

中国科学技术大学

(开卷者可携带任何纸质资料)

1. (20') 设 $\{U_{n,0}, U_{n,1}, \dots, U_{n,n}\}$ 为平面上 $n+1$ 个点. 对第 i 个点 $(1 \leq i \leq n)$

$U_{n,i}$, 定义 $P_i = P(U_{n,i} \text{ 与 } U_{n,0} \text{ 相连})$, $P_i \in (0,1)$, $X_{n,i} = I(U_{n,i} \text{ 与 } U_{n,0} \text{ 相连})$, $X_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$. 设 $\text{Var} X_n \rightarrow +\infty$. 求证:

$$(1) \frac{X_n}{EX_n} \xrightarrow{P} 1; \quad (2) \frac{X_n - EX_n}{\sqrt{\text{Var} X_n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

2. (10') 设 $\{X_{n,i}, n=1,2,\dots; 1 \leq i \leq n\}$ 为一列独立组列. 求证

$$\max_{1 \leq i \leq n} |X_{n,i}| \xrightarrow{P} 0 \text{ 等价于 } \sum P(|X_{n,i}| > \delta) \rightarrow 0.$$

3. (10') 设 X_1, \dots, X_n, \dots 为一列 i.i.d. r.v., $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. 求证 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(|S_n - x| < \varepsilon, \text{i.o.}) \in \{0,1\}.$$

4. (30') 设 X_1, \dots, X_n, \dots 为一列 i.i.d. r.v., 服从分布 $P(|X| \geq x)$

$$= x^{-\alpha}, |x| \geq 1, \quad \alpha > 0 \text{ 为常数.}$$

中国科学技术大学

(1) 求 $E|X|^r$, 其中 $r > 0$.

(2) 求 $\{c_n\}$ 使得 $\frac{S_n}{c_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

(3) 是否存在 $\{b_n\} \uparrow +\infty$ 使得 $\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$?

(4) 若 $\alpha > 2$, 求证存在 $\{c_n\}$ 使 $\frac{S_n}{c_n} \xrightarrow{P} 0$ 但不 a.s. 收敛到 0.

5. (20') 设 X_1, \dots, X_n, \dots i.i.d., $P(X_i=1) = P(X_i=-1) = 1/2$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad T_a = \inf\{n: S_n = a\}, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

(1) 求证 T_a 是停时, 且 $P(T_a < +\infty) = 1$ a.s.

(2) 若 $a < 0 < b$, 定义 $T = T_a \wedge T_b$.

(i) 求证 T 是停时. (ii) 求 ET 及 $P(T_b < T_a)$.

6. (10') 设 $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} X$, X 是正态 r.v. (1) 举例说明

$X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$ 可以不成立. (2) 若 $X_n \geq Y_n \forall n$, 则 $X_n \xrightarrow{P} Y_n$.