

中国科学技术大学2023春季学期 实分析II期中考试

姓名: _____ 学号: _____

1. (10分) 请具体写出 Lusin 定理与 Egorov 定理, 无需给出证明。 本题出自第11次课ppt第9页与第10次ppt第28页。
2. (10分) 请具体写出 Borel-Cantelli 引理并证明。 本题出自第7次课ppt的第12页。
3. (10分) 请利用 Borel-Cantelli 引理证明 Egorov 定理。 本题出自第10次课ppt的第30页。
4. (10分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集。 本题出自课本 P43 页第2题, 为第五次作业原题。
5. (10分) K 是第三节课上构造的不可测集 (即 $[0, 1]/\mathbb{Q}$ 的代表元集合), 证明 K 的任意可测子集均是零测集。 本题为习题课讲过的原题。
6. (10分) 举例说明依测度收敛不一定几乎处处收敛。 本题出自第10次课ppt的第33页。
7. (10分) 请写出 Cantor 函数的具体表达式, 并利用 Cantor 函数构造 $[0, 1]$ 区间的同胚, 不满足可测集的原像是可测集。 本题前一小问来自第4次课ppt的第15页, 后一小问来自第9次课ppt的第8页。
8. (10分) 证明单调函数是可测函数。
9. (10分) 函数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 依测度柯西, 证明: 依测度收敛。 本题出自第11次课ppt的第5~7页。
10. (10分) 证明 \mathbb{R} 上可测函数构成的集合的势为 2^c 。 本题为习题课讲过的原题。