqrt{kt}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{e}^{-|\boldsymbol{z}|^2}|\boldsymbol{z}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} \quad (\text{变量替换 } \boldsymbol{y}=(4\pi kt)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{z}) \\
&= C\sqrt{kt}.
\end{aligned}
$$

(2). 这里的估计方法是用 Fourier 变换.

$$
\begin{aligned}
|u(t,\boldsymbol{x})| &= \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}(t,\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\boldsymbol{x}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right| \\
&\le C\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{u}|\mathrm{d}\xi \le C\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{\varphi}|\mathbf{e}^{-k|\xi|^2t}\mathrm{d}\xi \\
&\le C||\hat{\varphi}||_{L^2}||\mathbf{e}^{-k|\xi|^2t}||_{L^2} = Ct^{-\frac{d}{4}}||\varphi||_{L^2}
\end{aligned}
$$

最后一步使用了 Plancherl 定理. □

作业题 5. 给定点 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\xi}_0\in\mathbb{R}^d$ 以及函数 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 证明如下海森堡不确定性原理:

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^d}|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0)\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\right) \geqslant \frac{d^2}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2. \tag{1}
$$

这个不等式表明动量和位置不可能在给定的动量 $\boldsymbol{\xi}_0$ 和给定的位置 ξ_0 附近被同时确定.

证明. 由提示, 我们只要估计 $\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$ 的情况. 这里的系数是给定的, 因此我们进行相对仔细的计算

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{\nabla f}|^2\mathrm{d}\xi\right) \\
&\ge \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla f|^2\mathrm{d}\xi\right) \\
&\ge \left|\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}||f||\nabla f|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|^2 \\
&\ge \left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla|f|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|f|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

最后一步用了散度定理, 注意 $\nabla\cdot(|f|^2\boldsymbol{x}) = d|f|^2 + \boldsymbol{x}\cdot\nabla|f|^2$, 因此积分后边界项为 0.

这个题目不少同学在做的时候默认这里的函数是实值函数, 但是海森堡不确定性原理其实是在说波函数的事, 自然应该去考虑复值函数. 不过做题本身倒不影响了. □

作业题 6. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是有界区域且边界光滑, $u(t,\boldsymbol{x})\in C_1^2((0,\infty)\times\Omega)\cap C([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ 是如下方程的解

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega\\ u(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}\\ u=0 & t\geqslant 0,\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $u_0\in C^2(\overline{\Omega})$ 给定。证明：存在常数 $a>0$（仅和区域本身有关）使得

$$\int_\Omega (u(t,\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant e^{-at}\int_\Omega (u_0(\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明. 我们首先承认如下的零边值型 Poincare 不等式

$$||u||_{L^2}\le C||\nabla u||_{L^2}.$$

这里的常数 C 和区域有关.

用热方程的能量估计方法, 我们在方程两边同时乘上 u 然后积分有

$$\int_\Omega uu_t-u\Delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

移项并使用 Poincare 不等式有 (其中系数 a 是整理出来的一个关于 C 的表达式)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\le -a\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由 Gronwall 不等式, 我们得到

$$\int_\Omega (u(t,\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant e^{-at}\int_\Omega (u_0(\boldsymbol{x}))^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在我们来解释这个 Poincare 不等式的原因, 为了突出思想, 我们仅考虑二维的情形. 对于二维有界区域, 我们总能将其写为如下集合

$$\Omega=\{(x,y):x\in I,\ \phi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

这里 I 是 x 的定义域. 这时我们可以计算如下

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=\int_I\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}u^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&\le\int_I C_{\phi(x),\psi(x)}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}(u)_x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&\le C\int_I\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}(\nabla u)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=C\int_\Omega(\nabla u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这里关于常数 C 的计算是因为, 带下标的 C 是关于边界长度 (参考一维的情况, 这里的常数是区间长度的 $p=2$ 次方) 的一个函数, 而这里我们假设了边界光滑 (因此可求长), 所以能化归为一个和边界相关的常数. 从这里的讲法我们也可以看出, 这里的边界是可以考虑 Lipschitz 边界的, 这个内容在实分析中可以学到. □

作业题 7. 考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的 *Klein-Gordon* 方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0 & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d \\ u(0,\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}),\ \partial_t u(0,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \end{cases}$$

其中 $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(1) 定义能量 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2+|\nabla u|^2+m^2u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 证明: $E(t)$ 是守恒量.

(2) 用 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\psi}$ 写出解的傅立叶变换 $\hat{u}(\boldsymbol{\xi})$ 的表达式.

(3) 证明: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2+m^2u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=E(0)$, 进而该方程也有能量渐近均分原理

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2+m^2u^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明. (1). 上课可能会提到能量中有动能项和势能项, 这个确实是物理解释, 但是同学们要注意灵活应用. 一般来说波方程的能量是去乘一个 u_t 然后分部积分做的, 初学的话可以多练习一下计算.

直接计算能量的时间导数如下,

$$\begin{aligned} E_t &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t u_{tt} + \nabla u\cdot\nabla u_t + m^2 u u_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t\Delta u + \nabla u\cdot\nabla u_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\cdot(u_t\nabla u)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned}$$

因此能量守恒.

(2). 这个计算是标准的, 对 $\boldsymbol{x}$ 做 Fourier 变换, 得到二阶 ODE 如下

$$\hat{u}_{tt}+(|\xi|^2+m^2)\hat{u}=0.$$

因此解具有形式

$$\hat{u}(t,\xi)=C_1\cos(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t+C_2\sin(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t.$$

带入初值为

$$\hat{u}(t,\xi)=\hat{\varphi}(\xi)\cos(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t+\frac{\hat{\psi}(\xi)}{(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}\sin(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t.$$

(3). 在计算中我们会自然地希望如下式子成立, 其形式类似于 Riemann-Lebesgue 引理.

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\cos(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}\xi=\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\sin(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}\xi=0.$$

上面的函数 $f\in\mathcal{S}$. 我们先承认这个式子, 然后进行计算. 对待证明的式子使用 Plancherel 定理, 我们只要证明

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\xi\hat{u}|^2+|m\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi\to\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{\psi}|^2+(|\xi|^2+m^2)|\hat{\varphi}|^2\mathrm{d}\xi.$$

这里的计算展示如下

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}=&\int_{\mathbb{R}^d}\xi^2\hat{\varphi}^2\cos^2(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t+\frac{\hat{\psi}^2\xi^2}{|\xi|^2+m^2}\sin^2(|\xi|^2+m^2)t+\frac{\xi\hat{\varphi}\hat{\psi}}{|\xi|^2+m^2}\sin 2(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\,\mathrm{d}\xi\\&+\int_{\mathbb{R}^d}m^2\hat{\varphi}^2\cos^2(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t+\frac{\hat{\psi}^2m^2}{|\xi|^2+m^2}\sin^2(|\xi|^2+m^2)t+\frac{m\hat{\varphi}\hat{\psi}}{2(|\xi|^2+m^2)}\sin 2(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}(|\xi|^2+m^2)\hat{\varphi}^2+|\hat{\psi}|^2+(\text{一大坨带着 }\sin(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\text{ 和 }\cos(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\text{ 的积分})\end{aligned}$$

这里就能看到, 如果这个引理真的成立, 那么我们的证明就结束了.

现在来看上述引理成立的原因. 注意到函数 $f\in\mathcal{S}$, 我们首先使用极坐标换元, 将问题转化为 1 维.

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} f\cos(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\,\mathrm{d}\xi=\int_0^\infty\int_{S_r} f(r\omega)\sin(|r|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^\infty\sin(|r|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\,\mathrm{d}r\int_{S_r} f(r\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

这里的球面积分得到一个关于只关于 r 的径向函数 $F(r)=\int_{S_r} f(r\omega)\mathrm{d}\omega$, 并且由于 $f\in\mathcal{S}$, 这里的 F 是一个有界的 L^1 函数.

我们相信这个式子和原本的 Riemann-Lebesgue 引理是有关系的, 因此我们进行积分换元, 这里不妨设 $m=1$, 这样我们的记号可以简洁一些.

令 $\zeta=\langle\xi\rangle$, 那么有

$$\int_0^\infty f\sin(|\xi|^2+1)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}\xi=\int_1^\infty f\sin\zeta t\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\mathrm{d}\zeta.$$

注意到积分在 $\zeta=1$ 附近有奇性, 我们做截断, 在其附近分析. 事实上, 由于 f 和三角函数本身的有界性, 我们只要看奇性部分的上界.

$$\int_1^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-1}}\mathrm{d}\zeta=\int_1^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{(\zeta+1)(\zeta-1)}}\mathrm{d}\zeta\le\int_1^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2(\zeta-1)}}\mathrm{d}\zeta=\sqrt{2\varepsilon}.$$

因此, 我们实际得到了

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\sin(|\xi|^2+m^2)^{\frac{1}{2}}t\mathrm{d}\xi\le M\sqrt{\varepsilon}.$$

这里的常数 M 来自函数 f 在 1 附近的有界性. 这里我们令 $\varepsilon\to 0$ 就得到了想要的式子. □

作业题 8. 对 $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义范数 $\|f\|_s := \|\langle \boldsymbol{\xi} \rangle^s \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, 其中 $\langle \boldsymbol{\xi} \rangle := \sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}$. 今假设 $s > \frac{d}{2}$, 证明:

(1) 存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 成立 $\max\limits_{\mathbb{R}^d} |f| \leqslant C\|f\|_s$.

(2) 存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 成立 $\|fg\|_s \leqslant C\|f\|_s\|g\|_s$.

证明. 出于记号习惯, 以下用下标 H^s 代替下标 s, 这里的 H^s 是非齐次 Sobolev 空间, 是 PDE 中的常见术语.

(1). 这里我们用到一个思想, 将逐点估计转化成积分估计, 这个想法在调和函数的估计中会大量使用.

我们进行如下计算

$$
\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x})| &\le \left| \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-s} \langle \xi \rangle^{s} |\hat{f}| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
&\le ||\langle \xi \rangle^{-s}||_{L^2} ||\langle \xi \rangle^{s} \hat{f}||_{L^2} \le C||f||_{H^s}.
\end{aligned}
$$

这里的常数实际上来自积分 $||\langle \xi \rangle^{-s}||_{L^2}$ 的计算, 这个积分的计算要用到极坐标换元公式, 积分收敛的条件正是 $s > \frac{d}{2}$, 希望同学们自己去算一下.

(2). 首先我们有 $\langle \xi \rangle^s \le C(\langle \eta \rangle^s + \langle \xi - \eta \rangle^s)$, 这个是因为 Jensen 不等式, 我们可以直接计算凸性. 接下来我们用这个结果进行计算

$$
\begin{aligned}
||fg||_{H^s} &= ||\langle \xi \rangle^s \widehat{fg}||_{L^2} \le C||\langle \xi \rangle^s \hat{f} * \hat{g}(\xi)||_{L^2_\xi} \\
&\le C \left|\left| \int_{\mathbb{R}^d} (\langle \eta \rangle^s + \langle \xi - \eta \rangle^s) \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi - \eta) \mathrm{d}\eta \right|\right|_{L^2_\xi} \\
&\le C \left|\left| \int_{\mathbb{R}^d} \langle \eta \rangle^s \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi - \eta) \mathrm{d}\eta \right|\right| + C \left|\left| \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi - \eta \rangle^s \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi - \eta) \mathrm{d}\eta \right|\right| \\
&\le C||(\langle \cdot \rangle^s \hat{f}) * \hat{g}||_{L^2} + C||\hat{f} * (\langle \cdot \rangle^s \hat{g})||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

计算到这里, 我们能看到其中的对称性, 因此只估计其中一项, 为了方便看出我们是如何估计的, 将 $\langle \cdot \rangle^s \hat{f}$ 记为 F, 并估计如下

$$
\begin{aligned}
||(\langle \cdot \rangle^s \hat{f}) * \hat{g}||_{L^2} &= ||F * \hat{g}||_{L^2} = ||\hat{F} g||_{L^2} \quad (\text{用 Plancherel 定理}) \\
&\le ||\hat{F}||_{L^2} ||g||_{L^\infty} \le ||\hat{F}||_{L^2} ||g||_{H^s} \\
&\le ||F||_{L^2} ||g||_{H^s} \quad (\text{用 Plancherel 定理}) \\
&= ||f||_{H^s} ||g||_{H^s}.
\end{aligned}
$$

到这里, 我们就完成了计算, 有同学可能考虑使用关于卷积的 Young 不等式 (可以参考 Folland 实分析 P240, 241), 这个是可以用的. 但在这里我们考虑的是 L^2 空间, 上面能用相当方便的 Fourier 分析, 因此这里也只展示这种方法, 希望同学们掌握. $\square$

2 补充内容

在这个地方, 我们将引入少量的分布理论, 向同学们展示一些有趣的方程处理.

这里我们主要想考虑的问题是, 能不能对热方程

$$u_t - \Delta u = 0$$

的时间和空间同时进行 Fourier 变换. 一般人得第一反应肯定是不行 (除非你没看清条件), 因为我们的 Fourier 变换是定义在完整的欧氏空间上的, 而这里我们的时间有基本的要求 $t > 0$. 但是, 一般不行不代表永远不行, 我们可以进行一些看起来比较随意的操作, 让 "热方程" 至少看起来能在整个时间上定义.

为了行文的趣味性, 我们只在概念需要时进行新概念的引入.

为了形式延拓我们的解, 我们引入一个标准的 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

我们考虑新的函数 $\tilde{u}(t,x) = H(t)u(x)$, 分析他会满足什么样的方程. 但是我们注意到, 这里我们一定是要对这个 $\tilde{u}$ 求时间导数的, 而函数 $H(t)$ 在原点处连连续性都没有, 我们要怎么求导呢? 为此, 我们引入弱导数的概念.

定义 2.1 (弱导数)**.** *对给定区域 Ω 和函数 u, 函数 $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ 被称为 u 的弱导数, 当且仅当对任意的 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 有*

$$\langle u, \varphi' \rangle = -\langle v, \varphi \rangle$$

成立.

这里的 $L^1_{loc}(\Omega)$ 是指在 Ω 的任意紧子集上绝对可积 (就是 L^1 可积) 的函数. 如果不在乎这些概念的话, 可以理解为在紧支光滑函数的测试意义下, 分部积分公式成立.

这里我们可以验证, $H(x)$ 的弱导数就是我们熟知的 δ_0"函数"(其实是叫做广义函数).

现在, 我们直接对 $\tilde{u}$ 求时间导数, 可以得到如下方程

$$\tilde{u}_t = \Delta\tilde{u} + u_0.$$

现在这个方程真的在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 上有定义了, 因此我们对 $(t, \boldsymbol{x})$ 做 Fourier 变换. 将他们的变换记为 (η, ξ), (稍微混用一下记号) 得到

$$\mathrm{i}\eta\hat{\hat{u}} = \hat{u}_0 - |\xi|^2\hat{\hat{u}}.$$

那么我们现在就得到了一个代数方程, 解为

$$\hat{\hat{u}} = \frac{\hat{u}_0}{|\xi|^2 + \mathrm{i}\eta}.$$

但是我们也可以提一个自然的问题: 我们这个延拓后的函数, 能不能真的变回原来的热核解呢, 现在这个形式看不太出来啊! 为此, 我们考虑去对这个解做关于 $t(>0)$ 的 Fourier 反变换.

$$\hat{\hat{u}}(t,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}_0(\xi)}{|\xi|^2 + i\eta} e^{\mathrm{i}t\eta}\,\mathrm{d}\eta.$$

这个积分同学们现在还不太会积, 需要用到留数定理, 去考虑一个上半平面的扇形围道, 然后圆弧上的积分会在半径增大后消失, 从而线积分等于留数. 因此我们能算出来这个解为

$$\hat{\hat{u}}(t,\xi) = \hat{u}_0 e^{-|\xi|^2 t}.$$

这个结果算出来我们就很安心了, 而对于 $t < 0$, 我们考虑对称的围道积分也能算出这个形式的解, 而且这个时候的 Heaviside 函数则再次告诉我们, 我们没有额外假设什么反向演化解的信息, 真的只是形式上做了上述的演算.

到这里有些同学可能已经满意了, 我们这个过程还是蛮严谨的, 没有引入什么大麻烦就解决了问题, 但是这里还有一个纰漏, 我们实际上对一个性质不太好的函数用了 Fourier 变换, 这对吗?

接下来, 我们就来补充一些关于 Fourier 分析的小知识, 看看我们的 Fourier 变换能做到什么样的函数上.(接下来的内容只包含较少的证明, 受限于时间等原因只尽量讲清楚 idea)

首先最简单的, 我们可以对 L^1 函数逐点考虑 Fourier 变换, 这个是积分直接告诉我们的 ($||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$). 如果我们希望函数 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 还是 L^1 的, 那么我们就可以用单位近似 (Approximation to Identity) 和控制收敛定理 (Dominated Convergence Theorem) 证明, 这个函数一定是几乎处处等同于一个连续函数 (注意, 只是说几乎处处等于, 不是几乎处处连续), 这个就是著名的 Fourier 反演定理 (The Fourier Inversion Theorem). 如果同学们已经在数分课上学了 Plancherl 定理, 我们这里用一下稠密性和泛函中的延拓定理, 就能说明这个 Fourier 变换能保持 L^2 内积, 因此是 L^2 上的酉变换.

接下来我们提升一些难度, 必要的引入对偶空间.

定义 2.2 (对偶空间)**.** *对于线性空间 V, 其对偶空间记为 V', 定义为 $V' = \{f : V \to \mathbb{C} : f \text{ 为线性映射}\}$.*

我们这里的推广将从 Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}$ 入手. 在之前的情况中, 我们实际上多次使用了一个命题, 我们在这里给出一个不依赖 Fubini 定理的版本.

命题 2.1. *对于函数 $f, g \in \mathcal{S}$, 我们有*

$$\int \hat{f}(y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x$$

我们因此引出下面的定义

$$\langle \hat{F}, \phi \rangle = \langle F, \hat{\phi} \rangle,$$

这里的 $F \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$. 用一些基本的推导, 我们可以知道, 这样推广定义的 Fourier 变换也有之前的平移, 求导, 乘积性质. 这说明这样推广的 Fourier 变换是真的能拿来用的. 更好的是, 如果我们类似推广 Fourier 反演的定义, 我们实际说明了 Fourier 变换是 $\mathcal{S}'$ 上的自同构!

接下来我们来看看这个怎么用. 我们直接看作业题 1. 有些同学在计算时可能会关心, 这里没有提足够的条件, 怎么能说明这个解是唯一的呢? 学了最大值原理后, 这个题可以用对称开拓法加 Liouville 定理 (有界调和函数为常数), 考虑对 $y < 0$ 考虑延拓 $u(x,y) = -u(x,-y)$, 即可完成证明.

但是我们非要换一个方法呢? 这个过程将超过同学们现有的知识水平, 因此仅简要讲解大致思路.

1. 如果只用分布理论硬做, 我们会引入分布 $A(\xi)\sinh(|\xi|y) \in \mathcal{S}'$, 这个分布的形式上就已经比较糟糕, 其良定性要求 $A(\xi)$ 实际是一个指数衰减且在原点处为 0 且平坦的函数 (用来消除 $\sinh(|\xi|y)$ 在原点处不光滑导致的奇性). 为了说明这个分布实际为 0, 我们去考虑这个分布的支集, 如果有非零支集, 我们能对这个分布做局部化, 这时 $\sinh(|\xi|y)$ 在局部化后就变成了一个光滑函数, 接下来的证明就相对容易了, 因为这时完全放进了分布理论的框架中. 而对于零支集的情况, 我们有结构定理说明这时的分布在 Fourier 变换后是一个多项式, 这时结合有界性, 证明就结束了.

2. 另一种思路是, 稍微用一些调和函数的东西, 同时加上基本的正则性假设 (如 $u \in L^1_{loc}$, 也就是说 u 至少是一个正常一些的东西, 不然用不了平均值性质推出调和函数). 在奇延拓后, 这个函数确实成为一个调和函数, 然后用 Fourier 变换, 可知其支撑在原点, 然后和上面的方法类似.

3 彩蛋

习题课最后讲, 没来的不告诉你.