中国科学技术大学期末试卷
2023-2024 学年第一学期　A卷

课程名称: 拓扑学(H)　　. 课程编号: 001707

考试时间2024年1月12日 14：30-16：30　　考试形式: 闭卷

学生姓名: ______　　学　　号: ______

1.（每题4分）请判断下列陈述是否正确：

(1) 假设U是p在X中的邻域，$U \subset V \subset X$，那么V一定是p在X中的邻域；

(2) 根据Tietze延拓定理，度量空间X的稠密子集Y上定义的所有连续实值函数都可以被延拓成为X上的连续函数；

(3) 紧空间的闭子集一定是紧子集；

(4) 道路连通空间的商空间一定是连通的；

(5) $SO(3)$和$\mathbb{RP}^3$同胚；

(6) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$和Mobius带同伦；

(7) 如果X和标准的7维球面同胚，那么X一定是单连通的；

(8) 如果γ是从S^1到$\mathbb{R}^2$的连续映射，那么$\mathbb{R}^2$去掉γ的像一定不连通；

(9) 如果$\pi : X \to Y$是复叠映射(covering map)，那么$\pi_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,\pi(p))$一定是单射；

(10) 环面(torus)和Klein瓶的连通和同胚于两个环面的连通和。

2. (1) (10分)假设X是拓扑空间，K_1和K_2为X的紧子集。证明$K_1 \cup K_2$也是X的紧子集。

(2) (10分)假设X是不紧致的Hausdorff空间。定义$Y = X \cup \{\infty\}$为X的单点紧化(compactification)。定义Y的子集O为开集当且仅当O为X中的开集，或者$O = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$，其中$K$为紧集。证明$Y$是拓扑空间。

3. 定义S^1为模长为1的复数的集合。

(1) (5分)写出$T^2 = S^1 \times S^1$的基本群、万有覆叠空间(universal cover)和从万有覆叠空间到T^2的覆叠映射。本小题无需证明。

(2) (5分)我们将T^2上的点$(1,1)$称为p。假设f是从T^2到T^2的连续映射。如果f诱导的映射$f_* : \pi_1(p,T^2) \to \pi_1(f(p),T^2)$和常值映射(constant map)诱导的映射相同，证明f同伦于常值映射。

(3) (5分)T^2是不是拓扑群？本小题只需回答是或不是，无需证明。

(4) (10分)假设f和g都是从T^2到T^2的连续映射，而且$f(p) = g(p)$。如果f诱导的映射$f_* : \pi_1(p,T^2) \to \pi_1(f(p),T^2)$等于$g$诱导的映射$g_* : \pi_1(p,T^2) \to \pi_1(g(p),T^2)$，证明$f$和$g$同伦。

(5) (5分)假设f是从T^2到T^2的连续映射，而且$f(p) = p$。定义M_f为$[0,1] \times T^2$商掉额外的等价关系$(0,x) \sim (1,f(x)), \forall x \in T^2$。证明存在从$S^1$到$M_f$的连续映射$i$和从$M_f$到$S^1$的连续映射$j$使得$j \circ i$等于恒等映射(identity map)。

(6) (10分) 证明两个M_f的连通和不是单连通的。

中国科学技术大学期末试卷
2023-2024 学年第一学期　A卷

课程名称: 拓扑学(H)　. 课程编号: 001707

考试时间2024年1月12日 14：30-16：30　考试形式: 闭卷

学生姓名: ______　学　号: ______

1.（每题4分）请判断下列陈述是否正确：

(1) 对(2) 错（不是稠密是闭）(3)对 (4) 对 (5) 对 (6) 对 (7) 对 (8) 错，常值映射 (9) 对 (10) 错。

证明题判分标准：完整答案 100%, 有微小的错误80%, 有重大步骤缺失 60%, 没做出来但完成了部分重大步骤 40%, 说了与题目相关的正确的定义 20%, 完全无关或白卷0%。

2. (1) 假设$U_i, i \in I$是$K_1 \cup K_2$的开覆盖。那么它们也是K_1和K_2的开覆盖，从而存在有限子覆盖$J_1 \subset I$和$J_2 \subset I$。那么U_i,$i \in J_1 \cup J_2$就是$K_1 \cup K_2$的有限子覆盖。 (2) 首先$\emptyset$ 和 Y都是开集。接下来证有限交为开集。将相交的开集写成两部分。第一部分为$U = \cap_{i=1}^m U_i$，其中U_i为X中开集。此时U也是X中开集，从而是Y中开集；第二部分为$V = \cap_{i=1}^n (X \setminus K_i) \cup \{\infty\}$，其中$K_i$为$X$中紧集。那么$V = (X \setminus \cup_{i=1}^n K_i) \cup \{\infty\}$。由第一小问加归纳法知，$K = \cup_{i=1}^n K_i$也为紧集。因此$V$也是$Y$中开集。如果相交的里面全是第一部分或者全是第二部分，那么由于U和V均为Y中开集，我们得到开集。如果两部分都有，那么$U \cap V = U \cap (X \setminus K)$。由于$K$为紧集，在Hausdorff空间中为闭集，所以$X \setminus K$为开集，从而$U \cap V$也为$Y$中开集。最后证明$Y$中开集的任意并也是开集。将取并的开集写成两部分。第一部分为$U = \cup_{i\in I} U_i$，其中U_i为X中开集。此时U也是X中开集，从而是Y中开集；第二部分为$V = \cup_{i\in J}((X \setminus K_i) \cup \{\infty\}) = (X \setminus \cap_{i\in J} K_i) \cup \{\infty\}$。由于Hausdorff空间中的紧集为闭集，$K_i$均为$X$中闭集，所以$K = \cap_{i\in J} K_i$也是$X$中闭集。从而它也是紧集的闭子集，所以也是紧集。从而V也是Y中开集。如果取并的里面全是第一部分或者全是第二部分，那么由于U和V均为Y中开集，我们得到开集。如果两部分都有，那么$U \cup V = (X \setminus (K \cap (X \setminus U)) \cup \{\infty\}$。由于$X \setminus U$为闭集，$K \cap (X \setminus U)$为紧集的闭子集，也是紧集。从而$U \cap V$也为$Y$中开集。（注：若未说$U$或$V$为$Y$中开集，视为本题有微小的错误，若只证两个开集的交，必须分三种情况讨论，缺任何一种情况均视为有重大步骤缺失）

3. 定义S^1为模长为1的复数的集合。

(1) 基本群为$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$（2分），万有覆叠空间为$\mathbb{R}^2$（2分），映射为$\pi(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$。（1分）

(2) 由映射提升引理，存在$F : T^2 \to \mathbb{R}^2$使得$f = \pi \circ F$。那么$\pi(t \cdot F)$给出了一个从$T^2 \times [0, 1]$到T^2的连续映射。当$t = 0$时，该映射为常值映射，当$t = 1$时，该映射为f。（注：若未答该小题，直接引用第四小题，算作第四小题一半的分数。提到映射提升引理但未完成视为由重大步骤缺失，将条件和结论均正确写为同伦条件但未做出来视为完成部分重大步骤，基本群，同伦的定义视为与本题相关的定义）

(3) 是（5分）

(4) 假设$n : T^2 \to T^2$为拓扑群中的逆映射，$m : T^2 \times T^2 \to T^2$为拓扑群中的乘法映射。定义$h : T^2 \to T^2$为$h(x) = m(i(f(x)), g(x))$。那么$h$为连续映射。现在假设$\gamma : [0,1] \to T^2$为以$x$为起点和终点的圈，那么$f \circ \gamma$和$g \circ \gamma$定端同伦。假设$F : [0,1] \times [0,1]$为$f \circ \gamma$和$g \circ \gamma$之间的定端同伦映射。定义$H : [0,1] \times [0,1]$为$H(x,t) = m(i(f(\gamma(x))), F(x,t))$。那么$H$是连续的，$H(x,0)$为常值映射，$H(x,1)$为$h \circ \gamma$。而且$H(0,t) = H(1,t) = e$。所以$h \circ \gamma$定端同伦到常值映射。根据(2),$h$同伦到常值映射。假设$G(x,t)$为$h$和常值映射之间的同伦，那么$m(f(x), G(x,t))$给出了$g$和$f$之间的同伦。（提到映射提升引理或用拓扑群转化为第二小问但未完成视为由重大步骤缺失，将条件和结论均正确写为同伦条件但未做出来视为完成部分重大步骤，拓扑群，基本群，同伦的定义视为与本题相关的定义）

(5) 定义Π为从$[0,1] \times T^2$到M_f的商映射。定义$J : [0,1] \times T^2 \to S^1$为$J(t,x) = e^{2\pi i t}$。那么当$(0,x) \sim (1, f(x))$时，$J(0,x) = J(1, f(x))$。所以$J$可以自然分解成为$J = j \circ \Pi$。由商映射性质知，$j$为连续映射。而从$[0,1]$到$T^2$的映射可以定义为$I(t) = \Pi(t,e)$。由于$f(e) = e$，我们知道$I(0) = I(1)$。所以$I$诱导了$i : S^1 \to M_f$的连续映射$i$。显然，$j \circ i$为恒等映射。（商映射视为与题目相关的定义）

(6) 首先证明M_f不是单连通的。如果是，那么$j_* \circ i_*$等于0，但它也是恒等映射。矛盾。然后利用Van Kampen定理，U和M_f同伦，V也和M_f同伦。$U \cap V$同胚于$(-1,1) \times S^2$。它是单连通的。所以Van Kampen定理里面没有商掉任何东西，从而保持了非平凡的基本群。（注：使用Van-Kampen定理，以及S^2单连通来证明只需证明M_f单连通视为有重大步骤缺失，仅提到只需证M_f单连通视为完成部分重大步骤，单连通、Van-Kampen定理视为与题目相关的定义）