Sol to HW1

TA: Yuanyi Zhang

November 28, 2025

Problem 1. 解方程 $x\partial_t u + t\partial_x u = 0$（$t, x \in \mathbb{R}$），$u(0,x) = e^{-x^2}$，并说明 tOx 平面中哪些部分的解由初值唯一确定？

Solution. 显然是特征线法，特征线方程为（$x \neq 0$）：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$$

由 ODE 知识解出 $x = \pm\sqrt{t^2 + C}$（$C \geq 0$）. 沿特征线 $x(t)$，$u(t, x(t))$ 的值不变，即

$$u(t, x(t)) = u(0, x(0)) = e^{-x(0)^2} = e^{-C}$$

由 $C = x^2 - t^2$ 得

$$u(t,x) = e^{t^2 - x^2}$$

$x^2 - t^2 \geq 0$ 的区域内解由 $t = 0$ 时初值唯一确定（取不取等不重要）. $\square$

Remark. 同理得到 $\mathbb{R}^2$ 上另一部分的解由 $u(t, 0)$ 确定.

Problem 2. 考虑方程 $3u_y + u_{xy} = 0$.

a. 计算方程的通解.（提示：令 $v = \partial_y u$）

b. 若假设 $u(x,0) = e^{-3x}$，$u_y(x,0) = 0$，方程的解是否存在？是否唯一？

Solution. **a.** 令 $v = \partial_y u$，则方程化为：

$$3v + \partial_x v = 0$$

这是关于 x 的一阶线性 ODE，分离变量得：

$$\frac{dv}{v} = -3dx \implies \ln v = -3x + C(y) \implies v = e^{C(y)} e^{-3x} = g(y) e^{-3x}$$

其中 $g(y)$ 为关于 y 的光滑函数。

由 $v=\partial_y u$，对 y 积分：

$$u(t,x)=\int g(y)dy\cdot e^{-3x}+h(x)=f(y)e^{-3x}+h(x)$$

其中 $f(y)=\int g(y)dy$，$h(x)$ 为关于 x 的光滑函数，即通解为：

$$u(x,y)=f(y)e^{-3x}+h(x)$$

b. 代入计算即可.

$$u(x,0)=e^{-3x}\Longrightarrow h\equiv 0,\ f(0)=1,$$

$$u_y(x,0)=0\Longrightarrow f'(0)=0$$

显然这样的 f 存在但不唯一（考虑 $f(y)=e^{\lambda x^2}$）. □

Remark. 无.

Problem 3. 证明方程 $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ 的解必定满足“平行四边形法则”，即 $u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$，其中 A,B,C,D 构成 xOt 平面上的平行四边形，其边界方程为 $x\pm ct=$ 常数.

Solution. 由 D'Alembert 公式将 u 拆解为左行波和右行波的叠加：

$$u(t,x)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

立刻得到

$$\begin{aligned}u(A)+u(C)&=(F(C_1)+G(C_4))+(F(C_2)+G(C_3))\\&=(F(C_1)+G(C_3))+(F(C_2)+G(C_4))=u(B)+u(D)\end{aligned}$$

□

Remark. 不少同学把 F 和 G 展开了，不用那么麻烦.

Problem 4. 考虑方程 $20u_{tt}-u_{tx}-u_{xx}=0$（$t>0,x\in\mathbb{R}$）

a. 计算通解.（提示：因式分解方程左边的微分算子）

b. 假设初值是 $u(0,x)=x$，$\partial_t u(0,x)=e^{-x}+\frac{1}{4}$，计算方程的解 $u(t,x)$.

Solution. 纯计算题.

a. 方程因式分解为：

$$20\left(\partial_t-\frac{1}{4}\partial_x\right)\left(\partial_t+\frac{1}{5}\partial_x\right)u=0$$

依次求解：

1. 令 $v=\left(\partial_t+\frac{1}{5}\partial_x\right)u=0$，特征线 $x-\frac{1}{5}t=C$，解为 $u=F\left(x-\frac{1}{5}t\right)$；

2. 令 $\left(\partial_t-\frac{1}{4}\partial_x\right)v=0$，特征线 $x+\frac{1}{4}t=D$，解为 $v=G\left(x+\frac{1}{4}t\right)$，积分得 $u=H\left(x+\frac{1}{4}t\right)+F\left(x-\frac{1}{5}t\right)$。

通解为：

$$u(t,x)=F\left(x-\frac{1}{5}t\right)+G\left(x+\frac{1}{4}t\right)$$

其中 F,G 为光滑函数。

b. 第一步代入 $t=0$，由 $u(0,x)=x$ 得到：

$$F(x)+G(x)=x \tag{1}$$

第二步计算 $\partial_t u$：

$$\partial_t u=-\frac{1}{5}F'\left(x-\frac{1}{5}t\right)+\frac{1}{4}G'\left(x+\frac{1}{4}t\right)$$

代入 $t=0$，由 $\partial_t u(0,x)=e^{-x}+\frac{1}{4}$ 得到：

$$-\frac{1}{5}F'(x)+\frac{1}{4}G'(x)=e^{-x}+\frac{1}{4} \tag{2}$$

由 (1) 得 $G'(x)=1-F'(x)$，代入 (2)：

$$-\frac{1}{5}F'(x)+\frac{1}{4}(1-F'(x))=e^{-x}+\frac{1}{4}$$

化简：

$$-\frac{9}{20}F'(x)+\frac{1}{4}=e^{-x}+\frac{1}{4}\implies F'(x)=-\frac{20}{9}e^{-x}$$

积分得：

$$F(x)=\frac{20}{9}e^{-x}+C_1,\quad G(x)=x-\frac{20}{9}e^{-x}-C_1$$

代入通解得：

$$u(t,x)=\frac{20}{9}e^{-\left(x-\frac{1}{5}t\right)}+x+\frac{1}{4}t-\frac{20}{9}e^{-\left(x+\frac{1}{4}t\right)}$$

□

Remark. 特征线解简单方程应该是期中必考项，建议算错的同学好好练习一下.

Problem 5. 考虑第一象限中一个扇形区域内的波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > x > 0; \\ u(t,t) = \varphi(t),\ u_x(t,0) = \psi(t) & t \geq 0. \end{cases}$$

a. 通过将初值 φ, ψ 代入通解 $u(t,x) = F(x-t) + G(x+t)$, 计算 $u(t,x)$ (用 φ, ψ 表示).

b. 对哪些 (t,x), $u(t,x)$ 的值完全由初值 φ, ψ 在 $[0,1]$ 区间内的部分决定?

Solution. 根据 D'Alembert 公式，设该方程的解为 $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$. 则

$$\varphi(t) = u(t,t) = F(2t) + G(0), \quad \psi(t) = u_x(0,t) = F'(t) + G'(-t)$$

则

$$F(t) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - G(0), \quad \int_0^t \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C = F(t) - G(-t)$$

则

$$G(t) = F(-t) - \int_0^{-t} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - C$$

故

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - G(0) + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) - G(0) - \int_0^{t-x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - C$$

进一步求解 C ，在 $G(t)$ 的表达式中令 $t=0$ ，则

$$2G(0) = \varphi(0) - C.$$

因此方程的解为

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{t-x}{2}\right) - \int_0^{t-x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \varphi(0)$$

由于 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上给定，此定解条件的决定区域为

$$\begin{cases} 0 \leqslant x+t \leqslant 2a, \\ 0 \leqslant t-x \leqslant a. \end{cases}$$

$\square$

Remark. 前人之述备矣（见群文件 2023 秋微分方程引论习题课讲义 P115）.

PROBLEM 6. 考虑一维波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) & t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $c > 0$ 是给定的常数, $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 定义

$$K(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x,\ P(t) := \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

证明:

a. $K(t) + P(t)$ 是守恒量，并据此证明方程平方可积解的唯一性.

b. 当 t 充分大时，有 $K(t) = P(t)$. （提示：使用达朗贝尔公式）

本题中的记号 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是指全体具有紧支集的光滑函数，即 $C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f 是紧集\}$, 其中 $\operatorname{supp} f := \overline{\{f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$.

SOLUTION. **a.** 直接做 d 维情形，波方程变为

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

$$K(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x, \quad P(t) := \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

我们定义该方程的能量为 $E(t) = K(t) + P(t)$. 证明其关于时间导数为 0 的思路是利用方程消去关于时间的二阶项（u_t^2 求导产生），观察剩余项的结果.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^d} u_t u_{tt} \,\mathrm{d}x + c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla u_t \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) \,\mathrm{d}x + c^2 \int_{\mathbb{R}^d} (u_t \nabla \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla u_t) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (u_t u_{tt} - c^2 u_t \Delta u) \,\mathrm{d}x + c^2 \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (u_t \nabla u) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta u) \,\mathrm{d}x + c^2 \int_{\partial \mathbb{R}^d} u_t \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由波方程知第一项为 0；对第二项，由初值紧支可假设 $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi \subset B(0,R)$，则由有限传播速度知 u_t,∇u 对任意 $t > 0$ 仍然紧支（事实上 $\operatorname{supp} u_t \cup \operatorname{supp} \nabla u \subset B(0, R + ct)$，考虑决定区域即可），因此第二项同样为 0.

要证给定初值解的唯一性，只需说明零解唯一. 这由如下推导即得：

$$\begin{aligned} u(0,x)=0 &\Longrightarrow \nabla u(0,x)=0 \\ &\Longrightarrow E(t)=E(0)=0 \\ &\Longrightarrow u_t=\nabla u\equiv 0 \\ &\Longrightarrow u=u(0,0)=0 \end{aligned}$$

b. 由 D'Alembert 公式：

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

计算导数：

$$u_t=\frac{c}{2}[-\varphi'(x-ct)+\varphi'(x+ct)]+\frac{1}{2}[\psi(x+ct)+\psi(x-ct)]$$
$$u_x=\frac{1}{2}[\varphi'(x-ct)+\varphi'(x+ct)]+\frac{1}{2c}[\psi(x+ct)-\psi(x-ct)]$$

作差整理得：

$$u_t^2-c^2u_x^2=(\psi(x+ct)+\varphi'(x+ct))(\psi(x-ct)-\varphi'(x-ct))=:F(x+ct)G(x-ct) \quad (3)$$

这里

$$F(x):=\psi(x)+\varphi'(x),\quad G(x):=\psi(x)-\varphi'(x)$$

则

$$\operatorname{supp}F\subset B(0,R),\quad \operatorname{supp}G\subset B(0,R)$$

其中 R 在 **a.** 已给出. 那么给定充分大的 t，有

$$\operatorname{supp}F(x+ct)\subset B(-ct,R),\quad \operatorname{supp}G(x-ct)\subset B(ct,R),\quad B(-ct,R)\cap B(ct,R)=\varnothing,$$

即

$$u_t^2-c^2u_x^2=F(x+ct)G(x-ct)=0,\quad x\in\mathbb{R}$$

即 $K(t)=P(t)$.

$\square$

Remark. **a.** 中说明第二项积分为 0 时需要表明紧支性；有用 D'Alembert 公式做第一题的，要注意这个方法不具有推广意义；**b.** 证明错误的同学很多，不少同学直接由 $\lim_{t\to\infty}\varphi(x+ct)=0$（其他项同理）得出 (3) 等号右边是 0 的结果，这里的问题在于极限的成立是在给定 x 的前提下，并不意味着给定（不管多大的）t 时右侧对 x 整体是 0，也不能推出积分为 0. 右侧为 0 的原理是任意给定 t 大时 F 和 G 的支撑集分离.

PROBLEM 7. 设复值函数 $u(t,\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}-\sigma t)}$, 其中 $\sigma \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. 对如下方程具有该形式的解，计算 σ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的关系（该关系称作“色散关系”）。

a. 波动方程 $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$.

b.Klein-Gordon 方程 $\partial_t^2 u - \Delta u + m^2 u = 0$, 这里 $m > 0$ 是常数.

c.Schrödinger 方程 $i\partial_t u + \Delta u = 0$.

d. Airy 方程 $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$, 本例中 $d = 1$.

SOLUTION. 代入计算即可，结果分别是

$$\sigma^2 = |\boldsymbol{y}|^2, \quad \sigma^2 = |\boldsymbol{y}|^2 + m^2, \quad \sigma = |\boldsymbol{y}|^2, \quad \sigma = -y^3$$

□

REMARK. 原题是 σ 与 $|\boldsymbol{y}|$ 的关系，可能引起误解了，因为这个被扣分可以找助教.

PROBLEM 8. 证明：对任意常数$D \in \mathbb{R}$, 如下方程至多只有一个光滑解 $u \in C^\infty([0,T] \times [0,1])$.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + D\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & t \in (0,T), x \in (0,1); \\ u(0,x) = \varphi(x),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) & x \in [0,1]; \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t \in [0,T]. \end{cases}$$

SOLUTION. 同 T6 使用能量法，证明零解唯一.

$$\begin{aligned} E(t) :&= 2^{-1} \int_{\mathbb{R}} u_t^2 + \nabla u^2 \,\mathrm{d}x \\ \frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_t(u_{tt} + Du_t - \Delta u) + \int_{\mathbb{R}} u_t \nabla\cdot\nabla u + \nabla u \cdot \nabla u_t \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} Du_t^2 \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}} Du_t^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$D \geq 0$ 时，

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq E(t) \leq E(0) = 0,$$

$D < 0$ 时，

$$\frac{dE}{dt} = -\int_{\mathbb{R}} Du_t^2 \,\mathrm{d}x \leq -\int_{\mathbb{R}} Du_t^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} D\nabla u^2 \,\mathrm{d}x = -DE(t),$$

用 Gronwall 不等式即证. □

Remark. 高维操作同理.注意讨论 D 的正负.

Problem 9. 考虑二维波动方程的初值问题

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \ \ (t>0, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2), \qquad u(0,\boldsymbol{x})=0, \ \ \partial_t u(0,\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}) \ \ (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d).$$

其中初值 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

a. 用积分的极坐标表示证明

$$u(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}\psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r.$$

b. 证明: 存在常数 $C>0$（不依赖 ψ），使得如下估计（对 $t\geq T_0$）成立

$$|u(t,\boldsymbol{x})|\leq \frac{C}{\sqrt{t}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right).$$

Solution. **a.** 由 Possion 公式:

$$u(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi c}\int_{B(\boldsymbol{x},ct)}\frac{\psi(\boldsymbol{y})}{\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}$，其中 $\boldsymbol{w}\in B(0,ct)$，则

$$u(t,\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi c}\int_{B(\mathbf{0},ct)}\frac{\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w})}{\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{w}|^2}}\mathrm{d}\boldsymbol{w}=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}\psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r.$$

b. 提示可能引起误解，这里并不是要取 $\varepsilon\to 0$. 按提示将 u 分为 $\int_0^{t-\varepsilon}+\int_{t-\varepsilon}^t$ 两部分,

$$\begin{aligned}
|I_1| :&= \left|\int_0^{t-\varepsilon}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}\psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r\right| \\
&\leq \int_0^{t-\varepsilon}\frac{r}{\sqrt{t^2-(t-\varepsilon)^2}}\int_{\partial B(\mathbf{0},1)}|\psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2t-\varepsilon)}}\int_{B(\mathbf{0},t-\varepsilon)}|\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2t-\varepsilon)}}\int_{\mathbb{R}^2}|\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| :&= \left|\int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} \psi(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r\right| \\
&= \left|\int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} \int_0^r \nabla\psi(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r\right| \\
&\le \int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_0^r \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} s|\nabla\psi(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{z})|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}r \\
&\le \int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \big(\arcsin\,1 - \arcsin\,(1-\varepsilon t^{-1})\big) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \arccos\,(1-\varepsilon t^{-1}) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(\boldsymbol{y})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

我们的目的是选出 ε 使得 $\sqrt{t/(\varepsilon(2t-\varepsilon))}$, $\sqrt{t}(\arccos\,(1-\varepsilon t^{-1}))$ 对任意的 $t \ge T_0$ 同时有常数的上界，取 $\varepsilon = T_0/2$ 即可. □

Remark. 最终取出的 C 应当是与 ε,t 无关的常数，但会与 T_0 有关；提示中给出的分解其实可以直觉上理解为将平面波分成波前与波后两部分估计，波后部分是由于平面波的有后效性，波前性质与三维相似；关于 $\arccos\,(1-\varepsilon t^{-1})$ 的估计，可以设其为 y，则有

$$
1-\varepsilon t^{-1} = \cos y \le 1-\alpha y^2 \Longrightarrow y \le (\alpha t/\varepsilon)^{-1/2}
$$

注：本题也可将I_2中的分母中根号里面的项放缩为t(t-r)进而避开反三角函数的计算。