2023秋非参数统计期末考试卷 授课教师：刘行、郭潇、陈刘军

1. (1) 给出一样本U统计量定义，并举一例. (15')

(2) 给出两样本U统计量定义，并举一例. (15')

2. 线性秩统计量 $L_{ni}=\sum_{i=1}^{n} c_{ni}\,a_n(R_i)$.

(1) $\{c_{ni}$ 和 $a_n(\cdot)$ 满足 $a_n(i)=b_n\varphi\left(\frac{i}{n+1}\right)$, $i=1,\cdots,n$; $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$.

c_{ni} 和 $\varphi(\cdot)$ 满足什么条件时，L_{ni} 具有渐近正态性. (5')

(2) Hájek representation Theorem 叙述. (5')

(3) 叙述 L_n 渐近正态性证明思路. (5')

(4) 举一例，并说明其满足(1)中条件. (5')

3. (1) 写出核密度估计 $\hat{f}_h(x)$ 的表达式(已给出 $K(\cdot)$ 的定义) (5')

(2) 证明 $\hat{f}_h(x)$ 是密度函数. (5')

(3) $n\to\infty$; $h_n\to 0$, $nh\to+\infty$. 求证 $\hat{f}_h \xrightarrow{P} f$. (10')

4. ~~定~~ $\arg\min\limits_{f} \sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))^2+\lambda\int_a^b [f''(x)]^2\,dx$.

(1) 自然三次样条函数定义. (5')

(2) $\eta_1,\cdots,\eta_N$ 是节点在 $x_1,\cdots,x_n$ 上自然三次样条函数的一组基，则节点在 $x_1,\cdots,x_n$ 上 $g(x)=\sum_{j=1}^{N}\beta_j\eta_j(x)$. 求证: $N=n$. (5')

(3) 求 $\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j''(x))^2 dx$ 的解析解. (8')

5. 单指标模型 (single ~~m~~ index model) 定义，以及可识别的条件，以及为什么这些条件可让模型可识别. (15')

6. 回顾第4题. 自然三次样条函数的估计为 $\hat{f} = (\hat{f}(x_1), \cdots, \hat{f}(x_n))'$.

(1) 写出矩阵 S 使得 $\hat{f} = Sy$, 其中 $y = (y_1, \cdots, y_n)'$. (12')

(2) 对留一交叉验证，求证

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{f}^{(-i)}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \hat{f}(x_i)}{1 - S_{ii}}\right)^2.$$

注: Sherman-Morrison 公式: $(A + uv')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}$,

其中 A 是 n 阶可逆阵, u, v 是 n 维列向量. (15')