中国科学技术大学期中试卷 2023-2024年第一学期拓扑学(H) 001707

W.Yang

2023 年 11 月 9 日

考试形式为闭卷。时间是2023年11月8日 7:50-9:25。授课教师为陈杲。

第一部分我在考试之后整理重排的LaTeX试卷版本，第二部分是我自己撰写的答案。

1 考试试卷

Problem 1.1. *（每题5分）请判断下列陈述是否正确。*

1. *一条带子，转两圈后粘起来，得到的带子和直接粘起来得到的带子是同胚的；*
2. *立方体的表面和球面同胚；*
3. *我们用$Int(A)$表示A的内部，那么$Int(A)\cup Int(B)=Int(A\cup B)$一定成立；*
4. *如果$f:X\to Y$是可逆映射，而且对于任意的$A\subset X$，$f(\overline{A})=\overline{f(A)}$，那么$f$一定是同胚；*
5. *存在从$[0,1]$到$[0,1]\times[0,1]$的连续满射；*
6. *假设X和Y是拓扑空间，$A\subset X$和$B\subset Y$为子集，x为A在X中的极限点，$y\in\overline{B}$，那么(x,y)一定是$A\times B$在$X\times Y$中的极限点；*
7. *道路连通子集的闭包一定是连通的；*
8. *从紧空间到Hausdorff空间的连续映射一定是粘合映射(identification map)。*

Problem 1.2.

1. *（10分）对于任意的$i,j,k=1,2,\cdots,7$，我们按照某种规律（这个规律比较复杂且和本题无关，故省略）定义φ_{ijk}为0或±1，定义*

$$G=\{A\in\mathbf{GL}(7,\mathbb{R})|\sum_{a,b,c=1}^{7}A_{ia}A_{jb}A_{kc}\varphi_{abc}=\varphi_{ijk},\forall i,j,k=1,2,\cdots,7\}$$

   证明G是拓扑群。[1]

2. *（5分）假设G是$\mathbf{O}(7)$的子集，证明G是紧的拓扑群。*
3. *（10分）更进一步假设G在$\mathbf{S}^6$上的作用是可迁的，以及存在一个点$p\in\mathbf{S}^6$使得*

$$G_p=\{g\in G|g(p)=p\}$$

   和$\mathbf{SU}(3)$作为拓扑群同构，证明G是连通的。

[1] 这里卷子上本来印的是A_{ij}，陈杲表示可能是想强调一下分量。

Problem 1.3. 1. （5分）证明在$\mathbb{R}$上，$\{(-\infty,a)|a\in\mathbb{R}\}$可以成为一组拓扑基。我们把具有该拓扑的$\mathbb{R}$记作$X$。

2. （10分）证明A为X中的开集当且仅当$A=\emptyset, A=\mathbb{R}$，或$A=(-\infty,a)$，其中$a\in\mathbb{R}$。

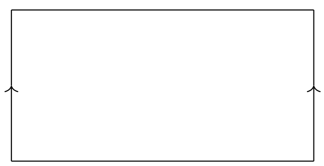
3. （10分）证明如果A是X的紧子集，那么$\sup A<\infty$，而且$\sup A\in A$。

4. （5分）如果Y是紧拓扑空间，$f:Y\to X$是连续映射，证明存在$x\in Y$使得

$$f(x)=\sup_{y\in Y}f(y).$$

5. （5分）如果A是X的子集，$\sup A<\infty$，而且$\sup A\in A$，证明A是X的紧子集。

2 试题解答

Solution 2.1. 1. 正确。它们都是。

2. 正确。可以构造一个连续双射f :正方体表面 $\to$ 球面，其中$x\mapsto\frac{x}{||x||}$，而正方体表面是紧集而球面是$Hausdorff$的，因此这是同胚映射。

3. 错误。不妨取$X=\mathbb{R}$，赋予通常拓扑，考虑$A=\mathbb{Q}$与$B=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$即可。

4. 正确。容易验证这是一个连续闭映射。

5. 正确。$Peano$空间填充曲线是这样一个例子。

6. 正确。只需验证任意一个包含(x,y)的开集基$U\times V$一定包含一个不同于(x,y)且位于$U\times V$之内的点，由于$x\in U$且为极限点那么$\exists x'\neq x$使得$x'\in U$，且$y\in\overline{B}$意味着$V\cap B\neq\emptyset$，那么如果$y'\in V\cap B$那么(x',y')符合要求。

7. 正确。事实上连通集的闭包就是连通的。

8. 错误。需要满射条件。

Solution 2.2. 1. 首先验证这是一个群。我们先来验证乘法封闭性。设$A,B\in G$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b,c=1}^{7}(AB)_{ia}(AB)_{jb}(AB)_{kc}\varphi_{abc}\\
&=\sum_{a,b,c=1}^{7}\sum_{s,t,u=1}^{7}A_{is}B_{sa}A_{jt}B_{tb}A_{ku}B_{uc}\varphi_{abc}\\
&\overset{\text{交换求和次序}}{=}\sum_{s,t,u=1}^{7}A_{is}A_{jt}A_{ku}\varphi_{stu}\\
&=\varphi_{ijk}
\end{aligned}$$

单位元就可以取$\mathbf{I}_7$。

只需在乘法封闭性的验证中用A^{-1}替换A的位置，用A替换B的位置便能类似证得逆元存在性且就是通常乘法逆元。

$$\begin{aligned}
&\varphi_{ijk}\\
&=\sum_{a,b,c=1}^{7}(A^{-1}A)_{ia}(A^{-1}A)_{jb}(A^{-1}A)_{kc}\varphi_{abc}\\
&=\sum_{a,b,c=1}^{7}\sum_{s,t,u=1}^{7}A^{-1}_{is}A_{sa}A^{-1}_{jt}A_{tb}A^{-1}_{ku}A_{uc}\varphi_{abc}\\
&\overset{\text{交换求和次序}}{=}\sum_{s,t,u=1}^{7}A^{-1}_{is}A^{-1}_{jt}A^{-1}_{ku}\varphi_{stu}
\end{aligned}$$

再证明这是拓扑群。注意到$(AB)_{ij}=\sum_{s=1}^{7}A_{is}B_{sj}$为多项式函数自然连续，同时$A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}$，而$A^*$与$\det A$也都可以表示为$A_{ij}$的多项式函数，故也连续。

2. $\mathbf{O}(7)$自然是紧的，我们只要证明G是闭的。

   我们首先作连续映射$f:\mathbf{GL}(7,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{7^3}$，其中$f_{ijk}=\sum_{a,b,c=1}^{7}(AB)_{ia}(AB)_{jb}(AB)_{kc}\varphi_{abc}$为$f$到$ijk$分量上的投影。

   因此我们知道G可以视为f中(φ_{ijk})的原像。这是一个闭集，所以它的原像也是闭的。

3. 我们首先注意到紧子群G可迁作用在$\mathbf{S}^6$上，$\mathbf{S}^6$是*Hausdorff*的，那么$G/G_p\cong\mathbf{S}^6$。而$G_p\cong\mathbf{SU}(3)$是连通的，且$\mathbf{S}^6$是连通的，那么G也连通。

Solution 2.3. 1. 不难验证$\bigcup_{a\in\mathbb{R}}(-\infty,a)=X$，且对任意$a,b\in\mathbb{R}$我们都有

$$(-\infty,a)\cap(-\infty,b)=(-\infty,\min(a,b))$$

也是一个基中的元素，这就验证了基公理。

2. X中开集为基元素之并，即

$$A=\bigcup_{a\in I,I\subset\mathbb{R}}(-\infty,a),$$

   那么以下分几种情况。

   若$I=\emptyset$则$A=\emptyset$。

   而若$I\neq\emptyset$，记$\sup I=a$。

   显然$a=\infty$时我们有$A=X$。

   而若$a\in\mathbb{R}$则$A=(-\infty,a)$。

3. 先用反证法证明$\sup A<\infty$，如果$\sup A=\infty$考虑$\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n)$，这是$X$开覆盖自然也是$A$的开覆盖。但显然无法找出一个有限子覆盖来。

   再用反证法证明$\sup A\in A$。不然的话设$\sup A=a$考虑$\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,a-\frac{1}{n!})$，这显然是$A$的开覆盖，但无法找出有限子覆盖。

4. 由于紧集在连续映射下的像是紧的，那么$f(Y)$也是紧集，故由上一问的结论显然。

5. 假设$A\subset\bigcup_{a\in I,I\subset\mathbb{R}}(-\infty,a)$，那么不妨设$\sup A\in(-\infty,a_i)$，那么$A\subset(-\infty,a_i)$，故$A$是紧的。