

中国科学技术大学
2022-2023学年实分析期末考试

姓名: _____ 学号: _____

1. (20分) 判断正误 (证明或者举反例说明你的结论):

(i) 若函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 则其导函数 f' 可测.

(ii) 对 \mathbb{R}^n 中任意单调增可测集序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, 都有 $m(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k)$.

2. (15分) 若函数 f 在区间 $[a, b]$ 上绝对连续且 $f'(x) \geq 0$ a.e., 证明: f 是增函数.

3. (15分) 设 $f \in BV[a, b]$, $V_a^b(f)$ 是其全变差. 证明: $\int_a^b |f'(t)| dt \leq V_a^b(f)$.



4. (15分) 设 $f \in L^1[0, 1]$, 令 $F(x) := \int_x^1 f(t)dt$. 证明:

(i) $F \in L^1[0, 1]$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 0$;

(iii) $\int_{[0,1]} F(x)dx = \int_{[0,1]} f(x)dx$.

5. (15分) 设 $m(E) < \infty$, 可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛于 f , 可测函数列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛于 g . 证明: $\{f_k g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛于 fg .



6. (10分) 设函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f_k \rightarrow f$ a.e. 且 $\sup_k \|f_k\|_1 < \infty$.

证明:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{ \|f_k\|_1 - \|f_k - f\|_1 \} = \|f\|_1.$$

7. (10分) 证明: $[0, 1]$ 中存在正测集 E , 使得对于 $[0, 1]$ 中任一开区间 I , 都满足: $0 < m(E \cap I) < m(I)$.

